

2 vol

$9—

PHILOSOPHIÆ NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AUR.

PERPETUIS COMMENTARIIS ILLUSTRATA,

COMMUNI STUDIO

PP. THOMÆ LE SEUR ET FRANCISCI JACQUIER,
EX GALLICANA MINIMORUM FAMILIA, MATH. PROFF.

EDITIO NOVA, SUMMA CURA RECENSITA.

VOL. I.

GLASGUÆ:
EXCUDIT GEORGIUS BROOKMAN;
IMPENSIS T. T. ET J. TEGG, LONDINI;
ET R. GRIFFIN ET SOC., GLASGUÆ.

MDCCCXXXIII.

LECTORI

S.

TYPOGRAPHUS.

Newtoni illustrissimi opus hoc in primis laudandum, cujus exemplaria sunt rarissima, et impenso pretio parantur, nunc formâ commodiore tibi in manum tradimus. Quid in hac editione exspectandum, paucis te monitum velimus.

Erat nobis in animo illam Le Seur et Jacquier, Societatis Iesu Sociorum, cum eorum commentario perpetuo, in omnibus integram edere, nisi revera ubi macula forsan hic illic furtim irrepsisset. Quidquid penes nos fuit, præstitimus. Editiones Genevæ an. 1739–42 et Coloniæ Allobrogum 1760 evulgatas, inter sese fideliter collatas, curaverimus, ut discrepantiæ in lucem eductæ omnes perlustrarentur, quà errores haud paucos foras extrusimus. Denique ut nihil deesset, quin librum singulis consummatum faceremus, studio permissus erat viri matheseos plane periti Joannis M. Wright, Academiæ Cantabrigiensis alumni, qui, schedis omnibus diligentiùs perlectis, maculas quidem cumulatim (teste ipsius autographo) quæ in editionibus prioribus latuissent, ejecit. Quâ de caussâ nobis spes maxima editionem nostram præ omnibus eligendam, tum cæteris multo emendatiorem, tum arte typographicâ longè adornatiorem. At si non in omni parte sit perfecta, in memoriam revoca, Lector benevole, quam difficile est, fortasse ultra hominis sortem, hujusmodi studiorum statum optimum, quantumvis exoptatum, attingere aut accedere.

Glasguæ: *Ipsis Nonis Jul.* 1833.

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

SERENISSIMI REGIS

GEORGII

FLORENTI,

TRACTATUM HUNC

D. D. D.

IS. NEWTON.

RERUM

MATHEMATICARUM

STUDIOSIS,

PHILOSOPHIÆ NEWTONIANÆ

INTERPRETES.

Quam recondita sint simùl et utilia Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, norunt ii omnes qui vel ipsum clarissimi Authoris nomen audierunt. Tanta est rerum dignitas atque sublimitas, tanta sermonis plusquàm geometrica brevitas, ut præstantissimum illud opus paucissimis duntaxat geometris factum videatur. Eas ob causas viris matheseos cultiorisque physices studiosis gratissimam fore putavimus, eo modo comparatam interpretationem, ut omnes tam utilis philosophiæ propositiones, corollaria omnia atquè scholia inoffenso pede possint decurrere, qui vel ipsis geometriæ et vulgaris algebræ elementis probè imbuti sunt. Quod ut præstaremus, mechanices et calculi infinitorum principia, quantùm instituti nostri ratio postulat, Newtoni vestigiis insistentes demonstravimus; perbrevem, sed theorematum fœcunditate plenum, nostris commentariis inseruimus tractatum sectionum conicarum; quæ vel minimùm, nimiâ obscuritate lectori negotium parere possent, ea omnia exponere et in bono lumine collocare conati sumus; quæ in scholiis, corollariis, propositionumque serie, prætermissâ demonstratione, pronuntiat Newtonus, præmissis vel interjectis lemmatis scrupulosè demonstrata invenient, qui in

sola doctissimi authoris verba jurare nolunt; eximia quæ in Newtoni propositionibus latent inventa, deteximus atque evolvimus; tandem cùm præstantissima illa summi viri principia non solùm intelligere, sed et illam quam sibi aperuit ad inventionem viam explorare plurimùm delectationis habeat et utilitatis, dispersa huc et illuc generalia quædam problemata lector reperiet. Hæc sunt quæ facere voluimus, quo exitu, penès benevolum lectorem esto judicium. Ex brevi illo commentariorum nostrorum prospectu satis patet quos nobis lectores postulemus; nec præstantissimis mathematicis nec imperito philosophorum vulgo nos scribere profitemur; ad hujusce operis lectionem eos duntaxat admittimus qui ea quæ jam diximus elementa in promptu habent, et tali insuper pollent mentis acie, ut longioris demonstrationis vim atque seriem studiosè persequi et animo comprehendere possint.

De nostris commentariis hæc satis dicta sint. Verùm naturalis æquitas et mathematicus candor postulant, ut nos plurimùm debere fateamur doctissimis viris, Davidi Gregorio, Varignonio, Jacobo Hermanno, Joanni Keillio, aliisque multis, qui varias Newtonianæ Philosophiæ partes luculentis scriptis illustrarunt. Eâdem æquitatis atque ingenuitatis lege a nobis religiosè factum est, ut eos omnes quorum spoliis aliquandò ditescimus, in commentariorum nostrorum decursu honoris causâ nominemus. Publicum quoque grati animi testimonium deesse nolumus clariss. D[no]. J. L. Calandrino in Academiâ Genevensi Professori in rebus mathematicis versatissimo, qui hanc nostram Newtoni Principiorum editionem adornari curavit ad normam elegantissimæ illius editionis, quæ additionibus multis locupletata Londini prodiit anno 1726. Deindè id sibi laboris assumpsit vir doctissimus non solùm ut schemata incidi, suis locis disponi, typographica menda corrigi sedulò invigilaret, sed etiam ea quæ jam laudavimus sectionum conicarum elementa composuit, et quæ a nobis non satis perspicuè videbantur exposita propriis notis aliquandò illustravit.

Hoc nostro labore fruantur rerum mathematicarum cultores.

Romæ in Regio Conventu SS[æ]. Trinitatis,
Anno 1739.

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

SERENISSIMI REGIS

GEORGII II.

FLORENTI,

COMMENTARIUM PERPETUUM IN HUNC

CELEBERR. IS. NEWTONI TRACTATUM

D. D. D.

THOMAS LE SEUR ET FRANCISCUS JACQUIER.

AUCTORIS PRÆFATIO

AD

LECTOREM.

Cum veteres Mechanicam (uti auctor est Pappus) in rerum naturalium investigatione maximi fecerint; et recentiores, missis formis substantialibus et qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggressi sint: visum est in hoc tractatu mathesim excolere, quâtenus ea ad philosophiam spectat. Mechanicam verò duplicem veteres constituerunt: rationalem, quæ per demonstrationes accuratè procedit, et practicam. Ad practicam spectant artes omnes manuales, a quibus utique mechanica nomen mutuata est. Cum autem artifices parùm accuratè operari soleant, fit ut mechanica omnis a geometriâ ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad geometriam referatur, quicquid minùs accuratum ad mechanicam. Attamen errores non sunt artis, sed artificum. Qui minùs accuratè operatur, imperfectior est mechanicus, et si quis accuratissimè operari posset, hic foret mechanicus omnium perfectissimus. Nam et linearum rectarum et circulorum descriptiones, in quibus geometria fundatur, ad mechanicam pertinent. Has lineas describere geometria non docet, sed postulat. Postulat enim ut tyro easdem accuratè describere prius didicerit, quam limen attingat geometriæ; dein quomodo per has operationes problemata solvantur, docet; rectas et circulos describere problemata sunt, sed non geometrica. Ex mechanica postulatur horum solutio, in geometria docetur solutorum usus. Ac gloriatur geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur geometria in praxi mechanica, et nihil aliud est quam mechanicæ universalis pars illa, quæ artem mensurandi accuratè proponit ac demonstrat. Cum autem artes manuales in corporibus movendis præcipuè versentur, fit ut geometria ad magnitudinem, mechanica ad motum vulgo

referatur. Quo sensu mechanica rationalis erit scientia motuum, qui ex viribus quibuscunque resultant, et virium quæ ad motus quoscunque requiruntur, accuratè proposita ac demonstrata. Pars hæc mechanicæ a veteribus in potentiis quinque ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non artibus sed philosophiæ consulentes, deque potentiis non manualibus sed naturalibus scribentes, ea maximè tractamus, quæ ad gravitatem, levitatem, vim elasticam, resistentiam fluidorum et ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: et eâ propter, hæc nostra tanquam philosophiæ principia mathematica proponimus. Omnis enim philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut a phænomenis motuum investigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phænomena reliqua. Et huc spectant propositiones generales, quas libro primo et secundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem systematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cœlestibus, per propositiones in libris prioribus mathematicè demonstratas, derivantur vires gravitatis, quibus corpora ad solem et planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per propositiones etiam mathematicas, deducuntur motus planetarum, cometarum, lunæ et maris. Utinam cætera naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particulæ per causas nondum cognitas vel in se mutuò impelluntur et secundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur et recedunt: quibus viribus ignotis, philosophi hactenus naturam frustrà tentarunt. Spero autem quod vel huic philosophandi modo, vel veriori alicui, principia hîc posita lucem aliquam præbebunt.

In his edendis, vir acutissimus et in omni literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius operam navavit, nec solum typothetarum sphalmata correxit et schemata incidi curavit, sed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonstratam a me figuram orbium cœlestium impetraverat, rogare non destitit, ut eandem cum Societate Regali communicarem, quæ deinde hortatibus et benignis suis auspiciis effecit, ut de eâdem in lucem emittendâ cogitare inciperem. At postquam motuum lunarium inæqualitates aggressus essem, deinde etiam alia tentare cœpissem, quæ ad leges et mensuras gravitatis et aliarum virium, et figuras a corporibus secundum datas quascunque leges attractis descri-

bendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in mediis resistentibus, ad vires, densitates et motus mediorum, ad orbes cometarum et similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cætera rimarer et unà in publicum darem. Quæ ad motus lunares spectant (imperfecta cum sint) in Corollariis Propositionis LXVI. simul complexus sum, ne singula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, et sigillatim demonstrare tenerer, et seriem reliquarum propositionum interrumpere. Nonnulla serò inventa locis minùs idoneis inserere malui, quam numerum propositionum et citationes mutare. Ut omnia candidè legantur et defectus in materiâ tam difficili non tam reprehendatur, quam novis lectorum conatibus investigentur, et benignè suppleantur, enixè rogo.

Dabam Cantabrigiæ, e Collegio S. Trinitatis,
Maii 8. 1686.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO
IN
EDITIONEM SECUNDAM.

In hâc secundâ Principiorum editione multa sparsim emendantur, et nonnulla adjiciuntur. In Libri Primi Sectione II. inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvi possint, facilior redditur et amplior. In Libri Secundi Sectione VII. theoria resistentiæ fluidorum accuratiùs investigatur, et novis experimentis confirmatur. In Libro Tertio theoria lunæ et præcessio æquinoctiorum ex principiis suis pleniùs deducuntur, et theoria cometarum pluribus et accuratiùs computatis orbium exemplis confirmatur.

Dabam Londini, Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

EDITORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM SECUNDAM.

NEWTONIANÆ Philosophiæ novam tibi, lector benevole, diuque desideratam editionem, plurimùm nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potissimum contineantur in hoc opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipsa te ferè docebit auctoris præfatio. Reliquum est, ut adjiciantur nonnulla de methodo hujus philosophiæ.

Qui physicam tractandam susceperunt, ad tres ferè classes revocari possunt. Extiterunt enim, qui singulis rerum speciebus qualitates specificas et occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum singulorum operationes, ignotâ quâdam ratione, pendere voluerunt. In hoc posita est summa doctrinæ scholasticæ, ab Aristotele et Peripateticis derivatæ: Affirmant utique singulos effectus ex corporum singularibus naturis oriri; at unde sint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti sint in rerum nominibus, non in ipsis rebus; sermonem quendam philosophicum censendi sunt adinvenisse, philosophiam tradidisse non sunt censendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem consequi sperarunt rejecta vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam universam homogeneam esse, omnem verò formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium simplicissimis quibusdam et intellectu facillimis affectionibus oriri. Et rectè quidem progressio instituitur a simplicioribus ad magis composita, si particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipsa tribuit natura. Verùm ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quascunque libet ignotas partium figuras et magnitudines, incertosque situs et motus; quin et fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrimè permeent, omni-

potente prædita subtilitate, motibusque occultis agitata; jam ad somnia delabuntur, neglectâ rerum constitutione verâ: quæ sanè frustra petenda est ex fallacibus conjecturis, cùm vix etiam per certissimas observationes investigari possit. Qui speculationum suarum fundamentum desumunt ab hypothesibus; etiamsi deinde secundum leges mechanicas accuratissimè procedant; fabulam quidem elegantem fortè et venustam, fabulam tamen concinnare dicendi sunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philosophiam scilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex simplicissimis quibus possunt principiis rerum omnium causas derivandas esse volunt: nihil autem principii loco assumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheses non comminiscuntur, neque in physicam recipiunt, nisi ut quæstiones de quarum veritate disputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analyticâ et syntheticâ. Naturæ vires legesque virium simpliciores ex selectis quibusdam phænomenis per analysin deducunt, ex quibus deinde per synthesin reliquorum constitutionem tradunt. Hæc illa est philosophandi ratio longè optima, quam præ cæteris meritò amplectendam censuit celeberrimus auctor noster. Hanc solam utique dignam judicavit, in quâ excolendâ atque adornandâ operam suam collocaret. Hujus igitur illustrissimum dedit exemplum, mundani nempe systematis explicationem e theoriâ gravitatis felicissimè deductam. Gravitatis virtutem universis corporibus inesse, suspicati sunt vel finxerunt alii: primus ille et solus ex apparentiis demonstrare potuit, et speculationibus egregiis firmissimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibusdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægrè assentiri potuisse, et certis incerta identidem prætulisse. Horum famam vellicare non est animus: tibi potius, benevole lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipse judicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti sumatúr exordium a simplicissimis et proximis; dispiciamus paulisper qualis sit in terrestribus natura gravitatis, ut deinde tutiùs progrediamur ubi ad corpora cœlestia, longissimè a sedibus nostris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philosophos, corpora universa circumterrestria gravitare in terram. Nulla dari corpora verè levia, jamdudum confirmavit experientia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non est vera levitas, sed apparens solummodo; et oritur a præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porrò, ut corpora universa gravitent in terram, ita terra vicissim in

corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem esse mutuam et utrinque æqualem, sic ostenditur. Distinguatur terræ totius moles in binas quascunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam si pondera partium non essent in se mutuò æqualia; cederet pondus minus majori, et partes conjunctæ pergerent rectâ moveri ad infinitum, versus plagam in quam tendit pondus majus: omninò contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio esse constituta: hoc est, gravitatis actionem esse mutuam et utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter a centro terræ distantium, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, e quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent esse proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam verò corpora universa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo Boyliano temporibus æqualibus æqualia spatia cadendo describunt, sublatâ scilicet aëris resistentiâ: accuratiùs autem comprobatur per experimenta pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus distantiis, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cùm corpora in terram et terra vicissim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, seu vis quâ corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejusdem in terram. Hoc autem pondus erit ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis quâ corpus unumquodque terram attrahit, sive corporis vis absoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo et componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: siquidem auctâ vel diminutâ mole materiæ, ostensum est, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus conflari censenda erit; atque adeò corpora omnia terrestria se mutuò trahere oportet viribus absolutis, quæ sint in ratione materiæ trahentis. Hæc est natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis sit in cœlis.

Corpus omne perseverare in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare; naturæ lex est ab omnibus recepta philosophis. Inde verò sequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque adeò de lineis rectis orbitas suas tangentibus jugiter abeunt, vi aliquâ perpetuò agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolventibus necessariò aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indesinenter a tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum est, quod mathematicis rationibus colligitur et certissimè demonstratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ, quæque radio ducto ad punctum vel quiescens vel utcumque motum describunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri a viribus quæ ad idem punctum tendent. Cùm igitur in confesso sit apud astronomos, planetas primarios circùm solem, secundarios verò circum suos primarios, areas describere temporibus proportionales; consequens est ut vis illa, quâ perpetuò detorquentur a tangentibus rectilineis et in orbitis curvilineis revolvi coguntur, versus corpora dirigatur quæ sita sunt in orbitarum centris. Hæc itaque vis non ineptè vocari potest, respectu quidem corporis revolventis, centripeta; respectu autem corporis centralis, attractiva; a quâcunque demùm causâ oriri fingatur.

Quin et hæc quoque concedenda sunt, et mathematicè demonstrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, et quadratura temporum periodicorum sint ut cubi distantiarum a centro communi; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Vel, si corpora revolvantur in orbitis quæ sunt circulis finitimæ, et quiescant orbitarum apsides; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Obtinere casum alterutrum in planetis universis consentiunt astronomi. Itaque vires centripetæ planetarum omnium sunt reciprocè ut quadrata distantiarum ab orbium centris. Si quis objiciat planetarum, et lunæ præsertim, apsides non penitùs quiescere; sed motu quodam lento ferri in consequentia: responderi potest, etiamsi concedamus hunc motum tardissimum exinde profectum esse quod vis centripetæ proportio aberret aliquantùm a duplicata; aberrationem illam per computum mathematicum inveniri posse et planè insensibilem esse. Ipsa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maximè turbari debet, paululum quidem duplicatam superabit; ad hanc vero sexaginta ferè vicibus propiùs accedet quàm ad triplicatam. Sed varior erit responsio, si dicamus hanc apsidum progressionem, non ex aberratione a duplicatâ proportione, sed ex aliâ prorsus diversâ causâ oriri, quemadmodum egregiè commonstratur in hac philosophia. Restat ergo ut vires centripetæ, quibus planetæ primarii tendunt versùs solem et secundarii versùs primarios suos, sint accuratè ut quadrata distantiarum reciprocè.

Ex iis quæ hactenus dicta sunt, constat planetas in orbitis suis retineri per vim aliquam in ipsos perpetuò agentem: constat vim illam dirigi semper versùs orbitarum centra: constat hujus efficaciam augeri in acces-

su ad centrum, diminui in recessu ab eodem: et augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum distantiæ, diminui in eadem proportione quâ distantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione instituta inter planetarum vires centripetas et vim gravitatis, annon ejusdem fortè sint generis. Ejusdem verò generis erunt, si deprehendantur hinc et inde leges eædem, eædemque affectiones. Primò itaque lunæ, quæ nobis proxima est, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ a corporibus e quiete demissis dato tempore sub ipso motus initio describuntur, ubi a viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus: hoc utique consequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbitâ suâ revolventis, ad vim gravitatis in superficie terræ, ut spatium quod tempore quàm minimo describeret luna descendendo per vim centripetam versùs terram, si circulari omni motu privari fingeretur ad spatium quod eodem tempore quàm minimo describit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis suæ cadendo. Horum spatiorum prius æquale est arcûs a luna per idem tempus descripti sinui verso, quippe qui lunæ translationem de tangente, factam a vi centripeta, metitur; atque adeò computari potest ex datis tùm lunæ tempore periodico, tùm distantia ejus a centro terræ. Spatium posterius invenitur per experimenta pendulorum, quemadmodùm docuit Hugenius. Inito itaque calculo, spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim gravitatis in superficie terræ, erit ut quadratum semidiametri terræ ad orbitæ semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superiùs ostenduntur, vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim lunæ centripetam propè terræ superficiem. Vis itaque centripeta propè terræ superficiem æqualis est vi gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una atque eadem, si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplò celeriùs in terram caderent quàm ex vi solâ gravitatis. Constat igitur vim illam centripetam, quâ luna perpetuò de tangente vel trahitur vel impellitur et in orbita retinetur, ipsam esse vim gravitatis terrestris ad lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est ut ad ingentes distantias illa sese virtus extendat, cùm nullam ejus sensibilem imminutionem, vel in altissimis montium cacuminibus, observare licet. Gravitat itaque luna in terram: quin et actione mutua, terra vicissim in lunam æqualiter gravitat; id quod abundè quidem confirmatur in hâc philosophiâ, ubi agitur de maris æstu et æquinoctiorum præcessione, ab actione tum lunæ tum solis in terram oriundus. Hinc et illud

tandem edocemur, quâ nimirùm lege vis gravitatis decrescat in majoribus a tellure distantiis. Nam cùm gravitas non diversa sit a vi centripeta lunari, hæc verò sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ; diminuetur et gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa solem et secundariorum circa jovem et saturnum sunt phænomena generis ejusdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porrò demonstratum est vires centripetas primariorum dirigi versùs centrum solis, secundariorum versùs centra jovis et saturni, quemadmodum lunæ vis centripeta versùs terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a centris, quemadmodum vis lunæ est ut quadratum distantiæ a terra: concludendum erit eandem esse naturam universis. Itaque ut luna gravitat in terram, et terra vicissim in lunam; sic etiam gravitabunt omnes secundarii in primarios suos, et primarii vicissim in secundarios; sic et omnes primarii in solem, et sol vicissim in primarios.

Igitur sol in planetas universos gravitat et universi in solem. Nam secundarii dùm primarios suos comitantur, revolvuntur intereà circùm solem unà cum primariis. Eodem itaque argumento, utriusque generis planetæ gravitant in solem, et sol in ipsos. Secundarios verò planetas in solem gravitare abundè insuper constat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum accuratissimam theoriam, admiranda sagacitate patefactam, in tertio hujus operis libro expositam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoversum propagari ad ingentes usque distantias, et sese diffundere ad singulas circumjecti spatii partes, apertissimè colligi potest ex motu cometarum; qui ab immensis intervallis profecti feruntur in viciniam solis, et nonnunquam adeò ad ipsum proximè accedunt ut globum ejus, in periheliis suis versantes, tantùm non contingere videantur. Horum theoriam ab astronomis antehac frustrà quæsitam, nostro tandem sæculo faciliter inventam et per observationes certissimè demonstratam, præstantissimo nostro auctori debemus. Patet igitur cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moveri, et radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce verò phænomenis manifestum est et mathematicè comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis suis, respicere solem et esse reciprocè ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque cometæ in solem: atque adeò solis vis attractiva non tantùm ad corpora planetarum in datis distantiis et in eodem ferè plano collocata,

sed etiam ad cometas in diversissimis cœlorum regionibus et in diversissimis distantiis positos pertingit. Hæc igitur est natura corporum gravitantium, ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantia. Inde verò sequitur, planetas et cometas universos se mutuò trahere, et in se mutuò graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione jovis et saturni, astronomis non incognita, et ab actionibus horum planetarum in se invicem oriunda; quin et ex motu illo lentissimo apsidum, qui suprà memoratus est, quique a causâ consimili proficiscitur.

Eo demùm pervenimus ut dicendum sit, et terram et solem et corpora omnia cœlestia, quæ solem comitantur, se mutuò attrahere. Singulorum ergo particulæ, quæque minimæ, vires suas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum suprà de terrestribus ostensum est. In diversis autem distantiis, erunt et harum vires in duplicata ratione distantiarum reciprocè: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere globos eadem lege trahentes, mathematicè demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur axiomati, quod a nullis non recipitur philosophis; effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eædem sunt, easdem esse causas et easdem esse proprietates quæ nondùm cognoscuntur. Quis enim dubitat, si gravitas sit causa descensûs lapidis in Europa, quin eadem sit causa descensus in America? Si gravitas mutua fuerit inter lapidem et terram in Europa; quis negabit mutuam esse in America? Si vis attractiva lapidis et terræ componatur, in Europa, ex viribus attractivis partium; quis negabit similem esse compositionem in America? Si attractio terræ ad omnia corporum genera et ad omnes distantias propagetur in Europa; quidni pariter propagari dicamus in America? In hac regula fundatur omnis philosophia: quippe quâ sublatâ nihil affirmare possimus de universis. Constitutio rerum singularum innotescit per observationes et experimenta: inde verò non nisi per hanc regulam de rerum universarum naturâ judicamus.

Jam cùm gravia sint omnia corpora, quæ apud terram vel in cœlis reperiuntur, de quibus experimenta vel observationes instituere licet; omninò dicendum erit, gravitatem corporibus universis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non sint extensa, mobilia et impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non sint gravia. Corporum extensio, mobilitas, et impenetrabilitas non nisi per experimenta, innotescunt; eodem planè modo gravitas innotescit. Corpora omnia de quibus observationes habemus, extensa sunt et mobilia et impenetrabilia:

et inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, extensa esse et mobilia et impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt gravia, de quibus observationes habemus: et inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, gravia esse. Si quis dicat corpora stellarum inerrantium non esse gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum est observata; eodem argumento dicere licebit neque extensa esse, nec mobilia, nec impenetrabilia, cùm hæ fixarum affectiones nondùm sint observatæ. Quid opus est verbis? inter primarias qualitates corporum universorum vel gravitas habebit locum; vel extensio, mobilitas, et impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel rectè explicabitur per corporum gravitatem, vel non rectè explicabitur per corporum extensionem, mobilitatem, et impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare conclusionem, et de occultis qualitatibus nescio quid mussitare. Gravitatem scilicet occultum esse quid, perpetuò argutari solent; occultas verò causas procul esse ablegandas a philosophiâ. His autem facilè respondetur; occultas esse causas, non illas quidem quarum existentia per observationes clarissimè demonstratur, sed has solùm quarum occulta est et ficta existentia nondùm verò comprobata. Gravitas ergo non erit occulta causa motuum cœlestium; siquidem ex phænomenis ostensum est, hanc virtutem reverà existere. Hi potius ad occultas confugiunt causas, qui nescio quos vortices, materiæ cujusdam prorsùs fictitiæ et sensibus omninò ignotæ, motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem gravitas occulta causa dicetur, eoque nomine rejicietur e philosophiâ, quod causa ipsius gravitatis occulta est et nondum inventa? Qui sic statuunt, videant nequid statuant absurdi, unde totius tandem philosophiæ fundamenta convellantur. Etenim causæ continuo nexu procedere solent a compositis ad simpliciora: ubi ad causam simplicissimam perveneris, jam non licebit ulteriùs progredi. Causæ igitur simplicissimæ nulla dari potest mechanica explicatio: si daretur enim, causa nondum esset simplicissima. Has tu proinde causas simplicissimas appellabis occultas, et exulare jubebis? Simul verò exulabunt et ab his proximè pendentes et quæ ab illis porrò pendent, usque dum a causis omnibus vacua fuerit et probè purgata philosophia.

Sunt qui gravitatem præter naturam esse dicunt, et miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt, cùm in physicâ præternaturales causæ locum non habeant. Huic ineptæ prorsus objectioni

diluendæ, quæ et ipsa philosophiam subruit universam, vix operæ pretium est immorari. Vel enim gravitatem corporibus omnibus inditam esse negabunt: quod tamen dici non potest: vel eo nomine præter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque ideò ex causis mechanicis originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ quoniam sunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon et hæ omnes sint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint verò qualis sit deinde futura philosophia.

Nonnulli sunt quibus hæc tota physica cœlestis vel ideò minùs placet, quòd cum Cartesii dogmatibus pugnare et vix conciliari posse videatur. His suâ licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam sibi concedi postulant. Newtonianam itaque philosophiam, quæ nobis verior habetur, retinere et amplecti licebit, et causas sequi per phænomena comprobatas, potiùs quam fictas et nondum comprobatas. Ad veram philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis verè existentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit summus opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset. Rationi enim consonum est, ut a pluribus causis, ab invicem nonnihil diversis, idem possit effectus proficisci: hæc autem vera erit causa, ex qua verè atque actu proficiscitur; reliquæ locum non habent in philosophiâ verâ. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenso pondere vel ab intus concluso elatere oriri potest. Quod si oblatum horologium reverà sit instructum pondere; ridebitur qui finget elaterem, et ex hypothesi sic præproperè confictâ motum indicis explicare suscipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitiùs perscrutari, ut ita motûs propositi principium verum exploratum habere posset. Idem vel non absimile feretur judicium de philosophis illis, qui materiâ quâdam subtilissimâ cœlos esse repletos, hanc autem in vortices indesinenter agi voluerunt. Nam a phænomenis vel accuratissimè satisfacere possent ex hypothesibus suis; veram tamen philosophiam tradidisse, et veras causas motuum cœlestium invenisse nondum dicendi sunt; nisi vel has reverà existere, vel saltem alias non existere demonstraverint. Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum attractionem habere verum locum in rerum naturâ; quinetiam ostensum fuerit, quâ ratione motus omnes cœlestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit et meritò deridenda objectio, si quis dixerit eosdem motus per vortices explicari debere, etiamsi id fieri posse

vel maximè concesserimus. Non autem concedimus: nequeunt enim illo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore nostro abundè quidem et clarissimis rationibus evincitur; ut somnis plùs æquò indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento resarciendo, novisque porrò commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum et cometarum circa solem deferantur a vorticibus; oportet corpora delata et vorticum partes proximè ambientes eadem velocitate eademque cursûs determinatione moveri, et eandem habere densitatem vel eandem vim inertiæ pro mole materiæ. Constat verò planetas et cometas, dùm versantur in iisdem regionibus cœlorum, velocitatibus variis variâque cursûs determinatione moveri. Necessariò itaque sequitur, ut fluidi cœlestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias a sole, revolvantur eodem tempore in plagas diversas cum diversis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione et velocitate, ut transire possint planetæ; aliâ, ut transire possint cometæ. Quod cùm explicari nequeat; vel fatendum erit, universa corpora cœlestia non deferri a materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque vortice, sed a pluribus qui ab invicem diversi sint, idemque spatium soli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem spatio contineri, et sese mutuò penetrare motibusque diversis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt summè regulares, et peraguntur in sectionibus conicis nunc valdè eccentricis, nunc ad circulorum proximè formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri possit, ut iidem integri conserventur nec ab actionibus materiæ occursantis per tot sæcula quicquam perturbentur. Sanè si motus hi fictitii sunt magis compositi et difficiliùs explicantur, quàm veri illi motus planetarum et cometarum; frustrà mihi videntur in philosophiam recipi: omnis enim causa debet esse effectu suo simplicior. Concessa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes et cometas circumcingi atmosphæris, ad instar telluris nostræ; quæ quidem hypothesis rationi magis consentanea videbitur quam hypothesis vorticum. Affirmaverit deinde has atmosphæras, ex naturâ suâ, circa solem moveri et sectiones conicas describere; qui sanè motus multò faciliùs concipi potest, quàm consimilis motus vorticum se invicem permeantium. Denique planetas ipsos et cometas circa solem deferri ab atmosphæris suis credendum esse statuat, et ob repertas motuum cœlestium causas triumphum agat. Quisquis au-

tem hanc fabulam rejiciendam esse putet, idem et alteram fabulam rejiciet: nam ovum non est ovo similius, quàm hypothesis atmosphærarum hypothesi vorticum.

Docuit Galilæus, lapidis projecti et in parabola moti deflectionem a cursu rectilineo oriri a gravitate lapidis in terram, ab occulta scilicet qualitate. Fieri tamen potest ut alius aliquis, nasi acùtioris philosophus, causam aliam comminiscatur. Finget igitur ille materiam quandam subtilem, quæ nec visu, nec tactu, neque ullo sensu percipitur, versari in regionibus quæ proximè contingunt telluris superficiem. Hanc autem materiam, in diversas plagas, variis et plerumque contrariis motibus ferri, et lineas parabolicas describere contendet. Deinde vero lapidis deflectionem pulchrè sic expediet, et vulgi plausum merebitur. Lapis, inquit, in fluido illo subtili natat, et cursui ejus obsequendo, non potest non eandem unà semitam describere. Fluidum verò movetur in lineis parabolicis; ergo lapidem in parabola moveri necesse est. Quis nunc non mirabitur acutissimum hujusce philosophi ingenium, ex causis mechanicis, materiâ scilicet et motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclarè deducentis? Quis verò non subsannabit bonum illum Galilæum, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, e philosophia feliciter exclusas, denuò revocare sustinuerit? Sed pudet nugis diutiùs immorari.

Summa rei huc tandem redit: cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summè regulares, et easdem leges cum planetarum motibus observant. Moventur in orbibus conicis, hi orbes sunt valdè admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cœlorum partes, et planetarum regiones liberrimè pertranseunt, et sæpè contrà signorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certissimè confirmantur ex observationibus astronomicis: et per vortices nequeunt explicari. Imò, ne quidem cum vorticibus planetarum consistere possunt. Cometarum motibus omninò locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus e cœlis amoveatur.

Si enim planetæ circùm solem a vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque planetam, ejusdem densitatis erunt ac planeta; uti suprà dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est orbis magni perimetro, parem habebit ac tellus densitatem: quæ verò jacet intrà orbem magnum atque orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio vorticis permanere possit, debent partes minùs densæ centrum occupare, magis densæ longiùs a centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica sint in ratione

sesquiplicata distantiarum a sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem servare. Inde verò sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant a centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minùs densæ fuerint, necesse est ut cedent vi majori, quâ partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendent minus densæ, et locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut fluidum, cujus major est densitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: et ratione non absimili omninò dicendum est, densiores vorticis partes majore vi centrifugâ petere supremum locum. Tota igitur illa et multò maxima pars vorticis, quæ jacet extrà telluris orbem, densitatem habebit atque adeò vim inertiæ pro mole materiæ, quæ non minor erit quàm densitas et vis inertiæ telluris: inde verò cometis trajectis orietur ingens resistentia, et valde admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitùs sistere atque absorbere posse meritò videatur. Constat autem ex motu cometarum prorsùs regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimùm sentiri potest; atque adeò neutiquam in materiam ullam incursare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis inertiæ. Nam resistentia mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel a defectu lubricitatis. Quæ oritur a defectu lubricitatis, admodum exigua est; et sanè vix observari potest in fluidis vulgò notis, nisi valdè tenacia fuerint ad instar olei et mellis. Resistentia quæ sentitur in aëre, aqua, hydrargyro, et hujusmodi fluidis non tenacibus ferè tota est prioris generis; et minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente fluidi densitate vel vi inertiæ, cui semper proportionalis est hæc resistentia; quemadmodum clarissimè demonstratum est ab auctore nostro in peregregia resistentiarum theoriâ, quæ paulò nunc accuratiùs exponitur, hac secundâ vice, et per experimenta corporum cadentium pleniùs confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum fluido ambienti paulatim communicant, et communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut fluidi densitas; ergo retardatio seu resistentia erit ut eadem fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi a fluido ad partes corporis posticas recurrente re-

stituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio fluidi in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in fluidum ad partes anticas, hoc est, nisi velocitas relativa quâ fluidum irruit in corpus a tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in fluidum, id est, nisi velocitas absoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas absoluta fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest fluidorum resistentia, quæ oritur ab eorundem densitate et vi inertiæ. Itaque concludendum erit; fluidi cœlestis nullam esse vim inertiæ, cùm nulla sit vis resistendi: nullam esse vim quâ motus communicetur, cùm nulla sit vis inertiæ: nullam esse vim quâ mutatio quælibet vel corporibus singulis vel pluribus inducatur, cùm nulla sit vis quâ motus communicetur; nullam esse omninò efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypothesin, quæ fundamento planè destituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimùm quidem inservit, ineptissimam vocare liceat et philosopho prorsùs indignam. Qui cœlos materiâ fluidâ repletos esse volunt, hanc verò non inertem esse statuunt; hi verbis tollunt vacuum, re ponunt. Nam cum hujusmodi materia fluida ratione nullâ secerni possit ab inani spatio; disputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod si aliqui sint adeò usque dediti materiæ, ut spatium a corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quo tandem oporteat illo pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate Dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus naturæ subsidium præsens haberi posset ab æthere subtilissimo cuncta permeante et implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex cometarum phænomenis, nullam esse hujus ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam esse, sed ex necessitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces sordidas gregis impurissimi. Hi sunt qui somniant fato universa regi, non providentia; materiam ex necessitate suâ semper et ubique extitisse, infinitam esse et æternam. Quibus positis; erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omninò pugnat. Erit etiam immota: nam si necessariò moveatur in plagam aliquam determinatam; cum determinata aliqua velocitate; pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversa velocitate, in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet

igitur immotam esse. Neutiquam profectò potuit oriri mundus, pulcherrima formarum et motuum varietate distinctus, nisi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis et gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges: in quibus multa sanè sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed observando atque experiendo addiscere debemus. Qui veræ physicæ principia legesque rerum, sola mentis vi et interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet vel statuere mundum ex necessitate fuisse, legesque propositas ex eadem necessitate sequi; vel si per voluntatem Dei constitutus sit ordo naturæ, se tamen, homuncionem misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis et vera philosophia fundatur in phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos et reluctantes ad huiusmodi principia deducunt, in quibus clarissimè cernuntur consilium optimum et dominium summum sapientissimi et potentissimi entis; non erunt hæc ideò non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minus grata sunt futura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ displicent: verum nomina malitiosè indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda; nisi illud fateri tandem velint, utique debere philosophiam in atheismo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos et æquos judices præstantissima philosophandi ratio, quæ fundatur in experimentis et observationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc opere præclaro illustrissimi nostri auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, et ad ea porrò pertingentis ad quæ nec spes erat humanam mentem assurgere potuisse, meritò admirantur et suspiciunt quicunque paulò profundius in hisce rebus versati sunt. Claustris ergò reseratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit et penitiùs perspectandam dedit; ut nec ipse, si nunc revivisceret, rex Alphonsus vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea desideraret. Itaque naturæ majestatem propiùs jam licet intueri, et dulcissima contemplatione frui, conditorem verò ac dominum universorum impensiùs colere et venerari, qui fructus est philosophiæ multò uberrimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis et sapientissimis rerum structuris non statim videat Fabricatoris omnipotentis infinitam sapientiam et bonitatem: insanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium Newtoni Opus adversus atheorum impetus munitissimum præsidium: neque enim alicundè feliciùs, quàm ex hac pharetra, contra impiam catervam tela deprompseris. Hoc sensit pridem, et in pereruditis concionibus Anglicè Latinèque editis, primus egregiè demonstravit vir in omni literarum genere præclarus idemque bonarum artium fautor eximius Richardus Bentleius, seculi sui et Academiæ nostræ magnum ornamentum, Collegii nostri S. Trinitatis magister dignissimus et integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri debeo: huic et tuas quæ debentur gratias, lector benevole, non denegabis. Is enim, cum a longo tempore celeberrimi auctoris amicitiâ intimâ frueretur, (qua etiam apud posteros censeri non minoris æstimat, quàm propriis scriptis quæ literato orbi in deliciis sunt inclarescere) amici simul famæ et scientiarum incremento consuluit. Itaque cum exemplaria prioris editionis rarissima admodum et immani pretio coëmenda superessent; suasit ille crebris efflagitationibus, et tantum non objurgando perpulit denique virum præstantissimum, nec modestiâ minùs quàm eruditione summâ insignem, ut novam hanc operis editionem, per omnia elimatam denuò et egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus et auspiciis prodire pateretur: mihi verò, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quam posset emendatè id fieri curarem.

Cantabrigiæ, Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES,
Collegii S. Trinitatis Socius, Astronomiæ et Philosophiæ Experimentalis Professor Plumianus.

AUCTORIS PRÆFATIO

IN

EDITIONEM TERTIAM.

In editione hacce tertiâ, quam Henricus Pemberton, M. D. vir harum rerum peritissimus curavit, nonnulla in Libro secundo de resistentia mediorum paulò fusiùs explicantur quàm anteà, et adduntur experimenta nova de resistentia gravium quæ cadunt in aëre. In Libro tertio argumentum quo Lunam in orbe suo per gravitatem retineri probatur, paulò fusiùs exponitur: et novæ adduntur observationes de proportione diametrorum Jovis ad invicem a D. Poundio factæ. Adduntur etiam observationes aliquot cometæ illius qui anno 1680. apparuit, a D. Kirk mense Novembri in Germania habitæ, quæ nuper ad manus nostras venerunt, et quarum ope constet quàm propè orbes parabolici motibus cometarum respondent. Et orbita cometæ illius, computante Halleio, paulò accuratiùs determinatur quàm anteà, idque in ellipsi. Et ostenditur cometam in hac orbita elliptica, per novem cœlorum signa, non minùs accuratè cursum peregisse, quàm solent planetæ in orbitis ellipticis per astronomiam definitis moveri. Orbis etiam cometæ qui anno 1723. apparuit, a D. Bradleio Astronomiæ apud Oxonienses Professore computatus adjicitur.

Dabam Londini, Jan. 12. 1725-6.

IS. NEWTON.

IN

VIRI PRÆSTANTISSIMI

ISAACI NEWTONI

OPUS HOCCE MATHEMATICO-PHYSICUM,

SECULI GENTISQUE NOSTRÆ

DECUS EGREGIUM.

En tibi norma poli, et divæ libramina molis,
Computus en Jovis; et quas, dum primordia rerum
Pangeret, omniparens leges violare Creator
Noluit, atque operum quæ fundamenta locârit.
Intima panduntur victi penetralia cœli,
Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbes.
Sol solio residens ad se jubet omnia prono
Tendere descensu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vastum per inane moveri;
Sed rapit immotis, se centro, singula gyris.
Jam patet horrificis quæ sit via flexa cometis,
Jam non miramur barbati phænomena astri.
Discimus hinc tandem quâ causâ argentea Phœbe
Passibus haud æquis graditur; cur subdita nulli
Hactenus astronomo numerorum fræna recuset:
Cur remeant nodi, curque auges progrediuntur.
Discimus et quantis refluum vaga Cynthia pontum
Viribus impellit, fessis dum fluctibus ulvam
Deserit, ac nautis suspectas nudat arenas;
Alternis vicibus suprema ad littora pulsans.

Quæ toties animos veterum torsere sophorum,
Quæque scholas frustra rauco certamine vexant,
Obvia conspicimus, nubem pellente mathesi.
Jam dubios nullâ caligine prægravat error,
Queis superûm penetrare domos atque ardua cœli
Scandere sublimis genii concessit acumen.
 Surgite, mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cœligenæ vires dignoscite mentis,
A pecudum vitâ longè latéque remotæ.
Qui scriptis jussit tabulis compescere cædes,
Furta et adulteria, et perjuræ crimina fraudis;
Quive vagis populis circundare mœnibus urbes
Auctor erat; Cererisve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen pressit ab uvâ;
Vel qui Niliacâ monstravit arundine pictos
Consociare sonos, oculisque exponere voces;
Humanam sortem minus extulit: utpote pauca
Respiciens miseræ tantum solamina vitæ.
Jam vero superis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita cæcæ
Claustra patent Terræ, rerumque immobilis ordo,
Et quæ præteriti latuerunt secula mundi.
 Talia monstrantem mecum celebrate camœnis,
Vos O cœlicolum gaudentes nectare vesci,
Newtonum clausi reserantem scrinia veri,
Newtonum Musis charum, cui pectore puro
Phœbus adest, totoque incessit numine mentem:
Nec fas est propius mortali attingere divos.

EDM. HALLEY.

INDEX CAPITUM

VOLUMINIS PRIMI.

INDEX SECTIONUM

DE MOTU CORPORUM.

ADMONITIO.

In initio singularum notarum quibus numerus præfixus non fuit, ejus loco asteriscus * depictus est: a pagina verò 525 alter asteriscus subinde reperietur, cujus alius non est usus quàm ut distinguat ea quæ inserta sunt ab Editore (eo jure sibi ab Autoribus Commentarii concesso); idem etiam designat signum (†) quibusdam notis præfixum, ne scilicet turbaretur ordo litterarum ab Autoribus ipsis adhibitus.

PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I. ([a])

Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate et Magnitudine conjunctim.

AER, densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato sextuplus. Idem intellige de Nive et Pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omni-

Licet primæ definitiones NEWTONIANÆ *vix aliquam postulare videantur explicationem; in ipso tamen operis nostri limine, nonnulla levioris momenti præmittenda judicamus, quæ ad majora viam sternunt. Prima quæ in posterùm sæpiùs recurrent Mechanices principia interserere non abs re erit, tùm ut Lectorum labori parcamus, tùm ut magis continua servetur nostrarum demonstrationum series.*

([a]) 1. Materia est substantia trinâ dimensione prædita, solida seu impenetrabilis, mobilis, divisibilis. Spatium purum est illa immensa, penetrabilis, sui ubique similis, immobilis extensio, in quâ corpora omnia liberrimè moveri intelligimus. In corpore dato materiæ quantitatem seu massam, a corporis magnitudine, aut volumine seu mole distingui oportet. Materiæ quantitas est aggregatum, seu summa omnium materiæ particularum quibus compositum est corpus. Volumen, seu Magnitudo, est tota trina dimensio sub exteriori corporis superficie contenta. Porrò inter solidas seu impenetrabiles corporis particulas sive elementa, plura esse possunt disseminata foramina seu pori, vel omni materiâ vacui, vel quos aliena materia liberè pervadat; sic aër subtilior spongiæ poros permeat, et ad spongiæ materiam non pertinet. Si nulla sint inter solidas corporis partes admixta foramina, Massa et volumen non differunt; at si poris pertusum sit corpus, Massam volumen superat.

2. Densitas est ratio massæ corporis ad illius volumen; adeò ut sub æqualibus voluminibus, densitates sint in ratione directâ massarum; et eâdem seu æquali manente in diversis corporibus massâ, densitates sint in ratione voluminum reciprocâ. Itaque si densitas dicatur D; massa M, volumen V; erit $D = M : V$; seu densitas exponi potest per massam ad volumen applicatam, sive, quod idem est, densitas erit ut massa per volumen divisa. Si itaque D et $M : V$, per V multiplicentur, erit $DV = M$, seu massa aut quantitas materiæ est ut densitas in volumen ducta; Massa igitur exponi potest per factum ex densitate in volumen. Quare si D V et M, per D dividantur, erit $V = M : D$, seu volumen est ut massa ad densitatem applicata,

um, quæ per causas quascunque diversimodè condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium liberè pervadentis, hîc nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem sub nomine Corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque Pondus. Nam ([b]) Ponderi proportionalem esse reperi per experimenta Pendulorum accuratissimè instituta, uti posthac docebitur.

DEFINITIO II. ([c])

Quantitas Motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate et Quantitate Materiæ conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; ideoque in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplus est, et duplâ cum velocitate quadruplus.

sive volumen est in ratione compositâ ex directâ ratione massæ et inversâ densitatis. Si densitates fuerint æquales, seu si $m : v = M : V$, patet massas esse inter se ut volumina directè. His positis facilè intelligitur massam aëris, densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato fieri quadruplam, nam ob duplicatam densitatem in eodem spatio dupla est massa; ergò duplicato etiam spatio massa rursus duplicatur et fit quadrupla.

([b]) 3. Massam esse ponderi proportionalem, ob frequentissimum hujusce veritatis usum, hîc breviter ostendimus. Gravia omnia, ut notissimis constat experimentis, per lineas ad terræ superficiem perpendiculares ac proindè ad sensum parallelas descendunt, et in tubis aëre vacuis plumbum levissimaque pluma eâdem celeritate cadunt, seu æqualia spatia, æqualibus temporibus cadendo percurrunt. Nec successu caret experimentum, etiamsi coarctatis ac diductis poris vel superficiebus, corporis figura mutetur; dummodò eadem remaneat massa, idem semper servatur pondus; ex quo sequitur gravitatem non solùm exterioribus corporis partibus, sed et interioribus æque inesse; alioquin ejusdem corporis sub diversis superficiebus, idem non remaneret pondus, nec eadem foret sub diversis figuris celeritas; mutatâ enim superficie, partes quæ antè interiores erant, exteriores fiunt et vice versâ; æqualia igitur massæ elementa æquali urgentur vi gravitatis, seu æqualis sunt ponderis; crescit ergò totius massæ pondus ut elementorum æqualium numerus, seu crescit pondus ut massa, sive massa est ponderi proportionalis.

([c]) 4. Locus corporis est pars spatii, quam corpus occupat. Motus est continua loci mutatio. Tria in motu consideranda sunt, corpus quod movetur seu mobile, spatium quod percurritur, et tempus quo percurritur. Spatium percursum est linea quam mobile instar puncti consideratum describere intelligitur. Directio motûs est linea recta quam mobile describit aut describere nititur. Motus conspirantes sunt quorum directiones congruunt, aut saltem sunt parallelæ et ad easdem partes tendunt. Motus contrarii seu directè oppositi dicuntur quorum directiones congruunt quidem, aut saltem sunt parallelæ, sed in oppositas partes vergunt. Motus æquabilis seu uniformis est, quo mobile æqualia spatia æqualibus temporibus percurrit. Motus acceleratus, quo mobile majora continuò spatia æqualibus temporibus describit. Motus retardatus quo mobile per minora continuò spatia æqualibus temporibus fertur.

5. Celeritas seu velocitas, est ea corporis moti affectio quâ aptum redditur, datum spatium dato tempore æquabiliter percurrendi. Est igitur celeritatis mensura in motu æquabili quærenda, seu, ut habeatur quantitas velocitati proportionalis, quærendum est spatium quod corpus dato tempore percurreret, si illius motus constans atque æquabilis permaneret. Porrò manifestum est celeritatem esse duplam, triplam, si temporibus æqualibus duplum, vel triplum percurratur spatium; et contrà, celeritatem esse subduplam, subtriplam, si æqualia spatia, duplo, triplo tempore percurrantur; ergò manentibus temporibus, celeritates sunt ut spatia; et manentibus spatiis, celeritates sunt inversè ut tempora, quare variantibus temporibus atque spatiis, celeritates semper erunt in ratione compositâ ex directâ spatiorum et reciprocâ temporum; seu si celeritas dicatur C, spatium S, tempus T; erit C ut $S : T$, sive $C = S : T$, seu celeritas exponi potest per spatium ad tempus applicatum, et multiplicando utrinque per T, erit $C T = S$, seu spatium est ut celeritas in tempus ducta, et dividendo utrinque per C, erit $T = S : C$, seu tempus est ut spatium ad celeritatem applicatum. Si duorum mobilium celeritates C, c, seu $S : T$; $s : \text{t}$, fuerint æquales, id est $S : T = s : \text{t}$, erit $S : s = T : \text{t}$, seu spatia sunt ut tempora.

6. Jam verò cùm in motu nihil nisi corpus,

DEFINITIO III. ([d])

Materiæ vis insita est potentia resistendi, quâ corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ fit, ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis Inertiæ dici possit. Exercet verò corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam factâ; estque exercitium illud sub diverso respectu et Resistentia et Impetus: resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum obstaculi illius mutare. Vulgus resistentiam quiescentibus et impetum moventibus tribu-

spatium percursum et tempus considerentur, et ratio spatii ad tempus celeritatem exponat (5), satis evidens est ad totum corporis motum seu quantitatem motûs inveniendam, solius massæ et celeritatis habendam esse rationem. Cùm autem motus totius corporis sit æqualis summæ motuum singularum Massæ partium, seu elementorum, patet manente celeritate, motum totius massæ crescere prout crescit numerus elementorum massæ æqualium, seu quantitatem motûs esse proportionalem massæ; manente verò massâ, quantitas motûs est ut velocitas; nam si corpus idem duplum spatium eodem tempore percurrit, duplus est illius motus, si triplum, triplus, &c. Siquidem manentibus tempore et massâ, nulla est alia quam spatiorum varietas, et motus sunt ut spatia; sed spatia temporibus æqualibus percursa sunt ut celeritates (5), ergo quantitates motûs sunt etiam ut celeritates. Quare variantibus massis atque celeritatibus, motûs quantitas est semper ut massa in celeritatem ducta, seu in ratione compositâ massæ et celeritatis; si itaque motûs quantitas dicatur Q; Massa M, celeritas C; erit Q ut M C, quod ità exponimus $Q = M\ C$, dividendo utrinque per M, et deinde per C, erit $C = Q : M$; et $M = Q : C$; Seu celeritas est ut quantitas motûs ad massam applicata, et massa vicissim, ut quantitas motûs per celeritatem divisa. Si quantitates motûs Q, q, seu M C, m c, fuerint æquales, erit $M\ C = m\, c$, et $M : m = c : C$, seu massæ sunt reciprocè ut celeritates; et viceversâ si $M : m = c : C$, erit $M\ C = m\, c$, seu si massæ sunt in ratione velocitatum reciprocâ, quantitates motûs sunt æquales. Præthereà cùm, (5), sit $C = S : T$, erit etiam $Q = M\ S : T$, seu quantitates motûs sunt in ratione compositâ ex directis rationibus massæ et spatii et inversâ temporis; invenietur etiam $Q\ T = M\ S$, $M = Q\ T : S$; $S = Q\ T : M$, $T = M\ S : Q$.

Pari facilitate demonstrari possunt cætera theoremata quæ de motuum comparatione, apud scriptores mechanicos fusè reperiuntur.

(d) 7. Vis duplex est, activa et passiva; Activa est potentia motum efficiendi; Passiva est potentia motum recipiendi vel amittendi; vis activa subdividi solet in vim vivam quæ cum motu actuali conjuncta est, et in vim mortuam quæ est tantùm conatus seu sollicitatio ad motum, et ex quâ motus actualis non producitur, nisi vis mortuæ actio aliquandiù in corpore continuata fuerit. Sic vis gravitatis in globo qui ex filo pendet vel plano horizontali incumbit, est vis mortua, quâ quidem actu non movetur globus, sed conatur moveri filumque tendit, aut planum premit. Si filum abrumpatur, vel planum sustentans auferatur, tùm continuâ gravitatis actione globus motu accelerato cadit. Vis quâ corpus in circuli peripheriâ motum, filum centro alligatum tendit, et quâ proinde conatur a centro recedere est quoque vis mortua.

8. Inest omni materiæ vis insita passiva, seu inertia, ex quâ nullus motus, nullaque tendentia ad motum resultat, sed quæ consistit in renixu quo corpus quodlibet, cuilibet vi externæ mutationem statûs, id est, motûs vel quietis inducere conanti resistit. Etenim nulla potest esse actio corporis in corpus, quin luctatio quædam, ut loquitur Clar. *Hermannus* in *Phoronomiâ*, fiat inter corpus agens et patiens, dum alterum alteri resistit; alioquî corpus motum posset sine motûs proprii detrimento, aliud quodcumque movere. Vis illa inertiæ eadem est in corporibus motis et quiescentibus; tam enim resistunt corpora actioni quâ a quiete ad motum concitantur, quàm actioni quâ a motu ad quietem reducuntur. Eadem quippè vis requiritur ad motum datum producendum et ad eundem extinguendum. Quia autem vis illa inerti eadem in omnibus æqualibus materiæ partibus reperitur, consequens est ut sit materiæ proportionalis; dupla in massâ duplicatâ, tripla in tri-

it: sed motus et quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem; neque semper verè quiescunt quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

DEFINITIO IV. (e)

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione solâ, neque post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertiæ. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex ictu, ex pressione, ex vi centripetâ.

DEFINITIO V.

Vis Centripeta est, quâ corpora versus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.

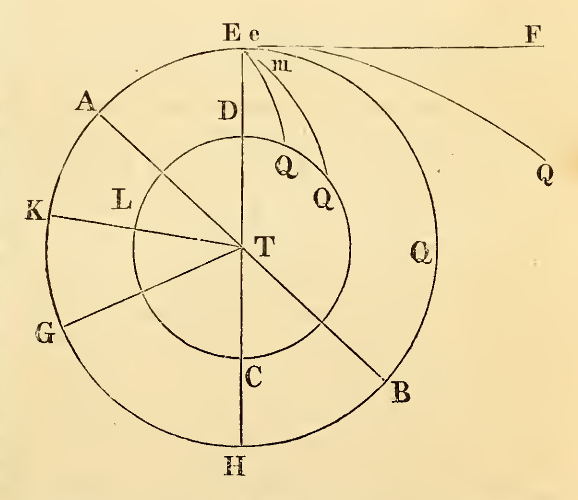
Hujus generis est Gravitas, quâ corpora tendunt ad centrum terræ; Vis Magnetica, quâ ferrum petit magnetem; et Vis illa, quæcunque sit, quâ Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, et in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in fundâ circumactus, a circumagente manu abire conatur; et conatu suo fundam distendit, eoque fortius quo celerius revolvitur; et quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, quâ funda lapidem in manum perpetuò retrahit et in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, Centripetam appello. Et par est ratio (f) corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centris orbium recedere; et nisi adsit vis aliqua conatui isti contraria, quâ cohibeantur et in orbibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, si vi Gravitatis destitueretur, non deflecteretur in terram, sed in lineâ rectâ abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, si modo aëris resistentia tolleretur. Per gravitatem suam retrahitur a cursu rectilineo et in terram perpetuò flectitur, idque magis vel minus pro gravitate suâ et velocitate motus. Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ, vel major velocitas quâcum projicitur, eo minus deviabit a cursu rectili-

plicatâ. Majoribus etiam mutationibus corpora magis resistunt quam minoribus, estque resistentia actualis magnitudini mutationis proportionalis.

(e) 9. Nihil fit sine causâ; undè omne corpus ut potè iners et passivum (8) in suo quocumque statu perseverat, nisi causâ aliquâ, seu vi externâ, statum suum mutare cogatur; cùm igitur vis aliqua in corpus actu agit; vis impressa seu actio mutat quidem corporis statum, sed cessante illius vis actione, corpus in novo statu per illam actionem recepto perseverat solâ vi inertiæ passivâ, quâ fit ut sine novâ vi externâ statum suum mutare nullâ ratione possit; adeoque si semel movetur, sibi relictum, perpetuò atque æquabiliter per lineam rectam movebitur, seu secundum directionem quâ impulsum fuerit et quâ movebatur, dum actio vis externæ cessavit.

(f) 10. Cùm linea quævis curva considerari possit tanquam polygonum, ex infinitis numero,

neo et longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velocitate secundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in lineâ curvâ ad distantiam duorum milliarium, priusquam in terram decideret: hic duplâ cum velocitate quasi duplo longius pergeret, et decuplâ cum velocitate quasi decuplo longius: si modò aëris resistentia tolleretur. Et augendo velòcitatem augeri posset pro lubitu distantia in quam projiceretur, et minui curvatura lineæ quam describeret, ita ut tandem caderet ad distantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret, vel denique ut in cœlos abiret et motu abeundi pergeret in infinitum. Et eâdem ratione, quâ Projectile vi gravitatis in orbem flecti posset et terram totam circuire, potest et Luna vel vi gravitatis, si modò gravis sit, vel aliâ quâcunque vi, quâ in terram urgeatur, retrahi semper a cursu rectilineo terram versus, et in orbem suum flecti: et sine tali vi Luna in orbe suo retineri non potest. Hæc vis, si justo minor esset, non satis flecteret Lunam de cursu rectilineo: si justo major, plus satis flecteret, ac de orbe suo terram versus deduceret. Requiritur quippe ut sit justæ magnitudinis: et Mathematicorum est invenire



atque infinitè parvis seu evanescentibus lateribus rectis compositum. Si corpus in curvâ E B H K, moveatur, in singulis curvæ punctis E fertur juxtà directionem lateris evanescentis E e, adeòque si sibi relinqueretur, nec altera vis in extremitate hujus rectæ, E e, illud retraheret, et in lineam, e m, inflecteret, perpetuò atque æquabiliter moveretur per rectam, E e, productam (9) ac proinde cum linea E e producta, sit ipsa curvæ tangens E F, uniformiter movetur per tangentem in puncto E, nisi nova vis perpetuò in illud agens, cujus directio est versùs curvam, ipsum a motu rectilineo retraheret et in orbitâ suâ retineret, quo major est vis aut celeritas secundùm directionem tangentis vel evanescentis lateris, E e, et minor vis illa quâ mobile a tangente in curvam retrahitur, eò minùs a tangente deviat corpus, adeoque curva quam motu suo describit, ad tangentem seu rectam lineam propiùs accedit. Econtrà decrescente vi aut celeritate secundùm directionem tangentis, aut crescente vi alterâ quæ a tangente deflectit, corpus a motu rectilineo magis retrahitur, et major fit lineæ curvatura. Nam effectus sunt causis suis proportionales; est autem motus per tangentem rectilineus, effectus vis secundùm directionem tangentis, et deviatio a tangente, effectus vis illius quæ a tangente retrahit.

11. Sit terræ circumferentia D Q C, illiusque centrum T, ex quo vim ad centrum trahentem per totum circumquaque spatium propagari fingamus, aut, si magis placuerit, supponamus esse vim per totum spatium diffusam, quâ corpora omnia secundùm directionem radiorum, E T, A T, ad centrum T urgeantur, et ex vertice E montis E D projiciatur corpus juxtà directionem rectæ E F ad E T normalis; corpus illud hâc solâ vi impressâ æquabiliter per rectam E F moveretur (9); at vi centripetâ seu vi tendente ad centrum T ab illâ rectâ perpetuò retrahitur et cogitur incedere in curvâ aliquâ E Q quam tangit in E recta E F (10); augendo vim impressam secundùm directionem tangentis, E F, curva E Q, ad tangentem E F, propiùs accedit, adeò ut corpus variis et successivè crescentibus celeritatibus projectum, terram tardiùs semper

vim, quâ corpus in dato quovis orbe datâ cum velocitate accuratè retineri possit; et vicissim invenire viam curvilineam, in quam corpus e dato quovis loco datâ cum velocitate egressum a datâ vi flectatur. Est autem vis hujus centripetæ quantitas trium generum, absoluta, acceleratrix, et motrix.

DEFINITIO VI. (g)

Vis centripetæ quantitas absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut vis magnetica pro mole magnetis vel intensione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFINITIO VII. (h)

Vis centripetæ quantitas acceleratrix est ipsius mensura velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantiis a globo terræ; in æqualibus autem distantiis eadem undique, propterea

attingat; deindè circà eam revolvatur, tandemque in infinitum abeat. Ut igitur corpus per rectam E F, datâ velocitate projectum, curvam datam E Q describat, certa ac determinata vis centripeta requiritur; et viceversâ, datâ velocitate secundùm rectam E e seu E F, et vi centripetâ etiam datâ, corpus nonnisi certam ac determinatam curvam E Q potest describere; et mathematicorum est ex datis velocitate per tangentem E F et curvâ E Q quam corpus describit, invenire vim centripetam, quâ a tangente retrahitur et in orbitâ suâ retinetur, et reciprocè ex datâ velocitate per tangentem et vi centripetâ, curvam invenire; quæ duo Newtonus mirâ sagacitate et elegantiâ perfecit.

(g) 12. In centro T existere supponatur corpus, ex quo per omne spatium diffundatur vis, quæ juxta directionem radiorum A T, E T, H T, versùs centrum, aut a centro versùs spatia circumposita, juxtà directionem radiorum, T A, T E, T H, agat; in 1°. casu vis illa centripeta, in 2°. vis centrifuga, in utroque vis centralis dicitur.

Hæc vis in centro considerata duplici præsertim ratione variare potest; Si enim corpus quod centrum occupat, et cui vis inest, in sua æqualia elementa divisum intelligatur, et vis sit singulis elementis æqualis ejusdemque constanter intensionis; vis totius corporis centralis, seu vis centralis quantitas absoluta, erit massæ seu summæ elementorum proportionalis. At si manente eâdem corporis centralis massâ, vis semper manens æqualis in singulis elementis æqualibus intensivè crescat vel decrescat, vis tota corporis centralis seu vis centralis quantitas absoluta, erit proportionalis intensioni vis in singulis elementis existentis; quare variantibus massâ et vi singulorum elementorum, vis centralis quantitas absoluta erit in ratione compositâ massæ et intensionis vis in singulis elementis æqualibus.

(h) 13. Si vis centralis non ampliùs in centro, sed in quâcumque a centro distantiâ consideretur, possumus in variis illis a centro distantiis superficies sphæricas fingere quarum commune centrum sit T, et vis centralis in illis distantiis seu superficiebus sphæricis considerata, dicitur vis acceleratrix. Illius autem quantitas erit proportionalis celeritati quam dato seu constante tempore in singulis materiæ elementis a centro æquidistantibus producet; nam si supponamus vim illam constantem in elementa materiæ continuò agere, eo major erit quo major erit velocitas dato tempore genita, ita ut si tempore æquali dupla generetur velocitas, dupla quoque sit vis, cum velocitas illa sit illius vis effectus plenus. Si constans maneat celeritas a vi acceleratrice genita, erit vis in ratione inversâ temporis quo celeritas illa producitur, nam si eadem celeritas tempore subduplo producatur, vis duplicatur. Quare si manente vi constante, celeritas et tempus varient, erit vis acceleratrix in ratione compositâ ex directâ celeritatis genitæ et reciprocâ temporis. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; celeritas producta C; tempus quo producitur, T, erit $G = C : T$, et $G\,T = C$, et $T = C : G$. Licet autem variet vis acceleratrix, eadem tamen est illius mensura, modò celeritas nascens seu

quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata aeris resistentia, æqualiter accelerat.

DEFINITIO VIII. (i)

Vis centripetæ quantitas motrix est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majore corpore, minus in minore; et in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc quantitas est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum, et (ut ita dicam) pondus; et innotescit semper per vim ipsi contrariam et æqualem, quâ descensus corporis impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, et absolutas; et distinctionis gratia referre ad corpora, centrum petentia, ad corporum loca, et ad centrum virium: nimirum vim motricem ad corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compositum; et vim acceleratricem ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad centrum, tanquam causa aliqua præditum, sine quâ vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod cen-

initio motûs tempore quàm minimo producta consideretur, tunc enim vis agit uniformiter.

14. Si vis aliqua per radios divergentes in medio non resistente diffundatur, vis acceleratrix decrescit in ratione duplicatâ distantiarum a centro; nam quia vis illa, ex hyp., in medio non resistente propagatur, nullus intercipitur radius, nec vis singulorum minuitur, adeóque radii qui in distantiâ T L, per hemisphærium a semicirculo D L C descriptum diffundebantur, in distantiâ T K, per hemisphærium E K H propagantur; est autem vis acceleratrix ut radiorum densitas, et radiorum densitas est reciprocè ut superficies hemisphæriorum a semicirculis descriptorum; nam radiorum densitas est ut summa seu numerus radiorum per superficiem quam occupant divisus; hîc enim summa radiorum est ut massa, superficies verò cui insunt ut volumen. Verùm cum per hyp., idem numerus radiorum superficies singulorum hemisphæriorum occupet, erit densitas radiorum in ratione inversâ illarum superficierum in quâvis a centro distantiâ descriptarum; illæ autem superficies sunt in ratione duplicatâ distantiarum a centro; ergò et vis acceleratrix est in ratione duplicatâ distantiarum a centro reciprocè. Egregium illud theorema, ut ex demonstratione patet, omnem excludit medii resistentiam; quare ut in physicis valeat, medii resistentia in computum venire debet. Hæc autem virium seu qualitatum e centro emanantium theoria ad majorem universalitatem reduci potest, si vis in singulis radiis variè propagari supponatur, aut etiam si per lineas curvas diffundi fingatur. Sed hæc fusiùs prosequi præsentis non est instituti.

(i) 15. Si vis centripeta in corpore ad centrum propulso consideretur; ut totus illius corporis in centrum conatus seu vis centripetæ quantitas motrix habeatur, ducenda est massa in vim acceleratricem; nam vis motrix totius corporis componitur ex omnibus viribus, quibus singula æqualia elementa urgentur, adeóque ex vi acceleratrice toties sumptâ quot sunt in corpore æqualia materiæ elementa, sive ex vi acceleratrice in massam ductâ. Supponimus enim singula elementa æqualia, æquali vi acceleratrice urgeri. Sed vis acceleratrix est ut celeritas dato tempore genita (13), ergò vis centripetæ quantitas motrix est ut massa in illam celeritatem ducta, seu ut quantitas motûs, dato tempore producta. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; massa, M, vis motrix, p, erit p, ut, M G, et M, ut p : G, et G, ut p : M, seu massa est ut vis motrix per vim acceleratricem divisa, et vis acceleratrix, ut vis motrix per massam divisa. Si duæ fuerint vires motrices P et p, seu M G, et m g, æquales, erit M : m = g : G, seu massæ sunt ut vires acceleratrices reciprocè; et viceversâ, si M : m = g : G, erit m g = M G, seu si massæ sunt reciprocè ut vires acceleratrices, vires motrices sunt æquales. Porrò cum vires acceleratrices sint ut celeritates dato tempore genitæ (13), in superioribus proportionibus loco virium acceleratricum celeritates illæ substitui possunt.

trale (quale est Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat est hic conceptus. Nam virium causas et sedes Physicas jam non expendo.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate et ex quantitate materiæ, et vis motrix ex vi acceleratrice et ex quantitate ejusdem materiæ conjunctim. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones et impulsus eodem sensu acceleratrices et motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulsus, vel Propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter et pro se mutuò promiscuè usurpo; has vires non Physicè, sed Mathematicè tantùm considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem Physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires verè & Physicè tribuere; si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo sensu in sequentibus accipiendæ sint, explicare visum est. Tempus, Spatium, Locum et Motum, ut omnibus notissima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates hasce non aliter quam ex relatione ad sensibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit easdem in absolutas et relativas, veras et apparentes, mathematicas et vulgares distingui.

([k]) I. Tempus Absolutum, verum, et mathematicum, in se et naturâ suâ sine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, et vulgare est sensibilis et externa quævis Durationis per motum mensura (seu accurata seu inæquabilis) quâ vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Mensis, Annus.

II. Spatium Absolutum, naturâ suâ sine relatione ad externum quodvis, semper manet similare & immobile: Relativum est spatii hujus mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad cor-

(k) 16. Quemadmodùm Geometræ lineam fluxu puncti generari fingunt, ita tempus absolutum mathematicè considerare possumus, tanquam æquabilem unius instantis seu puncti temporis

pora definitur, et à vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aërei vel cœlestis definita per situm suum ad Terram. Idem sunt spatium absolutum et relativum, specie et magnitudine; sed non permanent idem semper numero. Nam si Terra, verbi gratia, moveatur; spatium Aëris nostri, quod relativè et respectu Terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam Aër transit, nunc alia pars ejus; et sic absolutè mutabitur perpetuò.

III. Locus est pars spatii quam corpus occupat, estque pro ratione spatii vel Absolutus vel Relativus. Pars, inquam, spatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam solidorum æqualium æquales semper sunt loci; Superficies autem ob dissimilitudinem figurarum ut plurimùm inæquales sunt; Situs vero propriè loquendo quantitatem non habent, neque tam sunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem est cum summa motuum partium, hoc est, translatio totius de suo loco eadem est cum summa translationum partium de locis suis; ideoque locus totius idem est cum summa locorum partium, et propterea internus et in corpore toto.

IV. Motus Absolutus est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi, quæ velis passis fertur, relativus corporis Locus est navigii regio illa in quâ corpus versatur, seu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur unà cum navi: et Quies relativa est permansio corporis in eâdem illâ navis regione vel parte cavitatis. At quies vera est permansio corporis in eâdem parte spatii illius immoti in quâ navis ipsa unà cum cavitate suâ et contentis universis movetur. Unde si Terra verè quiescat, corpus quod relativè quiescit in navi, movebitur verè et absolutè eâ cum velocitate quâ navis movetur in Terrâ. Sin Terra etiam moveatur, orietur verus et absolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in spatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terrâ: et si corpus etiam moveatur relativè in navi, orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in spatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terrâ, tum corporis in navi; et ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terrâ. Ut si Terræ pars illa, ubi navis versatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; et velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem versus cum velocitatis parte unâ: movebitur Nauta verè et absolutè in spatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, et relativè in terrâ occidentem versus cum velocitatis partibus novem.

fluxum. Quapropter si corpus aliquod æquabili celeritate moveretur, illud eodem modo ac temporis punctum flueret, spatiaque ab eo descripta forent temporibus proportionalia (5); eo igitur

([l]) Tempus Absolutum a relativo distinguitur in Astronomiâ per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro mensura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriore tempore mensurent motus cœlestes. Possibile est, ut nullus sit motus æquabilis quo Tempus accuratè mensuretur. Accelerari et retardari possunt motus omnes, sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiæ rerum; sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli: proinde hæc a mensuris suis sensibilibus meritò distinguitur, et ex iisdem colligitur per Æquationem Astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis necessitas, tum per experimentum Horologii Oscillatorii, tum etiam per eclipses Satellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium Temporis est immutabilis, sic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæc de locis suis, et movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam tempora et spatia sunt sui ipsorum et rerum omnium quasi Loca. In Tempore quoad ordinem successionis; in Spatio quoad ordinem situs locantur universa. De illorum essentia est ut sint Loca: et loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur absoluta Loca; et solæ translationes de his locis sunt absoluti Motus.

Verum quoniam hæ Spatii partes videri nequeunt, et ab invicem per sensus nostros distingui; earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim et distantiis rerum à corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, definimus loca universa: deinde etiam et omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum et motuum absolutorum relativis utimur, nec incommodè in rebus humanis: in Philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest, ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusque referantur.

Distinguuntur autem Quies et Motus absoluti et relativi ab invicem per Proprietates suas et Causas et Effectus. Quietis proprietas est, quod corpora verè quiescentia quiescunt inter se. Ideoque cum possibile sit, ut corpus aliquod in regionibus Fixarum, aut longè ultra, quiescat absolutè; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, horumne aliquod ad longinquum illum datam positionem servet necne, quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

motu tanquam accuratâ durationis mensurâ uti possemus. Verùm corporum cœlestium et horologiorum motus, quos ad temporis mensuram adhibemus, licet vulgò supponantur æquabiles, variis tamen ex causis accelerantur vel retardantur, sicque mensuræ illæ vulgares non sunt tempori absoluto proportionales.

(l) 17. Æquatio temporis dicitur differentia quæ inter tempus absolutum et tempus relativum, (h. e. tempus per solis revolutionem mensuratum) intercedit; quæ proindè tempori relativo juncta, vel ab eo subducta conficit tempus absolutum et vice versâ.

([m]) 18. Gyrantium corporum partes singulæ in orbitis curvilineis moventur, adeóque (10) per tangentes orbitarum progredi, atque ita ab axe motûs recedere nituntur; ut si trochus vel sphæra circa axem rotatur, singulæ illorum corporum

Motus proprietas est, quod partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam gyrantium partes (m) omnes conantur recedere ab axe motus, et progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relativè quiescunt. Et propterea motus verus et absolutus definiri nequit per translationem e viciniâ corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam verè quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem e viciniâ ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; et sublatâ illâ translatione non verè quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, sine translatione de viciniâ corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto loco movetur unà locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. (n) Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum et absolutorum: et motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, et motu loci hujus de loco suo, et sic deinceps; usque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo nautæ supra memorato. Unde motus integri et absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: et propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli. Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem; atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod immobile appello.

Causæ, quibus motus veri et relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari et mutari potest sine viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimatur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in quâ hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur

partes circulos describunt, et ab illorum centris per tangentes effugere conantur, cumque omnia illa centra sint in axe motûs posita, singulæ partes ab axe recedere nituntur.

(n) 19. Si nauta in navi deambulare supponatur, motusque navis et nautæ conspirent, integra et absoluta nautæ celeritas componitur ex celeritate nautæ respectu loci sui primi in navi, ex celeritate loci illius, id est, navis respectu maris, seu respectu loci secundi, et ex celeritate maris respectu spatii immoti. Si autem motus nautæ, motui navis foret directè oppositus, absoluta nautæ velocitas æqualis foret differentiæ celeritatum navis respectu spatii immoti et nautæ respectu navis. Tandem si motus nautæ respectu navis foret obliquus, illius directio et velocitas in duas alias directiones et velocitates ita resolvi debent, ut una directio cum aliorum motuum com-

ut situs relativus conservetur, conservabitur relatio in quâ motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus ubi verus conservatur, et conservari ubi verus mutatur; et propterea motus verus in ejusmodi relationibus minime consistit.

Effectus, quibus motus absoluti et relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. (o) Nam in motu circulari nudè relativo hæ vires nullæ sunt, in vero autem et absoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat situla a filo prælongo, agaturque perpetuò in orbem, donec filum a contorsione admodum rigescat, dein impleatur aquâ, et unà cum aquâ quiescat; tum vi aliquâ subitaneâ agatur motu contrario in orbem, et filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu; (p) superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis: at postquam vas, vi in aquam paulatim impressâ, effecit ut hæc quoque sensibiliter revolvi incipiat; recedet ipsa paulatim a medio, ascendetque ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) et incitatiore semper motu ascendet magis et magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo, quiescat in eodem relativè. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motus, et per talem conatum innotescit et mensuratur motus aquæ circularis verus et absolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, et propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Postea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat motum illius circularem verum perpetuo crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relativè. Quare conatus iste non pendet a translatione aquæ respectu corporum ambientium, et propterea motus circularis verus per tales translationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio et adæquato effectui respondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri sunt; et relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus verum illum et unicum motum participant. Unde et in Systemate eorum qui Cœlos nostros infra Cœlos Fixarum in orbem revolvi vo-

muni directione conspiret, alia verò sit ipsi perpendicularis, tuncque, ex regulis infrà demonstrandis, facillimè invenietur tùm absoluta nautæ celeritas, tùm illius vera directio.

(o) 20. In motu circulari nudè relativo, id est, in quiete absolutâ corporis inertis, quod motu duntaxat relativo movetur, vires activæ nullæ sunt.

(p) 21. Cum aqua vi inertiæ (8) in eodem quiescendi statu perseverare nitatur, in eam nonnisi gradatim et per repetitam laterum situlæ frictionem motus circularis transire potest; adeoque sub initio motûs situlæ, tota aquæ massa quiescit absolutè, sive quod idem est, maximâ velocitate nudè relativâ in vase revolvitur; undè destituta omni vi activâ (20) sicut antè motum situlæ, plana et quieta manet. Sed cum iterato laterum vasis impulsu, motus circularis ad aquam

lunt, et Planetas secum deferre; singulæ Cœlorum partes, et Planetæ qui relativè quidem in Cœlis suis proximis quiescunt, moventur verè. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quàm fit in verè quiescentibus) unáque cum cœlis delati participant eorum motus, et ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Quantitates relativæ non sunt igitur eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed sunt earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum mensuratarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes, per nomina illa Temporis, Spatii, Loci et Motus propriè intelligendæ erunt hæ mensuræ sensibiles; et sermo erit insolens et purè Mathematicus, si quantitates mensuratæ hîc intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces hasce dè quantitatibus mensuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Mathesin et Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus et vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, et ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est: propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora verè moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam argumenta desumi possunt, partim ex motibus apparentibus qui sunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ et effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum, innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, et inde quantitas motus circularis computari posset. (q) Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex auctâ vel diminutâ fili tensione augmentum vel decrementum motus, et inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, et faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset et quantitas et determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum et sensibile quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo cor-

transierit, singulæ partes aquæ (18) ab axe motûs, seu a medio vasis conantur recedere, cùmque minorem sursùm in aëre resistentiam inveniant, ad latera situlæ accumulantur et ascendunt, et quò celeriùs aguntur in orbem, eo majori conatu ab axe motûs per tangentes recedere nituntur. (10. 11.) Porrò cum inter vim centrifugam et celeritatem corporis in dato circulo revolventis certa debet esse ac determinata proportio, ex vi centrifugâ seu conatu recedendi ab axe cognosci ac mensurari potest velocitas motûs circularis absoluta, ut deinceps demonstrabitur.

(q) 22. Si in alternas, seu è diametro sibi oppositas globorum facies, ad motum circularem augendum vel minuendum, imprimerentur vires quælibet æquales, quæ proindè non perturbarent æquilibrium globorum circà commune gravitatis

pora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt Stellæ Fixæ in regionibus Cœlorum ([r]), sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si attenderetur ad filum, et deprehenderetur tensionem ejus illam ipsam esse quam motus globorum requireret, concludere liceret motum esse globorum, et corpora quiescere; et tum demum ex translatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus, et apparentibus differentiis colligere, et contra ex motibus seu veris seu apparentibus eorum causas et effectus, docebitur fusius in sequentibus. Hunc enim in finem Tractatum sequentem composui.

centrum, id est, circa punctum æquilibrii revolventium, innotesceret ex auctâ vel diminutâ fili tensione augmentum vel decrementum motûs, &c.

(r) 23. Spectator in globo moto, vel etiam in stellâ fixâ positus, solo oculorum auxilio, seu ex motibus apparentibus discernere non posset, an globus, an stella verè moveretur; quemadmodùm telluris incolæ ex apparenti stellarum motu determinare non possunt, an stellæ verè moveantur; sive enim cum terrâ moveamur, et stellæ quiescant absolutè, sive e contrà moveantur stellæ et terra quiescat, eædem omnino sunt apparentiæ, iidem motus relativi; quod quidem notissimo illustratur exemplo navis æquabiliter motæ, cujus motus, ab iis qui navi vehuntur, oculis non percipitur, dum littora urbesque fugere videntur. Ex optices principiis horum phænomenω̃n petenda est ratio; ea enim corpora quiescere videntur quæ, dum nos ipsi nullam actualem voluntatem nosmet movendi exercemus, eandem respectu oculi positionem constanter servant, ita ut eorum imago quæ in fundo oculi pingitur, eandem semper retinæ partem occupet: ea verò objecta moveri videntur quæ respectu oculi situm suum continuò mutant, seu quorum imagines diversas retinæ partes successivè occupant.

AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

LEX I.

([s]) *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quâtenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

Projectilia perseverant in motibus suis, nisi quâtenus a resistentiâ aëris retardantur, et vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quâtenus ab aëre retardatur. Majora autem Planetarum et Cometarum corpora motus suos et progressivos et circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

LEX II.

([t]) *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundùm lineam rectam quâ vis illa imprimitur.*

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul et semel, sive gradatim et successivè impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi gener-

(s) 24. Ex hâc primâ lege quam (9) demonstravimus, sequitur omnem motum esse naturâ suâ æquabilem et rectilineum, adeóque nec illius velocitatem retardari, nec directionem mutari, nisi aliquod obstaculum mobili offeratur; Unde cùm projectilia motum suum sensim amittant, quærenda est aliqua hujusce retardationis causa. Cum autem corpora projecta vel per medium resistens deferantur, vel etiam super aliorum corporum superficies scabras incedant, et vi gravitatis deorsùm semper urgeantur, necesse est ut eam amittant motûs sui partem quam in hisce obstaculis superandis continuò absumunt, ac proindè quo major vel minor erit medii resistentia, eò majus vel minus decrementum accipiet corporis projecti velocitas. Ex his igitur patet majora planetarum et cometarum corpora nullam sensibilem in spatiis cœlestibus experiri resistentiam, cùm motus suos diutissime conservent.

(t) 25. Si corpus vi activâ, qualis est vis gravitatis, secundùm eandem aut parallelam directionem continuò urgeatur, motus illius continuò acceleratur; nam per leg. 1., manet celeritas acquisita, et per leg. 2. nova conspiranti continuò additur. Si verò aliqua vis in corpus jam motum contrariâ directione perpetuò agat, motus illius continuò retardatur, per leg. 2. Si vis conspirans continuò ac uniformiter agat, id est, si constans sit, corpus eâ vi impulsum, æqualibus temporibus æqualia accipit celeritatis incrementa, seu motu uniformiter accelerato fertur, et celeritates vi illâ acquisitæ, sunt ut tempora quibus

atrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo obliquè adjicitur, et cum eo secundùm utriusque determinationem componitur.

([a]) LEX III.

Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur et hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam et equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi suâ quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem

generantur. At si vis constans contrariâ directione in corpus motum continuò agat; æqualibus temporibus æqualia fient celeritatis decrementa, et corpus motu uniformiter retardato movebitur. Generaliter tandem, si corpus quiescens quâlibet vi sive constanti sive variabili continuò urgeatur, et deinde eâ celeritate quam vis illius actione continuâ acquisivit, contrà directionem vis illius reagentis projiciatur, ut vestigia sua relegat, corpus illud in itu et reditu suo eandem habebit celeritatem, ubi ad eadem viæ suæ puncta, eundo et redeundo pervenerit; adeoque motum redeundo non amittet, nisi cùm pervenerit ad punctum ex quo cœpit eundo moveri; nam eadem vis in itu et reditu corporis, æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus generat et extinguit (8).

26. Corpora gravia in terræ viciniis, sublatâ medii resistentiâ, motu uniformiter accelerato descendunt, et motu uniformiter retardato ascendunt...... Demonstratio .... Sublatâ medii resistentiâ idem est ejusdem corporis pondus, sive eadem illius in subjectum planum pressio, tum in vertice, tum in radice montis; est autem pondus, seu vis motrix (15) ut massa in vim gravitatis acceleratricem ducta: ergò cum ejusdem corporis massa eadem in vertice et in radice montis permaneat, manebit etiam eadem vis acceleratrix gravitatis. Insuper corpora gravia in radice et vertice montis æqualia spatia æqualibus temporibus percurrunt, sublatâ aëris resistentiâ, ut accuratissimis notum est experimentis (13): constans est igitur vis acceleratrix, et per lineas ad horizontem perpendiculares (3) uniformiter agit; gravia ergò motu uniformiter accelerato descendunt, et uniformiter retardato ascendunt (25). Q. e. d.

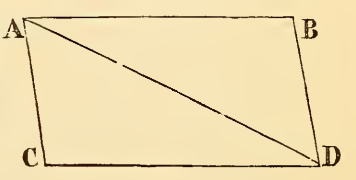
27. Sublatâ medii resistentiâ in terræ viciniis, spatia quæ corpus è quiete cadendo percurrit, sunt ut quadrata temporum quibus percurruntur .... Dem. ... Recta S K, repræsentet spatium quod grave cadendo percurrit; T C, T c, T B, exponant tempora quibus describuntur spatia S P, S p, S K; et C L, c l, B D, ad T B, normales, exhibeant celeritates temporibus T C, T c, T B, per spatia S P, S p, S K, acquisitas; quia in motu uniformiter accelerato, celeritates sunt ut tempora, (25), erit T C : T c = C L : c l; et T C : T B = C L : B D, adeóque recta, T D, transit per puncta L, et l, et triangula T C L, T c l, T B D, similia sunt. Jam fingamus lineam, c l, motu sibi semper parallelo ità accedere ad lineam C L, ut tandem cum ipsâ coincidat; evanescente tempusculo C c, celeritas, c l, non differet a celeritate C L, adeóque per tempusculum infinitè parvum seu evanescens C c, celeritas, C L, uniformis censeri potest. Porrò spatia motu æquabili descripta sunt ut celeritas in tempus ducta (5), ergò spatium P p, quod tempusculo, C c, percurri supponimus, est ut rectangulum, C L × C c = C d; quare si totum tempus, T C, in tempuscula innumera ut C c, divisum concipiatur; et similiter spatium S P, tempore T C, percursum in totidem spatiola evanescentia, singulis tempusculis correspondentibus percursa dividatur, erit summa rectangulorum C d, hoc est area trianguli T C L, ut summa spatiolorum P p, id est ut S p; et eodem modo demonstratur aream trianguli T B D, esse ut spatium S K, tempore T B, percursum. Est igitur triangulum T C L : T B D = S P : S K. Sed triangulorum similium areæ T C L, T B D, sunt ut quadrata laterum homologorum,

mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuæ) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciprocè proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

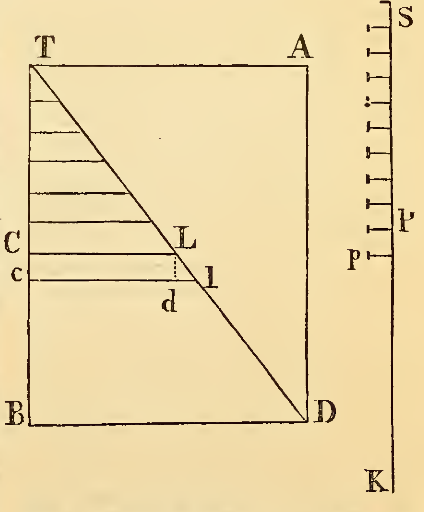
Si corpus dato tempore, vi solâ M in loco A impressâ, ferretur uniformi cum motu ab A ad B; et vi solâ N in eodem loco impressâ, ferretur ab A ad C: compleatur parallelogrammum A B D C, et vi



ergò S P, ad S K, ut quadratum temporis T C, ad quadratum temporis T B. Q. e. d.

28. Coroll. 1 .... Cum velocitates acquisitæ, sint ut tempora (25) erunt etiam spatia percursa ut quadrata velocitatum, et tam velocitates quam tempora erunt inter se in ratione subduplicatâ spatiorum.

29. Coroll. 2. .... Si grave e quiete cadens, dato tempore percurrat spatium, 1, duplo tempore percurret spatium, 4, triplo spatium, 9, &c. hoc est, si tempora ab initio motûs computata sumantur in progressione numerorum naturalium, 1, 2, 3, 4, 5. spatia his temporibus descripta, erunt ut termini progressionis numerorum quadratorum, 1, 4, 9, 16, 25, &c. spatia verò singulis temporibus seorsim sumptis percursa, erunt ut termini progressionis numerorum imparium, 1, 3, 5, 7, 9, &c. nam cùm spatium 1°. tempore percursum sit, 1, duplo tempore sit, 4; spatium secundo tempore seorsim sumpto descriptum, erit 4—1 seu 3, et ita de cæteris. Undè spatia motu uniformiter retardato descripta temporibus æqualibus secundùm numeros impares retrogrado ordine decrescunt (25).



30. Coroll. 3. .... Spatium S K, quod grave e quiete cadendo, tempore T B, percurrit, est subduplum spatii quod eodem tempore uniformiter percurri potest, cum velocitate B D, tempore T B, per spatium S K, acquisitâ. Nam compleatur rectangulum T B D A, et spatium quod uniformi celeritate B D, tempore T B, describitur, erit ut rectangulum T B D A (25). Cum ergò (27) spatium S K, sit ut triangulum T B D, subduplum rectanguli T B D A, erit spatium S K, dimidium spatii quod uniformi celeritate B D, tempore T B, percurritur.

31. Coroll. 4. .... Celeritas B D, motu uniformiter accelerato acquisita, est semper (5) ut duplum spatium percursum 2 S K, applicatum ad tempus T B, quo percurritur; seu ut 2 S K : T B. Quare si vis acceleratrix constans dicatur G; spatium percursum S; tempus quo percurritur T; erit G T = 2 S : T (15) adeóque G T ^{2} = 2 S, seu vis acceleratrix constans in quadratum temporis ducta, est ut duplum spatium eodem tempore vis illius actione descriptum.

(a) 32. Hæc notissima naturæ Lex innumeris confirmata experimentis, ex ipsâ materiæ inertiâ clarè sequitur. Ut autem omnis tollatur

utraque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab A ad D. Nam (b) quoniam vis N agit secundum lineam A C ipsi B D parallelam, hæc vis per Legem 11. nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam B D a vi alterâ genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam B D, sive vis N imprimatur, sive non; (c) atque ideo in fine illius temporis re-

ambiguitas, nihil aliud per hanc legem intellectum volumus, nisi æquales fieri in corpore agente et patiente statûs mutationes; cùm enim nulla possit esse actio corporis in aliud corpus, quin mutua fiat horumce corporum collisio (8), mutatio statûs æqualiter in utroque corpore recipi debet; undè licet actioni æqualis semper sit et contraria reactio, non idcircò tamen inter corpus agens et patiens fieri debet æquilibrium, idque Newtoniano exemplo manifestum est; si equi lapidem trahentis conatus seu vis activa major sit vi quâ lapis per gravitatem suam, plani scabritiem, mediique resistentiam, equo trahenti reluctatur, equus lapidem trahet cum eâ totius suæ vis parte, quæ post superatam lapidis gravitatem, plani scabritiem, mediique resistentiam, ipsi residua est; si autem totus trahentis equi conatus hisce tribus resistentiis minor sit, vel si ipsis sit æqualis, equus lapidem non movebit. Quare totus ac integer lapidis renixus qui componitur ex ipsius gravitate, plani scabritie, resistentiâ medii et inertiâ quæ lapidi etiam omnibus aliis viribus destituto inest, actioni equi lapidem trahentis est semper æqualis.

(b) 33. Quoniam vis *N.* agit secundùm lineam A C, ipsi B D, parallelam, hæc vis, (per Leg 2.) nihil nisi velocitatem secundùm lineam ipsi B D, parallelam producet, ac proindè non mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam B D, a vi alterâ genitam; cum corpus iners duabus hisce viribus ac directionibus simul obsequi possit, et (per leg. 1.), debeat, atque hîc supponatur vires *M*, et *N*, in mobile eodem modo simul agere ac si singulæ seorsim in illud quiescens imprimerentur.

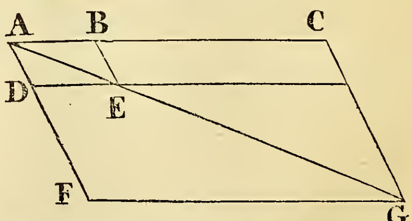
(c) 34. Idcircò cum in fine ejusdem temporis, corpus quod hîc tanquam punctum consideratur, simul esse debeat in utraque lineâ C D, et B D, in utriusque lineæ concursu D reperiatur, necesse est; quia autem initio et fine temporis dati corpus reperitur in rectâ A D, nempè primùm in A, et deindè in D, toto tempore dato motum fuit per lineam A D, nam ex duobus punctis A, et D, datis, recta, A D, positione data est; et corpus quibuslibet viribus impulsum, cessante virium actione, movetur uniformiter in directum secundùm ultimam directionem ex viribus impressis resultantem, (per Leg. 1. et 9.)

35. Motus compositus per diagonalem A D, motibus per latera A B, AC, disjunctis non est æqualis, sed tantùm æquipollet. Nam cum eadem sit corporis massa, motûs quantitates per diagonalem et per latera sunt ut velocitates uniformes (6) seu ut spatia A D, A B, A C, eodem tempore percursa (5); est autem summa laterum A B + A C, major diagonali A D; ergo summa quantitatum motûs per latera, major est quantitate motus per diagonalem. Verùm quia idem est motus, sive mobile per diagonalem A D, celeritate æquabili ut A D, ex vi unicâ impressâ feratur, sive viribus conjunctis per latera A B, A C, impellatur, liquet motum per diagonalem, motibus per latera disjunctis æquivalere.

Si mobile a pluribus quàm duabus viribus in loco A, simul impressis impellatur, inveniri semper poterit unica directio et velocitas ex omnibus separatis composita ipsisque æquipollens, quæ *media directio* dicitur; duarum enim virium media directio reperiatur (per coroll. 1. *Newt.*); deinde diagonalis illa tanquam spatium vi unicâ percursum consideretur, et cum spatio tertiâ vi descripto pari ratione componatur, sicque vires omnes ad unicam reducentur.

37. Motus omnis in quotcumque alios laterales ipsi æquipollentes resolvi potest; nam motus per A D, æquabilis; facto triangulo quocumque A B D, resolvitur in motus per latera A B, A C, motui per diagonalem A D, æquipollentes (35). Eâdem ratione motus per A B, in duos quoscumque alios, descripto circà latus A B triangulo resolvitur, idemque de motu per A C, et de aliis quibuscumque motibus dici debet.

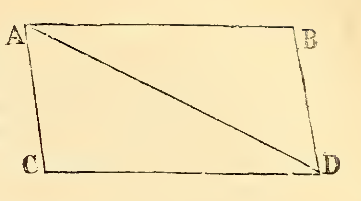
38. Si corpus aliquod A, duplici vi per A C, et per A F, ità urgeatur, ut motus in eâdem ratione acceleretur vel retardetur, sive quod idem est, si spatia A B, et A D, AC, et A F, iisdem temporibus percursa, semper sint in constanti ratione, motu composito parallelogrammi diagonalem A G, describet....



Dem.... Ductis D E ad A B, et BE ad A D, parallelis, corpus conjunctis viribus motum, reperiri debet simul in utrâque lineâ D E, et E B, (34) adeóque in earum intersectione E; similiter ductis F G, ad A C, et C G, ad A F, parallelis, patet corpus motu composito eodem tempore reperiri in G, quo motibus disjunctis attingeret puncta C, et F; cum igitur (ex hyp.) sit A D, ad A B, seu D E, ut A F, ad A C, seu F G, recta A E, producta transit per punctum G; ergò corpus per diagonalem rectam A G, incedet. Q. e. d.

39. Si spatia secundùm unam directionem

perietur alicubi in lineâ illâ B D. Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in lineâ C D, et idcirco in utriusque lineæ concursu D reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab A ad D per Legem 1^{am}.



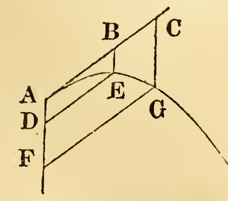
COROLLARIUM II.

Et hinc patet (d) *compositio vis directæ* A D *ex viribus quibusvis obliquis* A C *et* C D, *et vicissim resolutio vis cujusvis directæ* A D *in obliquas quascunque* A C *et* C D. *Quæ quidem compositio et resolutio abundè confirmatur ex Mechanicâ.*

Ut si de rotæ alicujus centro O exeuntes radii inæquales O M, O N filis M A, N P sustineant pondera A et P, et quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum O agatur recta K O L filis perpendiculariter occurrens in K et L, centroque O et intervallorum O K, O L ma-

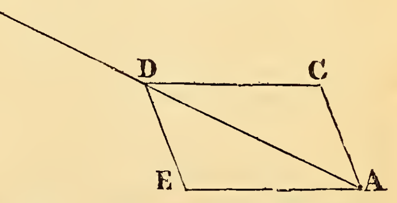
percursa non sint semper in eâdem ratione cum spatiis juxtà alteram directionem iisdem temporibus descriptis, mobile per eandem diagonalem rectam progredi non potest; si autem ratio spatiorum viribus separatis iisdem temporibus descriptorum continuò mutetur, mobile per curvam incedet, ut si motus uniformis cum motu continuò accelerato vel retardato componatur.

40. Corpus grave secundùm quamlibet directionem A C, quæ non sit ad horizontem normalis projectum, in terræ viciniis, sublatâ medii resistentiâ, parabolam A E G, describit, cujus diameter A F, est ad horizontem perpendicularis, et tangens A C, directio projectionis....



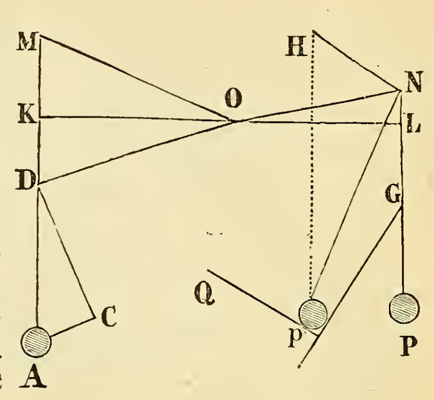
Dem ... Solâ vi projectionis impressâ, grave uniformiter movetur per rectam A C, (per leg. 1.), solâ vi gravitatis motu uniformiter accelerato per rectam A F, aut ipsi parallelam, descendit (26); quoniam verò motus per A C, æquabilis est, spatia A B, A C, sunt ut tempora quibus percurruntur (5). Spatia A D, A F, motu uniformiter accelerato iisdem temporibus descripta, sunt ut quadrata temporum quibus describuntur (27), seu ut quadrata rectarum A B, A C, aut ipsis parallelarum et æqualium D E, F G: cum igitur grave motu composito latum in fine temporum A B, A C, reperiatur in punctis E, et G, (34) evidens est quadrata ordinatarum D E, FG, curvæ A E G, (39) esse inter se in ratione abscissarum A D, A F, adeòque curvam A E G, esse parabolam, (per 20^{am}. lib. 1 Conic. *Apollon.*) cujus diameter A F, et tangens A C ordinatis D E, F G (32. prop. lib. 1 Conic. *Apollon.*) Q. e. D.

(d) 41. Quæ de motuum compositione et resolutione dicta sunt, ad vires mortuas possunt transferri. Si corpus seu punctum D, viribus mortuis, seu, ut loquuntur Mechanici, potentiis D E, D C, juxta directiones D E, D C, agentibus trahatur vel impellatur, et completo parallelogrammo E C, ducatur diagonalis D A, vires D C, D E, vi mediæ, ut D A, juxtà directionem D A, agenti æquivalent...



Dem .... vis separata D C considerari potest tanquam vis acceleratrix quæ in corpus D, juxtà directionem D C, continuò et uniformiter agit, et vis illa est ut celeritas quam dato tempore generat aut generare potest (13), adeòque illa celeritas per rectam D C, exponetur, cum ea recta sit ut vis ipsa D C, *(per hyp.)* simili argumento liquet rectam E D, esse ut celeritatem vi agente per D E eodem tempore dato generandam. Cum igitur celeritates D E, D C, in mediam, D A, æquipollentem componantur (per Coroll. 2. *Newt.*) manifestum est vires quoque laterales

jore O L describatur circulus occurrens filo M A in D: et actæ rectæ O D parallela sit A C, et perpendicularis D C (e). Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta, K, L, D, affixa sint, an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac si suspenderentur a punctis K et L vel D et L. Ponderis (f) autem A exponatur vis tota per lineam D A, et hæc resolvetur in vires A C, C D, quarum A C trahendo radium O D directè a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera D C, trahendo radium D O perpendiculariter, idem valet ac si perpendiculariter traheret radium O L ipsi O D æqualem; hoc est, idem atque pondus P, si modo pondus illud sit ad pondus A ut vis D C ad vim D A, id est (ob similia triangula A D C, D O K,) ut O K ad O D seu O L. Pondera igitur A et P, quæ sunt reciprocè ut radii in directum positi O K et O L, idem pollebunt, et sic consistent in æquilibrio: quæ est proprietas notissima (g)



D E, D C, in mediam æquipollentem D A, (35) componi, atque adeò vim ut DA, in laterales D E, D C, æquivalentes resolvi posse. Quare (35. 36) vires quotcumque laterales in unam æquivalentem componi possunt, et vis quælibet in alias quascumque ipsi simul æquipollentes potest resolvi.

42. Producatur A D, ad a, ità ut D A, et D a, æquales sint, et vis, ut D a, juxtà directionem D A, urgeat punctum D; punctum illud D, duabus viribus D A, æqualibus et contrariis sollicitatum, immotum permanebit; sed vis media D A, æquivalet viribus separatis D E, D C, (41), ergò si punctum D, sublatâ vi, D A, tribus viribus D a, D E, D C, urgeatur, non movebitur, sed erit inter vires æquilibrium.

43. Si punctum D, tribus viribus D a, D E, D C, in æquilibrio constitutis urgeatur, completo parallelogrammo E C, recta a D, producta, per angulum A, transit, estque D A = D a, parallelogrammi diagonalis, et vires sunt ut latera trianguli D A C, nempè ut D A, A C, seu E D, D C... *Dem*.... Ductâ diagonali D A, parallelogrammi E C, vis media ut D A, æquipollet viribus per latera D E, D C, (41); si virium directiones D A, D a, non eandem efficiant lineam rectam, aliquem angulum in D, continent, ac proindè punctum D, a viribus sibi invicem directè non oppositis impulsum moveri debet (contrà hyp.); si verò potentiæ illæ D A, D a, non sint æquales, major minorem superat, motusque oritur (etiam contrà hyp.). Ergò recta A D, producta, per angulum A, transit, estque D A = D a, parallelogrammi diagonalis, et quia A C = D E. vires sunt ut latera trianguli D A C. Q. e. d.

44. Cùm latera trianguli sint ut sinus angulorum oppositorum, erit vis D a, seu D A, ad vim D C, ut sinus anguli A C D, seu complementi illius E D C, ad sinum anguli D A C, seu A D E, seu complementi illius E D a; similiter demonstratur esse a D, ad E D, ut sinus anguli E D C, ad sinum anguli a D C. Si igitur tres potentiæ in æquilibrio circà punctum quodvis D, consistentes, dicantur ut libet 1a, 2a, 3a, erit 1a, ad 2am, ut sinus anguli quem 2æ et 3æ potentiarum directiones comprehendunt, ad sinum anguli quem 1æ et 3æ directiones formant. Omnes illas de virium et motuum compositione et resolutione demonstrationes accuratissimis confirmavit experimentis Clariss. *Gravesandius* in Elementis Physices.

(e) 45. Planum rotæ gravitatis expers et circà centrum fixum O, (fig. *Newt.*), mobile supponitur, fila quoque gravitate destituta finguntur; cumque eadem sit in variis a terrâ distantiis corporis gravitas (26) eademque proindè fili longioris vel brevioris quo pondus idem suspenditur tensio, evidens est planum rotæ iisdem semper viribus trahi, sive fila punctis M, et N, sive aliis quibusvis K, D, aut L, in filis M A, N P, sumptis affixa sint. Pondera igitur a punctis M, et N, suspensa idem valebunt ac si suspenderentur a punctis K et L, vel D et L.

(f) 46. Ponderis A, quo punctum D, tra-

Libræ, vectis, et Axis in Peritrochio. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

Quòd si pondus p ponderi P æquale partim suspendatur filo N p, partim incumbat plano obliquo p G: agantur p H, N H, prior horizonti, posterior plano p G perpendicularis: et si vis ponderis p deorsum tendens, exponatur per lineam p H, resolvi potest hæc in vires p N, H N. Si filo p N perpendiculare esset planum aliquod p Q, secans planum alterum p G in linea ad horizontem parallela; et pondus p his planis p Q, p G solummodò incumberet; urgeret illud hæc plana viribus p N, H N perpendiculariter, nimirum planum p Q vi p N, et planum p G vi H N. Ideoque si tollatur planum p Q, ut pondus tendat filum; quoniam filum sustinendo pondus jam vicem præstat plani sublati, tendetur illud eâdem vi p N, quâ planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis P N, ut p N ad p H. (h) Ideoque si pondus p sit ad pondus A in ratione quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum distantiarum filorum suorum p N, A M a centro rotæ, et ratione directâ p H ad p N; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque ideò se mutuò sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem p, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: et inde vires cunei et mallei inno-

hitur, vis tota D A, resolvi potest (41) in vires laterales et æquipollentes A C, et D C, ità ut punctum D, urgeatur simul vi ut D C, secundùm directionem D C, et vi ut C A, secundùm directionem rectæ O D, productæ; quia verò centrum O, rotæ fixum supponitur, vis ut A C, trahendo punctum O, juxtà directionem radii O D, nullum motum creat, nihilque valet ad rotam circà centrum O, movendam; vis autem altera D C, trahendo radium D O perpendiculariter, idem valet ad rotam circà centrum O, volvendam, ac si perpendiculariter traheret alterum radium O L, ipsi O D, æqualem; vires enim æquales æqualibus radiis pariter applicatæ eodem modo rotam movere debent; si itaque pondus aliquod P, e puncto L, suspensum sit vi D C, æquale, seu, quod idem est, si pondus P, sit ad pondus A, ut recta D C, ad rectam D A, quæ exponit vim absolutam ponderis A, rota his duabus viribus A, et P, in partes contrarias æqualiter tracta non movebitur. Verùm in triangulis A D C, D O K, anguli D A C, et K D O, ob parallelas A C, D O, et prætereà anguli ad K et C recti, æquales sunt, adeòque triangula illa sunt similia et D C : D A = O K : D O, seu O L; pondera igitur A, et P, quæ sunt reciprocè ut radii in directum positi O K, et O L, seu quæ sunt reciprocè ut perpendiculares O K, et O L, ex centro O, in eorum directiones ductæ idem pollebunt, et sic consistent in æquilibrio.

(g) 47. Sit K L, recta inflexilis et gravitatis expers circà punctum fixum seu fulcrum O, volubilis, hæc vectem et libram exhibet atque etiam peritrochium circà axem volubile potest exponere, seu rotam cujus est radius longior O L, et centrum O, circà quod rota et cylindrus cujus est radius brevior O K, revolvi possunt; ex demonstratis autem (46) patet esse in his tribus machinis æquilibrium, cum potentiæ seu pondera A, et P, sunt inter se reciprocè, ut rectæ a centro O, ad eorum directiones normaliter ductæ. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tantò major; nam, manente distantiâ O L, vis ponderis P, ad movendam rotam, est ut pondus P absolutum, et manente pondere P, crescit vis illius ad movendam rotam in ratione distantiæ directionis ponderis a centro; duplicatâ enim vel triplicatâ illâ distantiâ, pondus idem P, est in æquilibrio cum duplo vel triplo pondere, cujus distantia directionis a centro est subdupla vel subtripla (46). Ergò in his tribus machinis vis potentiæ seu ponderis ad movendam machinam circà centrum motûs, est semper in ratione compositâ ponderis absoluti seu intensitatis potentiæ, et distantiæ directionis illius a centro motûs. Vim autem illam ponderis aut potentiæ ad machinam movendam *momentum potentiæ* aut *ponderis* vocant Mechanici.

(h) 48. Vis quâ pondus p, tendit filum obliquum p N, dicatur π, et normalis ex centro O, in filum p N, ducta dicatur n, et erit ex demonstratis π : P, seu p = p N : p H. Prætereà si vis π, in æquilibrio cum pondere A consistat, erit etiam (47) A : π = n : K O

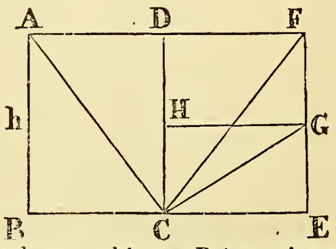
tescunt: utpote cùm vis quâ pondus p urget planum p Q, sit ad vim, quâ idem vel gravitate suâ vel ictu mallei impellitur secundum lineam p H in plana, ut p N ad p H; atque ad vim, quâ urget planum alterum p G; ut p N ad N H. Sed et vis Cochleæ per similem virium divisionem colligitur; quippe quæ cuneus est a vecte impulsus. (i) Usus igitur Corollarii hujus latissimè patet, et latè patendo veritatem ejus evincit; cùm pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diversimodè demonstrata. Ex hisce enim facilè derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tensis et ponderibus directè vel obliquè ascendentibus, cæterisque potentiis Mechanicis componi solent, ut et vires Tendinum ad animalium ossa movenda.

undè per compositionem rationum erit A × π : p × π = n × p N : K O × p H, seu A : p = n × p N : K O × p H; et p : A = K O × p H : n × p N; ideóque si pondus p, sit ad pondus A, in ratione quæ componitur ex ratione reciprocâ minimarum distantiarum, n, et K O, filorum suorum p N, A M a centro rotæ, et ratione directâ p H, ad p N, erit æquilibrium.

(i) 49. Cunei et cochleæ vires totamque ferè mechanicam hisce theorematibus demonstravit Clariss. *Varignonius*. Quàm latè pateat eorum usus manifestum est ex præclaro opere Joannis Alphonsi Borelli de motibus animalium, et ex variis, inter quas Bernoullianæ eminent, de musculorum motu dissertationibus; sed hæc fusiùs prosequi præsentis non est instituti; in proximo scholio machinarum vires generali mechanicæ principio determinare satis erit; ut autem ea quæ nobis illustranda occurrent in meliori lumine collocentur, generales motuum leges, ne omissis quidem definitionibus, præmittendas esse judicavimus.

(k) 50. Corpus perfectè elasticum dicitur cujus partes ex ictu flectuntur, seu introcedunt, et deindè eâdem vi quâ flexæ sunt, sese in priorem statum contrariâ directione restituunt. Corpus imperfectè elasticum est cujus partes ex ictu flexæ in priorem quidem statum redire nituntur, sed minori vi eâ quâ flexæ sunt. Corpus non elasticum vocatur cujus partes ictu percussæ nullâ vi sese restituere conantur. Corpus unum in alterum directè impingere dicitur, si secundùm rectam ad contactum perpendicularem impingat; obliquè verò si secundùm rectam ad contactum obliquam. Cùm corpora in se mutuò non agant, nisi per massam et velocitatem, tanquam axioma ex legibus 2â et 3â notissimum innumerisque confirmatum experimentis supponimus quantitates motûs æquales et contrarias in conflictu sibi mutuò æquipollere.

51. Si globus A, in planum immobile B E, incurrat, quæritur illius motus post impactum .... 1°. Globus ille in planum directè impingat per A B; si globus et planum omni elasticitate destituantur, globi motus post impactum in B, omninò extinguitur, cùm nulla vis globum repellat; si autem planum et globus perfecto ela-



sterio donentur, globus per B A, post impactum resiliet eâdem quâ advenit celeritate B A; nam in corporibus perfectè elasticis (50) vis restitutiva æqualis est vi compressivæ, undè si imperfecta fuerit vis elastica, globus minori velocitate B h, resiliet .... 2°. Globus A, in planum B E, velocitate et directione A C, obliquè impingat, illius motus resolvatur in motus laterales quorum unus A D, sit plano B E, parallelus, alter autem A B, eidem plano perpendicularis (37), globus A, motu secundùm A D, ad planum non accedit, sed tantùm motu secundùm perpendicularem A B, vel D C, velocitas globi respectu plani B E, est tantùm ut perpendicularis A B; at verò si A C, foret perpendicularis ad planum B E, velocitas quâ ad planum accederet, foret ut A C; ergò cùm impetus ejusdem corporis in planum, sint ut velocitates quibus ad planum accedit, ictus obliquus est ad perpendicularem, ut A B, ad A C; seu sumptâ A C, tanquam radio, ut sinus anguli incidentiæ A C B, ad sinum totum ..... 3°. Si nulla sit in corporibus A, et B E, elasticitas, globus A, per A C, incurrens movebitur per C E, celeritate ut C E = A D; nam motus perpendicularis A B, vel D C, ex demonstratis, extinguitur, remanetque tantùm motus C E, cui planum ut potè parallelum non opponitur; si verò perfectum fuerit elaterium, resiliet globus per C F, celeritate C F = A C, et angulus reflexionis F C E, æqualis erit angulo incidentiæ A C B; nam per vim restitutivam elaterii resilit per normalem C D, celeritate C D, seu B A, et prætereà motu ad planum parallelo progreditur per C E, celeritate ut C E = A D, ergò motu composito (Coroll. 1.

COROLLARIUM III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, et differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per Legem III, adeoque per Legem II æquales in motibus efficiunt mutationes versùs contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ priùs. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem. (k)

Newt.) percurret diagonalem C F; et cum in parallelogrammis D B, D E, omnia sint paria, erit F C = A C, et angulus F C E, = A C B. Tandem si corpora imperfectè fuerint elastica, manebit quidem post impactum velocitas A D, seu C E, plano parallela, sed velocitas perpendicularis C H, minor erit velocitate D C, seu A B, et completo parallelogrammo H E, globus per diagonalem C G, resiliet.

52. Si globi non elastici in se mutuò directè impingant, quæritur illorum motus post conflictum .... 1°. Globi in eandem plagam ferantur, subsequens fugientem impellet, donec ambo simul tanquam unum corpus eâdem directione ac velocitate incedant, eritque (coroll. 3. *Newt.*). summa quantitatum motûs eadem antè et post conflictum; communis ergò post conflictum velocitas invenitur, summâ quantitatum motûs antè conflictum per summam massarum divisâ (6) .... 2° Globi contrariis directionibus sibi motuò occurrant, si æqualis in utroque fuerit motûs quantitas, post conflictum ambo quiescunt (50). Si verò inæquales sint motûs quantitates, per conflictum extinguitur in singulis quantitas motûs globi debiliùs moti (50), et ambo simul post impactum communi velocitate ac directione quasi unicum corpus progrediuntur, estque quantitas motûs in utroque simul residua, differentiæ quantitatum motûs antè conflictum æqualis (coroll. 3. *Newt.*) Hinc communis post conflictum velocitas habetur, si differentia illa quantitatum motûs antè conflictum ad summam massarum applicetur (6). In hoc utroque casu communis post conflictum velocitas in globi cujusque massam ducta, est illius quantitas motûs post impactum (6), ex quâ et quantitate motûs ejusdem globi ante conflictum, per subtractionem invenitur quantitas motûs in conflictu acquisita vel amissa; quia verò in omni globorum non elasticorum conflictu directo, vel motus omnis cessat, vel globi post impactum communi celeritate feruntur, manifestum est; respectivam globorum velocitatem per conflictum extingui.

53. Globi elastici in se invicem directè incurrant, quæritur eorum motus post conflictum . . . . . 1°. Mutatio quæ ex mutuo corporum perfectè elasticorum conflictu in utriusque corporis motu nascitur, dupla est mutationis quam ictus idem in iisdem corporibus omni elaterio destitutis produceret, (in corporibus imperfectè tantùm elasticis mutatio major est quàm in non elasticis, sed duplâ minor.) Nam partes in utroque corpore æquali vi ex ictu comprimuntur (Leg. 3.) Si corpora omni elaterio destituerentur post conflictum vel quiescerent, vel in eandem plagam velocitate communi progrederentur (52) nec partes flexæ restituerentur; si autem accedat vis elastica, partes flexæ sese restituent vi et directione (50) quæ semper contraria erit vi compressivæ, et in corporibus perfectè elasticis huic æqualis, in aliis minor; actio igitur corporum in se mutuò ex elaterii restitutione orta, actioni ex impactu nascenti æqualis est in corporibus perfectè elasticis, minor in aliis, ex quibus et *Lege* 2ª constat quod erat primò propositum . . . . 2° Corpora perfectè elastica eâdem velocitate respectivâ post conflictum recedunt, quâ antè conflictum ad se invicem accedebant; in corporibus verò imperfectè tantùm elasticis, velocitas respectiva quâ post ictum discedunt, est ad velocitatem quâ antè ictum ad se mutuò accedebant, in ratione vis restitutivæ ad vim compressivam; nam cùm in conflictu corporum non elasticorum omnis velocitas respectiva, quâ ad se mutuò accedebant, destruatur ex ictu (52), sitque vis restitutiva elaterii perfecti vi compressivæ æqualis et contraria, manifestum est in corporum perfectè elasticorum conflictu, velocitatem respectivam ex solo impactu amissam, contrariâ directione restitui; in corporibus verò imperfectè elasticis eam tantùm restitui velocitatis respectivæ partem, quæ est vi restitutivæ proportionalis . . . . 3°. Ut igitur corporum perfectè elasticorum motus post conflictum directum inveniatur, considerentur corpora tanquam omni elaterio destituta, et in eâ hypothesi quæratur (52) quantitas motûs ex conflictu in unoquoque corpore acquisita vel amissa secundùm eam directionem quâ corpus ante conflictum movebatur, eadem motûs quantitas duplicata, erit quantitas motûs in corpore perfectè elastico acquisita vel amissa, quæ proindè quantitati motûs corporis antè conflictum addita vel dempta, dat quantitatem motûs illius corporis post conflictum . . . . 4° Corporum imperfectè elasticorum motus post conflictum invenitur, si data sit ratio vis restitu-

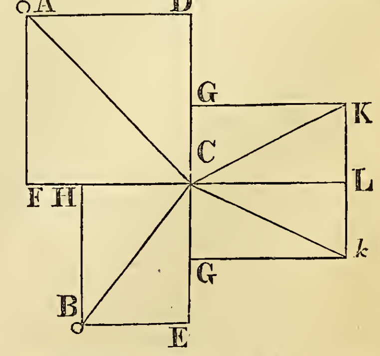
(l) Ut si corpus sphæricum A sit triplo majus corpore sphærico B, habeatque duas velocitatis partes; et B sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipsius A sit ad motum ipsius B, ut sex ad decem: ponantur motus illis esse partium sex et partium decem, et summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus A lucretur motûs partes tres vel quatuor vel quinque, corpus B amittet partes totidem, adeoque perget corpus A post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, et B cum partibus septem vel sex vel quinque,

tivæ elaterii ad vim compressivam, sive, quod ex demonstratis idem est, ratio velocitatis respectivæ post impactum ad velocitatem respectivam antè impactum, quam rationem in iisdem corporibus constantem esse, experimentis probavit NEWTONUS, nisi tamen partes corporum ex congressu lædantur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiantur. Corpora omni elaterio destituta supponantur, et in eâ hypothesi quæratur quantitas motûs in unoquoque corpore ex ictu acquisita vel amissa, cui motûs quantitati si addatur quantitas motûs vi elasticæ proportionalis, summa erit vera quantitas motûs ex conflictu corporum imperfectè elasticorum in unoquoque acquisita vel amissa, ex quâ datâ et ex quantitate motûs corporis cujusque antè conflictum, reperitur, ut suprà. omnis quantitas motûs illius post conflictum. Exemplo lux affulgebit.

(l) 54. Globus A, sit triplo major globo B, habeatque duos velocitatis gradus, illius motûs quantitas (6) erit ut 3×2, seu 6. B, sequatur in eâdem rectâ cum velocitatis gradibus, 10, eritque quantitas motûs globi B, 1×10, seu, 10, ... 1°. Si globi elastici non sunt, velocitas communis post conflictum (52) erit 16 : 4, seu 4; quare quantitas motûs ipsius A, post conflictum erit 3×4, seu 12. B, verò quantitas motûs erit 1×4, seu 4. Itaque quantitas motûs a corpore B, amissa est, 6, et corpori A, acquisita est etiam, 6 . . . . 2°. Si globi sunt perfectè elastici, quantitates illæ duplicari debent (53), erunt igitur 12 et 12. Si quantitati motûs 6, globi A, antè conflictum jungas, 12, summa erit, 18, quantitas motûs illius post conflictum; si verò ex quantitate motûs, 10, ipsius B, antè conflictum subduxeris, 12, quantitatem motûs per conflictum amissam, residuum est—2, quod signum—, ut notum est, contrariam positionem significat, seu corpus B, post ictum in contrariam plagam resilit cum hâc motûs quantitate 2 . . . . 3°. Si globi A et B, sint imperfectè elastici, sitque v. gr., eorum vis restitutiva subdupla vis compressivæ, erit vis compressiva ad vim restitutivam (seu 2, ad 1) ut quantitas motûs, 6, ex ictu acquisita vel amissa ad quantitatem motûs, 3, solâ vi restitutivâ acquisitam vel amissam; quare hæc quantitas, 3, addatur quantitati, 6, ex ictu acquisitæ in corpore A, et amissæ in corpore B, summa, 9, erit quantitas motûs integra tam ex ictu quàm ex elaterio acquisita vel amissa; unde quantitas motûs globi A, post conflictum est, 6 + 9, seu, 15, globi B, 10 — 9, seu 1, quarum summa est, 16.

(m) 55. Cognitis quantitatibus motuum quibuscum corpora post conflictum pergent, invenietur cujusque velocitas dividendo quantitatem motûs cujusque corporis per illius massam (6), aut etiam quia ejusdem corporis diversæ quantitates motûs, sunt ut velocitates (6), dicendo, ut quantitas motûs antè conflictum ad quantitatem motûs post conflictum, ità velocitas corporis antè conflictum ad illius velocitatem post conflictum.

(n) 56. Si corpora quæcumque A et B, diversis in rectis A C, B C, moventia, incidant in se mutuò obliquè in C, et requirantur eorum motus post impactum. Cognoscendus est situs plani F L, a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursûs C; deinde corporis utriusque motus A C, B C, (per Coroll. 2.) distinguendus est in duos A D, et A F, B E et B H, unum nempè A F seu D C, et B H seu E C, huic plano F L perpendicularem, alterum A D, B E, eidem parallelum. Quia verò corpora secundùm parallelas A D, B E, ad se mutuò non accedunt, sed tantùm secundùm perpendiculares D C, E C, in se invicem agunt, motus paralleli A D, B E, per impactum non mutantur, adeòque retinendi sunt iidem post conflictum qui erant ante conflictum; et motibus perpendicularibus D C, E C, mutationes æquales in partes contrarias C D, C E, tribuendæ sunt sic ut summa conspirantium et differentia contrariorum maneat eadem ante et post conflictum (Coroll. 3. *Newt.*) Ut itaque corporum A et B, in se mutuò obliquè incidentium motus post ictum inveniantur, mota duntaxat supponantur per lineas D C et E C, velocitatibus D C et E C, atque



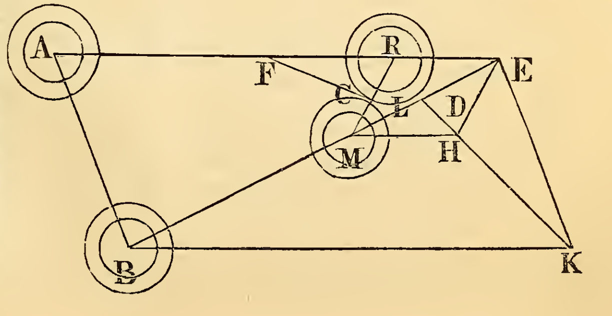
in eâ hypothesi quærantur (52, si fuerint elasti-

existente semper summâ partium sexdecim ut prius. Si corpus A lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septemdecim vel octodecim, corpus B, amittendo tot partes quot A lucratur, vel cum unâ parte progredietur amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel cum unâ parte regredietur amisso motu suo et (ut ita dicam) unâ parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium 15+1 vel 16+0, et differentiæ contrariorum 17 — 1 et 18 — 2 semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum et reflexionem. (m) Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis A motus erat partium sex ante reflexionem et partium octodecim postea, et velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motûs partes sex ante reflexionem ad motûs partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

(n) Quod si corpora vel non Sphærica vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo obliquè, et requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs plani a quo corpora concurrentia tanguntur in punc-

ca, 53, si non fuerint elastica) eorum velocitas post conflictum in lineâ C D, vel C E, ex quâ datâ, et ex velocitate parallelâ plano F L, etiam datâ, compositus corporis motus (per Coroll. 1. *Newt.*) facilè reperietur. Sit exempli causâ C G, velocitas corporis A, post impactum per D E, in C; sumptâ C L, æquali et parallelâ velocitati secundùm A D, quæ eadem post conflictum remanet, compleatur parallelogrammum G L, et A movebitur per illius diagonalem C K, velocitate ut C K, (per Coroll. 1. *Newt.*) Si corpora angulosa sibi per angulos occurrant, orientur motus circulares, dum pars corporis ex vi insitâ in unam plagam movetur, altera verò ex conflictu fertur in alteram plagam circâ corporis centrum.

57. Datis duorum globorum A et B, directionibus, celeritatibus et diametris, unà cum eorum situ antè conflictum, facile est determinare punctum concursûs C, et situm plani F L, utrumque globum in puncto C, contingentis. Globus A, feratur per lineam A E, et celeritate ut A E, globus B verò secundùm directionem B E, celeritate ut B D, moveatur. Junctis A et B globorum centris per lineam A B, compleatur parallelogrammum A B K E. Junganțur puncta D et K, et recta D K, ex centro E, intersecetur arcu qui describitur radio E H, summæ semidiametrorum globorum A et B, æquali. Ex puncto intersectionis H, ducatur recta H M, ipsi E A parallela, erunt M et R, loca in quibus globorum centra constituentur, ubi secum invicem concurrent, et sumptâ lineâ R C, æquali radio globi A, recta F L, ad R C perpendicularis, in puncto C, situm plani designabit . . . . *Dem* . . . Quoniam recta H M, est lineæ B K parallela (per const.) erit D M : D B = M H : B K = R E : E A, ob R E = M H : et E A = B K; ergò dividendo B M : B D = A R : A E, et alternando B M : A R = B D : A E. Cum igitur sit B M



to concursûs: dein corporis utriusque motus (per Corol. 11.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; et motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium et differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, et nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis Centrum (o), *corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motûs vel quietis; et propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus et impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.*

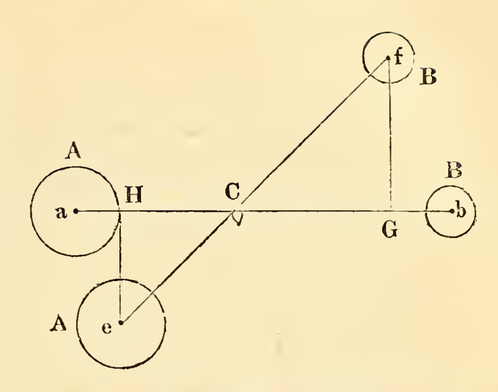
ad A R, ut celeritas globi B, ad celeritatem globi A; globus A in R, et B in M, eodem tempore pervenient (6). Cumque sit M R = E H, globi in puncto C, se mutuò contingent, et planum F L, ad radium R C, in puncto C, perpendiculariter ductum utrumque globum continget. Q. e. d.

(o) 58. Centrum gravitatis corporis cujusque, est punctum intrà vel extrà corpus pósitum, circà quod undique partes in æquilibrio consistunt, ità ut si per hoc punctum ducatur planum figuram utcumque secans, corporis segmenta quæ utrinque sunt circà planum illud librata æquiponderent; si igitur ex centro gravitatis corpus aliquod suspendatur, datum quemcumque situm retinebit, et semper quiescet, si centri gravitatis descensus impediatur; unde totam corporis gravitatem in centro gravitatis locatam fingunt Mechanici, et pro corpore gravi solum gravitatis centrum in suis demonstrationibus surrogare solent. Planum gravitatis est figura plana per centrum gravitatis transiens; Diameter verò gravitatis est recta per centrum gravitatis ducta. Quare planorum gravitatis, communis intersectio diametrum gravitatis efficit, et in diametrorum gravitatis concursu centrum gravitatis positum est. Centrum magnitudinis vocatur punctum illud, per quod divisa magnitudo relinquit duas partes utrinque æquales; ut in circulo et ellipsi, ductis utcumque per centrum lineis rectis, lineæ illæ totaque figura in partes æquales dividuntur; ac proindè si gravia homogenea, id est, quorum gravitates sunt voluminibus proportionales, secundum longitudinem in partes similes et æquales secari possint, centrum gravitatis a centro magnitudinis non differt.

59. Ex hisce definitionibus facilè colligitur, omnium circulorum, ellipsium, sphærarum et figurarum quarumvis regularium, centrum gravitatis idem esse cum centro magnitudinis, modò tamen gravia supponantur homogenea. In figuris autem irregularibus, communi duorum gravitatis diametrorum intersectione determinari potest centrum gravitatis (58). Sic in quolibet parallelogrammo, centrum illud in duarum diagonalium concursu positum est; in triangulo reperitur in intersectione duarum rectarum quæ a duobus angulis ductæ, latera angulis illis opposita, totumque proindè triangulum bifariam, adeoque in partes æquiponderantes secant, in prismatibus et cylindris, centrum gravitatis est punctum medium rectæ basium oppositarum centra conjungentis; et generaliter in omnibus corporibus quantumvis difformibus centrum gravitatis mechanicè invenitur, si corpus ab aliquâ sui parte liberè suspendatur, et ab eâdem parte a quâ pendet, demittatur perpendiculum ità ut in corpore linea quam fecerit perpendiculi filum notetur; deinde ab aliâ parte corpus idem liberè suspendatur ut priùs, noteturque iterùm linea perpendiculi ab hâc parte super corpus demissi; concursus enim duorum filorum perpendiculi (quæ sunt diametri gravitatis) erit centrum gravitatis corporis dati.

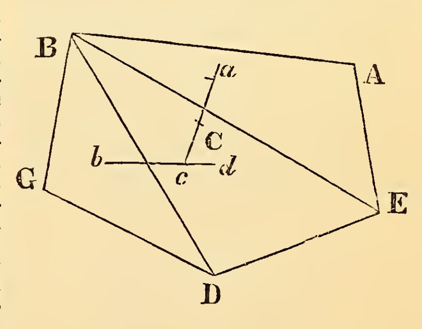
60. Centra gravitatis a et b, corporum A et B, rectâ seu vecte inflexibili et gravitatis experte, a b jungantur; et ità dividatur a b, in C, ut sit pondus A, ad pondus B, ut C b, ad C a, punctum C, erit centrum gravitatis commune duorum corporum A et B... *Dem...* punctum C, fixum maneat, sitque 1o. a b, horizonti parallela.

et quia a b est vectis cujus fulcrum C, ponderis B momentum seu conatus ad vectem circà C movendum, erit ut B $\times$ C b, et ponderis A momentum ut A $\times$ C a (47), verùm (per hyp.) A : B = C b : C a, adeóque A $\times$ C a = B $\times$ C b; ergò momenta ponderum A et B, æqualia sunt, et proinde in æquilibrio circà punctum C, consistunt.... 2°. vectis, a b, circà punctum C fixum, rotetur, et situm e f, inclinatum ad horizontem a b, obtineat, ductis *f* G, *e* H, rectis horizonti a b, perpendicularibus, quæ sunt gravium directiones, ponderum A et B, momenta erunt ut A $\times$ C H et B $\times$ C G, (47); sed ob triangula H C e, G f C, similia, G C : H C = C f, seu C b : C e, sive C a = A : B, adeóque G C : H C = A : B et A $\times$ C H = B $\times$ C G; momenta igitur ponderum A et B, in situ quocumque dato æqualia sunt et semper æquilibrantur. Quare (58) punctum C, est commune gravitatis centrum duorum corporum A et B. Q. e. d.

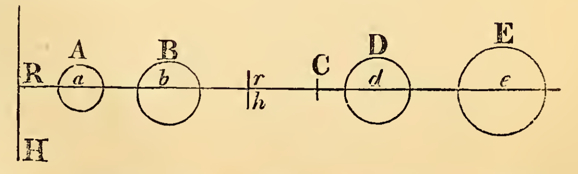


61. *Coroll.* 1. . . . . Duorum corporum A et B, commune gravitatis centrum sit c, et tertii corporis D, centrum gravitatis proprium sit d; jungatur recta c d, quæ ità dividatur in C, ut sit summa ponderum A + B ad pondus D, sicut C d, ad C c, trium corporum A, B, D, centrum gravitatis commune erit in C; nam duo corpora A et B, (58) considerari possunt tanquam in suo communi gravitatis centro c, coacta, adeóque si fuerit A + B : D = C d : C c, erit C, centrum gravitatis commune trium corporum A, B, D, (60). Eâdem ratione quatuor, pluriumve, prout quisque voluerit, corporum commune gravitatis centrum reperietur.

62. *Coroll.* 2. . . Figuræ cujusvis planæ et rectilineæ centrum gravitatis hoc modo inveniri potest. Figura data, A B G D E in sua triangula dividatur, duorumque triangulorum, B G D, B D E, centra gravitatis b et d, rectâ jungantur, et ità dividatur, b d, in c, ut area trianguli B G D, sit ad aream trianguli B D E, sicut c d, a d, b c, eritque, c, centrum gravitatis commune duorum triangulorum B G D, B D E, (60). Centrum gravitatis, a, trianguli B A E, et centrum, c, figuræ B G D E, mox inventum jungantur rectâ c a, quæ ità dividatur in C, ut area trianguli B A E, sit ad aream figuræ B G D E, sicut C c, ad C a, et C erit centrum gravitatis totius figuræ datæ A B G D E, (61). Hæc omnia clarè intelliguntur, si figurarum area quævis, instar ponderis centro gravitatis appensi consideretur.



63. Sit recta R H, horizonti perpendicularis quæ axis rotationis dicatur, et in eâ sumatur centrum rotationis R, seu punctum fixum circà quod vectis horizontalis R e, cum appensis ponderibus A, B, D, E, rotari possit, sintque corporum centra gravitatis propria a, b, d, e, et eorum commune gravitatis centrum C, in vecte R e, ad eandem axis R H partem, posita; distantia R C, communis centri gravitatis C, a centro rotationis R, æqualis erit

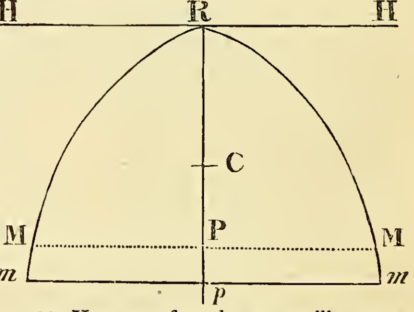


(p) Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, et distantia eorum dividatur in ratione datâ, punctum dividens vel quies-

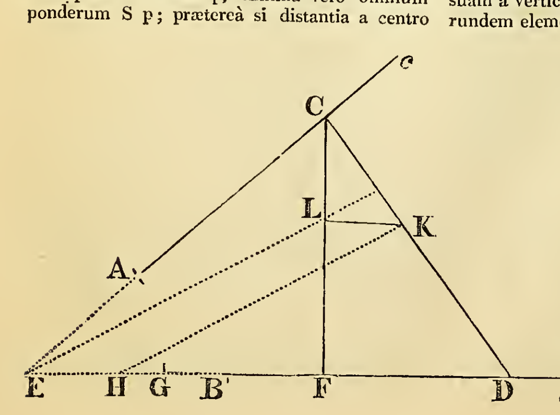
summæ factorum uniuscujusque ponderis in suam a centro rotationis R, distantiam, per summam ponderum divisæ ..... *Dem* ..... Momentum cujusque ponderis ad vectem circà centrum R, movendum, est ut factum ex illo pondere in suam ab eodem centro R, distantiam (47), et omnium momentorum summa, seu totus omnium ponderum ad vectem circà centrum R, movendum conatus, ut illorum factorum summa; verùm quia pondera omnia per vectem R e, dispersa, tanquam in suo communi gravitatis centro C, coacta considerari possunt (58), erit etiam totus omnium ponderum conatus ad vectem circà R, movendum, ut summa ponderum in distantiam R C ducta; quare summa factorum uniuscujusque ponderis in suam a centro rotationis R distantiam, æqualis est facto ex summâ ponderum in distantiam R C communis centri gravitatis C, a centro rotationis R; igitur $RC \times \overline{A + B + D + E}$, &c. $= A \times aR + B \times bR + D \times dR + E \times eR$ &c., adeóque $RC = A \times aR + B \times bR + D \times dR + E \times eR$ &c. $: \overline{A + B + D + E}$ &c. Q. e. d.

64. Si pondera ad eandem axis rotationis partem sita non sint, si v. gr. fuerit axis rotationis r h, erit $rC = \overline{D \times dr + E \times er} - A \times ar - B \times br : \overline{A + B + D + E}$. Nam momenta ponderum D et E, ad vectem circà r movendum sunt $D \times dr$, $E \times er$, et momenta contraria ponderum A et B, sunt $A \times ar$, $B \times br$; quare vis omnium ponderum ad vectem r e, movendum erit, $D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br$; sed si pondera in centro C, coacta supponantur, erit vis illa eadem, $rC \times \overline{A + B + D + E}$, ergò $rC \times \overline{A + B + D + E} = D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br$, ac proindè $rC = D \times dr + E \times er - A \times ar - B \times br : A + B + D + E$. Q. e. d.

65. Quapropter si omnia pondera sint ad eandem axis rotationis R H, partem posita, et quodlibet pondus vocetur p, summa verò omnium ponderum S p; præterea si distantia a centro rotationis dicatur x, ac proinde factum cujusque ponderis in suam a centro rotationis distantiam sit x p, et omnium factorum summa S x p; distantia communis centri gravitatis omnium ponderum a centro rotationis erit generaliter S x p : S p. Si verò pondera fuerint ad diversas axis rotationis r h, partes posita, et distantia cujuslibet ponderis a centro rotationis r, vocetur x, singula verò pondera quæ sunt ad partem r e, posita, dicantur p, eorumque summa sit S p; insuper singula pondera ad partem R r, sita dicantur q, et eorum summa sit S q, distantia communis centri gravitatis omnium ponderum a centro rotationis r, erit S x p — S x q : S p + S q, vel S x q — S x p : S p + S q; unde si S x p = S x q, manifestum est, centrum rotationis idem esse cum centro gravitatis.



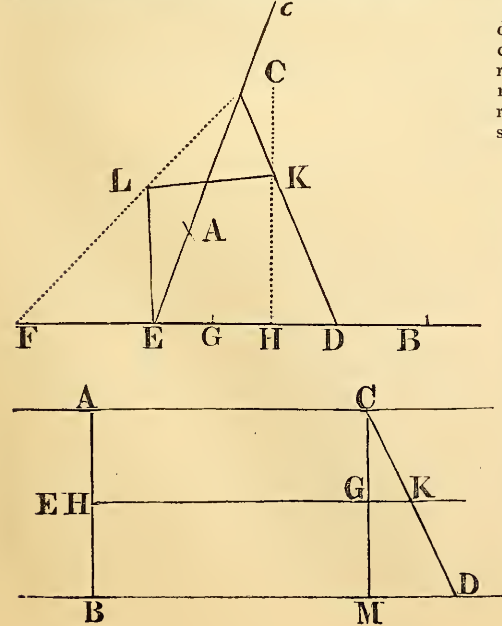
66. Harumce formularum auxilio, centra gravitatis figurarum curvarum reperiuntur; Nam si curvæ M R M, axis R P, quo ordinatæ M M m m, bifariam dividuntur, ut vectis habeatur, vertexque R, ut centrum rotationis et singulâ elementa qualia sunt M M m m, ut pondera vecti appensa considerentur, distantia centri gravitatis C, a centro rotationis seu vertice R, erit (per primam formulam) æqualis summæ factorum ex singulis elementis M M m m, in suam a vertice R, distantiam per summam eorundem elementorum divisæ.



(p) 67. Duo corpora C et D, æquabiliter moveantur in lineis rectis A C, B D, positione datis, jungaturque recta C D, et ità dividatur in K, ut sit D K, ad C K, ut corpus C, ad corpus D; punctum K, quod est centrum gravitatis corporum C et D, (60) vel quiescet vel movebitur uniformiter in lineâ rectâ positione datâ..... *Dem*... Concurrant lineæ A C et B D, in E. 1. Corpora C et D, ex punctis fixis A et B, in eandem plagam proficiscantur et iisdem temporibus ad puncta C et D perveniant, ac proinde spatia A C et B D, erunt in ratione da-

cit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ. Hoc postea in Lemmate XXIII. ejusque Corollario demonstratur, si punctorum motus fiant in eodem plano; et (q) eâdem ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant in eodem plano. Ergo si corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab

tâ velocitatum (5). In B E, capiatur B G, ad A E, in ratione datâ B D, ad A C, et cum data sit A E, dabitur quoque linea B G; sit F D, semper æqualis datæ E G, erit E F = G D, et quia B G : A E = B D : A C, (per const.) erit B G + B D, seu G D : A E + A C, seu E C = B D : A C, adeóque A C : B D = E C : G D, seu E F; est igitur E C ad E F; in ratione datâ, et propterea ex datis angulo C E F, et laterum E C, E F ratione, dabitur specie triangulum E F C, id est dantur tres anguli. Deinde secetur C F, in L, ut sit C L, ad C F, in ratione datâ C K, ad C D, id est in ratione corporis D, ad summam corporum C + D; et quia in triangulo E F C, specie dato, datur ratio laterum E F, F C, dataque est ratio C F, ad F L, dabitur quoque ratio ex his duabus composita E F, ad F L, adeóque ob angulum E F C, etiam datum dabitur specie triangulum E F L; Quare dum progrediuntur corpora C et D, punctum L, semper locabitur in rectâ E L, positione datâ, utpote quæ est basis trianguli E F L, in quo angulus F, idem constanter manet, et latus E F, positione datum ad latus F L, datam habet rationem. Junge L K, et quia C L : C F = C K : C D (per const.), similia erunt triangula C L K, C F D, et ob datam F D = E G, et datam rationem F D, ad L K, seu C D, ad C K; dabitur L K, magnitudine; lineæ L K, æqualis capiatur E H, et ductâ H K, erit semper E L K H, parallelogrammum, ob L K, æqualem et parallelam ipsi E H, locabitur ergò punctum K, in parallelogrammi illius latere H K, quod positione datum est; nam latus E L, positione, latus verò E H, positione et magnitudine datur. Quarè punctum K, seu centrum gravitatis in lineâ rectâ positione datâ progreditur. Quoniam verò, ex demonstratis, triangula C E F, L E F, specie, et tria latera E C, E L, E F, positione data sunt, manifestum est rationem rectæ E L, seu lineæ æqualis H K, ad E C, datam esse. Verùm quia punctum C, uniformiter movetur *(per hyp.)* uniformiter crescit recta E C, ergò pariter recta H K, uniformiter augetur, adeoque punctum K, æquabiliter progreditur in lineâ rectâ H K, positione datâ. Q. e. 1o. demonstrandum...



2o. Corpora ex punctis fixis A et B, in diversas plagas progrediantur, semperque capiatur B G, in partem oppositam directioni B D, F D, verò secundùm directionem B D, cætera fiant ut in superiori constructione eadem manebit demonstratio pro 2o. casu.

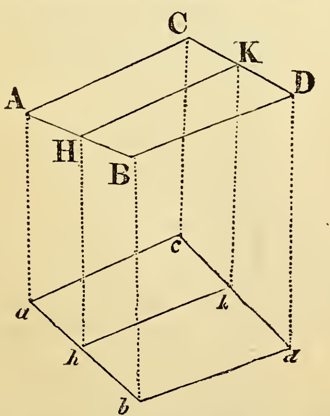
68. Si punctum concursus E, in infinitum abeat, parallelæ fient lineæ A C, B D, et ex superiori demonstratione patet centrum gravitatis K, vel quiescere vel uniformiter moveri, in lineâ H K, positione datâ, lineis A C, B D, parallelâ; si autem lineæ parallelæ A C et B D, ad se mutuò accedant tandemque coincidant, eadem semper valet demonstratio, ac proindè si corpora in eâdem rectâ moveantur, in hâc eâdem lineâ centrum gravitatis vel quiescet vel movebitur uniformiter.

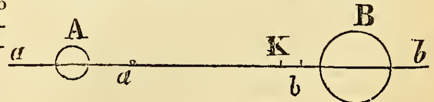
(q) 69. Si rectæ A C et B D, non in uno, sed in diversis planis positæ fuerint, ex singulis eorum punctis A et B, C et D, in quibus eodem tempore reperiuntur, in planum quodvis a b d c, pro lubitu assumptum demittantur perpendicula A a, B b, C c, D d; et ex centris gravitatis H et

hoc centro communi in ratione datâ. Similiter et commune centrum horum duorum et tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum et centri corporis tertii in datâ ratione. Eodem modo et commune centrum horum trium et quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium et centrum quarti in datâ ratione, et sic in infinitum. Igitur in systemate corporum quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, ideoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

(r) Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium cùm distantiæ centrorum utriusque a communi gravitatis centro sint reciprocè ut corpora; erunt motus relativi corporum eorumdem, vel accedendi ad centrum illud, vel ab eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem.

K, perpendicula H h, K k, excitentur, ob motum uniformem punctorum A et B, in lineis A C, B D, evidens est puncta a et b, uniformiter moveri in lineis a c, b d, et quia A a, B b H h, parallelæ sunt; lineæ A B. a b, in eâdem ratione datâ in H, et h, dividuntur; idemque dicendum de punctis K, et k, in lineis C D, et c d. Quare, ex demonstratis (67), punctum h, uniformiter progreditur in rectâ h k, adeóque centrum gravitatis H, semper movetur in plano H h K k, ad planum a b d c, normali; si loco plani, a b d c, aliud quodvis ad arbitrium assumeretur, eodem modo demonstrari posset centrum gravitatis H, moveri in plano ad assumptum perpendiculari; necesse igitur est ut centrum illud H, moveatur in communi illorum planorum ad alia pro lubitu assumpta perpendicularium intersectione, quæ cum sit linea recta H K, positione data, et punctum h, per rectam h k, uniformiter progrediatur, punctum H, æquabiliter fertur in lineâ H K. In omni igitur casu centrum commune gravitatis duorum corporum quæ motu uniformi per lineas rectas positione datas progrediuntur, semper quiescit vel movetur uniformiter in rectâ positione datâ.

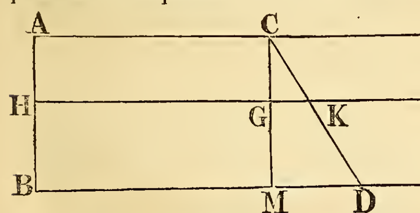




(r) 70. Si duobus corporibus A et B, quorum commune gravitatis centrum sit K, æquales motûs quantitates in partes contrarias de novo imprimantur, quibus eodem tempore percurrunt spatia A a, B b, centri gravitatis status non mutatur. Cum enim K, sit commune centrum gravitatis corporum A et B, *(per hyp.)* erit A : B = K B : K A (60) et quia impressæ quantitates motûs (6) A × A a, B × B b æquales sunt *(per hyp.)*, erit etiam A : B = B b : A a, adeòque K B : K A = B b : A a, et componendo vel dividendo K b : K a = B b : A a = A : B; dum igitur corpora A et B, ad puncta a et b, motibus impressis perveniunt, centrum K, immotum remansit (60), ac proindè ab æqualibus motuum mutationibus in contrarias partes factis non mutat statum suum motûs vel quietis. Quapropter cum mutua corporum actio (per leg. 2. 3.) æquales mutationes in utroque corpore versùs partes contrarias producat, commune gra-

In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat statum suum; et reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; distantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes summis totalibus corporum quorum sunt centra reciprocè proportionales, ideoque centris illis duobus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commune omnium centrum servat etiam statum suum: manifestum est quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter se nunquam mutat statum suum quoad motum et quietem. In tali autem systemate actiones omnes corporum inter se vel inter bina sunt corpora, vel ab actionibus inter bina compositæ; et propterea communi omnium centro mutationem in statu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in se invicem, vel quiescit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se, vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in directum; nisi a viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur de hoc statu. (s) Est igitur systematis corporum plurium Lex

vitatis centrum duorum corporum ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietum.



(s) 71. Motus progressivus seu corporis solitarii seu systematis corporum ex motu centri gravitatis semper æstimari debet.... *Dem*.... 1°. Corpora duo A et B, in lineis A C et B D parallelis, progrediantur cum velocitatibus, ut A C, B D, eorumque commune gravitatis centrum H, per rectam H K, lineis A C et B D, parallelam feratur; ducatur, C M, rectæ A B parallela. Quoniam $B : A = AH : BH$ (60) erit $B : B + A = AH : AB$, et ob parallelas A B, et C M; G K et M D, erit $AH : AB = CG : CM = GK : MD$, adeóque $GK : MD = B : A + B$, et $B \times MD = (A + B) \times GK$; verùm quia $AC = HG = BM$, erit $HK = AC + GK$, et $BD = AC + MD$; quarè $\overline{A + B} \times HK = \overline{A + B} \times AC + \overline{A + B} \times GK = A \times AC + B \times AC + B \times MD$, ob $\overline{A + B} \times GK + B \times MD$, ergò $\overline{A + B} \times HK = A \times AC + B \times BD$, seu summa corporum A et B, in velocitatem centri gravitatis H K, ducta, æqualis est summæ factorum in singulis corporibus A et B, in suam velocitatem A C, B D.... 2°. Si corpora contrariis directionibus C A et B D, moveantur, negativa erit quantitas motûs corporis A, propter contrariam directionem C A, adeóque differentia quantitatum motûs corporum, in plagas oppositas tendentium, seu quod idem est, quantitas motûs in eandem plagam, æqualis erit facto ex summâ corporum, in velocitatem centri gravitatis .... 3°. Si parallelæ A C, B D, ad se mutuò accedant tandemque coincidant, eadem semper manet demonstratio, quæ proindè etiam obtinet, dum corpora in eâdem rectâ feruntur . . . 4°. Si corpora non moveantur in lineis parallelis nec in eodem plano, uniuscujusque ponderis directio ac velocitas in duas alias resolvatur, quarum una sit viæ centri gravitatis parallela, altera verò ipsi perpendicularis, et ex demonstratis liquet summam quantitatum motûs corporum in plagam versùs quam movetur centrum gravitatis esse æqualem facto ex summâ corporum in velocitatem centri gravitatis.... 5°. Si æquabilis non sit corporum motus, sed quâcumque ratione acceleretur vel retardetur, temporibus infinitè parvis tanquam æquabilis spectari potest, iisque tempusculis summa quantitatum motûs corporum æqualis est facto ex summâ corporum in velocitatem centri gravitatis; undè quovis tempore quantitas motus singulorum corporum æqualis est quantitati motûs quam habuissent omnia corpora, si communi velocitate centri gravitatis simul lata fuissent . . 6°. Si trium corporum systema moveatur, duo

eadem quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu motus vel quietis. Motus enim progressivus seu corporis solitarii seu systematis corporum ex motu centri gravitatis æstimari semper debet.

COROLLARIUM V.

[t] *Corporum dato spatio inclusorum iidem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum sine motu circulari.*

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, et summæ tendentium ad contrarias, eædem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi) et ex his summis vel differentiis oriuntur congressus et impetus quibus corpora se mutuo feriunt. Ergo per Legem II. æquales erunt congressuum effectus in utroque casu; et propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur

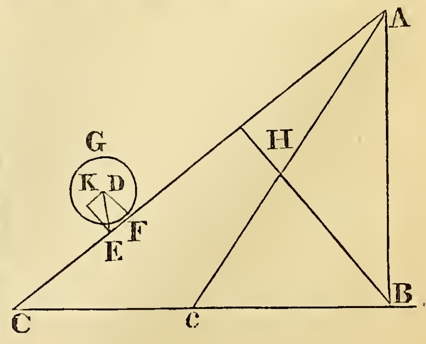
ex hisce corporibus in suo gravitatis centro coacta fingi possunt (ex *Dem.*) ac proindè trium pluriumve corporum aut etiam ejusdem corporis partium systema ad duorum duntaxat corporum systema reducitur; ergò quantitas motûs progressivi seu corporis solitarii seu systematis corporum, ex motu centri gravitatis æstimari debet. Q. e. d.

72. *Coroll.* 1. . . . . Si differentiæ quantitatum motûs versùs partes contrarias in systemate corporum sit nihilo æqualis, commune centrum gravitatis quiescit; si inæqualis est, progreditur in eam partem versùs quam prævalet motus.

73. *Coroll.* 2. . . . . Motus systematis corporum in plagam datam habetur, si centri gravitatis motus in duos motus resolvatur, quorum unus in plagam datam dirigatur, alter verò sit ipsi perpendicularis; nam summa corporum ducta in velocitatem centri gravitatis versus datam directionem exponit quantitatem motûs totius systematis in eandem partem progredientis.

[t] 74. Si navi quiescenti in quâ continentur corpora variis motibus agitata, motus in directum æquabilis imprimatur, omnia hæc corpora navis velocitatem æquè participant (*leg.* 1. 2.), adeóque singulis corporibus additur in eandem plagam æqualis velocitas, ac proinde motus navi impressus respectivas corporum velocitates non mutat; quare differentiæ velocitatum in corporibus quæ ad eandem partem tendunt, et summæ velocitatum in corporibus quæ ad partes contrarias tendunt, eædem manent antè et post motum navi impressum; sed ex his summis vel differentiis quæ sunt respectivæ corporum velocitates, oriuntur congressus et ictûs magnitudines quibus corpora se mutuò feriunt; nam si corpus aliquod M, velocitate C, in corpus quiescens m, incurrat, eadem est ictûs magnitudo ac si utrique corpori nova velocitas c, in eandem partem accederet, et corpus M, cum velocitate C + c, in corpus m, velocitate c, motum impingeret; corpus enim M, in m, non agit per velocitatem c, utrique corpori communem, sed per solam velocitatum differentiam C + c — c, seu C; hæc autem differentia est ipsamet velocitas quâ corpus M, in aliud m, quiescens agit. Iidem ergò erunt congressus ac proindè æquales congressuum effectus in utroque casu (per *leg.* 2.), et propterea manebunt motus respectivi in uno casu æquales motibus respectivis corporum in altero; si autem motus circularis navi imprimeretur, corpora, propter vim centrifugam (18) in varias partes cum variâ velocitate propellerentur.

[a] 75. Vis acceleratrix gravitatis, quâ corpus in plano ad horizontem inclinato juxtà plani directionem urgetur, est ad vim gravitatis acceleratricem quâ secundum directionem horizonti perpendicularem sollicitatur, ut altitudo plani ad ipsius longitudinem . . . . *Dem* . . . .



Globus G, plano A C, ad horizontem C B, inclinato incumbat; ex A, ad horizontem C B: demittatur perpendiculum A B, et ex centro D,

experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in Navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

Si corpora moveantur quomodocunque inter se, et a viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum) et secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem 11. ideoque nunquam mutabunt positiones et motus eorum inter se.

Scholium. (a)

Hactenus principia tradidi a Mathematicis recepta et experientiâ multiplici confirmata. Per leges duas primas et corollaria duo prima Galilæus invenit descensum gravium esse in duplicata ratione temporis, et motum

globi ad planum A C, ducatur recta D E, perpendiculo A B, parallela quæ exponat vim gravitatis acceleratricem quâ globus secundum directionem D E, horizonti perpendicularem urgetur; vis illa, D E, in duas vires resolvatur (41), quarum altera D F, sit ad planum A C, normalis quæ proindè tota plano sustinetur, altera verò D K;. seu F E, plano parallela quâ solâ globus ad motum secundùm directionem plani A C, sollicitatur, et erit vis acceleratrix juxtâ plani inclinati directionem agens, ad vim acceleratricem perpendiculariter sollicitantem, ut E F, ad D E; sed quoniam triangula E F D, A B C, ob parallelas D E, A B, et angulos rectos F et B, æquales, similia sunt, est F E: D E = A B : A C. Vis igitur acceleratix gravitatis secundum directionem plani inclinati A C, est ad vim gravitatis acceleratricem secundum directionem horizonti perpendicularem, ut plani inclinati altitudo A B, ad ipsius longitudinem A C. Q. e. d.

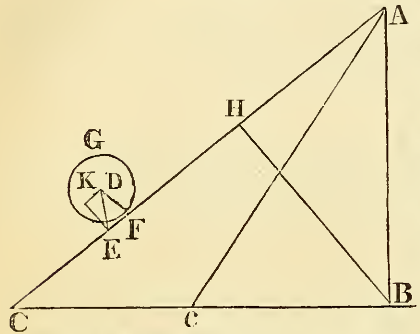
76. *Coroll.* 1. . . . . Quoniam vis acceleratrix gravitatis juxtâ directionem D E, horizonti perpendicularem constans est (26), et vis acceleratrix F E, secundum directionem plani inclinati A C, est ad vim D E, in ratione datâ A B, ad A C; vis acceleratrix F E, constans quoque erit; ea igitur omnia quæ de motibus vi acceleratrice constanti genitis demonstrata sunt, transferre licet ad motus vi gravitatis acceleratrice in plano inclinato productos; nempe. 1°. Grave per planum inclinatum motu uniformiter accelerato descendit, et motu uniformiter retardato ascendit (25). 2°. Velocitates sunt ut tempora quibus acquiruntur (25), spatia e quiete cadendo descripta sunt in ratione duplicatâ temporum quibus percurruntur, itemque velocitatum quæ his temporibus acquiruntur; tempora verò itemque velocitates sunt in ratione subduplicatâ spatiorum (27, 28). 3°. Spatium a gravi in plano inclinato percursum ab initio motûs computatum, dimidium est illius quod eodem tempore ab eodem mobili uniformiter percurri potest cum velocitate ultimò acquisitâ (29).

77. *Coroll.* 2. Quia vires acceleratrices constantes sunt inter se in ratione velocitatum, quas eodem tempore producunt (13), velocitas lapsu perpendiculari per A B, acquisita erit ad velocitatem eodem tempore in plano inclinato acquisitam, ut longitudo plani, A C, ad ipsius altitudinem A B (75).

78. *Coroll.* 3. Si ex puncto B, perpendiculi A B, ad planum inclinatum agatur perpendicularis B H; spatium A H, in plano inclinato eodem tempore percurritur, quo lapsu perpendiculari describitur A B; nam ob similitudinem triangulorum A H B, A B C, A H : A B = A B : A C, adeòque A H, est ad A B, ut velocitas in plano inclinato acquisita ad velocitatem, eodem tempore in perpendiculo A B, acquisitam (77). Sed velocitates motu uniformiter accelerato acquisitæ, sunt ut dupla spatia, seu, quod idem est, ut spatia eodem tempore percursa (76); ergò A H, A B, sunt spatia eodem tempore percursa.

79. *Coroll.* 4. Tempus quo planum A C percurritur, est ad tempus quo percurritur ipsius altitudo A B, ut longitudo plani A C, ad ejus altitudinem A B; tempus enim per A C, est ad tempus per A H, in ratione subduplicatâ A C, ad A H (76). Sed ob continuam rectarum A C, A B, A H analogiam A C, est ad A B, in ratione subduplicatâ A C, ad A H; tempus igitur per A C, est ad tempus per A H,

projectilium fieri in parabola; conspirante experientia, nisi quatenus motus illi per aëris resistentiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente gravitas uniformis, singulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo imprimit vires æquales in corpus illud, et velocitates æquales generat:

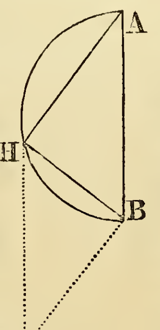


hoc est (78), ad tempus per A B, ut A C, ad A B.

80. *Coroll.* 5. Cum sit A C, ad A B, ut tempus per A C, ad tempus per A B; et A c, ad A B, ut tempus per A c, ad tempus per A B, (79), tempora quibus percurruntur diversa plana A C, A c, ejusdem altitudinis A B, sunt ut planorum longitudines.

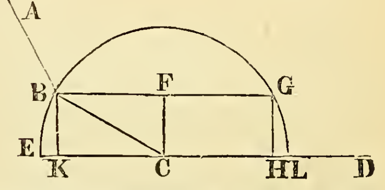
81. *Coroll.* 6. Celeritates gravium in plano quovis inclinato A C, et in perpendiculo A B, æquales sunt, ubi gravia ex eâdem altitudine ad eandem rectam horizontalem C B, pervenerint, adeóque velocitates in planis inclinatis A C, A c, ejusdem altitudinis in C et c, sunt æquales; est enim velocitas in B, ad velocitatem in H, ut A B ad A H (ea enim spatia eodem tempore descripta sunt) et ob similitudinem triangulorum A H B, A B C, sicut A C ad A B: velocitas autem in C, est ad velocitatem in H, in ratione subduplicatâ A C, ad A H, hoc est, ob continuam analogiam rectarum A C, A B, A H, in ratione A C, ad A B; quare velocitas in B, est ad velocitatem in H, ut velocitas in C, ad eandem velocitatem in H, adeóque velocitas in C, æqualis est velocitati in B.

82. *Coroll.* 7. Tempus descensûs per chordas quaslibet A H, H B, circuli cujus diameter, A B, est ad horizontem perpendicularis, æquale est tempori descensûs per totam diametrum A B; ac proindè tempora descensûs per omnes chordas sunt æqualia; Cum enim angulus A H B, in semicirculo rectus sit, tempus descensûs per A H, æquale est tempori descensûs per A B, (78), et ductâ H C, diametro A B, æquali et parallelâ junctâque C B, erit ob angulum H B C,



rectum, tempus per H B, æquale tempori per H C, seu per A B.

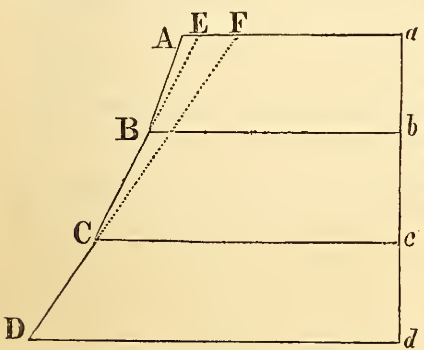
83. Si corpus in curvâ immotâ incedit, vis quâ singula curvæ puncta premit, cum vi finitâ quâ movetur corpus comparata, major non est quantitate infinitesimâ primi ordinis; vis seu celeritas quam in singulis curvæ punctis amittit, major non est quantitate infinitesimâ secundi ordinis; tandem vis seu celeritas per finitum curvæ arcum amissa major non est quantitate infinitesimâ primi ordinis, adeóque corpus in curvâ progreditur eâdem celeritate finitâ ac si nihil omninò virium amitteret . . . .



Dem.—Curva quælibet, ut notum est, considerari potest tanquam polygonum A B C D, ex innumeris atque infinitesimis lateribus rectis A B, B C, C D, compositum, quorum duo quævis B C, C D, angulum comprehendunt a duobus angulis rectis, nonnisi quantitate infinitesimâ deficientem, ita ut producto latere C D, in E, angulus externus B C E, sit infinitesimus. Centro C, et radio C B, describatur semicirculus E B G L, ex puncto B verò demittatur in rectam E D, perpendicularis B K, et completo rectangulo K F, motus corporis latere B C, expositus, in binos B K, B F, seu K C, resolvitur (Coroll. 1. *Newt.*) His positis manifestum est (51) vim seu celeritatem quâ corpus in latus C D, incurrit, illudque premit seu percutit, perpendiculari F C, sive B K, repræsentari; celeritatem post ictum, (supponendo corpora esse elaterio destituta) rectâ K C, seu C H, exhiberi, et celeritatem ex impactu in C, amissam rectâ E K, exponi, cum E K, sit differentia rectarum B C, K C; hoc est, celeritatum ante et post impactum. Jam si angulus B C K, finitæ quantitatis esset, recta B K, finitam haberet ad rectas B C, K C, rationem, quæ decrescente angulo B C K, semper minuitur adeóque infinitesima evadit, dum angulus B C K est infinitesimus; est igitur B K, seu vis quâ corpus curvam premit in C, quantitas non major infinitesimâ primi ordinis; verùm quia in circulo E K : B K = B K : K L, erit E K, quantitas infinitesima respectu B K, quemadmodum, ex demonstratis B K, infinitesima est respectu B C, aut K C, adeóque

et tempore toto vim totam imprimit, et velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et spatia temporibus proportionalibus descripta, sunt ut velocitates et tempora conjunctim; id est in duplicata ratione temporum. Et corpore sursum projecto gravitas uniformis vires imprimit et velocitates

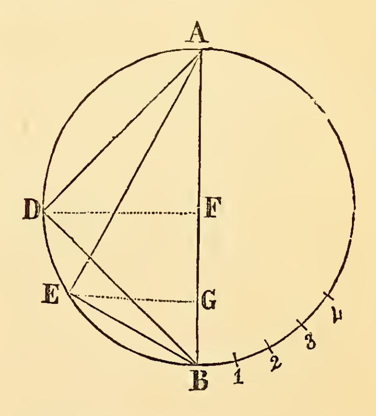
respectu K L; ergò celeritas seu vis in puncto C amissa non superat quantitatem infinitesimam secundi ordinis. Quare cùm velocitas quam corpus per singula curvæ latera A B, B C, C D, amittit, non excedat quantitatem infinitesimam secundi ordinis, per latera curvæ numero infinita, hoc est, per arcum curvæ finitum, non potest celeritatem amittere majorem quantitate infinitesimâ primi ordinis quæ est summa quantitatum infinitesimarum secundi ordinis; eâ igitur quantitate neglectâ, corpus eodem modo motum suum in curvâ continuat ac si nihil virium amisisset. Q. e. d.



84. Si grave ex quiete in A, per plana contigua A B, B C, C D, descendat, et flexus seu anguli B, C, motui non officiant, velocitas gravis per plana inclinata descendentis, æqualis est velocitati quam lapsu perpendiculari haberet in pari ab horizonte distantiâ .... *Dem.*— Ductis rectis A a, B b, C c, D d, horizonti parallelis et perpendiculo, a d, demisso, producantur C B, D C, donec occurrant rectæ A a, in E et F; velocitas lapsu per A B, acquisita æqualis est velocitati quæ acquireretur lapsu per E B, aut etiam per a b, (81), adeóque cum flexus B, motui non officiat (*per hyp.*) grave motum suum per planum B C, eodem modo continuat, ac si ex puncto E, per planum unicum E C, descendisset; est igitur velocitas in C, æqualis velocitati lapsu perpendiculari per a c, acquisitæ. Similiter ostenditur velocitatem in D æqualem esse velocitati in d. Q. e. d.

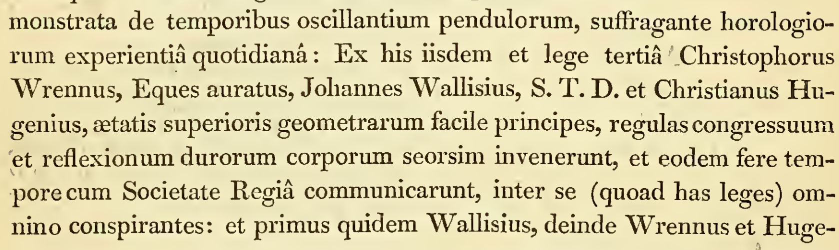
85. Augeatur planorum numerus, et singulorum longitudo minuatur in infinitum ut linea A B C D curva evadat, et quia anguli B, C, D, velocitati corporis non officiunt (83), manifestum est, gravis per curvam descendentis velocitatem in singulis curvæ punctis B, C, D, æqualem esse velocitati lapsu perpendiculari acquisitæ in punctis correspondentibus b, c, d.

86. Si grave descendat per curvam quamlibet A B C D, ductis lineis A a, B b, C c, horizonti parallelis, et ex puncto curvæ infimo D, recta D E, ad horizontem normali, patet (85) gravis per arcum A D, vel a D, descendentis eandem esse velocitatem in punctis æquè altis B et b, C et c. Quarè cum ex A, pervenit ad punctum infimum D, ex impetu per lapsum acquisito ascendit per arcum D a, ad punctum a, æquè altum, in quo omnis velocitas extinguitur, et in punctis correspondentibus B et b, C et c, eandem tam in ascensu quam in descensu habet velocitatem (26). Si verò arcus D a, arcui D A, similis et æqualis fuerit, singuli arcus æquè alti C D et D c, B D et D b, A D et D a, æqualibus respectivè temporibus percurruntur (26).



87. Velocitas gravis per quemvis circuli arcum E B, descendentis in puncto infimo B, est ad velocitatem quam lapsu perpendiculari per totam diametrum A B acquireret, ut chorda E B, ad diametrum A B .... *Dem.*— Ductâ E G, horizonti parallelâ adeóque ad diametrum A B, perpendiculari, velocitas per arcum E B, acquisita, æqualis est velocitati acquisitæ per G B (85). Est ergò ad velocitatem per A B acquisitam in ratione subduplicatâ GB, ad A B (28.) Sed propter triangula rectangula similia A E B, B G E, G B : E B = E B : A B

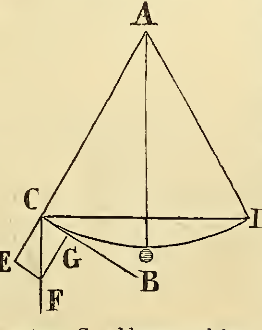
aufert temporibus proportionales; ac tempora ascendendi ad altitudines summas sunt ut velocitates auferendæ, et altitudines illæ sunt ut velocitates ac tempora conjunctim: seu in duplicata ratione velocitatum. Et corporis secundum rectam quamvis projecti motus a projectione oriundus cum motu a gravitate oriundo componitur. Ut si corpus A motu solo projectionis dato tempore describere posset rectam A B et motu solo cadendi eodem tempore describere posset altitudinem A C: compleatur parallelogrammum A B D C, et corpus illud motu composito reperietur in fine temporis in loco D; et curva linea A E D, quam corpus illud describet, erit parabola quam recta A B tangit in A, et cujus ordinata B D est ut A B q. Ab iisdem legibus et corollariis pendent demonstrata de temporibus oscillantium pendulorum, suffragante horologiorum experientiâ quotidianâ: Ex his iisdem et lege tertiâ Christophorus Wrennus, Eques auratus, Johannes Wallisius, S. T. D. et Christianus Hugenius, ætatis superioris geometrarum facile principes, regulas congressuum et reflexionum durorum corporum seorsim invenerunt, et eodem fere tempore cum Societate Regiâ communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes: et primus quidem Wallisius, deinde Wrennus et Huge-



adeóque E B, ad A B, in ratione subduplicatâ G B ad A B; velocitas igitur per arcum E B, acquisita in B, est ad velocitatem per A B, acquisitam, ut chorda E B, ad diametrum A B. Q. e. d.

88. *Coroll.* Ductâ quâvis alterâ chordâ D B, erit etiam velocitas per arcum D B, acquisita in B, ad velocitatem per diametrum A B, ut D B, ad A B, ac proindè velocitates per arcus D B, E B acquisitæ in puncto infimo B, sunt inter se ut horum arcuum chordæ; undè si capiantur arcus B 1, B 2, B 3, B 4, quorum chordæ sint respectivè ut 1, 2, 3, 4, velocitas gravis per arcus illos descendentis in puncto B, erunt ut 1, 2, 3, 4.

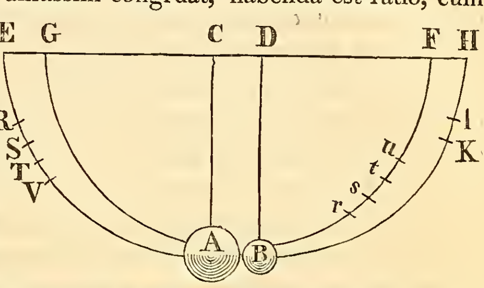
89. Si pendulum B, circâ punctum fixum A, rotetur, et globus B, filo A B, appensus instar puncti consideretur, arcum circuli C B D, describet, idemque globo huic motus accidet ac si in superficie sphæricâ immotâ et perfectè lævigatâ sublato filo volveretur.

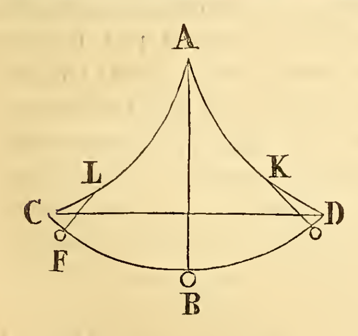


Dem.—Ad punctum C, adducatur globus B, et exinde demittatur; et recta C F, horizonti perpendicularis vim gravitatis acceleratricem in perpendiculo exponat; ea vis resolvatur in duas vires, quarum una exhibeatur rectâ C E, ad arcum seu tangentem in C perpendiculari; altera verò tangente C G; vis C E, quâ filum A C directè trahitur, ad globi motum nihil confert et solâ vi ut C G, urgetur; arcus verò C B D, considerari potest ut polygonum cujus latus unum in C, positionem habet tangentis C G, et si globus per planum C G, vi gravitatis urgeatur, sublato filo vis C E, plano C G, tota sustinetur, et globus solâ vi C G, ad motum in plano C G, sollicitatur. Cum igitur idem in omnibus punctis arcûs C B D, eodem modo demonstrari possit, patet filum A C, superficiei C B D, vices subire, et in utroque casu motum globi per arcum C B D, eâdem ratione perfici. Q. e. d.

90. *Coroll.* 1. Pendulum A B, inter duas laminas curvas A L C, A K D, immotas et sese contingentes in A, ità oscilletur ut filum A B, in situ ad horizontem perpendiculari utramque laminam tangat in A; dum verò oscillatur pendulum, curvis laminis filum circumplicetur easque perpetuò tangat ut in L et K; per hanc fili ad laminas applicationem continuò impeditur motus penduli in circulo, aliamque curvam C B D, describere cogitur; et eodem quo usi fuimus ratiocinio (89), demonstratur pendulum in hac curvâ eodem modo moveri ac

nius, inventum prodiderunt. Sed et veritas comprobata est a Wrenno coram Regiâ Societate per experimentum pendulorum: quod etiam Clarissimus Mariottus libro integro exponere mox dignatus est. Verùm, ut hoc experimentum cum theoriis ad amussim congruat, habenda est ratio, cùm resistentiæ aëris tum etiam vis elasticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora sphærica A, B filis parallelis et æqualibus A C, B D, a centris C, D. His centris et intervallis describantur semicirculi E A F, G B H radiis C A, D B bisecti. (b) Trahatur corpus A ad arcus E A F punctum quodvis R, et (subducto corpore B) demittatur inde, redeatque post unam oscillationem ad punctum V. Est R V retardatio ex resistentia aëris. Hujus R V fiat S T pars quarta sita in medio; ita scilicet ut R S et T V æquentur; sitque R S ad S T ut 3 ad 2. Et ista S T exhibebit retardationem in descensu ab S ad A quam proximè. Restituatur corpus B in locum suum. Cadat corpus A de puncto S, et velocitas ejus in loco reflexionis A sine errore sensibili tanta erit, ac si in vacuo cecidisset de loco T.





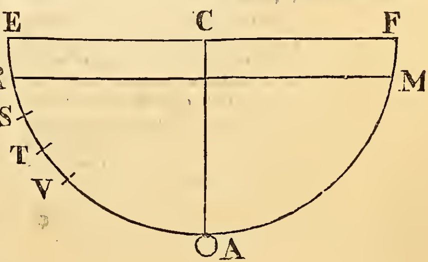
si grave B, libere et absque filo per curvam immotam et perfecte lævigatam C B D, incederet.

91. *Coroll.* 2. Quapropter omnia quæ de motu gravium in curvis superficiebus demonstrata fuere, motui penduli per easdem curvas oscillantis conveniunt. Nempe 1°. Penduli velocitas semper æqualis est velocitati quam acquireret cadendo per altitudinem perpendicularem arcui percurso correspondentem (85). 2°. Pendulum ex C demissum, vi gravitatis urgente ad punctum infimum B, descendet, et ex impetu concepto, per arcum B D, ascendet ad eandem altitudinem D, ibique omni velocitate amissâ, vi gravitatis impellente ad punctum infimum B, relabetur, amissamque recuperans velocitatem redibit ad punctum C, atque ità continuas oscillationes itu et reditu in curvâ C B D, perficiet (86).

92. *Coroll.* 3. Si nulla foret medii resistentia, nullaque circà laminas incurvatas aut centrum rotationis frictio, æquales et perpetuæ forent pendulorum oscillationes; verùm has ob causas singulis vibrationibus, licet insensibiliter, minuitur penduli velocitas, arcusque continuò breviores describit, ac tandem omninò quiescit.

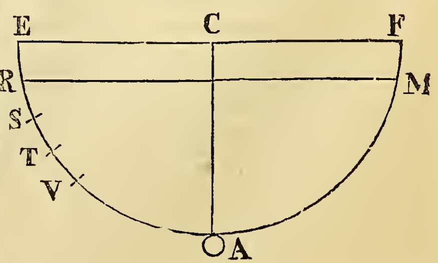
93. *Coroll.* 4. Velocitates ejusdem penduli in circuli peripheriam excurrentis, sunt in puncto infimo ut arcuum descriptorum chordæ (88).

(b) 94. Trahatur corpus A, ad arcûs E A F punctum quodvis R, et demittatur indè, sublatâ medii resistentiâ ad eandem altitudinem M, ascendere et rursùs ad punctum R, redire debet (92). Cum autem post unam oscillationem ex itu et reditu compositam perveniat (ex *hyp.*) ad punctum V, arcus R V exponet medii retarda-



Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcûs T A. Nam velocitatem penduli in puncto infimo esse ut chordam arcûs, quem cadendo descripsit, propositio est geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus A ad locum s, et corpus B ad locum k. Tollatur corpus B et inveniatur locus v; a quo si corpus A demittatur et post unam oscillationem redeat ad locum r, fit s t pars quarta ipsius r v sita in medio, ita videlicet ut r s et t v æquentur; et per chordam arcûs t A exponatur velocitas, quam corpus A proxime post reflexionem habuit in loco A. (c) Nam t erit locus ille verus et correctus, ad quem corpus A, sublatâ aëris resistentiâ, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus k, ad quem corpus B ascendit, et inveniendus locus l, ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus A (ut ita dicam) in chordam arcûs T A, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco A proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcûs t A, ut habeatur motus ejus in loco A proxime post reflexionem. Et sic corpus B ducendum erit in chordam arcûs B l, ut habeatur motus ejus proximè post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante, quam post reflexionem; et tum demum conferendi sunt motus inter se et colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, et faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, putà pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi cor-

tionem in duplici ascensu et descensu; quarè ut habeatur medii retardatio in uno tantum descensu, sumenda est quarta pars totius retardationis, id est quarta pars arcus R V, dummodo ille descensus neque ex puncto supremo R, neque ex infimo V ordiatur: nam cum major sit medii retardatio in arcu majori quam in minori, semperque fiant minores arcus a pendulo oscillante descripti, inæquales quoque erunt retardationes in singulis arcubus, et retardatio descensus per R A, major erit quartâ parte totius retardationis R V ut retardatio ultimi ascensus A V, minor erit quartâ parte totius retardationis R V. Hoc autem aut simili calculo determinavit Newtonus punctum S tale ut retardatio in descensu per S A sit quarta pars totius retardationis R V. Dicatur arcus R A, 1, arcus R V, 4 b, arcus quæsitus S A, x; sintque retardationes arcubus descriptis proportionales, erit arcus S A (x) ad arcum R A (1) ut retardatio arcus S A quæ statuitur esse b, seu quarta pars totius R V, ad retardationem primi arcus R A quæ erit



pora sibi mutuo directè occurrebant, æquales esse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem et reactionem semper esse æquales. Ut si corpus A incidebat in corpus B quiescens cum novem partibus motus, et amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus B resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant, A cum duodecim partibus et B cum sex, et redibat A cum duabus; redibat B cum octo, factâ detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius A subducantur partes duodecim et restabit nihil: subducantur aliæ partes duæ, et fiet motus duarum partium in plagam contrariam: et sic de motu corporis B partium sex subducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora ibant ad eandem plagam, A velocius cum partibus quatuordecim, et B tardius cum partibus quinque, et post reflexionem pergebat A cum quinque partibus; pergebat B cum quatuordecim, facta translatione partium novem de A in B. Et sic in reliquis. A congressu et collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex summâ motuum conspirantium et differentiâ contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius et alterius in mensuris tribuerim difficultati peragendi singula satis accuratè. Difficile erat, tum pendula simul demittere sic, ut corpora in se mutuo impingerent in loco infimo A B; tum loca s, k notare, ad quæ corpora ascendebant post concursum. Sed et in ipsis corporibus pendulis inæqualis partium densitas, et textura aliis de causis irregularis, errores inducebant.

Porro ne quis objiciat regulam, ad quam probandam inventum est hoc experimentum, præsupponere corpora vel absolutè dura esse, vel saltem perfectè elastica, cujusmodi nulla reperiuntur in compositionibus naturalibus; (d) addo quod experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam si regula illa in corporibus non perfectè duris tentanda est,

b: x. Quærantur successivè retardationes secundi, tertii, quartive arcus eâdem ratione; arcus autem secundus est æqualis primo R A, dempta ejus retardatione b: x. Tertius arcus æqualis secundo demptâ ejus retardatione, et sic deinceps, omnes verò illæ retardationes simul sumptæ æquabuntur toti retardationi R V seu 4 b; unde fit æquatio ex quâ valor arcus S A, seu x, obtinebitur; per approximationem autem invenietur æqualis $1 \frac{3b}{2}$; sumatur itaque R S æqualis quartæ parti cum ejus semisse totius retardationis R V, retardatio per arcum S A erit æqualis S T quartæ parti totius retardationis R V, ideòque cadat corpus ex puncto S, ejus celeritas in A eadem est sine errore sensibili, ac si in vacuo decidisset ex T.

(c) 95. t, (fig. *Newt.*), erit locus verus et correctus ad quem corpus A, sublatâ aëris resistentiâ ascendere debuisset; nam corpus A, ex t, in medio non resistente descendens, in puncto infimo A, eam haberet velocitatem quâ posset arcum A t, ascendendo describere (91), et quâ ob aëris resistentiam, nonnisi arcum A s, (94) percurreret, ergò cum post reflexionem ascendat ad s, eam habet in A velocitatem, quâ in medio non resistente ad punctum t ascenderet.

(d) 96. Experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus et non elasticis æquè ac in duris et elasticis, ut potè a conditione duritiei et elasticitatis, sed tantum ab actionis et reactionis æqualitate et oppositione pendentia; nam si regula illa in corporibus non perfectè elasticis tentanda est, ut ex ipsorum motibus antè conflictum inveniantur motus post conflictum, debebit

debebit solummodo reflexio minui in certâ proportione pro quantitate vis elasticæ. In theoriâ Wrenni et Hugenii corpora absolutè dura redeunt ab invicem cum velocitate congressûs. ([e]) Certiùs id affirmabitur de perfectè elasticis. ([f]) In imperfectè elasticis velocitas reditûs minuenda est simul cum vi elasticâ; propterea quod vis illa, (nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur,) certa ac determinata sit (quantum sentio) faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativâ, quæ sit ad relativam velocitatem concursus in datâ ratione. Id in pilis ex lanâ arctè conglomeratâ et fortiter constrictâ sic tentavi. Primum demittendo pendula et mensurando reflexionem, inveni quantitatem vis elasticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis casibus concursuum, et respondebant experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativâ, quæ esset ad velocitatem relativam concursus ut 5 ad 9 circiter. Eâdem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex subere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia quoad ictus et reflexiones per theoriam comprobata est, quæ cum experientiâ plane congruit.

In attractionibus rem sic breviter ostendo. Corporibus duobus quibusvis A, B, se mutuò trahentibus, concipe obstaculum quodvis interponi, quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum A magis trahitur versus corpus alterum B, quam illud alterum B in prius A, obstaculum magis urgebitur pressione corporis A quam pressione corporis B; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietque ut systema corporum duorum et obstaculi moveatur in directum in partes versus B, motuque in spatiis liberis semper accelerato abeat in infinitum. Quod est absurdum et legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit systema perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformi-

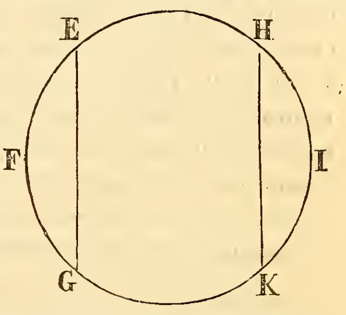
solummodò reflexio minui in certâ proportione, pro quantitate vis elasticæ (52).

([e]) 97. Certiùs id affirmabitur de perfectè elasticis; corpora enim perfectè dura, seu quorum partes nullâ vi finitâ separari aut flecti possunt, nullâ quoque vi restitutivâ aut repulsivâ pollere videntur; adeóque cum nihil sine causâ fiat, corporum perfectè durorum concurrentium nulla videtur esse posse reflexio.

([f]) 98. In imperfectè elasticis, velocitas reditûs minuenda est cum vi elasticâ, propterea quod vis illa, licet imperfecta, certa tamen ac determinata est, in iisdem corporibus, nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur; dum enim corporis elastici fibræ ex ictu flectuntur, si aliqua abrumpatur fibra, ea non sese restituit, adeóque vis corporis restitutiva minuitur; si verò fibræ extendantur, ut ferri lamina repetitis mallei ictibus in longum diducitur, pars ictûs huic fibrarum extensioni adhibita, vi restitutivæ detrahitur. His causis addi potest intestinus partium corporis percussi motus sono ipso satis indicatus, qui in reflexionem non impenditur. Hæc materia variis Rizzeti experimentis illustratur in Commentariis Instituti Bononiensis. Tria globulorum vitreorum paria sibi paravit Rizzetus; globuli primi paris diametrum habebant trium unciarum, secundi duarum, tertii unius, ità ut essent diversorum parium diametri inter se, ut 3. 2. 1. Fecit ut globuli primi paris filo appensi simul congrederentur, notavitque velocitatem respectivam quam habuerunt vel ante vel post ictum, detractâ tamen, more Newtoniano, aëris resistentiâ; idemque tentavit tum in 2°. tum in 3°. pari. In 1°. globulorum pari cum velocitas respectiva ante ictum fuisset 11, fuit post ictum 10; in 2°. pari cum fuisset antè ictum 16, fuit post ictum 15; in 3°. pari cum fuisset antè ictum 31, fuit post ictum 30. Unde

ter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obstaculum, et idcirco æqualiter trahentur in invicem. (g) Tentavi hoc in magnete et ferro. Si hæc in vasculis propriis sese contingentibus seorsim posita, in aquâ stagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, sed æqualitate attractionis utrinque sustinebunt conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescent.

Sic etiam gravitas inter terram et ejus partes mutua est. Secetur terra F I plano quovis E G in partes duas E G F et E G I: et æqualia erunt harum pondera in se mutuo. Nam si plano alio H K quod priori E G parallelum sit, pars major E G I secetur in partes duas E G K H et H K I, quarum H K I æqualis sit parti prius abscissæ E F G: manifestum est quod pars media E G K H pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, sed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, suspendetur, et quiescet. Pars autem extrema H K I toto suo pondere incumbet in partem mediam, et urgebit illam in partem alteram extremam E G F; ideoque vis quâ partium H K I et E G K H summa E G I tendit versus partem tertiam E G F, æqualis est ponderi partis H K I, id est ponderi partis tertiæ E G F. Et propterea pondera partium duarum E G I, E G F in se mutuo sunt æqualia, uti volui ostendere. Et nisi pondera illa æqualia essent, terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, et ab eo fugiendo abiret in infinitum.



Ut corpora in concursu et reflexione idem pollent, quorum velocita-

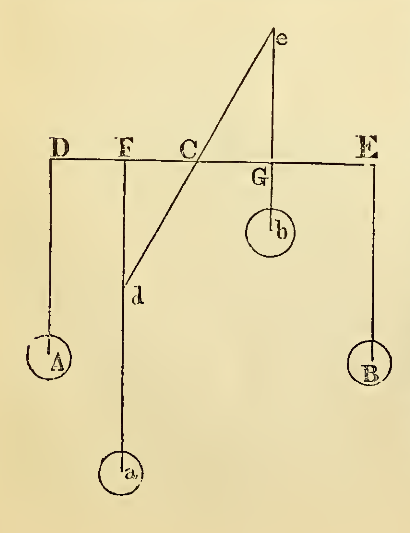
velocitatis respectivæ defectus erat in primo pari 1 : 11. in 2°. pari 1 : 16. in 3°. pari 1 : 31; illi autem defectus sunt ferè diametris 3, 2, 1. proportionales. Aliud experimentum tentavit Rizzetus. Chordam calybeam duos pedes longam horizontaliter positam variis modis tendebat, donec tandem repererit tres chordæ tensiones, quæ efficerent ut tempora quibus chorda pulsa sese restituebat, forent ut 3. 2. 1. Eas autem tensiones se assecutum esse ex graviori vel acutiori chordarum sono intelligebat; in singulis tensionibus globum eburneum cujus diameter erat duarum unciarum, filo decem pedes longo appensum et in medio tantisper complanatum in chordam demittebat, et detractâ aëris resistentiâ, velocitatem respectivam antè et post ictum notabat. Observavit autem velocitatem antè ictum esse ad velocitatem post ictum, ut 11, ad 10, in 1â. tensione, cum chorda pulsa restitueretur tempore 3; ut 16 ad 15 in 2â. tensione, cum chorda restitueretur tempore 2; tandem ut 31, ad 30, in 3â. tensione, cum chorda restitueretur tempore 1; undè concludit defectus singulos velocitatis post ictum, temporibus restitutionum esse proportionales. Manente igitur corporum homogeneorum magnitudine et figurâ, constans observatur ratio velocitatis respectivæ post ictum ad velocitatem respectivam ante ictum; sed mutatâ magnitudine, experimenta Rizzeti ostendunt defectus velocitatis respectivæ post ictum in globis homogeneis esse in ratione diametrorum, aut etiam in ratione temporum quibus globi compressi restituuntur.

(g) 99. Si magnes suberis frusto, similiterque ferrum alio suberis frusto imponantur, ut tam magnes quam ferrum in aquâ liberè stagnent, æquali motûs quantitate sibi mutuo obviam eunt, itâ ut eorum celeritates sint in ratione ponderum reciprocâ; dum verò ad contactum pervenerunt, in æquilibrio consistunt. Quarè hoc experimen-

tes sunt reciprocè ut vires insitæ: ([h]) sic in movendis instrumentis mechanicis agentia idem pollent et conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates secundum determinationem virium æstimatæ, sunt reciprocè ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia libræ, quæ oscillante librâ sunt reciprocè ut eorum velocitates sursum et deorsum: hoc est pondera, si rectà ascendunt et descendunt, æquipollent, quæ sunt reciprocè ut punctorum a quibus suspenduntur distantiæ ab axe libræ; sin planis obliquis aliisve admotis obstaculis impedita ascendunt vel descendunt obliquè, æquipollent, quæ sunt reciprocè ut ascensus et descensus, quâtenus facti secundum perpendiculum: idque ob determinationem gravitatis deorsum. Similiter in trochlea seu polyspasto vis manûs funem directè trahentis, quæ sit ad pondus vel directè vel obliquè ascendens ut velocitas ascensus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, sustinebit pondus. In horologiis et similibus instrumentis, quæ ex rotulis commissis constructa sunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum et impediendum, si sunt reciprocè ut

to manifestum est æqualem esse ferri in magnetem et magnetis in ferrum actionem. Similiter si quis in cymbâ aquis annatante positus, cymbam alteram liberè fluitantem ope funis trahat, vel conto aliove instrumento repellat, cymbæ in partes contrarias cum æquali motûs quantitate ferentur, ità ut earum velocitates sint in ratione reciprocâ ponderum.

([h]) 100. In movendis instrumentis mechanicis, agentia idem pollent et conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates secundùm directionem virium æstimatæ sunt reciprocè ut vires absolutæ . . . . *Dem.*—Duæ potentiæ, seu, quod idem est, duo pondera ope machinæ cujusvis datæ in se mutuò ità agant, ut pondus unum secundùm propriam directionem moveri nequeat, quin pondus alterum contrà propriam illius directionem rapiat; si loco machinæ datæ substituatur vectis cujus longitudo et hypomoclion talia sint, ut duo pondera data, vectis extremitatibus appensa, eâdem celeritate ac in machinâ datâ sese mutuò moveant, iidem erunt in vecte et in machinâ datâ conatus ponderum in se mutuò, eadem ipsorum momenta; vis enim eadem requiritur ad eandem velocitatem secundùm eandem directionem in iisdem corporibus producendam. Itaque vectis D E, horizontalis, cum appensis ponderibus A et B, rotetur circa hypomoclion C, ut situm d e, obtineat, et producatur filum a d, usque ad F; pondus A, secundum propriam directionem, percurrit spatium F d; et pondus B, contrà propriam directionem eodem tempore percurrit spatium G e; adeóque horum ponderum velocitates sunt semper ut spatia F d, G e, eodem tempore percursa. Momentum ponderis a, est ut a $\times$ F C; momentum ponderis b, est ut b $\times$ C G (47). Sed ob similitudinem triangulorum F C d, e C G; F C : C G = F d : G e. Ergo momenta ponderum a et b, sunt inter se ut a $\times$ F d, et b $\times$ G e; seu sunt ut facta ex ponderibus in sua respectivè spatia eodem tempore percursa, adeóque etiam ut facta ex ponderibus in suas respectivè velocitates; quare si facta illa æqualia sint, aut quod idem est, si pondera seu vires sint reciprocè ut velocitates secundùm directiones virium æstimatæ, erit æquilibrium. Q. e. d.



101. *Coroll.* Cùm ex demonstratis, momenta virium sint semper ut facta ex vi quâlibet in

velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuò. (i) Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. (k) Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi sunt ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis a malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio machinarum omnium.

Harum efficacia et usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, et contra: Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere problema, *Datum pondus datâ vi movendi*, aliamve datam resistentiam vi datâ superandi. Nam si machinæ ita formentur, ut velocitates agentis et resistentis sint reciprocè ut vires; agens resistentiam sustinebit: et majori cum velocitatum disparitate (l) eandem vincet. Certè si tanta sit velocitatum disparitas, ut vincatur etiam resistentia omnis,

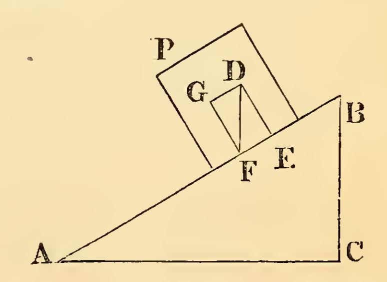
suam velocitatem, seu in spatium quod dato tempore secundùm propriam directionem ex dispositione machinæ percurrere debet, omnium machinarum vires metiri licet.

(i) 102. Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. Nam si resistentia corporis comprimendi ut pondus movendum consideretur, erit (101) momentum vis manubrium circumagentis, ut factum ex vi illâ in suam velocitatem, et momentum resistentiæ ut factum ex resistentiâ in suam quoque velocitatem; ut ergò sit æquilibrium, debet esse resistentia ad vim manûs, ut circularis velocitas manûs ad velocitatem resistentiæ, sive ad velocitatem progressivam cochleæ; aut quia manus describit circulum cujus radius est manubrii longitudo, e centro cochleæ usque ad manum sumpta, dum interea cochlea per altitudinem seu distantiam duarum helicum progreditur, vis cochleæ ad premendum corpus erit ad vim manûs manubrium circumagentis ut peripheria circuli prædicto radio descripti ad distantiam duarum helicum.

(k) 103. Momentum cunei est ut factum (101), ex vi impressâ a malleo in cunei velocitatem, seu in spatium quod dato tempore percurrit cuneus secundùm directionem vis a malleo impressæ; momentum verò resistentiæ ligni cuneo findendi est ut factum ex illâ resistentiâ in velocitatem, quâ partes ligni cedunt cuneo secundùm lineas faciebus cunei perpendiculares, juxtà quarum directionem partes ligni a cuneo moventur; est etiam momentum resistentiæ ut factum ex resistentiâ ligni in spatium quod partes ligni dato tempore describunt, secundùm lineas faciebus cunei perpendiculares. Quoniam igitur cuneus agens secundùm lineam basi ipsius perpendicularem, totam suam altitudinem percurrit, dum partes ligni totâ basis cunei latitudine a se invicem removentur, erit (in casu æquilibrii) vis cunei ad ligni resistentiam, ut cunei altitudo ad latitudinem ipsius basis.

(l) 104. Attritionem seu frictionem, aliasque resistentias ex crassitie, rigiditate et funium flexione ortas in machinis considerare necessum est, graves alioquin in praxi errores nascerentur.

Hanc difficilem materiam Sturmius, Leibnitius Amontonius, Parentius, La-Hirius et alii tractarunt. Bulfingerus Tom 2°. Comment. Acad. Petropol. ad tentandam experimentis frictionum mensuram duo proponit theoremata quæ ob eorum facilitatem et usum hic exscribere non abs re erit.



Suprà horizontem A C, experimento sæpius instituto, elevetur planum A B, ad angulum B A C, ita ut si corpus plano A B, ad hunc angulum elevato imponatur, tantùm non descendat; descendat autem si angulus nonnihil

quæ tam ex contiguorum et inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum et ab invicem separandorum cohæsione et elevandorum ponderibus oriri solet; superatâ omni eâ resistentiâ, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum mechanicam tractare non est hujus instituti. Hisce volui tantùm ostendere, quàm latè pateat quàmque certa sit lex tertia motûs. Nam si æstimetur agentis actio ex ejus vi et velocitate conjunctim; et similiter resistentis reactio æstimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus et viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere, et acceleratione oriundis; erunt actio et reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum, et ultimò imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

augeatur: et hæreat cum aliquâ adversus descensum renitentiâ, si angulus minuatur. Hic angulus dicitur angulus quietis, eoque invento sic inferatur.

Uti sinus totus ad sinum rectum anguli quietis, ità pondus absolutum P, ad frictionem ejus super plano ad prædictum angulum inclinato. Atque iterùm.

Uti Radius ad tangentem anguli quietis, ità pondus absolutum P, ad frictionem ejus super plano horizontali, cùm trahitur in directione ad horizontem parallelâ .... *Dem.*—Linea D F, horizonti perpendicularis, pondus absolutum P, seu vim totam quâ corpus in perpendiculo descendere nititur, exponat; et ductâ D E, ad planum A B, normali; vis D F, in binas vires nempè D E, plano perpendicularem, et E F, seu D G, plano parallelam resolvitur (41); vis D E, a plano A B, etiam perfectè lævigato tota sustinetur, et solâ vi D G, seu E F, pondus P, nititur juxtà plani directionem descendere; Cùm igitur ob frictionem in plano aspero A B, tantùm non descendat, erit frictio æqualis vi E F; est itaque pondus absolutum P, ad frictionem ejus super plano inclinato A B, ut D F, ad F E, hoc est, ob angulum E rectum et angulum F D E æqualem angulo quietis B A C, ut sinus totus ad sinum anguli quietis. Q. erat 1um.

Jam ut idem transferatur ad planum horizontale, debet vis D E, plano perpendicularis, considerari ut pondus absolutum, et ità planum A B, se habebit ut planum horizontale respectu ponderis D E; vis autem F E, seu frictio consideranda est tanquam vis in æquilibrio constituta cum vi æquali trahente pondus D E, secundùm directionem plano A B, parallelam; et ob triangulorum F D E, B A C, similitudinem, manifestum est pondus D E, esse ad frictionem E F, seu pondus absolutum in plano horizontali horizontaliter tractum, esse ad frictionem ejus, ut Radius ad tangentem anguli quietis. Q. erat 2um.

105. *Coroll.* In his duobus casibus, frictiones, cæteris omnibus paribus, sunt pressionibus proportionales; nam frictio in plano inclinato dicatur f; in plano horizontali F, et erit per 1um. theor. $P : f = A B : B C$; et per 2um. theorema $P : F = A C ; B C$, seu $F : P = B C : A C$, adeóque per compositionem rationum $P . F : P . f = A B \times B C : B C \times A C$, ac proinde $F : f = A B : A C = F D : D E$; hoc est, frictio in plano horizontali est ad frictionem in plano ad angulum quietis inclinato, ut pressio in plano horizontali ad pressionem in plano inclinato.

DE

MOTU CORPORUM

LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De methodo rationum primarum et ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

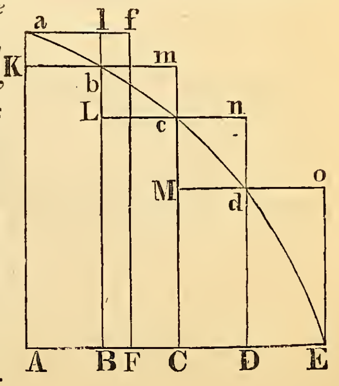
LEMMA I.

Quantitates, ut et quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, et ante finem temporis illius propiùs ad invicem accedunt quàm pro datâ quavis differentiâ, fiunt ultimò æquales.

Si negas; fiant ultimò inæquales, et sit earum ultima differentia D. Ergo nequeunt propiùs ad æqualitatem accedere quàm pro datâ differentiâ D: contra hypothesin.

LEMMA II.

Si in figurâ quâvis A a c E, *rectis* A a, A E *et curvâ* a c E *comprehensâ, inscribantur parallelogramma quotcunque* A b, B c, C d, &c. *sub basibus* A B, B C, C D, &c. *æqualibus, et lateribus* B b, C c, D d, &c. *figuræ lateri* A a *parallelis contenta; et compleantur parallelogramma* a K b l, b L c m, c M d n, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur et numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta* A K b L c M d D, *circumscripta* A a l b m c n d o E, *et curvilinea* A a b c d E, *sunt rationes æqualitatis.*

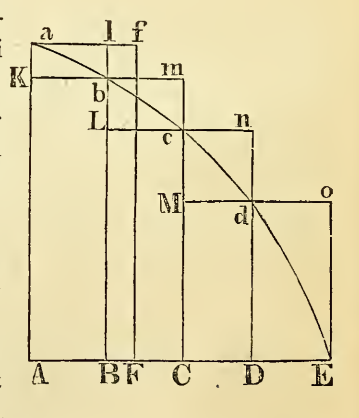


Nam figuræ inscriptæ et circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum K l, L m, M n, D o, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi K b et altitudinum (m) summa A a, id est, rectangulum A B l a. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus A B in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma I.) figura inscripta et circumscripta, et multo magis figura curvilinea intermedia, fiunt ultimò æquales. Q. e. d.

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines A B, B C, C D, &c. *sunt inæquales, et omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim A F æqualis latitudini maximæ, et compleatur parallelogrammum F A a f. (n) Hoc erit majus quàm differentia figuræ inscriptæ et figuræ circumscriptæ; at latitudine suâ A F in infinitum diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. Q. e. d.



Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.

Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum a b, b c, c d, &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figurâ curvilineâ.

Corol. 3. Ut et figura rectilinea circumscripta quæ tangentibus eorumdem arcuum comprehenditur.

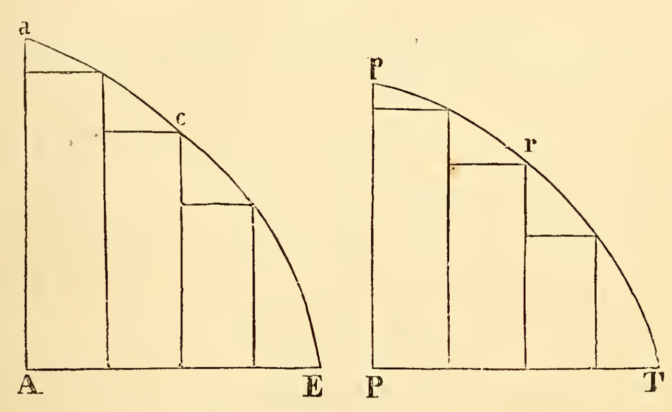
Corol. 4. (o) Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros a c E,) non sunt rectilineæ sed rectilinearum limites curvilinei.

(m) 106. Si fuerint quotcumque et cujusvis generis quantitates decrescentes, A a, B b, C c, D d, erunt omnium differentiæ simul sumptæ æquales excessui maximæ suprà minimam. Nam perspicuum est A a — B b + B b — C c + C c — D d = A a — D d: unde si ultima seriei quantitas sit o. ut in serie A a, B b C c, D d, o, summa differentiarum K a + L b + M c + D d, æqualis erit quantitati maximæ A a.

107. Linea B b, motu sibi semper parallelo accedat ad lineam A a, et interim punctum b, ita moveatur in linea B b, ut semper reperiatur in arcu b a; decrescente linearum A a, B b, distantiâ A B, decrescit quoque earum differentia K a, ac tandem evanescente A B, evanescit K a, et B b, seu A K, fit ultimò æqualis lineæ A a; evanescunt autem A B et K a, cum lineæ A a, B b, neque distantes, neque prorsus congruentes dici possunt, sed simul, ut ita dicam, conjungi incipiunt. In illo statu evanescentiæ, linearum A a, B b, differentia K a, minor est quâvis lineâ datâ, seu infinitè parva est, aut inassignabilis respectu A K et B b; quantitas autem evanescens, seu infinitè parva, est ad quantitatem finitam ut finitum ad infinitum; quare cum notum sit infinitum ex finiti additione vel subtractione non mutari, aut tanquam immutatum haberi posse, liquet lineas B b seu A K et A a, seu A K + K a, pro æqualibus posse usurpari. Similiter, quia evanescente K a. trianguli K a b, et parallelogrammi K l, areæ infinitesimæ sunt respectu parallelogrammi evanescentis A b, parallelogrammum istud A b,

LEMMA IV.

Si in duabus figuris A a c E, P p r T, *inscribantur (ut infra) duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, et ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod figuræ duæ* A a c E, P p r T, *sunt ad invicem in eâdem illâ ratione.*



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, et ita figura ad figuram; existente nimirum figurâ priore (per Lemma III.) ad summam priorem, et figurâ posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. Q. e. d.

Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; et partes illæ, ubi numerus earum augetur et magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam si in Lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut

usurpari potest pro parallelogrammo A l, aut etiam pro figurâ A B b a, hoc est, pro differentia arearum curvilinearum A E c a, B E c b.

108. Ex his sequitur diversos esse infinitesimorum ordines; nam ostensum est (107) parallelogrammum K l, infinitesimum esse respectu parallelogrammi A b, hoc verò parallelogrammum infinitesimum esse respectu areæ curvilineæ A E c a.

109. Figura A E c a, circa axem suum A E, revolvatur, et quælibet ordinata A a, B b, describet circulum, cujus est, ordinata ipsa radius, quodlibet rectangulum evanescens ut K B, a B, describet cylindrum evanescentem, et rectangula, K l, L m, M n, D o, singula describent annulos solidos, quorum summa æqualis erit cylindro ex rotatione rectanguli A l descripto. Quare cum hic cylindrus sit infinitesimus, patet (per Lemma I.) ultimam rationem solidi ex cylindris omnibus compositi ad solidum ex rotatione figuræ curvilineæ A E c a, genitum esse rationem æqualitatis.

([n]) 110. Nam si singulorum parallelogrammorum latitudo æqualis esset lineæ A F, figuræ inscriptæ et figuræ circumscriptæ differentia foret parallelogrammum A f, (Lem. II.); cùm igitur singulorum parallelogrammorum latitudo minor sit latitudine A F, (ex hyp.) prædicta figurarum differentia minor quoque est parallelogrammo A f.

([o]) 111. Propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros a c E) non sunt rectilineæ, seu non sunt ex lateribus rectis quocumque numero finito compositæ, sed sunt figurarum rectilinearum

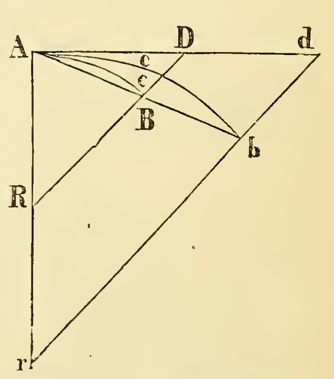
partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium et parallelogrammorum numerus augetur et magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultimâ ratione partis ad partem.

LEMMA V.

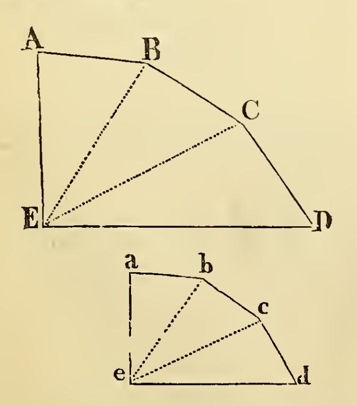
Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; et areæ sunt in duplicata ratione laterum. (p)

LEMMA VI.

Si arcus quilibet positione datus A C B *subtendatur chordâ* A B, *et in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ* (q) *continuæ, tangatur a rectâ utrinque productâ* A D; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant et coëant; dico quod angulus* B A D, *sub chordâ et tangente contentus, minuetur in infinitum et ultimò evanescet.*



quarum latera numero augentur et longitudine minuuntur in infinitum, limites curvilinei. Dum enim ordinatarum A a, B b, ac proinde chordarum a b, b c, numerus in infinitum augetur, et distantiæ A B, B C, in infinitum minuuntur, puncta a, b, K, l, et b, c, L, m, &c. coëunt et curvam a c E formant.



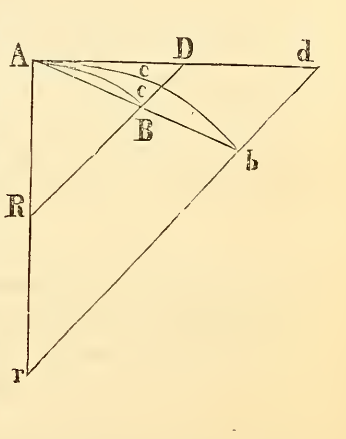
(p) 112. *Demonstr.*—Duæ figuræ, A D E, d e, similes dicuntur, quarum latera omnia sibi mutuò respondentia, ut A B, a b, B C, b c, proportionalia sunt, et angulos æquales, ut A B C, a b c, continent; undè jam patet summas laterum utriusque figuræ esse inter se ut duo quævis latera correspondentia A B, a b. Ductis ex E, et e, ad omnes angulos lineis E B, E C, e b, e c, figuræ in sua triangula dividantur; et quoniam anguli D et d, æquales sunt, lateraque E D, e d, D c, d c, proportionalia, *(per definit.)*, duo triangula E C D, e c d, erunt similia, adeoque anguli E C D, e c d, æquales, et latera E C, e c, lateribus C D, c d proportionalia; quare cum anguli B C D, b c d sint etiam æquales *(per definit.)* æquantur quoque anguli, E C B, e c b, et quia B C : b c = C D : c d = E C : e c, triangula duo E B C, e b c similia erunt. Idem eâdem ratione de aliis triangulis E B A, e b a demonstratur. Verùm areæ singulorum triangulorum similium, quæ in duabus figuris sibi mutuò respondent, sunt inter se in duplicatâ ratione laterum homologorum, ac proinde in datâ ratione; ergò summæ triangulorum, in utrâque figurâ, hoc est, figurarum areæ rationem habent laterum homologorum duplicatam. Jam numerus laterum A B, B C, &c. a b, b c, &c. augeatur, et eorum longitudo minuatur in infinitum, et (per Cor. 4. Lem. III.) figuræ A B C D, a b c d fiunt curvilineæ; similium igitur figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia tam curvilinea

Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus A C B cum tangente A D angulum rectilineo æqualem, et propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothesin.

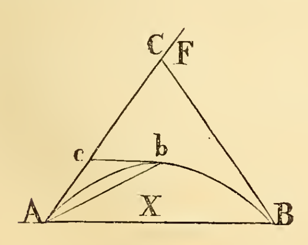
LEMMA VII.

Iisdem positis; dico quod ultima ratio arcûs, chordæ, et tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper A B et A D ad puncta longinqua b ac d produci, et ([r]) secanti B D parallela agatur b d. Sitque arcus A c b semper similis arcui A C B. Et punctis A, B cœuntibus, angulus d A b, per Lemma superius, evanescet; ideoque rectæ semper finitæ A b, A d, et arcus intermedius A c b coincident, et propterea æquales erunt. Unde et hisce semper proportionales rectæ A B, A D, et arcus intermedius A C B evanescent, et rationem ultimam habebunt æqualitatis. Q. e. d.



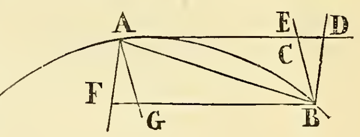
quam rectilinea, et areæ sunt in duplicatâ laterum. Q. e. d.



([q]) 115. Curva continua B A, considerari potest tanquam descripta motu puncti B continuò mutantis directionem suam quâ per rectam tangentem B C, progredi nititur. Unde si arcus A B, fit ubique versus eamdem partem X, cavus, semperque ducantur tangentes A F, B C, sese intersecantes in C, accedente puncto B, ad A, anguli B C F, B A C, C B A, quos tangentes et chordæ complectuntur, continuò, non verò per saltum, decrescunt, et evanescente chordâ A b, evanescunt, atque nulli fiunt, dum punctum b, idem omninò est cum puncto A. Necesse igitur est ob continuitatem decrementorum, ut angulus C A b, per omnes magnitudinis gradus inter angulum C A B, et o, seu nihilum medios transeat priusquam nullus omnino sit; quod generatim statuendum est de omnibus quantitatibus, quæ nascuntur et continuò crescunt, vel quæ continuò decrescunt et tandem evanescunt; non possunt enim continuò crescere vel decrescere, nec ab uno extremo ad alterum pervenire, quin per omnes gradus magnitudinis inter duo extrema medios transeant. Itaque inter tangentem A F, et chordam infinitesimam A b, nulla duci potest linea recta, quæ angulum finitum cum chordâ vel tangente efficiat; ideoque inter arcum A B, et tangentem A F, nulla duci potest linea recta quæ arcum non secet.

([r]) 114. Secans R D, supponitur semper efficere cum tangente A D et chordâ A B, angulos finitos, aut angulos ad quos angulus evanescens B A D, rationem habet infinitesimam; nam si anguli A B D, B A D, essent ejusdem ordinis infinitesimi, trianguli A B D latera finitam haberent inter se rationem. Angulus enim externus B D d, æqualis duobus internis oppositis D A B, D B A, esset ejusdem ordinis cum illis angulis; et quoniam in omni triangulo latera sunt ut sinus angulorum oppositorum, latera A B, B D, A D, finitam rationem haberent sinuum angulorum ejusdem ordinis B D d, D A B, A B D; cùm autem anguli A et B, supponuntur infinitesimi, angulus A D B, est obtusus, adeóque chorda

Corol. 1. Undè si per B ducatur tangenti parallela B F, rectam quamvis A F per A transeuntem perpetuo secans in F, hæc B F ultimo ad arcum evanescentem A C B rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo A F B D rationem semper habet æqualitatis ad A D.



Corol. 2. Et si per B et A ducantur plures rectæ B E, B D, A F, A G, secantes tangentem A D et ipsius parallelam B F; ratio ultima abscissarum omnium A D, A E, B F, B G, chordæque et arcus A B ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ A R, B R *cum arcu* A C B, *chordâ* A B *et tangente* A D, *triangula tria* R A B, R A C B, R A D *constituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, et ultima ratio æqualitatis.*

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper A B, A D, A R ad puncta longinqua b, d et r produci, ipsique R D parallela agi r b d, et arcui A C B similis semper sit arcus A c b. Et coëuntibus punctis A, B, angulus b A d evanescet, et propterea triangula tria semper finita r A b, r A c b, r A d coincident, suntque eo nomine similia et æqualia. Unde et hisce semper similia et proportionalia R A B, R A C B, R A D fient ultimo sibi invicem similia et æqualia. Q. e. d.

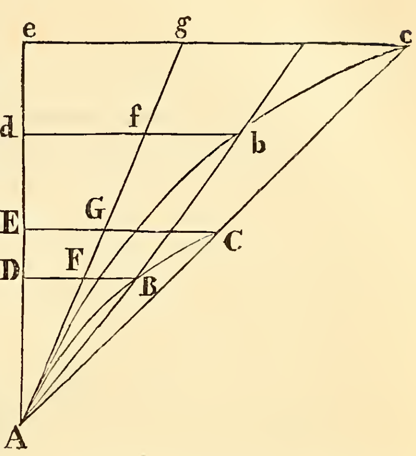
Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA IX.

Si recta A E *et curva* A B C *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A, *et ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* B D, C E, *curvæ occurrentes in* B, C, *dein puncta* B, C, *simul accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* A B D, A C E *erunt ultimo ad invicem in duplicatâ ratione laterum.*

Etenim dum puncta B, C accedunt ad punctum A, intelligatur semper A D produci ad puncta longinqua d et e, ut sint A d, A e ipsis A D,

A E proportionales, et erigantur ordinatæ d b, e c ordinatis D B, E C parallelæ quæ occurrant ipsis A B, A C productis in b et c. Duci intelligatur, tum curva A b c ipsi A B C similis, tum recta A g, quæ tangat curvam utramque in A, et secet ordinatim applicatas D B, E C, d b, e c in F, G, f, g. (s) Tum manente longitudine A e coeant puncta B, C cum puncto A; et angulo c A g evanescente, coincident areæ curvilineæ A b d, A c e cum rectilineis A f d, A g e; ideoque (per Lemma V.) erunt in duplicata ratione laterum A d, A e: Sed his areis proportionales semper sunt areæ A B D, A C E, et his lateribus latera A D, A E. Ergo et areæ A B D, A C E sunt ultimo in duplicatâ ratione laterum A D, A E. Q. e. d.



LEMMA X.

Spatia quæ corpus urgente quâcunque vi finitâ describit, sive vis illa determinata et immutabilis sit, sive eadem continuò augeatur vel continuò diminuatur, sunt ipso motûs initio in duplicatâ ratione temporum.

Exponantur tempora per lineas A D, A E, et velocitates genitæ per ordinatas D B, E C; (t) et spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ A B D, A C E his ordinatis descriptis, hoc est ipso motûs initio (per Lemma IX.) in duplicatâ ratione temporum A D, A E. Q. e. d.

A B, majori angulo opposita, ad tangentem A D, datam habebit majoris inæqualitatis rationem.

(s) 115. Tum manente longitudine finitâ A e, et mutatâ, si necessum fuerit, longitudine A d, ut sit semper A d : A e = A D : A E, coeant puncta B, C, cum puncto A, &c.

(t) 116. Spatia his velocitatibus descripta erunt ut areæ A B D, A C E, his ordinatis descriptæ. Nam ductâ d b, ipsi D B, infinitè propinqua, ita ut D d, sit infinitesima seu evanescens respectu A D, A E, lineæ D B, d b, et rectangulum d m, ac figura D d b B, pro æqualibus respectivè usurpari possunt (107), adeò ut per tempusculum infinitesimum, D d, velocitas D B, tanquam uniformis haberi possit; spatium autem æquabili velocitate d b, percursum, est ut factum ex velocitate d b, et tempusculo D d, (5,) hoc est, ut rectangulum D d × d b, seu ut area D B b d; si igitur areæ A C E, A D B, in infinita numero atque infinitesima rectangula, ut d m, divisæ concipiantur, erunt summæ spatiorum percursorum, seu spatia temporibus A E, A D, percursa, ut summæ horum rectangulorum, hoc est, ut areæ ipsæ A C E, A B D, (Lem. III.)

117. *Cor.* Vis acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motûs initio considerari potest, tanquam vis determinata et immutabilis. Spatia enim, quæ corpus urgente vi acceleratrice constante describit, sunt semper in duplicatâ temporum ratione (27); et contra, si spatia percursa duplicatam habeant temporum rationem, vis acceleratrix constans est; nam si mutabilis esset vis, illa quoque temporum et spatiorum proportio mutaretur. Ergò (Lem. X) vis quælibet acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso

Corol. 1. ([u]) Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus describentium errores, qui viribus quibusvis æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, et mensurantur, per distantias corporum a figurarum similium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus sine viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proximè.

Corol. 2. ([x]) Errores autem qui viribus proportionalibus ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires et quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. ([y]) Idem intelligendum est de spatiis quibusvis quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motus initio, ut vires et quadrata temporum conjunctim.

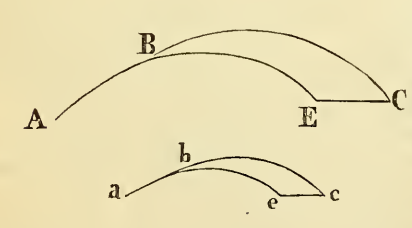
Corol. 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motus initio, descripta directè et quadrata temporum inversè.

Corol. 5. Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directè et vires inversè.

Scholium.

Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, et earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directè vel inversè: sensus

motûs initio tanquam immutabilis spectari potest.



(u) 118. Corpora duo A et a, curvas similes A B E, a b e, illarumque partes similes A B, a b, B E, b e, temporibus proportionalibus describant; duobus hisce corporibus, cum ad puncta B et b, pervenerint, accedunt novæ vires acceleratrices inter se æquales et similiter applicatæ, quæ prioribus viribus additæ corpora deferant per arcus B C, b c. Jungantur rectæ E C, e c, quæ errores solâ virium perturbantium actione genitos exponent; Lineæ enim illæ sunt spatia solâ virium perturbantium actione descripta. Cum autem vires perturbantes supponantur æquales et similiter applicatæ, idem contingere debet ac si corpus aliquod eâdem vi acceleratrice sollicitatum spatia E C, e c, diversis temporibus describeret, adeoque spatia illa sunt, ipso motus initio, ut quadrata temporum quibus percurruntur *(Lem. X.)* B C, b c, et quibus absque virium perturbantium actione percurrerentur arcus similes B E, b e; si igitur vires illæ perturbantes supponantur constantes, spatia E C, e c, non solùm motûs initio, sed et tempore finito descripta, erunt ut prædictorum temporum quadrata (27). Undè si admodum exigua sit virium perturbantium variatio, spatia seu errores erunt quam proximè ut quadrata temporum.

(x) 119. Errores autem qui viribus proportionalibus, seu viribus in datâ ratione existentibus, ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires et quadrata temporum conjunctim. Nam si tempora sunt eadem, errores sunt in datâ ratione virium; si vires sunt eædem, errores sunt in duplicata ratione temporum quibus generantur; cùm igitur vires et tempora variant, errores sunt in ratione compositâ ex datâ virium ratione et duplicatâ temporum.

(y) 120. Nam vires motûs initio tanquam constantes haberi possunt (117); dupla autem spatia, adeóque simplicia spatia, quæ corpora urgentibus viribus constantibus describunt, sunt ut vires et quadrata temporum conjunctim (30) ergo spatia quæ corpora urgentibus diversis

est, quòd prior augetur vel diminuitur in eâdem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciprocâ. Et si earum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directè aut inversè: sensus est, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directè et C directè et D inversè: sensus est, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$ hoc est, quod A et $\frac{BC}{D}$ sunt ad invicem in ratione datâ.

LEMMA XI.

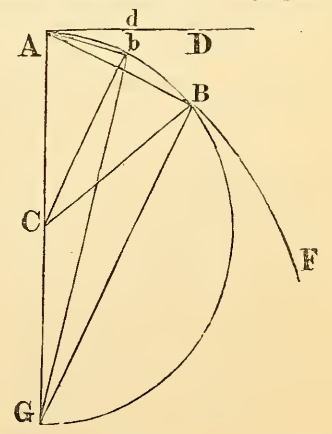
Subtensa evanescens anguli contactus, in curvis omnibus (z) *curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, est ultimo in ratione duplicatâ subtensæ arcus contermini.*

Cas. 1. Sit arcus ille A B, tangens ejus A D, subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis B D, subtensa arcus A B. Huic subtensæ A B et tangenti A D perpendiculares erigantur A G, B G, concurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta, d, b, g, sitque I intersectio linearum B G, A G ultimo facta

viribus describunt, sunt, ipso motus initio, ut vires et quadrata temporum conjunctim. Si itaque vires acceleratrices, motus initio, sint G, g, spatia S, s, tempora T, t, erit S : s = G T T : g t t, ideóque $G : g = \frac{S}{TT} : \frac{s}{tt}$, et T T : t t = S : G : s : g, hoc est, vires sunt ut spatia motus initio descripta directè et quadrata temporum inversè; Temporum verò quadrata sunt ut descripta spatia directè et vires inversè.

(z) 121. Circuli curvatura est in omnibus circumferentiæ punctis eadem, seu uniformis; in variis autem circulis eo major est, quo minor est circuli radius, adeò ut circuli curvatura sit semper in ratione inversâ radii. Aliarum linearum curvatura in singulis punctis determinatur per curvaturam arcus circularis qui cum arcu infinitesimo curvæ in puncto dato congruit, seu, quod idem est, qui curvam in puncto dato osculatur. Est igitur lineæ cujusvis in puncto dato curvatura inversè ut radius circuli curvam lineam in dato puncto osculantis.

Sumantur duo curvæ A F, puncta A et B, ducanturque rectæ A C, B C, ad curvam perpendiculares, et ex puncto intersectionis C, tanquam centro, radiis C A, C B, duo describantur circuli, quorum unus radio C A, descriptus tanget curvam in A, alter autem radio C B, descriptus tanget eam in B. Si ad se mutuò accedant puncta A et B, donec arcus A B evanescat, duæ perpendiculares A C, B C, pro æqualibus usurpari poterunt (Lem. I.), conjungentur duo



puncta contactus A et B, duoque circuli tangentes abibunt in unum A B G, qui curvam osculabitur in A, vel B, adeoque curvatura lineæ A F, in A, est in ratione inversâ

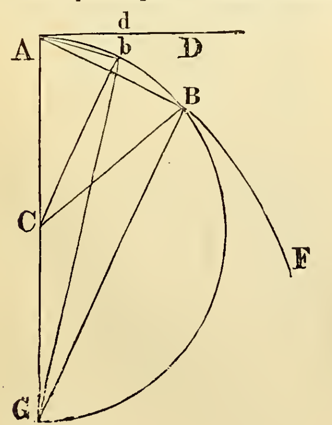
(^{a}) ubi puncta D, B accedunt usque ad A. Manifestum est quod distantia G I minor esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circulorum per puncta A B G, A b g transeuntium) A B quad. æquale A G × B D, et A b quad. æquale A g × b d; ideoque ratio A B quad. ad A b quad. componitur ex rationibus A G ad A g et B D ad b d. Sed quoniam G I assumi potest minor longitudine quâvis assignatâ, fieri potest ut ratio A G ad A g minùs differat a ratione æqualitatis quam pro differentiâ quâvis assignatâ, ideoque ut ratio A B quad. ad A b quad. minùs differat a ratione B D ad b d, quàm pro differentiâ quâvis assignatâ. Est ergo, per Lemma I. ratio ultima A B quad. ad A b quad. eadem cum ratione ultimâ B D ad b d. Q. e. d.

Cas. 2. (^{b}) Inclinetur jam B D ad A D in angulo quovis dato, et eadem semper erit ratio ultima B D ad b d, quæ priùs, ideoque eadem ac A B quad. ad A b quad. Q. e. d.

Cas. 3. (^{c}) Et quamvis angulus D non detur, sed recta B D ad datum

radii A C circuli osculantis. Si ergo finitus sit radius osculi A C, finita quoque erit curvatura in A; si vero radius sit infinitus, curvatura erit infinitesima; ac tandem si radius sit infinitesimus, curvatura erit infinita. Quoniam autem eo magis curva a tangente A D deflectit, quo circuli osculantis radius A C minor est, et contra, patet angulum contactûs crescere et decrescere cum curvaturâ et in eâdem ratione inversâ radii.

122. Ducantur chordæ A B, B G; angulus A B G, in semicirculo rectus est; ac proindè si in curvâ quâcumque curvaturam finitam in



puncto aliquo A habente ducantur chordæ evanescentes A b, A B, ad easque agantur perpendiculares B G, b G, hæ lineæ convenient in puncto G, junctisque punctis A et G, recta A G ad tangentem A d perpendicularis erit, et finitam habebit magnitudinem, ut pote quæ æqualis est duplo radio finito A C, circuli curvam osculantis in A.

(a) 123. Ubi puncta D, B, accedunt usque ad A, linea A I (122) est diameter circuli curvam A b B osculantis in A, et quoniam accedente puncto B, ad A, accedit punctum G, ad I, atque evanescente arcu A B, evanescit quoque distantia G I, manifestum est quod distantia G I minor esse potest quam assignata quævis; quia verò anguli A b g, A B G, recti sunt (per hyp.) circuli duo diametris A g, A G, descripti per puncta b, B, transeunt, adeóque horum circulorum chordæ A b, A B, sunt mediæ proportionales inter suas respectivè abscissas A c, A C, seu æquales d b, D B, et diametros A g, A G, ac proindè A B^2 = A G × B D et A b^2 = A g × b d &c.

(b) 124. Inclinentur jam B D, b d, ad A D, in angulo quovis dato B D F, b d f, eadem semper erit ratio ultima B D, ad b d, quæ priùs. Ductis enim B F, b f, ad A C, parallelis, erit ob triangula æquiangula B F D, b f d, B D : b d = B F : b f; sed (123) B F : b f = A B^2 : A b^2; est igitur B D : b d = A B^2 : A b^2.

(c) 125. Et quamvis angulus D, non detur, sed rectæ, D B, d b, ad datum punctum H,

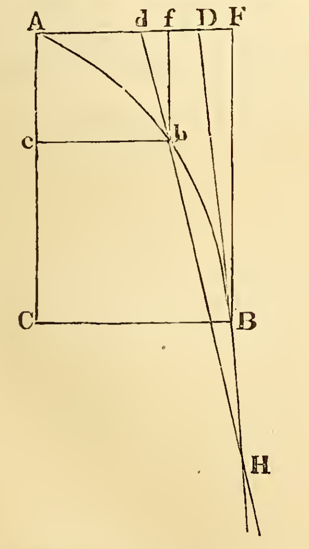
punctum convergat, vel aliâ quâcunque lege constituatur; tamen anguli D, d communi lege constituti ad æqualitatem semper vergent et propiùs accedent ad invicem quàm pro differentiâ quâvis assignatâ, ideoque ultimo æquales erunt, per Lem. I. et propterea lineæ B D, b d sunt in eâdem ratione ad invicem ac priùs. Q. e. d.

Corol. 1. Unde cum tangentes A D, A d, arcus A B, A b, et eorum sinus B C, b c fiant ultimo chordis A B, A b æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ B D, b d.

Corol. 2. ([d]) Eorundem quadrata sunt etiam ultimo ut sunt arcuum sagittæ, quæ chordas bisecant et ad datum punctum convergunt. Nam sagittæ illæ sunt ut subtensæ B D, b d.

Corol. 3. ([e]) Ideoque sagitta est in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate describit arcum.

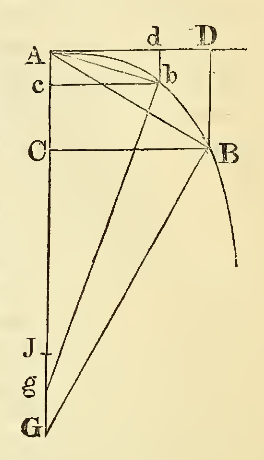
convergant, vel aliâ quâcumque communi lege constituantur, tamen anguli D, d, communi lege constituti (punctis b et B ad A et ad se mutuò accedentibus) ad æqualitatem semper vergent, et evanescente arcu B b, adeóque coincidentibus lineis H D, H d, propiùs accedent ad invicem quam pro differentiâ quâvis assignatâ ac proinde ultimò æquales erunt (per Lem. I.), et proptereà lineæ B D, b d, sunt ultimò parallelæ et in eâdem ratione ad invicem ac priùs (124.)



([d]) 126. Sit F A B, arcus circuli curvam datam osculantis in A, tangens A D, radius osculi A L, chordæ F B, f b, ad radium A L, et rectæ B D, b d, ad tangentem A D, normales, per puncta C, c, semper ducantur lineæ E C, e c, ad datum punctum H, convergentes, evanescente arcu A B, rectæ D B, d b, et ipsis æquales sagittæ A C, A c, sunt ut tangentium A D, A d, arcuum A B, A b, et chordarum A B, A b, quadrata (*Corol.* 1.) adeóque ut duplorum arcuum F A B, f A b, et chordarum f b, F B, iis arcubus evanescentibus (Lem. 7.) congruentium, atque etiam tangentium quadrata. Jam ubi punctum C, usque ad A, accedit, chorda evanescens A E, cum tangente A G, coincidit (Lem. 6.) et cocuntibus quoque lineis E H, e H, triangula C E A, c e A, fiunt similia, ac proindè E C est ad e c, ut A C, ad A c, hoc est ut arcuum evanescentium F A B, f A b, chordarum F B, f b, et tangentium quadrata.

([e]) 127. Ideóque sagittæ A C, A c, vel E C, e c, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus corpus datâ velocitate percurrit arcus evanescentes F A B, f A b, vel dimidios A B, A b; spatia

Corol. 4. ([f]) Triangula rectilinea A D B, A d b sunt ultimo in triplicatâ ratione laterum A D, A d, inque sesquiplicatâ laterum D B, d b; utpote in compositâ ratione laterum A D et D B, A d et d b existentia. Sic et triangula A B C, A b c sunt ultimo in triplicatâ ratione laterum B C, b c. Rationem verò sesquiplicatam voco triplicatæ subduplicatam, quæ nempè ex simplici et subduplicatâ componitur.



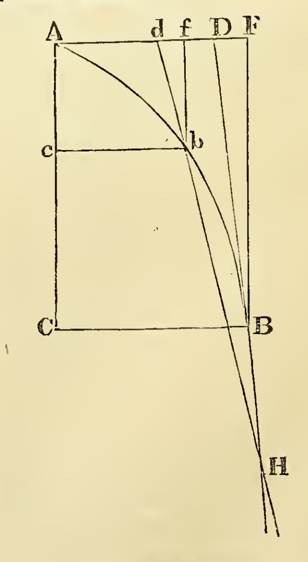
Corol. 5. Et quoniam D B, d b sunt ultimo parallelæ et in duplicatâ ratione ipsarum A D, A d: erunt areæ ultimæ curvilineæ A D B, A d b ([g] ex naturâ parabolæ) ([h]) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum A D B, A d b; et segmenta A B, A b partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ et hæc segmenta erunt in triplicatâ ratione tum tangentium A D, A d; tum chordarum et arcuum A B, A b.

enim datâ velocitate percursa sunt ut tempora (5), adeóque pro temporibus substitui possunt arcus F A B, f A b, sed sagittæ sunt in ratione duplicatâ eorum arcuum, (126), ergò et temporum.

(f) 128. Triangula rectilinea A B D, A b d, sunt ultimò in triplicatâ ratione laterum A D, A d, inque sesquiplicatâ laterum B D, b d; ductis enim B F, b f, ad tangentem A B, perpendicularibus, erit ob triangulorum B D F, b d f, similitudinem B D : b d = B F : b f, et propterea areæ triangulorum A B D, A b d, sunt in ratione compositâ laterum A D, ad A d, et B D, ad b d; sed (124, 125. Cor. 1.) $B D : b d = A D^2 : A d^2$, adeòque $\sqrt{B D} : \sqrt{b d} = A D : A d$, ergò triangula A B D, A b d, sunt in ratione compositâ A D, ad A d, et $A D^2$, ad $A d^2$, hoc est, in ratione triplicatâ laterum A D, A d; sunt etiam in ratione compositâ B D, ad b d, et $\sqrt{B D}$, ad $\sqrt{b d}$, hoc est, in ratione $B D \times \sqrt{B D}$ ad $b d \times \sqrt{b d}$.

(g) 129. Arcus evanescens A B, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactûs A, habentibus, pro arcu parabolæ usurpari potest. Ductâ enim A C, lineis B F, b f, parallelâ, completisque parallelogrammis A B, A b, erunt, ex demonstratis, rectæ F B, f b, et ipsis æquales abscissæ A C, A c, ut ordinatum C B, c b, quadrata, quæ est notissima parabolæ proprietas.

130. Quare arcus evanescens spectari potest tanquam arcus parabolæ cujus latus rectum est æquale diametro circuli osculantis. Nam in arcu circulari A B, (vid. fig. textûs) ordinata C B, ad diametrum perpendicularis, est media proportionalis inter abscissam A C, et reliquam diametri partem, seu totam diametrum, cum A C, evanescit (Lem. I.), adeóque quadratum ordinatæ C B, æquale est rectangulo ex abscissâ evanescente A C, et diametro circuli, quæ est proprietas parabolæ cujus latus rectum æquale est prædictæ diametro.

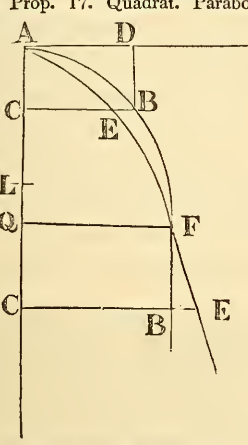


(h) 131. Parabolæ segmentum A b B, est tertia pars trianguli rectilinei A C B, vel æqualis A D B, adeóque area curvilinea A D B b A, æqualis est duabus tertiis partibus ejusdem trianguli rectilinei A D B. Vid. Gregor. a S. Vincentio

Scholium.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinitè majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinitè minorem; hoc est, curvaturam ad punctum A, nec infinitè parvam esse, nec infinitè magnam, seu intervallum A J finitæ esse magnitudinis. (i) Capi enim potest D B ut $A\,D^3$: quo in casu circulus nullus per punctum A inter tangentem A D et curvam A B duci potest, proindeque angulus contactus erit infinitè minor circularibus. (k) Et simili argumento si fiat D B successivè ut $A\,D^4$, $A\,D^5$, $A\,D^6$, A D,

Cor. 1. Prop. 232. Lib. V. Quadraturæ circuli, aut Archimed. Prop. 17. Quadrat. Parabolæ.



(i) 132. Sit parabolæ Appollonianæ A E F, axis A C, vertex A, tangens in vertice A D, ordinata C E, latus rectum A L, circulus diametro A L, descriptus parabolam osculatur in A, (130.) eundemque ac parabola contactûs angulum efficit in A. Ad eundem axem A C, et verticem A, describatur superioris generis parabola cujus ordinatæ C B sint semper in subtriplicatâ abscissarum A C, vel parallelarum et æqualium D B, ratione; et erit angulus contactûs B A D, angulo contactûs E A D, infinitè minor. Dem.—Parabolæ A F E, latus rectum A L, dicatur A; parabolæ A B B, latus rectum sit B, et erit ex harum curvarum naturâ $A \times A\,C = C\,E^2$ et $B^2 \times A\,C = C\,B^3$, adeóque $A\,C = C\,E^2 : A = C\,B^3 : B^2$, undè reperitur $C\,B^3 = C\,E^2 \times B^2 : A$, et C B ad $B^2 : A = C\,E^2$ ad $C\,B^2$ ergo cum erit $C\,B = B^2 : A$, tunc erit $C\,E^2 = C\,B^2$, atque adeò parabolæ A E E, A B B, ordinatam habebunt communem quæ dicatur Q F, et sese intersecabunt in puncto F; jam verò si fuerit C B minor quam $B^2 : A$, erit quoque $C\,E^2$ minor quàm $C\,B^2$, adeóque C E minor quàm C B; sed omnes ordinatæ inter verticem A, et ordinatam communem Q F, (quæ est $= B^2 : A$) minores sunt eâ, ergo omnes C E inter A et F comprehensæ sunt minores ordinatis correspondentibus C B, tota igitur parabolæ Appollonianæ portio A E F, quâ ordinatæ C E terminantur, cadit intrà portionem A B F, alterius parabolæ, ac proindè angulus contactûs B A D, semper minor est angulo contactûs E A D, cum ergò angulus E A D, aucto in infinitum latere recto A L, possit sine fine minui, manifestum est angulum contactûs B A D, quovis angulo dato E A D, infinitè minorem esse. Q. e. d.

133. Ad eundem axem A C, et verticem A, successivè describantur curvæ A E E; ejus naturæ, ut abscissarum A C, et ordinatarum C E, relatio exprimatur æquatione generali $A^m A\,C = C\,E^{m+1}$. Si loco exponentis, m, successivè ponantur in æquatione numeri quilibet positivi, integri vel fracti continuò crescentes vel decrescentes, obtinebuntur infinitæ series diversæ angulorum contactuum, quorum quilibet est infinitè minor priore, dum numerus, m, semper crescit, et infinitè major dum numerus, m, semper decrescit. Dem.—Numerus, m, augeatur numero positivo, n, integro vel fracto, et describatur curva A B B, cujus æquatio sit $B^{m+n} \times A\,C = C\,B^{m+n+1}$. Et hac æquatione et superiori $A^m A\,C = C\,E^{m+1}$, reperitur $A\,C = C\,B^{m+n+1} : B^{m+n} = C\,E^{m+1} : A^m$, adeóque $C\,B^{m+n+1} = C\,E^{m+1} \times B^{m+n} : A^m$ atque $C\,B^n$ ad $B^{m+n} : A^m = C\,E^{m+1}$ ad $C\,B^{m+1}$; sit $C\,B^n = B^{m+n} : A^m$, et erit $C\,B^{m+1} = C\,E^{m+1}$, adeóque C B = C E = Q F. Quare cum inter verticem A, et communem ordinatam Q F, omnes ordinatæ sint minores ipsâ Q F, patet ut suprà (132), totam portionem A E F, curvæ A E E, cadere intrâ portionem A B F, alterius curvæ A B B, ac proindè angulum contactûs B A D, quovis dato angulo contactûs E A D infinitè minorem esse, et reciprocè angulum E A D, esse angulo B A D infinitè majorem. Q. e. d.

(k) 134. In æquatione $A^m \times A\,C = C\,E^{m+1}$, loco exponentis m, successivè ponantur numeri 1, 2, 3, 4, 5, &c. et erit A C successivè, ut $C\,E^2$, $C\,E^3$, $C\,E^4$, $C\,E^5$, &c. et habebitur (133) series angulorum contactûs pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinitè minor priore. Loco m substituantur successivè numeri decrescentes, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. erit A C, successivè ut $C\,E^2$, $C\,E^{\frac{3}{2}}$, $C\,E^{\frac{4}{3}}$, $C\,E^{\frac{5}{4}}$, &c. et habebitur alia series infinita angulorum contactûs, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus (132), secundus infinitè major, et quilibet posterior infinitè major

&c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinitè minor priore. Et si fiat D B successivè ut A D^2, A $D^{\frac{5}{2}}$, A $D^{\frac{4}{3}}$, A $D^{\frac{5}{4}}$, A $D^{\frac{6}{5}}$, A $D^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinitè major, et quilibet posterior infinitè major priore. Sed et inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinitè major minorve priore. Ut si inter terminos A D^2, et A D^3, inseratur series A $D^{\frac{13}{6}}$, A $D^{\frac{11}{5}}$, A $D^{\frac{9}{4}}$, A $D^{\frac{7}{3}}$, A $D^{\frac{5}{2}}$, A $D^{\frac{8}{3}}$, A $D^{\frac{11}{4}}$, A $D^{\frac{14}{5}}$, A $D^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

(l) Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facilè applicantur ad solidorum superficies curvas et contenta. (m) Præmisi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, et propterea methodus illa minùs geometrica censetur; (n) malui demonstrationes rerum sequentium

(153). Loco m, substituantur numeri 1, $1+\frac{1}{6}$, $1+\frac{1}{5}$, $1+\frac{1}{4}$, $1+\frac{1}{3}$, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{2}{3}$, $1+\frac{3}{4}$, $1+\frac{4}{5}$, $1+\frac{5}{6}$, &c., erit A C, successivè ut C E^2, C $E^{\frac{13}{6}}$, C $E^{\frac{11}{5}}$, C $E^{\frac{9}{4}}$ &c., et habebitur series infinita angulorum contactûs, quorum quilibet posterior est infinitè minor priore (153), et inter binos quosvis angulos hujus alteriusve seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium; ut enim ea series inveniatur, sufficit inter duos numeros datos, v. G. 1, $1+\frac{1}{6}$, seriem invenire numerorum crescentium, vel decrescentium, quorum quilibet major sit altero ex numeris datis, minor altero, quod facillimum est.

(l) 155. Id exemplo facili illustrare satis erit. Pyramidis et coni sit idem vertex eademque altitudo, et basis pyramidis sit polygonum inscriptum circulo qui basis est coni, numerus laterum polygoni augeatur, et eorum longitudo minuatur in infinitum, et polygoni ac circuli ultima ratio (Lem. 7.) erit ratio æqualitatis, ac proindè ultima ratio pyramidis illiusque superficiei ad conum et illius superficiem curvam, erit quoque ratio æqualitatis; undè curva superficies coni æqualis est summæ ultimæ triangulorum evanescentium, quorum communis vertex est vertex coni, bases verò latera evanescentia polygoni circulo inscripti.

(m) 156. Quàm magnos progressus Geometria fecerit, hinc cognoscere licet. Veteres Geometræ in iis quæstionibus quæ *Infiniti* considerationem involvunt, suas demonstrationes ad absurdum revocabant, et ex falsis suppositionibus verum eruebant. Ut inter duas quantitates quæ ad æqualitatem constanter vergunt, et tandem propiùs ad invicem accedunt quàm pro datâ quâvis differentiâ rationem æqualitatis intercedere demonstrarent, priùs supponebant inter eas quantitates esse vel majoris vel minoris inæqualitatis rationem, deindè utrumque falsum demonstrabant, et ex hâc reductione quam ad absurdum vocant, inter illas quantitates perfectam æqualitatem esse concludebant. Quàm autem perplexus sit et tædiosus hic demonstrandi modus, nemo non videt. Verùm licet imperfecta admodùm fuerit veterum Geometria, non iis tamen omninò ignota fuerunt methodi infinitesimalis principia. Quantitates infinitè parvas seu evanescentes pro nihilo habendas esse in multis demonstrationibus tanquam axioma posuerunt Euclides et Archimedes; in exemplum afferemus unicum vulgaris Geometriæ theorema. Ut demonstrarent circulos esse inter se ut quadrata diametrorum, fingebant iis circulis inscripta esse vel circumscripta polygona similia quorum latera numero augerentur et longitudine minuerentur in infinitum, ità ut polygonorum inscriptorum vel circumscriptorum a circulo differentia foret quâvis datâ magnitudine minor; quia verò hæc polygona sunt ut quadrata diametrorum circulorum quibus inscribuntur vel circumscribuntur, circulos pariter esse ut quadrata diametrorum concludebant. Varios infinitorum ordines supponit illud idem theorema, licèt non adverterent vete

ad ultimas quantitatum evanescentium summas et rationes, primasque nascentium, id est, ad limites (o) summarum et rationum deducere; et propterea limitum illorum demonstrationes quâ potui brevitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium; et principiis demonstratis jam tutiùs utemur. Proinde in sequentibus, si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas et rationes partium (p) determinatarum, sed summarum et rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium lemmatum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima; ubi evanuerunt, nulla est. Sed et eodem argumento æque contendi posset nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis (q) velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam; ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: per velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum et motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum et

res. Nam considerabant polygona circulis inscripta tanquam composita ex infinitis numero atque infinitè parvis seu evanescentibus lateribus; manifestum autem est differentiam polygoni inscripti a circulo quâvis datâ minorem componi ex infinitis numero atque infinitè parvis seu evanescentibus circuli segmentis quorum latera polygoni sunt chordæ; hæc verò segmenta sunt minimæ quantitates illæ quas secundi ordinis infinitesimas dicunt recentiores. Hîc pedem fixerant veteres, primusque longiùs progredi ausus est celeberrimus Geometra Bonaventura Cavalerius, qui anno 1635, indivisibilium methodum in geometriam introduxit. Hoc primum posuit suæ methodi decretum, lineas nempè ex infinitis punctis constare, superficies ex infinitis lineis, et solida ex infinitis superficiebus; deinde indivisibilia illa elementa, totamque eorum summam comparat in unâ magnitudine cum singulis elementis eorumque summâ in aliâ magnitudine, et sic duarum magnitudinum rationem determinat. Hæc autem quantitatum indivisibilium hypothesis durior minusque geometrica NEWTONO visa est.

(n) 137. NEWTONUS, ut indirectas et perplexas vitaret veterum demonstrationes, earum tamen certitudinem et evidentiam conservaret, veterum principium lemmate primo generaliter expressit, illudque in lemmatis sequentibus ad curvas generatim applicavit, et indè directas perbrevesque demonstrationes in toto operis decursu deduxit. Ut autem methodi indivisibilium brevitatem assequeretur, tutius tamen et accuratius procederet, loco indivisibilium evanescentia divisibilia substituit, et quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas considerat; supponit nimirum lineas describi ac describendo generari non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum, superficies per motum linearum, et solida per motum superficierum, angulos per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum, et sic in cæteris.

(o) 138. Ubi area curvilinea in parallelogramma rectilinea dividitur, et eorum numerus augetur atque latitudo minuitur in infinitum, horum parallelogrammorum summa (Lem. 2.), nunquam potest esse major areâ curvilineâ, sed hæc area est terminus ad quem parallelogrammorum decrescentium summa semper accedit et quem tandem attingit, ubi parallelogramma evanescunt aut nascuntur. Idem dicendum de evanescentibus curvarum chordis respectu perimetri curvilineæ.

(p) 139. Quantitates evanescentes concipi non debent velut determinatæ aut determinabiles quædam portiones quantitatum quæ certam et definitam parvitatem obtineant. Quascumque enim portiunculas linearum, superficierum aut corporum acceperimus aut designaverimus, hæ semper reipsâ finitæ erunt, non evanescentes; itaque non sunt intrà certos terminos quantumvis proximos coarctandæ, undè hæ quantitates semper ut decrescentes ac perpetuò diminuendæ accipi debent.

(q) 140 Exempli causâ, gravis sursùm projecti et ad altissimum locum pervenientis.

quâcum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescunt, non postea, sed quâcum evanescunt. Pariter et ratio prima nascentium est ratio quâcum nascuntur. Et summa prima et ultima est quâcum esse (vel augeri aut minui) incipiunt et cessant. Extat limes quem velocitas in fine motûs attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum et proportionum omnium incipientium et cessantium. Cumque hic limes sit certus et definitus, problema est verè geometricum eundem determinare. Geometrica verò omnia in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis legitimè usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur et ultimæ magnitudines: et sic quantitas omnis

(r) 141. Seu, quantitatum determinatarum et indivisibilium, sed, &c.

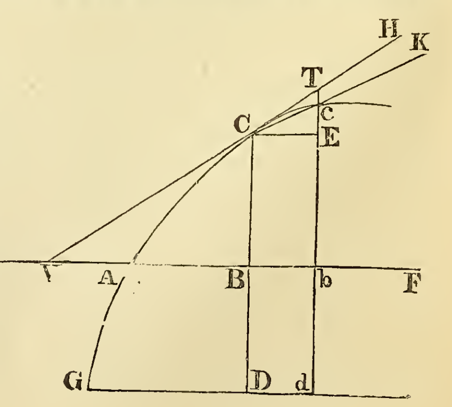
142. Ut quantitatum evanescentium aut nascentium relationes atque proprietates inveniantur, considerantur quantitates finitæ, harum investigantur relationes et proprietates et lex quâ continuò crescunt vel decrescunt; quibus cognitis facilè intelligitur quænam proprietates quantitatibus illis crescentibus ac decrescentibus semper conveniant, adeóque et cum in infinitum minuuntur et evanescunt, vel cum nascuntur. Imò verò ex Lemmate primo aliisque sequentibus invenitur quænam sint proprietates quæ licèt quantitatibus finitis non conveniant, evanescentibus tamen et nascentibus competunt, cum nempè quantitates finitæ decrescentes ad illas proprietates, ut ità dicam perpetuò accedunt, et ad eas tempore dato accedunt magis quàm pro differentiâ quâvis datâ.

Ex præcedentibus Lemmatibus facilè deducitur ac demonstratur *Newtoniana* fluxionum methodus cujus generalia principia ut potè nobis in posterum profutura breviter explicabimus.

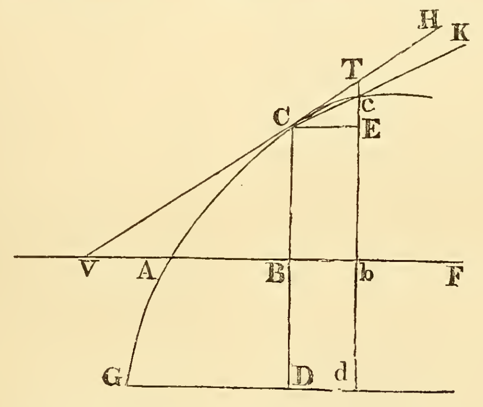
143. Quantitates indeterminatæ quæ continuò crescunt vel decrescunt, variabiles aut fluentes dicuntur; constantes verò aut determinatæ vocantur, quæ aliis continuò crescentibus vel decrescentibus, eædem manent. Ordinatæ B C, B D, super basi A F, motu sibi semper parallelo ità progrediantur, ut ordinatâ B D, eâdem semper manente, punctum D, rectam G D d describat, et interim continuò crescente vel decrescente ordinatâ B C, punctum C describat curvam A C c; abscissa A B, ordinata B C, curvæ arcûs A c, areæ A C B, A G D B, sunt quantitates indeterminatæ seu fluentes; recta verò B D, est quantitas constans.

144. Quantitates fluentes, ut A B, B C, æqualibus temporibus crescentes et crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori quâ crescunt, ac generantur, evadunt majores vel minores; si enim punctum B, velociùs semper progrediatur quam punctum C, in lineâ B C, incrementa B b, fluentis A B, majora erunt incrementis E c, fluentis B C, eodem tempore genitis. Velocitates quibus illa incrementa ut B b, E c, eodem tempore genita, primò nascuntur, dum nempè b c, coincidit cum B C, dicuntur *fluxiones*, et methodus ex fluentibus inveniendi fluxiones, methodus fluxionum directa vocatur; methodus verò ex fluxionibus inveniendi fluentes, *methodus fluxionum inversa* appellatur.

145. Velocitates quibus fluentium quantitatum incrementa eodem tempore genita, primò nascuntur, sunt uniformes.—*Dem.* Cum curva A C c, motu puncti C, velocitate quâvis finitâ progredientis describi possit, si illius puncti velocitas secundùm directionem C E, lineæ A B parallelam, supponatur uniformis, velocitas ejusdem secundùm directionem E c, pro variâ curvæ A C c naturâ, varia quidem erit in diversis curvæ punctis, v. gr. in C, et c; sed quò magis punctum c, ad C, accedet, eò minor erit velocitatis secundùm directionem E c, variatio



constabit ex indivisibilibus, contra quam Euclides de incommensurabilibus, in libro decimo elementorum, demonstravit. Verum hæc objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ([r]) ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; et quas propius assequi possunt quàm pro datâ quâvis differentiâ, nunquam verò transgredi, neque priùs attingere quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ, quarum data est differentia, augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideò dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. In sequentibus igitur, si quando facili rerum conceptui consulens, dixero quantitates quàm minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.



in punctis C, et c, adeò ut dum punctum c, coincidit cum puncto C, omnis velocitatis per E c, variatio expiret. Quare (Lem. I.) velocitates quibus fluentium incrementa eodem tempore genita primò nascuntur, sunt uniformes. Q. e. d.

146. Cum ergò velocitates uniformes sint spatiis eodem tempore percurrendis proportionales (5), manifestum est fluxiones (145) esse in ratione incrementorum eodem tempore genitorum, dum primò nascuntur vel ultimò evanescunt; adeóque ut fluxionum relatio inveniatur, sumere oportet incrementa fluentium eodem tempore genita, et primam eorum incrementorum nascentium, vel ultimam evanescentium rationem considerare tanquam relationem fluxionum.

147. Hinc summa fluxionum est ut summa incrementorum nascentium vel evanescentium, summa verò incrementorum omnium nascentium est ipsa quantitas fluens; nam si tota area A c b divisa intelligatur in parallelogramma ut B E, eorumque numerus augeatur et latitudo B b minuatur in infinitum, summa omnium incrementorum nascentium B b, ab A usque ad b, erit ipsa fluens A b, summa omnium incrementorum E c, ab A, usque ad c, erit fluens b c, summa omnium C c, erit arcus fluens A c, et summa omnium parallelogrammorum B E, erit area A c b fluens (106, 107); ergò summa fluxionum est ut ipsa quantitas fluens.

148. Quoniam in figurâ superiori fluxio aliqua, vel abscissæ A B, vel ordinatæ C B, aut arcûs A C, ad arbitrium tanquam uniformis spectari possit, (Ex dictis 145.) patet ex pluribus fluxionibus unam tanquam constantem posse considerari et quantitate finitâ constanti exponi, dum aliæ fluxiones variâ ratione mutari et quantitatibus variabilibus exponi possunt.

149. Quare cum quantitates variabiles suas habeant fluxiones quæ rursùs possunt esse variabiles, liquet dari fluxiones fluxionum, seu varios, imò infinitos fluxionum ordines. Fluentium finitarum fluxiones dicuntur fluxiones primæ; harum fluxiones primæ dicuntur fluentium finitarum fluxiones secundæ, et ità porrò in infinitum.

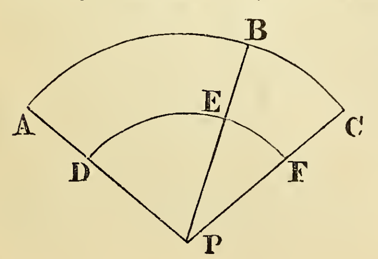
150. Ductâ rectâ V T H, quæ curvam tangat in C, ipsisque b c et B A productis occur-

rat in T et V; linea b c in locum suum priorem B C redeat, et ultima forma triangulorum evanescentium C E c, C E c, C E T, est similitudinis et ultima ratio æqualitatis (*Lem.* VIII.) ideóque fluxiones primæ ipsarum A B, B C, A C, sunt (146.) ut trianguli C E T, latera C E, E T, et C T, et per eadem latera exponi possunt, vel quod perindè est, per latera V B, C B, et V C, trianguli V B C, similis triangulo C E T.

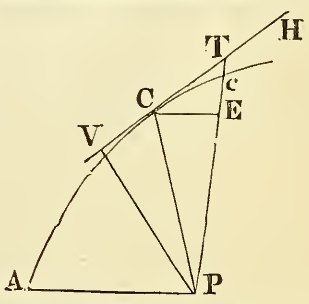
151. Quoniam areæ B b c C, B b d D, eodem tempore describuntur communi ordinatarum B C, B D motu, erunt areæ illæ nascentes vel evanescentes ut fluxiones arearum A C B, A B D G, (146); sed area nascens B b c C, non differt à parallelogrammo B E, (107); ergò fluxiones arearum A C B, A B D G, sunt in ratione primâ parallelogrammorum B E, B d nascentium, seu ob commune latus B b, in ratione ordinatarum C B, B D.

152. Si circulus centro B, radio fluente B C, descriptus per longitudinem abscissæ A B, ad angulos rectos progrediatur, describet solidum idem quod ex rotatione figuræ A C B, circà axem A B generaretur, et fluxio solidi geniti erit ut factum ex areâ circuli illius in incrementum nascens B b, abscissæ A B, et fluxio superficiei solidi geniti erit ut factum ex perimetro ejusdem circuli in arcum C c, vel tangentem C T, nascentem.—*Dem.* Rectangulum nascens B E, non differt a figurâ B b c C nascente (107), adeòque incrementum nascens solidi ex rotatione figuræ A C B, geniti æquale est solido ex rotatione rectanguli B E, circà latus B b, genito; hoc autem solidum est cylindrus æqualis facto ex areâ circuli radio C B descripti in altitudinem B b; solidi igitur motu circuli C B per axem A B geniti incrementum nascens adeóque et ipsius fluxio (146) est ut factum ex areâ circuli in incrementum nascens B b, abscissæ A B. Similiter cum arcus nascens C c, cum tangente C T coincidat, (*Lem.* 7.) superficies nascens ex rotatione figuræ B b c C, genita æqualis est superficiei coni truncati, adeòque æqualis facto ex semisummâ peripheriarum, quarum sunt radii B C, b c, in latus C T, seu ob. b c = B C (107) æqualis facto ex peripheriâ circuli, cujus radius B C, in latus C T, vel arcum C T, nascentem; ergò factum istud est incrementum nascens superficiei curvæ ex rotatione A C descriptæ, adeóque est ut illius superficiei fluxio (146) Q. e. d.

153. Anguli rectilinei A P B, E P F sunt inter se directè ut arcus A B, E F, qui angulos subtendunt et reciprocè ut arcuum radii A P, E P.—*Dem.* Est angulus A P B, ad angulum B P C, seu E P F, ut arcus A B, ad arcum B C, adeóque ut A B : A P, ad B C : A P; sed ob arcus similes B C, E F, est B C : A P = E F : E P; ergò angulus A P B, est ad angulum E P F, ut A B : A P, ad E F : E P. Q. e. d.



154. Hinc sequitur 1°. quemlibet angulum A P B exprimi posse arcu A B qui ipsum subtendit diviso per radium A P. 2°. Quemlibet arcum circuli A B, esse ut factum ex angulo A P B in radium A P, atquè adeò hoc facto exprimi posse. 3°. Incrementum nascens anguli fluentis A P B, adeóque et illius anguli fluxionem (146) esse in ratione directâ arcûs circularis nascentis et inversâ radii illius.



155. Recta P C fluens circà datum polum P revolvatur, et punctum illius extremum C, curvam A C c, describat quam tangit in C recta V C H in quam ex polo P, demissa sit perpendicularis P V. Sit A punctum in curvâ A C fixum, progrediaturque recta P C de loco suo P C, in locum novum P c, et producta P c, tangentem secet in T. Capiatur P E = P C, seu radio P C describatur circuli arcus C E, ut habeantur E c, incrementum rectæ P C, C c, incrementum curvæ, A c, P C c incrementum areæ P A C P, angulus C P c, incrementum anguli A P C, eodem tempore genita. Redeat jam P C, in locum suum priorem P C, ut incrementa illa omnia evanescant et horum incrementorum evanescentium ratio ultima erit ratio fluxionum quantitatum fluentium quarum sunt incrementa (146).

156. Quoniam autem perveniente P c, in locum P C, triangula C E c, C E T, evanescentia sunt ultimò similia et æqualia (*Lem.* 8.) circuli arcus C E, cum chordâ ipsius coincidit, ipsique æqualis est (*Lem.* 7.), et prætereà evanescente angulo C P E, anguli P C E, P E C, sunt inter se et duobus rectis æquales, adeóque C E, ad P T, normalis. Manifestum est, 1°. Triangulum T V P esse triangulo T E C, adeóque et triangulo evanescenti c E C, simile, ac proindè fluxiones arcûs A C, et rectæ P C, esse inter se ut duo latera V T, T P seu V C, P C. 2°. Fluxionem anguli A P C, esse ut C E : P C (154.)—3°. Fluxionem areæ A C P, esse ut factum ex rectâ C P, in normalem C E evanescentem; nam area trianguli P C T, æqualis dimidio rect-

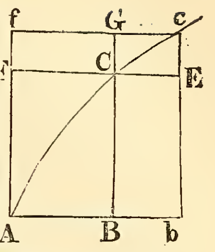
tangulo P T × C E, seu ob evanescentem E T, dimidio rectangulo P C × C E (Lem. 1.)

157. Similibus argumentis ex fluentibus calculo expressis fluxiones inveniri possunt, in quantitatibus finitis analysim instituendo, et finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel ultimas investigando. Hæc autem sunt calculi fluxionum principia. Nimirùm, 1°. Cùm fluxiones sint in primâ ratione incrementorum nascentium et ultimâ evanescentium (146), fluxiones iis incrementis primò nascentibus vel ultimò evanescentibus possunt exprimi.—2°. Quantitates quæ nonnisi suo incremento nascente aut evanescente differunt, sunt æquales (Lem. 1.)—3°. Quantitatum constantium nullæ sunt fluxiones, nulla incrementa vel decrementa.—4°. Si inter quantitates indeterminatas aliquæ decrescant, dum aliæ crescunt, decrescentium fluxiones sunt negativæ, sunt enim ut incrementa negativa, seu ut decrementa.

158. Quantitates fluentes designantur ultimis alphabeti litteris z, y, x, v; constantes indicantur aliis a, b, c, &c. fluentium fluxiones primas aut ipsis proportionalia incrementa nascentia vel evanescentia NEWTONUS notat iisdem litteris quibus fluentes exponuntur, sed iis punctuatis sic $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$; Leibnitius litteram d, incrementi nascentis vel evanescentis notam characteristicam fluentibus præponit sic dz, dy, dx, dv. Fluxiones secundæ designantur sic $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$, vel sic ddz, ddy, ddx, ddv; fluxiones tertiæ sic $\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$, vel sic $dddz, dddy, dddx, dddv$, vel sic d^3z, d^3y, d^3x, d^3v, et ità deinceps in infinitum.

159. Fluxio quantitatis ex pluribus terminis per additionem vel subtractionem compositæ, æqualis est omnibus singulorum terminorum fluxionibus per eadem signa + vel — junctis; ità fluxio quantitatis compositæ $a + z - y$, erit $d z - d y$.—*Dem.* Totius quantitatis $a + z - y$, incrementum tempore dato genitum æquale est differentiæ incrementorum ipsarum z et y, cum nullum sit constantis a, incrementum (156) adeóque incrementum nascens vel evanescens quantitatis $a + z - y$, æquale est differentiæ incrementorum nascentium vel evanescentium ipsarum z et y, sed fluxiones sunt in primâ ratione incrementorum nascentium (145) ergò fluxio totius quantitatis $a + z - y$, est $d z - d y$. Q. e. d. Si crescente quantitate z, decresceret y, ipsius y, fluxio foret negativa nempè $-d y$ (157) adeóque fluxio $d z - d y$, fieret $d z + d y$. Quod in sequentibus semper est observandum.

160. Fluxio quantitatis fluentis ex pluribus variabilibus per multiplicationem compositæ, æqualis est summæ factorum ex singularum variabilium componentium fluxionibus in aliarum variabilium facta ductis, hoc est fluxio quantitatis $z y$, est $z d y + y d z$, fluxio quantitatis $a z$ est $a d z$, fluxio quantitatis $z y x$ est $y x d z + z x d y + z y d x$.—*Dem.* Recta C B, fluens super rectâ A B cui normalis est, progrediatur, illiusque punctum extremum C, describat curvam A C c, perveniat B C in locum b c, et compleantur rectangula B F, b f, B E, C f, E G; A B, dicatur z, B C dicatur y, adeóque rectangulum B F erit $z y$. Dum B C, pervenit in b c, incrementum rectanguli B F seu $z y$, æquale est summæ rectangulorum B E, E G, C f; est autem rectangulum E G, ad rectangulum E B, ut E c ad B C, et ad rectangulum C f ut C E, vel B b, ad F C, seu A B; quarè redeunte b c, in locum suum priorem B C, et decrescentibus continuò E c, et E C atque tandem ultimò evanescentibus, decrescit quoque et tandem evanescit, seu fit inassignabilis ratio rectanguli E G, ad rectangula E B et C f; adeóque (Lem. 1.) summa duorum rectangulorum B E, C f, fit ultimò æqualis summæ trium rectangulorum B E, E G, C f; ergò incrementum nascens rectanguli B F, seu $z y$, æquale est summæ duorum rectangulorum B E, C f, nascentium, seu summæ factorum ex z, in incrementum nascens ipsius y, et ex y, in incrementum nascens ipsius z, adeóque fluxio facti $z y$ (146) est $z d y + y d z$. Undè etiam fluxio $a z$ est, $a d z$, quia a, constans nullam habet fluxionem. Q. e. d.



Jam in facto $z y x$ ponatur $z y = v$, et erit $z \times y x = v x$, adeóque fluxio facti $z y x$ æqualis fluxioni facti $v x$; fluxio autem facti $v x$, est $x d v + v d x$, et fluxio facti $z y = v$, est $z d y + y d z = d v$, id est si in fluxione $x d v + v d x$, pro v et $d v$ scribantur $z y$, et $z d y + y d z$, fluxio facti $z y x$, nempè $x d v + v d x$, erit $x z d y + y x d z + z y d x$; et par est ratio aliorum factorum quorumcumque. Q. e. d.

161. *Cor.* 1. Ponantur singulæ fluentes z, y, x, &c. sibi mutuò semper æquales et ipsius $z z$, fluxio erit $z d z + z d z = 2 z d z$: fluxio cubi z^3 erit $z z d z + z z d z + z z d z = 3 z z d z = 3 z^{3-1} d z$: fluxio potentiæ z^4 erit $4 z^3 d z = 4 z^{4-1} d z$: et eodem argumento fluxio potentiæ cujuscumque z^m erit $m z^{m-1} d z$.

162. *Cor.* 2. Fluxio quantitatis $z^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}-1} d z = \frac{d z}{2 z^{\frac{1}{2}}}$ nam ponatur $z^{\frac{1}{2}} = y$ et erit $z = y y$, $d z = 2 y d y$ (161) $d y = d (z^{\frac{1}{2}}) = d z : 2 y = d z : 2 z^{\frac{1}{2}}$ et generaliter fluxio quantitatis $z^{m:n}$ est $\frac{m}{n} z^{\frac{m}{n}-1} d z = \frac{m}{n} \times \overline{z^{m-n:n}} d z$.

163. *Cor.* 3. Fluxio fractionis $z : y$ seu $z y^{-1}$ est $\overline{y d z - z d y} : y y$. Nam fiat $z : y = x$, erit $z = y x$, $d z = y d x + x d y$, et $d x = \overline{d z : y - x d y : y} = d z : y - z d y : y y = \overline{y d z - z d y} : y y$: fluxio quantitatis $a z^m y^n$ est $a m y^n z^{m-1} d z + a n z^m y^{n-1} d y$ (160.)

164. Fluxiones secundæ ex primis fluxionibus, tertiæ ex secundis, iisdem regulis colliguntur quibus primæ fluxiones ex fluentibus finitis eruuntur. Ubi tamen sic pergitur ad fluxiones secundas, tertias et sequentes, convenit, quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem considerare, et pro ejus fluxione primâ unitatem scribere, pro secundâ verò et sequentibus nihil (148). Exemplum unicum afferemus; sit quærenda fluxio fluxionis $y\ d\ y : d\ x$, supponendo quantitatem x uniformiter fluere, adeóque $d\,x$ constantem seu $= 1$, invenitur fluxio $y\ d\ d\ y + d\ y^2 : d\ x$.

165. Ex fluxionibus fluentes inveniuntur, operationes instituendo iis contrarias quibus ex fluentibus reperiuntur fluxiones; quarè, litterâ S, significante fluentem fluxionis cui præponitur, seu summam primam incrementorum nascentium, vel ultimam evanescentium (147) methodi fluxionum inversæ fundamentates formulæ erunt.

1. S. $d\,z = z$. et S. $a\,d\,z = a\,z$. S. $d\,z : a = z : a$.
2. S. $m\,z^{m-1}\,d\,z = z^m$,
   et S. $m\,a\,z^{m-1}\,d\,z = a\,z^m$,
   et S. $\frac{m}{n}\,z^{m-n:n}\,d\,z = z^{m:n}$.
3. S. $(d\,z \mp d\,y) = z \mp y$.
4. S. $(z\,d\,y + y\,d\,z) = y\,z$.
   et S. $(a\,m\,y^n\,z^{m-1}\,d\,z + a\,n\,z \times^m y^{n-1}\,d\,y) = a\,z^m\,y^n$.
5. S. $(y\,d\,z - z\,d\,y) : y\,y = z : y$.

166. Si fluxio, cujus fluens quæritur, nulli harum formularum similis fuerit, per novarum variabilium substitutionem aliasque artes quas hic tractare nobis non licet, ad illas sæpè reduci potest. Sit in exemplum fluxio $\overline{c\,b + c\,x}^{\frac{1}{2}} \times d\,x$, ponatur $c\,b + c\,x^{\frac{1}{2}} = z$ et erit $c\,b + c\,x = z\,z$, et $c\,d\,x = 2\,z\,d\,z$, et $d\,x = \frac{2\,z\,d\,z}{c}$ adeóque $\overline{c\,b + c\,x}^{\frac{1}{2}} \times d\,x = 2\,z\,z\,d\,z : c$. Hæc autem fluxio similis est formulæ $m\,a \times z^{m-1}\,d\,z$, estque $z^2 = z^{m-1}$, adeóque $m = 3$, $m\,a = 3\,a = 2 : c$, et $a = 2 : 3\,c$, adeóque S. $m\,a\,z^{m-1}\,d\,z = a\,z^m = 2\,z^3 : 3\,c$ loco z, scribatur ipsius valor $\overline{c\,b + c\,x}^{\frac{1}{2}}$, et invenietur S. $\overline{c\,b + c\,x}^{\frac{1}{2}} \times d\,x = \frac{2}{3\,c}(c\,b + c\,x) \times \overline{c\,b + c\,x}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\,(b + x) \times \overline{c\,b + c\,x}^{\frac{1}{2}}$.

167. Superiarum formularum auxilio et fluxionibus secundis primæ, ex tertiis secundæ, &c. inveniuntur. Exempla sint S. $d\,d\,x = d\,x$. S. $d\,x.\,d\,d\,x = \frac{1}{2}\,d\,x\,d\,x = \frac{1}{2}\,d\,x^2$. Nam ponatur $d\,x = y$, et erit $d\,d\,x = d\,y$, et $d\,x\,d\,d\,x = y\,d\,y$, et per formulam secundam invenitur S. $y\,d\,y = \frac{1}{2}\,y\,y$, et si loco y substituatur ipsius valor, $d\,x$, erit S. $y\,d\,y =$ S. $d\,x\,d\,d\,x = \frac{1}{2}\,d\,x^2$. Similiter. S. $(d\,y^2 + y\,d\,d\,y) : d\,x = y\,d\,y : d\,x$, supponendo $d\,x$ constantem, nam fiat $d\,d\,y = d\,v$, adeóque $d\,y = v$, et fluxio proposita evadet, $\overline{v\,d\,y + y\,d\,v} : d\,x$, cujus fluens (per formulam 4am) est $v\,y : d\,x$, ob $d\,x$ constantem. Cum autem sit $v = d\,y$, erit $v\,y : d\,x = y\,d\,y : d\,x$.

168. Postquam fluentes ex fluxionibus collectæ sunt, si de veritate conclusionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum vicissim colligendæ sunt, et cum fluxionibus sub initio propositis comparandæ. Nam si prodeunt æquales, conclusio rectè se habet; sin minus, corrigendæ sunt fluentes sic, ut earum fluxiones fluxionibus sub initio propositis æquentur. Nam et fluens pro lubitu assumi potest, et assumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis assumptæ æqualem fluxioni propositæ, et terminos homologos inter se comparando.

169. Quoniam constantis quantitatis nulla est fluxio, et eadem proinde fluxio $d\,z$ ex fluentibus z, et $z \mp a$, colligitur; fluens omnis quæ ex fluxione primâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate aliquâ constante; quæ ex fluxione secundâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio secunda nulla est; quæ ex fluxione tertiâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio tertia nulla est. Et sic deinceps in infinitum.

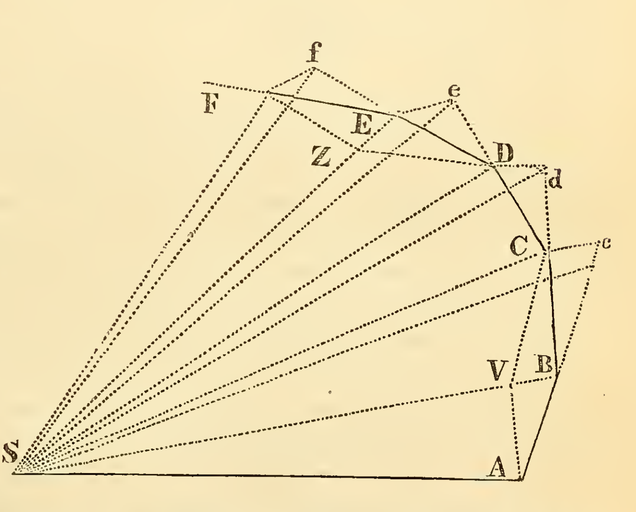
170. Cum fluens composita, quæ ex propositâ fluxione collecta est, unicam variabilem includit, ut fluens $\frac{2}{3}\,(b + x) \times \overline{b\,c + c\,x}^{\frac{1}{2}}$, quæ (166) deducta est ex fluxione $\overline{c\,b + c\,x}^{\frac{1}{2}} \times d\,x$, ita determinari solet constans adjungenda vel detrahenda: in fluente inventâ loco variabilis x, ponitur o; tum si fluens ipsa sit etiam o, completa est. Si quid verò residuum fuerit, ut hic remanet $+ \frac{2}{3}\,b\,\sqrt{b\,c}$, hoc residuum cum signo contrario fluenti primò inventæ adjicitur, ut habeatur fluens completa, $\frac{2}{3}\,(b + x) \times \overline{b\,c + c\,x}^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\,b\,\sqrt{b\,c}$. Hujus regulæ ratio est, quod fluens inventa supponi possit exhibere aream curvæ alicujus, cujus sit abscissa variabilis x, adeo ut dum $x = 0$; area, fluente expressâ, sit etiam o; undè si in fluente primò inventâ loco x, substituatur o, sitque aliquod residuum, illud ex fluente detrahi debet. Generaliter, quantitas constans adjicienda vel subducenda ex naturâ quæstionis determinatur, aut arbitraria est.

SECTIO II.

De Inventione Virium Centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

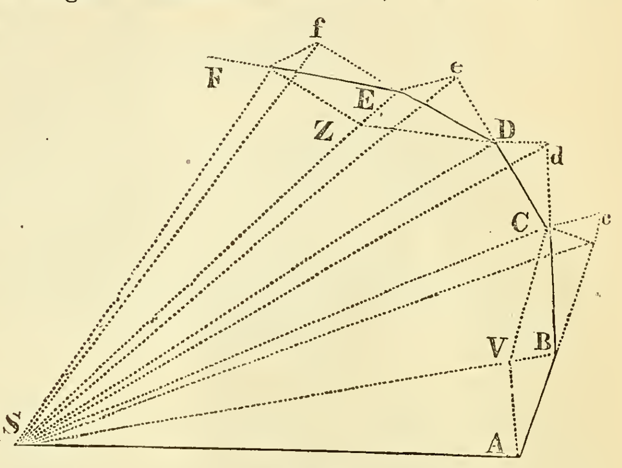
Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, et in planis immobilibus consistere, et esse temporibus proportionales.



Dividatur tempus in partes æquales, et primâ temporis parte describat corpus vi insitâ rectam A B. Idem secundâ temporis parte, si nil impediret, rectà pergeret ad c, (per leg. 1.) describens lineam B c æqualem ipsi A B; adeò ut radiis A S, B S, c S ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ A S B, B S c. Verùm ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta B c declinet et pergat in rectâ B C. Ipsi B S parallela agatur c C, occurrens B C in C; et completâ secundâ temporis parte, corpus (per legum Corol. 1.) reperietur in C, in eodem (a) plano cum triangulo A S B. Junge S C; et triangulum S B C, ob parallelas S B, C c, æquale erit

(a) 171. Reperitur in C, in eodem plano cum triangulo A S B; nam diagonalis B C, quam viribus conjunctis mobile describit, est in plano parallelogrammi V B c C, cujus latera B V, B c, viribus separatis describenda, sunt in plano trianguli A S B.

triangulo S B c, atque ideo etiam triangulo S A B. Simili argumento si vis centripeta successivè agat in C, D, E, &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas C D, D E, E F, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; et triangulum S C D triangulo S B C, et S D E ipsi S C D, et S E F ipsi S D E æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: et componendo, sunt arearum summæ quævis



S A D S, S A F S inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus et minuatur latitudo triangulorum in infinitum; et eorum ultima perimeter A D F, (per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva: ideòque vis centripeta, quâ corpus à tangente hujus curvæ perpetuò retrahitur, aget indesinenter; areæ verò quævis descriptæ S A D S, S A F S temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. Q. e. d.

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistentibus reciprocè ut perpendiculum à centro illo in orbis tangentem rectilineam demissum. (b) Est enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E, ut sunt bases æqualium triangulorum A B, B C, C D, D E, E F; et hæ bases sunt reciprocè ut perpendicula in ipsas demissa.

Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus ab eodem corpore successivè descriptorum chordæ A B, B C compleantur in parallelogrammum A B C V, et hujus diagonalis B V in eâ positione quam ultimò habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; (c) transibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus

(b) 172. Est enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E, ut sunt bases æqualium triangulorum A B, B C, C D, D E, E F, æqualibus temporibus uniformi motu descriptæ (5); æqualium autem triangulorum bases sunt reciprocè ut eorum altitudines, hoc est, reciprocè ut perpendicula ex centro virium S, in bases demissa. Cum igitur evanescentibus triangulis

descriptorum chordæ A B, B C ac D E, E F compleantur in parallelogramma A B C V, D E F Z; vires in B et E sunt ad invicem in ultimâ ratione diagonalium B V, E Z, ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus B C et E F componuntur (per legum Corol. 1.) ex motibus B c, B V et E f, E Z: atqui B V et E Z, ipsis C c et F f æquales, in demonstratione propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in B et E, ideòque sunt his impulsibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistentibus à motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos, sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, et chordas bisecant ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. ([d]) Nam hæ sagittæ sunt semisses diagonalium, de quibus egimus in Corollario tertio.

Corol. 5. Ideoque vires eædem sunt ad ([e]) vim gravitatis, ut hæ sagittæ ad sagittas horizonti perpendiculares arcuum parabolicorum, quos projectilia eodem tempore describunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per legum Corol. v. ubi plana, in quibus corpora moventur, unà cum centris virium, quæ in ipsis sita sunt, non quiescunt, sed moventur uniformiter in directum.

A S B, B S C, &c. ultima perimeter A B C D E F, sit linea curva quam (115) rectæ A c, B d, C e, D f, tangunt in punctis A, B, C, D, E, manifestum est velocitates in illis punctis esse reciprocè ut perpendicula à centro S, in tangentes demissa.

([c]) 173. Transibit eadem per centrum virium. Nam ex demonstratione propositionis hujus, sumptâ B V = C c, erit V C, æqualis et parallela lineæ B c, seu A B, adeòque V A, B C, erunt etiam æquales et parallelæ, et B V, quæ producta transit per centrum S, erit diagonalis parallelogrammi A B C V.

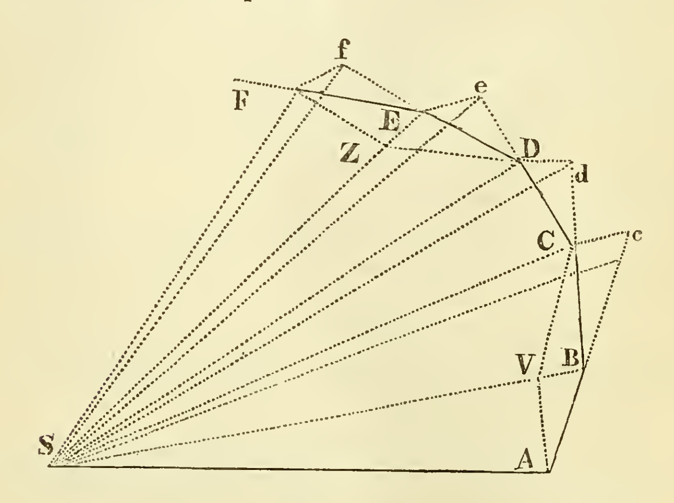
174. Si ducantur per puncta quævis B, et D, perimetri curvæ vel diversarum curvarum tangentes B c, D e, et demittantur angulorum contactuum subtensæ C c, E e, radiis S B, S D, ad centrum virium convergentibus parallelæ, sintque arcus B C, D E, æqualibus temporibus descripti, patet ex Corollario 3. vires centripetas in B et D, esse ad invicem in ultimâ ratione subtensarum C c, E e.

([d]) 175. Nam hæ sagittæ sunt semisses diagonalium B V, E Z, diagonales enim A C, D F, quæ sunt chordæ arcuum evanescentium A B C, D E F, alias diagonales B V, E Z, bisecant.

([e]) 176. Vis enim gravitatis per lineas parallelas ad horizontem perpendiculares agit, et gravia obliquè projecta parabolas describunt (40), quod etiam in figurâ superiori contingeret, si centrum virium S, in infinitum abiret, et vis centripeta in omnibus punctis A, B, C, D, eadem maneret.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Corpus omne, quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ, et radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur à vi centripetâ tendente ad idem punctum.



Cas. 1. Nam corpus omne, quod movetur in lineâ curvâ, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem (per Leg. 1.) Et vis illa, quâ corpus de cursu rectilineo detorquetur, et cogitur triangula quam minima S A B, S B C, S C D, &c. circa punctum immobile S temporibus æqualibus æqualia describere, ([f]) agit in loco B secundum lineam parallelam ipsi c C (per Prop. XL. lib. 1. Elem. et Leg. 11.) hoc est, secundum lineam B S; et in loco C secundum lineam ipsi d D parallelam, hoc est, secundum lineam S C, &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S. Q. e. d.

([f]) 177. Agit in loco B, secundùm lineam parallelam ipsi C c, hoc est, secundùm lineam B S; nam solâ vi insitâ in A, corpus uniformi cum motu progrederetur per rectam A B c, et æqualibus temporibus æquales lineas A B, B c, describeret; verùm per vim centripetam in B, detorquetur a rectâ B c, ut aliam rectam B C, eodem tempore describat quo descripsisset B c; adeóque junctâ C c, vis centripeta agit in B, secundùm directionem parallelam ipsi C c (per Coroll. 1. Leg.) sed ob A B = B c, et ob triangulum S B C, æquale triangulo S A B, (per hyp.) erit triangulum S A B = triang. S B c = triang. S B C, adeóque per Prop. 40. vel 39. Lib. 1. Elem. communis triangulorum S B C, S B c æqualium basis B S, parallela est rectæ C c, quæ illorum triangulorum vertices jungit; cùm igitur, per demonstrata, vis centripeta in B, agat secundùm directionem parallelam lineæ C c, necessum est ut agat secundùm directionem rectæ B S, hoc est, ut tendat ad centrum S.

Cas. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde est, sive quiescat superficies, in quâ corpus describit figuram curvilineam, sive moveatur eadem unà cum corpore, figurâ descriptâ, et puncto suo S uniformiter in directum.

Corol. 1. In spatiis vel mediis non resistentibus, si areæ non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radiorum; ([g]) sed indè declinant in consequentia, seu versus plagam in quam fit motus, si modo arearum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. ([h]) In mediis etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant à concursu radiorum versus plagam, in quam fit motus.

Scholium.

Urgeri potest corpus à vi centripetâ compositâ ex pluribus viribus. In hoc casu sensus propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum S. ([i]) Porro si vis aliqua agat perpetuò secundum lineam superficiei descriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur à plano sui motus: sed quantitatem superficiei descriptæ nec augebit nec minuet, et propterea in compositione virium negligenda est.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compositâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum, et ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.

([k]) Sit corpus primum L, et corpus alterum T: et (per legum

([g]) 178. Sed indè declinant in consequentia, si modò arearum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia. Nam si triangulum S B C, æquale non est triangulo S A B, seu S B c, eodem tempore descripto, recta C c, non erit parallela lineæ B S, sed producta cum lineâ S B,ità converget ut tendat in plagam motûs, si triangulum S B C, triangulo S B c, majus est, et tendat in plagam contrariam si triangulum S B C, triangulo S B c, minus. Quarè vis centripeta in B, agens secundùm directionem parallelam lineæ C c, in primo casu declinat in consequentia, in secundo casu declinat in antecedentia.

([h]) 179. Cum enim medium resistat accelerationi descriptionis arearum, liquet arearum descriptionem etiam sublatâ medii resistentiâ accelerari oportere, ac proindè per Coroll. 1. virium directiones declinare à concursu radiorum, in S, versùs plagam in quam fit motus.

([i]) 180. Porrò si vis illa perpetuò secundùm lineam superficiei descriptæ perpendicularem agat, planum subjectum duntaxat premit, et corpus in illo plano motum in neutram partem impellit, ac proindè nec superficiei descriptæ quantitatem auget nec minuit, et propterea in compositione virium in plano agentium negligenda est.

([k]) 181. Corpus L, circà alterum T, in curvâ A L B, ità revolvatur, ut circà illius centrum T, semper describat areas temporibus proportionales, dùm interim corpus T, urgetur vi acceleratrice secundùm directionem T Q, et per

Corol. 6.) si vi novâ, quæ æqualis et contraria sit illi, quâ corpus alterum T urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas; perget corpus primum L describere circa corpus alterum T areas easdem ac priùs: vis autem, qua corpus alterum T urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem et contrariam; et propterea (per Leg. I.) corpus illud alterum T sibimet ipsi jam relictum vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum: et corpus primum L urgente differentiâ virium, id est, urgente vi reliquâ perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum T describere. Tendit igitur (per Theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum T ut centrum. Q. e. d.

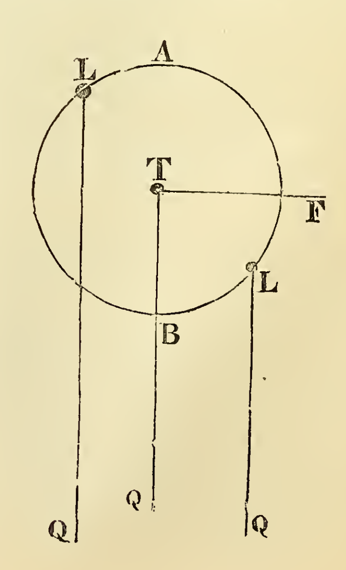
Corol. 1. Hinc si corpus unum L radio ad alterum T ducto describit areas temporibus proportionales; atque de vi totâ (sive simplici, sive ex viribus pluribus juxta Legum Corollarium secundum compositâ) quâ corpus prius L urgetur, subducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix, qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua, quâ corpus prius urgetur, tendet ad corpus alterum T ut centrum.

Corol. 2. Et, si areæ illæ sunt temporibus quamproximè proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum T quamproximè.

Corol. 3. Et vice versâ, si vis reliqua tendit quamproximè ad corpus alterum T, erunt areæ illæ temporibus quamproximè proportionales.

Corol. 4. Si corpus L radio ad alterum corpus T ducto describit areas, quæ cum temporibus collatæ sunt valde inæquales; et corpus illud al-

Leg. Corol. 6. si vi novâ acceleratrice quæ æqualis et contraria sit illi quâ corpus T secundùm directionem T Q urgetur, urgeatur corpus utrumque secundùm lineas parallelas Q T, Q L; perget corpus L, describere circà corpus T, areas easdem ac priùs; vis autem acceleratrix quâ corpus T urgebatur jam destruetur per vim sibi æqualem et contrariam; et propterea, per Leg. 1. corpus illud T, sibimet ipsi jam relictum vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum; nimirum quiescet, si nullâ aliâ vi præter acceleratricem secundùm directionem T Q, antè urgebatur; movebitur verò æquabiliter per rectam aliquam T F, si præter vim acceleratricem per T Q, agentem, aliâ vi non acceleratrice ferebatur juxtà directionem T F, &c.



terum T vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum T tendentis vel nulla est, vel miscetur et componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subductionem vis totius in corpus illud alterum T agentis.

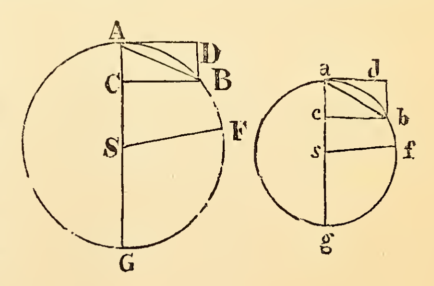
Scholium.

Quoniam æquabilis arearum descriptio index est centri, quod vis illa respicit, quâ corpus maximè afficitur, quâque retrahitur a motu rectilineo, et in orbita sua retinetur; quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; et esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

([1]) Tendunt hæ vires ad centra circulorum per Prop. II. et Corol. 2. Prop. I. et sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus quàm minimis descriptorum sinus versi per Corol. 4. Prop. I. hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per Lem. VII. et propterea,



([1]) 182. Corpora duo A et a, circulos A B G A, a b g a, æquabili motu describant, et areæ seu sectores A S F, F S G, et a s f, f s g, erunt in singulis circulis ut arcus A F, F G, et a f, f g; hoc est (5) ut tempora quibus describuntur, ac proindè vires quibus corpora A et a, in peripheriis A B G A, a b g a retinentur tendunt ad centra S et s. Sint arcus A B, a b, æqualibus temporibus quam minimis descripti, et ductis tangentibus A D, a d, et ad eas perpendicularibus B D, b d, completisque parallelogrammis C D, c d, vires centripetæ in A et a, erunt inter se ut rectæ D B, d b, seu ut sinus versi A C, a c, (174). Verùm ductis chordis A B, a b, est A C : A B = A B : A G, et a c : a b = a b : a g, undè $A\,C = \frac{A\,B^2}{A\,G}$, et $a\,c = \frac{a\,b^2}{a\,g}$; cum igitur chordæ et arcus nascentes æquales sint (per Lem. VII.) erit A C : a c, hoc est, vis centripeta in A, ad vim centripetam in a, ut quadratum arcûs evanescentis A B diametro A G divisum, ad quadratum arcus evanescentis, a b, diametro a g, divisum et propterea cum hi arcus, &c.

cùm hi arcus sint ut arcus temporibus quibusvis æqualibus descripti, et diametri sint ut eorum radii ; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. Q. e. d.

Corol. 1. Cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum directè, et ratione simplici radiorum inversè. (m)

Corol. 2. (n) Et, cum tempora periodica sint in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, et ratione velocitatum inversè; (o) vires centripetæ sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, et ratione duplicatâ temporum periodicorum inversè.

Corol. 3. (p) Unde si tempora periodica æquentur, et propterea velocitates sint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: et contra.

Corol. 4. (q) Si et tempora periodica, et velocitates sint in ratione subduplicatâ radiorum; (r) æquales erunt vires centripetæ inter se: et contra.

Corol. 5. (s) Si tempora periodica sint ut radii, et propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciprocè ut radii: et contra.

(m) 183. Vis centripeta quâ corpus in peripheriâ circuli uniformiter incedens retinetur, est in omnibus peripheriæ punctis eadem, ut pote semper proportionalis constantis velocitatis quadrato ad radium constantem applicato.

(n) 184. Tempora periodica, hoc est, tempora quibus integræ peripheriæ describuntur, sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè et ratione velocitatum inversè. Nam (5) velocitates sunt ut peripheriæ ad tempora periodica applicatæ, sed peripheriæ sunt ut radii, ergo velocitates sunt ut radii ad tempora periodica applicati, ac proindè tempora periodica sunt ut radii directè et velocitates inversè. Si corporum A et a, tempora periodica dicantur T et t, celeritates C et c, radii A S, a s, dicantur R et r, erit $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ ideóque $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$.

(o) 185. Vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; nam vires centripetæ corporum A et a, dicantur V et v, erit (per Coroll. 1.) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, sed quoniam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, adeóque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$ erit $\frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r} = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$ ergò $V : v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$ $= t^2 R : T^2 r = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$.

(p) 186. Undè si tempora periodica æquentur et propterea (184) velocitates sint ut radii, erunt etiam vires centripetæ ut radii, nam cum sit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, si $T^2 = t^2$, erit $V : v = R : r$.

Et contrà si vires centripetæ sint ut radii, tempora periodica æquantur. Cum enim sit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, si ponatur $V : v = R : r$, erit $R : r = t^2 R : T^2 r$, unde $r t^2 R = R T^2 r$, adeóque $t^2 = T^2$, et $t = T$.

(q) 187. Si tempora periodica sint in ratione subduplicatâ radiorum, velocitates erunt in eâdem ratione. Nam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$ adeóque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$. Undè si fuerit $T : t = R^{\frac{1}{2}} : r^{\frac{1}{2}}$ ac proindè $T^2 : t^2 = R : r$, erit $C^2 : c^2 = R : r$.

Et contrà si fuerit $C^2 : c^2 = R : r$, erit $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = R : r$, adeóque $\frac{R}{T^2} = \frac{r}{t^2}$, et $R t^2 = r T^2$, undè $T^2 : t^2 = R : r$.

(r) 188. Si et tempora periodica ac proindè velocitates (187) sint in ratione subduplicatâ radiorum, æquales erunt vires centripetæ inter se. Cum sit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$ si ponatur $T^2 : t^2 = R : r$, erit $t^2 R = T^2 r$, undè $V = v$.

Et contrà si $V = v$, cum sit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, erit $t^2 R = T^2 r$, et proindè $T^2 : t^2 = R : r$.

(s) 189. Si tempora periodica sunt ut radii et propterea (184) velocitates æquales, vires centripetæ erunt reciprocè ut radii. Quoniam

Corol. 6. (t) Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ radiorum, et propterea velocitates reciprocè in radiorum ratione subduplicatâ; (u) vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum: et contra.

Corol. 7. Et universaliter, si (x) tempus periodicum sit ut radii R potestas quælibet R^n, et propterea velocitas reciprocè ut radii potestas R^{n-1}; (y) erit vis centripeta reciprocè ut radii potestas R^{2n-1}: et contra.

Corol. 8. (z) Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, et viribus,

enim (per Coroll. 1.) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$ si $C^2 = c^2$, erit $V : v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$.

Et contrà si fuerit $V : v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$, cum sit (Coroll. 1.) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$ erit $\frac{1}{R} : \frac{1}{r} = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, adeóque $C^2 = c^2$, et $C = c$.

(t) 190. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ radiorum, erunt velocitates reciprocè in ratione radiorum subduplicatâ; nam quoniam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, adeóque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$ si fuerit $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$, erit $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{R^3} : \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{R} : \frac{1}{r} = r : R$.

Et contrà si fuerit $C^2 : c^2 = r : R$, erit $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = r : R$: adeóque $\frac{R^3}{T^2} = \frac{r^3}{t^2}$ et $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$.

(u) 191. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ radiorum et propterea (190) velocitates reciprocè in radiorum ratione subduplicatâ, vires centripetæ erunt reciprocè ut quadrata radiorum. Nam cum sit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$; si fuerit $T^2 : t^2 = R^3 : r^3$, erit $V : v = r^3 R : R^3 r = r^2 : R^2$.

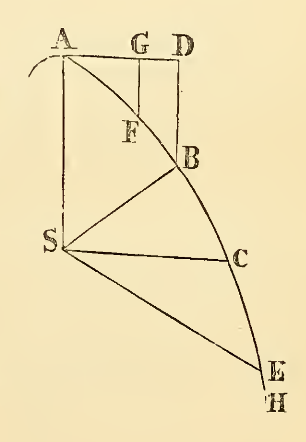
Et contrà si $V : v = r^2 : R^2$, erit (185) $r^2 : R^2 = t^2 R : T^2 r$ ac proindè $t^2 R^3 = T^2 r^3$: et $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$.

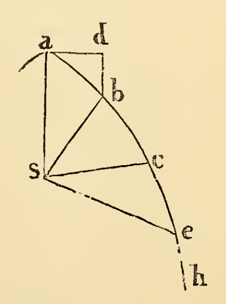
(x) 192. Si tempora periodica sint ut radiorum potestates quælibet R^n, r^n, velocitates erunt reciprocè ut radiorum potestates R^{n-1}, r^{n-1}. Nam ponatur $T : t = R^n : r^n$, et quoniam (184) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, erit $C : c = \frac{R}{R^n} : \frac{r}{r^n} = \frac{1}{R^{n-1}} : \frac{1}{r^{n-1}} = r^{n-1} : R^{n-1}$.

Et contrà si fuerit $C : c = r^{n-1} : R^{n-1}$, erit $\frac{R}{T} : \frac{r}{t} = r^{n-1} : R^{n-1}$, adeóque $\frac{R^n}{T} = \frac{r^n}{t}$, undè $R^n : r^n = T : t$.

(y) 193. Et universaliter si tempora periodica sint ut radiorum potestates quælibet R^n, r^n et propterea (192) velocitates reciprocè ut radiorum potestates R^{n-1}, r^{n-1}, erunt vires centripetæ reciprocè ut radiorum potestates R^{2n-1}, r^{2n-1}. Nam ponatur $T : t = R^n : r^n$ adeóque $T^2 : t^2 = R^{2n} : r^{2n}$: et cum sit (185) $V : v = t^2 R : T^2 r$, erit $V : v = R r^{2n} : r R^{2n} = r^{2n-1} : R^{2n-1}$.

Et contrà si fuerit $V : v = r^{2n-1} : R^{2n-1}$; cum sit $V : v = t^2 R : T^2 r$, erit $r^{2n-1} : R^{2n-1} = t^2 R : T^2 r$, adeóque $t^2 \times R^{2n} = T^2 r^{2n}$, undè $T^2 : t^2 = R^{2n} : r^{2n}$: et $T : t = R^n : r^n$.

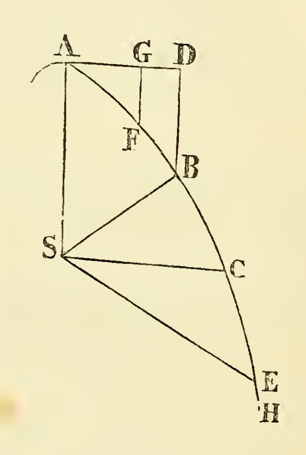


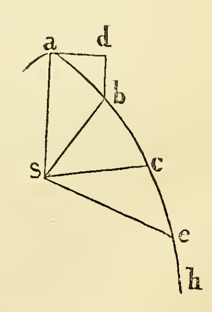


(z) 194. Corpora A et a, figurarum simili-

quibus corpora similes figurarum quarumcunque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt, consequuntur ex demonstratione præcedentium ad hosce casus applicatâ. Applicatur autem substituendo æquabilem arearum descriptionem pro æquabili motu, et distantias corporum à centris pro radiis usurpando.

um A B H, a b h, centra S, s, in figuris illis similiter posita habentium, partes similes A B E, a b e, ità describant ut areæ A S B, A S C, et cetera, a s b, a s c, et cetera, circà centra S, s, in singulis figuris descriptæ temporibus quibus describuntur sint respectivè proportionales, et per Prop. II. vires centripetæ ad centra S, s, tendent. Per puncta A et a, in curvis similiter posita agantur tangentes A D, a d, sintque arcus minimi, A F, a b, eodem tempore in utraque curvâ descripti, et ductis rectis F G, b d, radiis vectoribus A S, a s, parallelis, vis centripeta in A, est ad vim centripetam in a, ut F G, ad b d, (174). Sumatur autem arcus A B similis a b, (ita ut sit a s : A S = a b : A B, acproinde sit $A B = \frac{a b \times A S}{a s}$, ducaturque B D radio A S parallela, erit per Coroll. 1. Lem. XI. F G : B D = A F^2 : A B^2, et quia figuræ A B D et a b d, sunt similes, est B D : b d = A B : a b, itaque per compositionem rationis est F G : b d = A F^2 × A B : A B^2 × a b = A F^2 : A B × a b (et quia $A B = \frac{a b \times A S}{a s}$) $= A F^2 : \frac{a b \times A S}{a s} \times a b = \frac{A F^2}{A S} : \frac{a b^2}{a s}$. Cum igitur demonstratum fuerit vires centripetas in A et a, esse inter se ut sunt G F, b d, erunt vires illæ ut quadrata arcuum A F, a b, simul descriptorum applicata ad radios homologos A S, a s.





195. *Coroll.* 1. Quoniam velocitates finitæ corporum A et a, per arcus nascentes A F, a b, sunt uniformes, erunt illæ ut arcus A F, a b, æqualibus temporibus descripti (5). Undè vires centripetæ in A, et a, erunt ut velocitatum in A et a, quadrata, ad radios A S, a s applicata.

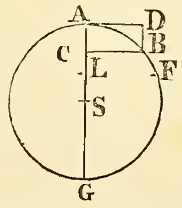
196. *Coroll.* 2. Figuræ similes A S E, a s e, divisæ concipiantur in innumeros sectores æquales A S B, B S C, et cetera, et a s b, b s c, et cetera, sibi mutuò in duabus figuris similes, et ob æquabilem arearum seu sectorum in singulis figuris descriptionem, sectores æquales æqualibus temporibus describentur, ac proindè arcus A B, B C, et arcus a b, b c, et cetera, æqualibus respectivè temporibus percurrentur: erit igitur tempus per A B, ad tempus per a b, ut tempus per A E, ad tempus per a e, hoc est, tempora quibus describuntur arcus similes AB, a b, sunt ut tempora quibus describuntur alii quicumque similes arcus, A E, a e, adeóque ut tempora periodica. Cùm igitur (195) velocitates in A et a, sint inter se ut arcus A B, a b, ad sua respectivè tempora applicati, erunt quoque velocitates illæ inter se ut arcus A B, a b, seu ob figurarum similitudinem, ut radii AS, a s, ad tempora periodica applicati, id est, celeritates in punctis correspondentibus A et a, sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum homologorum directè et ratione temporum periodicorum inversè, adeóque tempora periodica sunt ut radii directè et velocitates inversè.

197. *Corol.* 3. Celeritates in A et a, dicantur C, c, vires centripetæ V, v, radii vectores homologi R, r; tempora periodica T, t, et erit (196) $C : c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, et $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$, et $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2}$

Corol. 9. ([a]) Ex eâdem demonstratione consequitur etiam, quod arcus, quem corpus in circulo datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo tempore quovis describit, medius est proportionalis inter diametrum circuli, et descensum corporis eâdem datâ vi eodemque tempore cadendo confectum.

$\frac{r^2}{t^2}$. Et quoniam (195) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, erit $V : v = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 R : T^2 r = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$, hoc est, vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata temporum periodicorum ad radios homologos applicata. Cùm igitur cætera omnia de temporibus, velocitatibus et viribus in circulis corollaria, ex superioribus proportionibus deducta sint, evidens est eadem omnia convenire temporibus, velocitatibus, et viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcumque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt.

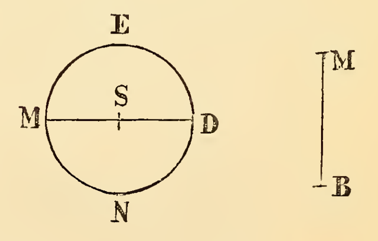
([a]) 198. Corpus A uniformiter revolvatur in circuli peripheriâ A B G A, et idem vel aliud corpus ex puncto A, per radium A S, eâdem vi centripetâ quâ corpus A in circuli peripheriâ retinetur continuò itâ urgeatur ut (vi illâ centripetâ constanti permanente, quemadmodum fit in corporibus vi gravitatis constante cadentibus) corpus illud cadendo percurrat A L, eodem tempore quo corpus A, uniformiter describit arcum A F. Quoniam vis acceleratrix per radium A S, constans est et continuò agit (per hyp.) corpus per A S, motu uniformiter accelerato cadit (25) et spatia percursa sunt ut quadrata temporum quibus percurruntur (27), ducatur per A, tangens A D, et sumpto arcu minimo A B, in tangentem demittatur perpendicularis B D, et compleatur rectangulum C D, eodem tempore quo corpus A, æquabili motu describit arcum A B, per vim centripetam percurrit D B, seu A C, (ex Coroll. 3. Prop. 1æ.) erit igitur A C, ad A L ut quadratum temporis per A B, ad quadratum temporis per A F, hoc est, ob motum in circulo æquabilem $AC : AL = AB^2 : AF^2 = \frac{AB^2}{AG} : \frac{AF^2}{AG}$; cum igitur ob arcum nascentem A B, suæ chordæ æqualem, sit $AC = \frac{AB^2}{AG}$, erit quoquè $AL = \frac{AF^2}{AG}$ atque adeò $AL \times AG = AF^2$ et proindè $AL : AF = AF : AG$.



199. *Coroll.* 1. Velocitas quâ corpus A, peripheriam circuli A F G A, uniformiter describit, æqualis est velocitati quam acquireret cadendo per dimidium radium A S, si vi centripetâ constanti continuò urgeretur æquali illi quâ corpus A in peripheriâ circuli retinetur: Nam sit A L altitudo per quam A cadere debet ut acquirat velocitatem quâ peripheria circuli describitur, sitque A F arcus eo tempore descriptus quo A cadit per A L eodem etiam tempore motu æquabili percurreretur, 2 A L per velocitatem eam in L acquisitam (30), adeóque erit $AF = 2AL$ siquidem eodem tempore eademque celeritate æquabili percurruntur, sed est semper $AF^2 = AL \times AG$ (198) cum igitur sit $2AL = AF$ ac proinde $4AL^2 = AF^2$ erit $4AL^2 = AL \times AG$ et $4AL = AG$ et $AL = \frac{AG}{4} = \frac{AS}{2}$.

200. *Coroll.* 2. Tempus revolutionis per integram peripheriam est ad tempus descensûs uniformiter accelerati per dimidium radium, ut peripheria ad radium. Nam eodem tempore quo dimidius radius motu uniformiter accelerato percurritur, totus radius describeretur cum æquabili velocitate lapsu per dimidium radium acquisitâ (30) eâ verò ipsa celeritate corpus circuli peripheriam (199) describit. Ergo cum spatia eâdem velocitate uniformi percursa, sint ut tempora (5) patet propositum.

201. *Coroll.* 3. Hinc datâ vi centripetâ quâlibet in datâ a centro distantiâ, facile est reperire velocitatem quâ corpus projici debet ut circà prædictum centrum in datâ distantiâ circulum uniformiter describat; velocitas enim illa æqualis est velocitati quam corpus acquireret cadendo per dimidiam distantiam a centro, si datâ vi centripetâ continuò urgeretur (199). Dato autem circuli radio, dàtur peripheria, et datâ æquabili in circulo velocitate cum peripheriâ, invenitur tempus periodicum, et arcus dato quovis tempore descriptus habetur.



202. *Coroll.* 4 Datis circuli radio et velocitate corporis in eo revolventis, facilè colligitur proportio vis centripetæ in eo circulo ad vim quamlibet notam, qualis est vis gravitatis. Primum enim inveniatur tempus revolutionis unius in eo circulo peractæ (5), mox invenietur tempus

Scholium.

([b]) Casus Corollarii sexti obtinet in corporibus cœlestibus, (ut seorsum collegerunt etiam nostrates Wrennus, Hookius et Halleius) et propterea quæ spectant ad vim centripetam decrescentem in duplicatâ ratione distantiarum a centris, decrevi fusiùs in sequentibus exponere.

Porro præcedentis Propositionis et Corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea gravitatis. Nam si corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem ex descensu gravium, et tempus revolutionis unius, et arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus Corol. IX. Et ([c]) hujusmodi propositionibus

quo corpus vi illâ centripetâ continuò sollicitatum per dimidium radium caderet (200). Ex datâ autem vi gravitatis seu ex dato spatio quod grave liberè cadendo, dato quodam tempore percurrit, invenitur (27) spatium ab eodem gravi percursum eo tempore quo corpus vi centripetâ sollicitatum per dimidium radium cadit, sed vires acceleratrices constantes, rationem habent spatiorum quæ dato tempore percurrere faciunt (30) est ergo vis ea centripeta ad vim gravitatis, ut dimidius circuli radius ad spatium id quod grave percurreret eo tempore quo corpus vi centripetâ sollicitatum dimidium illum radium percurrit.

Exempli causâ. Corpus M, ope fili M S clavo in S alligati, circâ centrum S uniformiter describat circulum M N D E, in plano horizontali positum, eaque sit corporis revolventis celeritas quæ acquiritur a gravi per altitudinem M B cadente, quæritur ratio vis centripetæ in circulo ad vim gravitatis. Tempus quo grave cadit per altitudinem M B, dicatur T, et velocitas in B acquisita, quâ (ex hyp.) corpus M circuli peripheriam uniformiter describit, erit $\frac{2\,M\,B}{T}$ (30), peripheria circuli dicatur p, et cum tempus periodicum in circulo sit æquale peripheriæ ad velocitatem $\frac{2\,M\,B}{T}$ applicatæ (5) erit id tempus periodicum $\frac{p \times T}{2\,M\,B}$; jam verò est peripheria ad radium (200) ut tempus periodicum ad tempus quo corpus M, solâ vi centripetâ constante sollicitatum, dimidium radium M S percurrit, sive $p : M\,S = \frac{p \times T}{2\,M\,B}$ ad tempus per dimidium radium quod est ideo $\frac{T \times M\,S}{2\,M\,B}$. Cum autem grave tempore T altitudinem M B sit emensum, et in motu uniformiter accelerato spatia percursa sint ut quadrata temporum quibus percurruntur (27) erit T^2 ad $\frac{T^2 \times M\,S^2}{4\,M\,B^2}$ seu $4\,M\,B^2$ ad $M\,S^2$ ut spatium M B tempore T percursum ad spatium percursum tempore $\frac{T \times M\,S}{2\,M\,B}$, quo corpus, M, vi centripetâ percurrit dimidium radium, quod erit $\frac{M\,S^2 \times M\,B}{4\,M\,B^2} = \frac{M\,S^2}{4\,M\,B}$ est igitur (15) vis centripeta in circulo ad vim gravitatis ut $\frac{M\,S}{2}$, ad $\frac{M\,S^2}{4\,M\,B}$, sive ut 2 M B ad M S.

([b]) 203. Ex observationibus colligunt astronomi planetas secundarios, ut sunt Jovis vel Saturni Satellites, radiis ad suum planetam primarium ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro planetæ primarii; planetas verò primarios radiis ad solem ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiplicatâ radiorum. Quare casus Corollarii VI. in corporibus cœlestibus obtinet, id est, planetarum velocitates sunt reciprocè in ratione subduplicatâ radiorum, et vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata radiorum.

([c]) 204. Hugenius ad calcem tractatûs de horologio oscillatorio, de viribus centrifugis in circulo earumque cum vi gravitatis proportione 13. Theoremata sine demonstratione proposuit. Eorum aliqua in Corollariis Propos. hujusce IV. demonstravit Newtonus, viamque aperuit, cui insistendo cætera omnia facili negotio absolvi possunt, quod posteà perfecerunt multi insignes Mathematici.

Hugenius in eximio suo tractatu De Horologio Oscillatorio vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

([d]) Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur polygonum laterum quotcunque. Et si corpus in polygoni lateribus datâ cum velocitate movendo ad ejus angulos singulos a circulo reflectatur; vis, quâ singulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas: ideoque summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa, et numerus reflexionum conjunctim: hoc est (si polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta, et aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejusdem ad circuli prædicti radium; id est, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium: ideoque, si polygonum lateribus infinitè diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis centrifuga, quâ corpus urget circulum; et huic æqualis est vis contraria, quâ circulus continuo repellit corpus centrum versus.

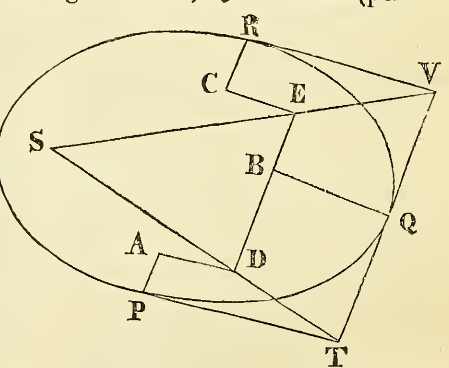
([d]) 205. Duo intelligantur polygona similia et regularia circulis duobus inscripta, quorum latera numero crescant et longitudine minuantur in infinitum, et corpora duo in polygonorum lateribus æquabili velocitate ferantur, atque ad singulos angulos à circulo reflectantur. Manifestum est corporum in polygonis revolventium vires centrifugas non esse mensurandas ex solâ velocitate quâ in singulis angulis incurrunt in circulum et quâ ab illo reflectuntur, sed insuper habendam esse rationem frequentiæ impactuum aut reflexionum, ità ut si eadem fuerit duorum corporum revolventium celeritas, vires centrifugæ sint ut numeri impactuum aut reflexionum tempore dato peractarum; nam quò plures sunt tempore dato impactus et reflexiones, eò magis corpus circulum urget, ut à centro recedat et vice-versâ eò magis ad centrum urgetur per circuli reactionem æqualem et contrariam actioni. Quare si varia fuerit corporum in polygonis revolventium celeritas æquabilis, vires centrifugæ erunt ut velocitates et numeri impactuum seu reflexionum tempore dato peractarum conjunctim. Est autem numerus reflexionum tempore dato ut numerus laterum polygoni eo tempore descriptorum. Porrò si eadem supponatur in utroque polygono velocitas, numeri laterum eodem tempore descriptorum erunt reciprocè ut latera singula, quo enim majora sunt latera, eo minor eorum numerus dato tempore datâque velocitate percurritur; quare manente eâdem in utroque polygono velocitate, numeri reflexionum sunt inversè ut latera, sive ob polygonorum similitudinem, inversè ut radii circulorum. Si verò ponatur idem circulorum radius, et varia in utroque polygono velocitas uniformis, erunt numeri laterum in utroque polygono dato tempore percursorum, directè ut velocitates æquabiles, seu, ut longitudines dato tempore descriptæ (5). Quarè variantibus polygoni velocitate et radio, numerus reflexionum est ut velocitas, seu ut longitudo tempore dato descripta applicata ad radium. Cum igitur suprà ostensum sit vim centrifugam in circulo, aut vim centripetam ipsi æqualem et contrariam, esse in ratione compositâ velocitatis et numeri reflexionum dato tempore peractarum, liquet eandem vim centrifugam esse quoque ut quadratum velocitatis radio divisum, et etiam ut quadratum longitudinis seu arcûs dato tempore descripti applicatum ad radium.

PROPOSITIO V. PROBLEMA I.

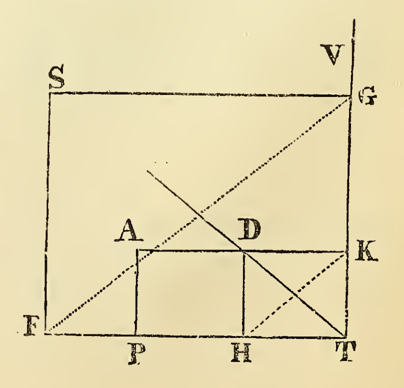
Data quibuscunque in locis velocitate, quâ corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres P T, T Q V, V R in punctis totidem P, Q, R, concurrentes in T et V. Ad tangentes erigantur perpendicula P A, Q B, R C velocitatibus corporis in punctis illis P, Q, R, a quibus eriguntur, reciprocè proportionalia; id est, ita ut sit P A ad Q B ut velocitas in Q ad velocitatem in P, et Q B ad R C ut velocitas in R ad velocitatem in Q. Per perpendiculorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur A D, D B E, E C, concurrentes in D et E: Et actæ T D, V E concurrent in centro quæsito S.

Nam perpendicula a centro S in tangentes P T, Q T demissa (per Corol. 1. Prop. I.) sunt reciprocè ut velocitates corporis in punctis P et Q; ideoque per constructionem ut perpendicula AP, BQ directè, id est ut perpendicula à puncto D in tangentes demissa. (e) Unde facilè colligitur quòd puncta S, D, T sunt in unâ rectâ. Et simili argumento puncta S, E, V sunt etiam in unâ rectâ; et propterea centrum S in concursu rectarum T D, V E versatur. Q. e. d.



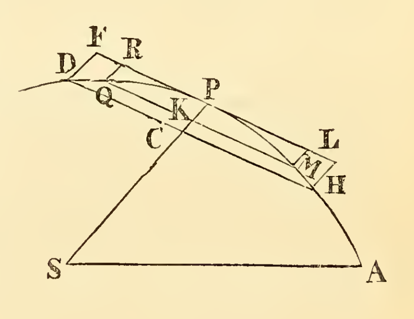
(e) 206. Puncta S, D, T, sunt in unâ rectâ. Demissis enim ex centro S, in tangentes T V, T F, perpendiculis S G, S F, et ex puncto D, perpendiculis D K, D H, patet angulos F S G, H D K, lineis parallelis contentos esse æquales et propter laterum S F, S G, D H, D K, analogiam, triangula F G S, H K D, esse similia, adeòque angulos S F G, D H K, æquari, ac proinde lineas F G, H K, esse parallelas, et triangula F T G, H T K, similia, erit ergò T H : T F = H K : F G = D H : S F, et T K : T G = H K : F G = D K : S G. Quarè linea T D, producta, transibit per centrum S.

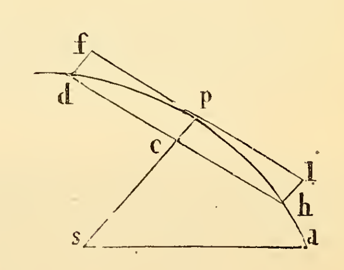


PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur, et arcum quemvis jamjam nascentem tempore quam minimo describat, et sagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam bisecet, et producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut sagitta directè et tempus bis inversè.

(f) Nam sagitta dato tempore est ut vis (per Corol. 4. Prop. I.) et augendo tempus in ratione quâvis, ob auctum arcum in eâdem ratione, sagitta augetur in ratione illâ duplicatâ (per Corol. 2. et 3. Lem. XI.) ideoque est ut vis semel et tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, et fiet vis ut sagitta directè et tempus bis inversè. Q. e. d.

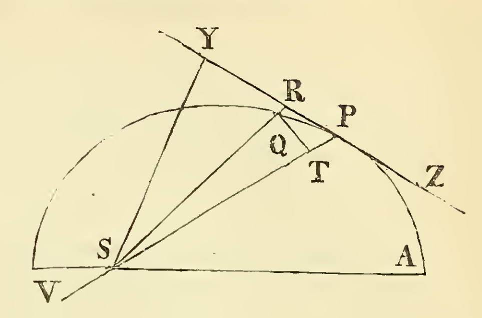




(f) 207. Corpora P et p, circà virium centra S et s, revolvendo, curvas A P Q, a p q, describant, sintque chordæ minimæ D H, d h, radiis vectoribus S P, s p, bifariam divisæ, et chordis illis evanescentibus, erit C H = P H, et D C = D P (per Corol. 2. Lem. VII.) adeóque P H = P D; undè puncta P et p, sunt in medio arcuum evanescentium D P H, d p h, posita. Prætereà quoniam punctis C et P, c et p, coeuntibus, puncta D et H, d et h, simul cum punctis P, p, coincidunt, ultima chordarum evanescentium D H, d h, positio congruit cum tangentium F L, f l positione, ac proindè chordæ evanescentes D H, d h, tangentibus F L, f l, æquidistant, adeóque rectæ D F, d f, radiis S P, s p, parallelæ sagittis P C, p c, evanescentibus æquales sint. His, ad clariorem eorum quæ NEWTONUS supponit, intelligentiam positis, demonstrandum est vires centripetas in P et p, esse inter se ut sunt sagittæ P C, p c, directè, et inversè ut quadrata temporum quibus describuntur arcus evanescentes H P D, h p d, aut dimidii P D, p d. —*Dem.* Si arcus P D, p d, æqualibus temporibus describerentur, sagittæ P C, p c, (per Corol. 1. Prop. I.) essent ut vires centripetæ in P et p. Quòd si vires in P et p, æquales forent, tempora verò per arcus P D, p d, inæqualia, sint v. gr. sicut T ad t, dico sagittas P C, p c, fore ut horum temporum quadrata directè; sive ut T^2 ad t^2. Sit enim arcus P Q, descriptus eodem tempore t quo arcus p d, positis viribus in P et p, æqualibus, spatia Q R, f d, seu P K, p c, virium illarum actione eodem tempore descripta erunt æqualia; Verùm (per Cor. 2. et 3. Lem. XI.) $PD^2 : PQ^2 = DF : QR$ sive f d, et ob motum per arcus evanescentes uniformem, sunt arcus P D, P Q ut tempora quibus describuntur, hoc est ut T ad t, ideoque $PD^2 : PQ^2 = T^2 : t^2 = DF : QR$ sive f d, et quia $DF = PC$ et $df = pc$ ergo $T^2 : t^2 = PC : pc$, itaque si vires in P et p sint æquales, erunt sagittæ P C, p c, ut quadrata temporum quibus arcus P D, p d, describuntur. Quoniam igitur manentibus temporibus sagittæ sunt ut vires, et manentibus viribus, sagittæ sunt ut temporum quadrata, necessum est ut variantibus viribus atque temporibus sagittæ sint ut vires et quadrata temporum conjunctim. Quamobrem si vires in P et p, dicantur V, v, erit $PC : pc = V \times T^2 : v \times t^2$, et dividendo antecedentes per T^2, et consequentes per t^2, erit $V : v = \frac{PC}{T^2} : \frac{pc}{t^2}$. Q. e. d.

(g) Idem facilè demonstratur etiam per Corol. 4 Lem. X.

Corol. 1. Si corpus P revolvendo circa centrum S describat lineam curvam A P Q; tangat verò recta Z P R curvam illam in puncto quovis P, et ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto Q agatur Q R distantiæ S P parallela, ac demittatur Q T perpendicularis ad distantiam



illam S P: vis centripeta erit reciprocè ut solidum $\frac{S\,P\,\text{quad.} \times Q\,T\,\text{quad.}}{Q\,R}$ si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coëunt puncta P et Q. (h) Nam Q R æqualis est sagittæ dupli arcus Q P, in cujus medio est P, et duplum trianguli S Q P sive S P × Q T, tempori, quo arcus iste duplus describitur, proportionale est; ideoque pro temporis exponente scribi potest.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta est reciprocè ut solidum $\frac{S\,Y\,q \times Q\,P\,q}{Q\,R}$, si modò S Y perpendiculum sit à centro virium in orbis tangentem P R demissum. (i) Nam rectangula S Y × Q P et S P × Q T æquantur.

Corol. 3. Si orbis vel circulus est, vel circulum concentricè tangit, aut concentricè secat, id est angulum contactus aut sectionis cum circulo quam minimum continet; eandem habens curvaturam eundemque ra-

(g) 208. Idem facilè demonstratur etiam per Corol. 4. Lem. X. quo statuitur vires esse ut spatia, ipso motus initio, descripta directè et quadrata temporum inversè: Cum enim F D, f d, seu sagittæ P C, p c, sint spatia ex virium centripetarum actione descripta iisdem temporibus quibus percurruntur arcus evanescentes P D, p d, patet per suprà dictum Coroll. vires centripetas esse inter se in ratione compositâ ex directâ ratione sagittarum P C, p c, et reciprocâ quadratorum temporum quibus describuntur arcus evanescentes P D, p c, seu H D, h d.

(h) 209. Nam Q R æqualis est sagittæ dupli arcus Q P, in cujus medio est P, (207), duplum verò trianguli evanescentis S Q P, (quod per Lem. VIII., tanquam rectilineum considerari potest) æquale est facto ex perpendiculo Q T, in basim S P; cum igitur in eâdem curvâ A P Q, areæ sint proportionales temporibus quibus describuntur, ac proindè rectangulum Q T × S P, scribi possit loco temporis quo duplus arcus Q P, seu duplum triangulum S Q P, describitur, erit vis centripeta in P, directè ut $\frac{Q\,R}{S\,P^2 \times Q\,T^2}$ et inversè ut $\frac{S\,P^2 \times Q\,T^2}{Q\,R}$.

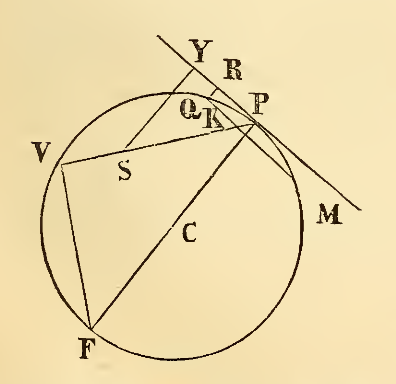
(i) 210. Rectangula S Y × Q P, et S P × Q T, æquantur; nam tangens P R, cum arcu evanescente Q P, congruit (per Lem. VII.) et propterea tangens illa considerari potest tanquam trianguli S P Q, basis P Q, producta, et S Y, tanquam perpendicularis ad illam basim productam, quarè area dupli trianguli S P Q, est S Y × Q P = S P × Q T.

dium curvaturæ ad punctum P; et si P V chorda sit circuli hujus à corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciprocè ut solidum S Y q × P V. (k) Nam P V est $\frac{\text{Q T q}}{\text{Q R}}$.

Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directè, et chorda illa inversè. Nam velocitas est reciprocè ut perpendiculum S Y per Corol. 1. Prop. I.

Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea A P Q, et in ea detur etiam punctum S, ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, quâ corpus quodvis P à cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{\text{S P q} \times \text{Q T q}}{\text{Q R}}$ vel solidum S Y q × P V huic vi reciprocè proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

(k) 211. P V est $\frac{\text{Q P}^2}{\text{Q R}}$. Sit enim circulus osculator P Q V F, et ductâ chordâ Q M, quam alia chorda P V, per virium centrum S acta, bi-

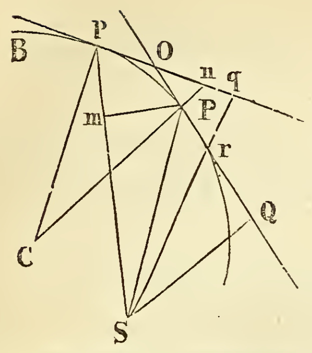


secat in K, erit (per Prop. 35. Lib. 3. Elem.) $\text{Q K}^2 = \text{V K} \times \text{P K}$; sed evanescente P K, V K = V P, et (207) Q R = P K, ac (per Corol. 1. Lem. VII) Q K = Q P, ergò $\text{Q P}^2 = \text{P V} \times \text{Q R}$, et $\text{V P} = \frac{\text{Q P}^2}{\text{Q R}}$.

212. Iisdem positis sit P C, radius osculi = R, et erit vis centripeta in P, reciprocè ut solidum $\frac{\text{S Y}^3 \times \text{R}}{\text{S P}}$: quoniam enim rectæ S Y, et F C P, ad tangentem P Y, perpendiculares æquidistant, erit angulus V P F = P S Y; cumque sit prætereà angulus F V P, in semicirculo æqualis recto S Y P, duo triangula P V F, S Y P, similia sunt ac proindè S P : S Y = P F seu 2 R : P V, adeóque $\text{P V} = \frac{\text{S Y} \times 2\,\text{R}}{\text{S P}}$ et $\text{S Y}^2 \times \text{P V} = \frac{\text{S Y}^3 \times 2\,\text{R}}{\text{S P}}$; hoc est dividendo per numerum constantem 2, ut $\frac{\text{S Y}^3 \times \text{R}}{\text{S P}}$. Hæc est expressio vis centripetæ quam Joannes Bernoullius, Abrahamus de Moivre et Guido Grandus invenerunt.

SCHOLION.

213. NEWTONUS generalem virium centralium theoriam in superioribus propositionibus aperuit, earumque elegantes formulas in Propositionis viæ Corollariis tradidit. Plurimas per analysin methodumque fluxionum posteà exquisierunt alii qui primum inter Geometras locum tenebant. Hos inter eminet *Varignonius* qui in Commentariis Parisiensibus an. 1700, 1701, 1706, virium centralium formulas suâ varietate et universalitate eximias dedit; præclaras quoque addidit *Joannes Bernoullius* in iisdem Commentariis an. 1710. Duas proposuit *Jacobus Hermannus* in Scholio ad Propositionem 22am Lib. 1. *Phoronomiæ*, quas ut pote multum expeditas, nobisque in posterum profuturas, et ex superioribus NEWTONI formulis facillimè deducendas, hic exscribemus ac demonstrabimus.



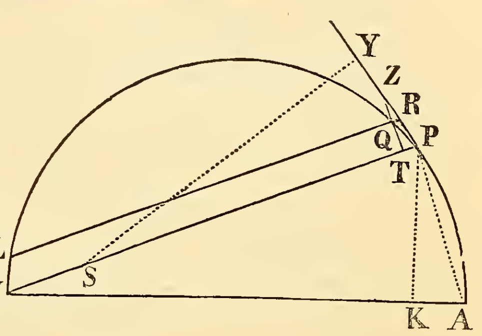
214. Itaque corpus P, circà centrum virium S revolvendo describat curvam B p P, et centro C radio C P descriptus intelligatur arcus infinitesimus P p circuli curvam B p P osculantis in P, ac centro S radio S P, arculus P m, et denique S Q, S q, ad tangentes P Q, p q, perpendiculares. Duo triangula q O r, n C p, seu P C p similia sunt, nam æquales sunt anguli r q O, C p n, sunt enim ambo recti, et anguli r O q, P C p, qui cum angulo P O p duos rectos efficiunt. Similia quoque sunt triangula p m P, p q S, seu P Q S, ob angulos ad q et m rectos et angulum m p P communem, dum coëunt puncta P, p, quare p P : r q = P C : O q, seu p q, seu P Q; et m p : P p = P Q : S P unde ex æquo m p : r q = P C ad S P et P C $= \frac{SP \times mp}{rq}$. Porrò (212) vis centripeta in P est ut $\frac{SP}{PC \times SQ^3}$; ergò si substituatur valor ipsius P C, modò inventus, erit vis ut $\frac{rq}{SQ^3 \times mp}$, hoc est, si vis centripeta sit = v, S P = z, ac proindè m p = d z, S Q = p, adeóque r q = d p, erit $v = \frac{dp}{p^3 dz}$, et radius osculi C P = r $= \frac{zdz}{dp}$, quas duas formulas tradunt Keillius, in suâ de Legibus Virium Centripetarum Epistolâ ad Halleium directâ, et Hermannus loco suprà citato.

215. Sit P p = d s, et P m = d y, et ob triangula similia p P m, P S Q, erit d s : d y = z : p, adeóque $p = \frac{zdy}{ds}$, et sumptis utrinque fluxionibus nullâ constante usurpatâ, invenietur (165) $dp = \frac{dzdyds + zdsddy - zdydds}{ds^2}$; quarè $v = \frac{dp}{p^3 dz} = \frac{dpds^3}{z^3 dy^3 dz}$ ob $p = \frac{zdy}{ds}$ et $p^3 = \frac{z^3 dy^3}{ds^3}$, adeóque $v = \frac{dzdyds^2 + zds^2 ddy - zdydsdds}{z^3 dy^3 dz}$, quæ formula nonnisi nominibus differt à formulis quas Varignonius dedit in Commentariis Parisiensibus, 1701. 1706.

216. Hinc radiorum osculi formula admodum generalis et expedita facile reperitur Nam invenimus (214) $r = \frac{zdz}{dp} =$ (215) $\frac{zdzds^2}{dzdyds + zdsddy - zdydds}$ cùm in hâc formulâ nulla fluxio constans assumpta sit, in alias infinitas transformari potest, sumptis pro arbitrio constantibus. Si centrum S, in infinitum abeat, ut rectæ S P, evadant parallelæ, erit d z d y d s, quantitas infinitè parva respectu z d s d d y et z d y d d s; nam cum z finita est d z d y d s, est ejusdem generis cum z d s d d y; ubi igitur z, evadit infinita z d s d d y, fit etiam infinita respectu d z d y d s; undè si in formulâ radii osculatoris modò inventâ deleatur membrum d z d y d s, habebitur $r = \frac{ds^2 dz}{dsddy - dydds}$ formula generalis radii osculi in curvis quarum ordinatæ S P parallelæ axique perpendiculares sunt, et in quibus d z, sunt elementa abscissarum.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentiâ circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.



Esto circuli circumferentia V Q P A; punctum datum, ad quod vis ceu ad centrum suum tendit, S; corpus in circumferentiâ latum P; locus proximus, in quem movebitur Q; et circuli tangens ad locum priorem P R Z. Per punctum S ducatur chorda P V; et actâ circuli diametro V A, jungatur A P; et ad S P demittatur perpendiculum Q T, quod productum occurrat tangenti P R in Z, ac denique per punctum Q agatur L R, quæ ipsi S P parallela sit, et occurrat tum circulo in L, tum tangenti P Z in R. Et [1] ob similia triangula Z Q R, Z T P, V P A; erit R P quad. hoc est Q R L ad Q T quad. ut A V quad. ad P V quad. Ideoque $\frac{\text{Q R L} \times \text{P V quad.}}{\text{A V quad.}}$ æquatur Q T quad. Ducantur hæc æqualia in $\frac{\text{S P quad.}}{\text{Q R}}$, et punctis P et Q coëuntibus scribatur P V pro R L. Sic fiet $\frac{\text{S P quad.} \times \text{P V cub.}}{\text{A V quad.}}$ æquale $\frac{\text{S P quad.} \times \text{Q T quad.}}{\text{Q R}}$. Ergo (per Corol. 1. et 5. Prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{\text{S P q} \times \text{P V cub.}}{\text{A V quad.}}$; id est (ob datum A V quad.) reciprocè ut qua-

(1) 217. Triangula Z Q R, Z T P, similia sunt ob Q R, parallelam T P, per constructionem, et triangula Z T P, V P A, sunt etiam similia ob angulos rectos Z T P, V P A, et æquales V P Z, V A P, quorum communis est mensura dimidius arcus V L Q P; quarè R P : Q T = Z P : Z T = A V : P V. Est autem $\text{R P}^2 = \text{Q R} \times \text{R L}$, per Prop. 36. Lib. 3. Elem.

dratum distantiæ seu altitudinis S P et cubus chordæ P V conjunctim. Q. e. i.

Idem aliter.

Ad tangentem P R productam demittatur perpendiculum S Y: ob similia triangula S Y P, V P A; erit A V ad P V ut S P ad S Y: ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale S Y, et $\frac{SP \text{ quad.} \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$ æquale S Y quad. × P V. Et propterea (per Corol. 3. et 5. Prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{SPq \times PV \text{ cub.}}{AVq}$, hoc est, ob datam A V reciprocè ut S P q × P V cub. Q. e. i.

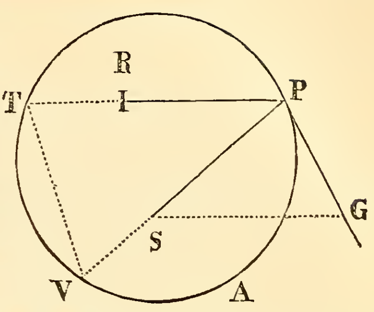
Corol. 1. Hinc si punctum datum S, ad quod vis centripeta semper tendit, locetur in circumferentiâ hujus circuli, puta ad V; erit vis centripeta reciprocè ut quadrato-cubus altitudinis S P.

Corol. 2. Vis, quâ corpus P in circulo A P T V circum virium cen-

218. Idem aliter, cum sit $\frac{SP \times PV}{AV} = SY$ erit $\frac{SP^3 \times PV^3}{AV^3} = SY^3$ et $\frac{SP^3 \times PV^3 \times R}{AV^3 \times SP} = \frac{SP^2 \times PV^3 \times R}{AV^3} = \frac{SY^3 \times R}{SP}$ et propterea (212) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{SP^2 \times PV^3 \times R}{AV^3}$, seu ob $R = \frac{1}{2} AV$, et A V, constantem erit reciprocè ut $SP^2 \times PV^3$.

(m) 219. *Nam per constructionem hujus propos. vis prior est ad vim posteriorem,* (hoc est vis circà S, ad vim circà R) *ut* $RP^2 \times PT^3$ *ad* $SP^2 \times PV^3$. Scilicet in demonstratione hujus Propositionis (vid. fig. Prop.) inventum erat $\frac{QRL \times PV^2}{AV^2} = QT^2$, et punctis P et Q coëuntibus scribatur P V pro R L, et uterque terminus multiplicetur per $SP^2 \times AV^2$, erit $QR \times PV^3 \times SP^2 = QT^2 \times SP^2 \times AV^2$, est verò $QT \times SP$ area cujus arcus est Q P, et Q R, est ejus sagitta, itaque sagitta per cubum chordæ, et quadratum distantiæ multiplicata, æqualis est quadrato areæ cui respondet, multiplicato per quadratum diametri. Quod utique verum erit sive agatur de vi ad S, sive de vi ad R tendente (vid. fig. Cor.) Quod si sumi intelligantur arcus æquali tempore descripti circa utramque vim, sagittæ eorum arcuum exprimerit rationem earum virium centripetarum; et areæ illis temporibus æqualibus circa utramque vim descriptæ æquales erunt, nam per Prop. 1. tempus periodicum est ad integram superficiem descriptam, ut tempus quodvis ad aream ipsi respondentem, ut ergo eodem tempore periodico idem circulus circa utramque vim absolvitur, quæriturque area eidem tempori correspondens, illa area eadem erit utriusque vis respectu, ideoque productum quadrati areæ per quadratum diametri idem erit tam respectu vis S, quam respectu vis R, ergo sagitta pertinens ad vim S multiplicata per cubum ejus chordæ P V, et quadratum ejus distantiæ S P æqualis erit sagittæ pertinenti ad vim R, multiplicatæ per cubum ejus chordæ P T et per quadratum ejus distantiæ R P, ea enim facta, quadrato areæ in quadratum diametri ducto æqualia sunt, ideo sagittæ illæ, sive vires in S et R erunt reci-

trum S revolvitur, est ad vim, qua corpus idem P in eodem circulo et eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut R P quad. × S P ad cubum rectæ S G, quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem P G ducitur, et distantiæ corporis a secundo virium centro parallela est.



([m]) Nam per constructionem hujus propositionis vis prior est ad vim posteriorem ut R P q × P T cub. ad S P q × P V cub. id est, ut S P × R P q ad $\frac{\text{S P cub.} \times \text{P V cub.}}{\text{P T cub.}}$, sive (([n]) ob similia triangula P S G, T P V) ad S G cub.

Corol. 3. Vis, quâ corpus P in orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, est ad vim, quâ corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut S P × R P q, contentum utique sub distantiâ corporis a primo virium centro S et quadrato distantiæ ejus a secundo virium centro R, ad cubum rectæ S G, quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem P G ducitur, et corporis a secundo virium centro distantiæ R P parallela est. ([o]) Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P eædem sunt ac in circulo ejusdem curvaturæ.

procè ut illæ quantitates quæ eas multiplicant, hoc est sagitta in S est ad sagittam in R sicut $R P^2 \times P T^3 : S P^2 \times P V^3$. Q. e. d.

([n]) 220. Triangula P S G, T P V, similia sunt, ob angulos P S G, S P T æquales, quia sunt alterni inter parallelas S G, T P, et angulos V P G, V T P, æquales per 32. lib. 3. Elem. undè T P : P V = S P : S G = $\frac{S P \times P V}{T P}$ et $S G^3 = \frac{S P^3 \times P V^3}{P T^3}$

([o]) 221. Nam vires in hôc orbe ad ejus punctum quodvis P, eædem sunt ac in circulo orbitam osculante in P, vis enim illa in P, est semper eadem ac si corpus in arcu evanescente circuli osculatoris moveretur, cum arcus ille circuli pro arcu orbitæ evanescente usurpari possit.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Moveatur corpus in semicirculo P Q A : *ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum* S, *ut lineæ omnes* P S, R S *ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.*

A semicirculi centro C agatur semidiameter C A parallelas istas perpendiculariter secans in M et N, et jungatur C P. Ob (p) similia triangula C P M, P Z T et R Z Q est C P q ad P M q ut P R q ad Q T q, et naturâ circuli P R q æquale est rectangulo Q R $\times \overline{RN + QN}$, sive coëuntibus punctis P et Q rectangulo Q R $\times$ 2 P M. Ergo est C P q ad P M quad. ut Q R $\times$ 2 P M ad Q T quad. ideoque $\frac{QT\ \text{quad.}}{QR}$ æquale $\frac{2\,PM\ \text{cub.}}{CP\ \text{quad.}}$, et $\frac{QT\ \text{quad.} \times SP\ \text{quad.}}{QR}$ æquale $\frac{2\,PM\ \text{cub.} \times SP\ \text{quad.}}{CP\ \text{quad.}}$. Est ergo (per Corollarium 1. et 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2\,PM\ \text{cub.} \times SP\ \text{quad.}}{CP\ \text{quad}}$, hoc est (neglectâ ratione determinatâ $\frac{2SP\ \text{quad.}}{CP\ \text{quad.}}$) reciprocè ut P M cub. Q. e. i.

(q) Idem facilè colligitur etiam ex propositione præcedente.

Scholium.

(r) Et argumento haud multum dissimili corpus invenietur moveri in

(p) 222. Similia sunt triangula C P M, P Z T, anguli enim ad M et T recti æquales sunt, et quoniam anguli Z P T + M P C, et anguli M P C + M C P, recto æquantur, erit etiam M C P = Z P T ; et $PR^2 = QR \times \overline{RN + QN}$ (per Prop. 36. lib. 3. Elem.) Cum autem C P sit radius circuli et S P sit linea infinita adeòque S M = S P, erunt C P, S P, $\frac{2\,SP^2}{CP^2}$ quantitates constantes.

(q) 223. *Idem facilè colligitur ex Propositione præcedente* quâ constat vim centripetam esse reciprocè ut $SP^2 \times PV^3$. Nam, centro virium S in infinitum abeunte, omnes S P sunt æquales adeòque constantes, et propter eà vis reciprocè ut PV^3.

(r) 224. Ut multa de sectionibus conicis mox erunt dicenda, visum est eas præmittere ex conicis propositiones quæ sæpius occurrent, ne memoriæ vitio aut fastidio ad alios Autores recurrendi demonstrationum vis Lectores fugiat.

ellipsi, vel etiam in hyperbolâ vel parabolâ, vi centripetâ, quæ sit reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

Def. 1ª. Si Planum quodpiam secet conum, sed per ejus Verticem non transeat, intersectio Coni et istius Plani dicitur Sectio Conica.

2ª. Si ducatur planum per Verticem Coni, parallelum plano secanti, conum ipsum vel secabit, vel tanget, vel totum erit extra eum; hinc distinguuntur sectionum Conicarum species, dicentur primo casu Hyperbolæ, 2°. Parabolæ, 3°. Ellipses.

3ª. Si sint duo Coni similes sibi per Verticem oppositi, illud planum verticale quod unum e Conis secat, alterum etiam secabit, ideo, planum sectionis ipsi Parallelum utrumque etiam Conum secabit, et ex utriusque Coni sectione formabuntur in eo Plano duæ Hyperbolæ oppositæ.

4ª. Si secundùm lineas rectas in quibus planum per Verticem Coni ductum secat Coni superficiem, applicentur duo plana Conum tangentia, eorum cum plano Hyperbolarum intersectiones, dicuntur Hyperbolarum Asymptoti; nam ut ea plana superficiem Coni jam tetigerunt, nullibi eam superficiem iterum attingent, non ergo attingent Hyperbolam quæ terminatur in superficie Coni et quæ est in plano lineis quas tangunt parallelo.

Lemma I. Sit linea ab unâ Asymptoto ad alteram ducta, quæ per Hyperbolam secetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam et Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

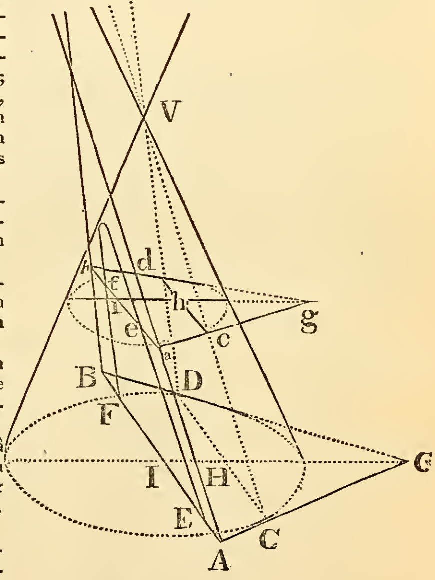
Et si lineæ, inter se Parallelæ, ab unâ Asymptoto ad alteram ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallelæ per Hyperbolam sectæ.

Si verò linea ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ducta per Asymptotos secetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam et Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

Et si lineæ, inter se Parallelæ, ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallelæ per Asymptotum sectæ (Apoll. lib. 2. Prop. 8. et 16.)

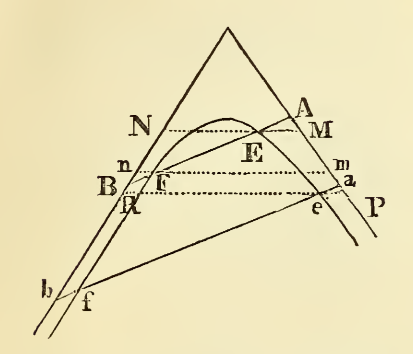
Demonst. Primum talis sit linea A B ut planum per eam lineam duci possit basi coni parallelum, cujus sectio cum cono erit circulus C E F D, ducatur planum V C D per verticem Coni V C D plano Hyperbolarum parallelum et secundum lineas V C, V D applicentur plana Conum tangentia, in quibus erunt Hyperbolæ Asymptoti et Tangentes circuli C E F D in punctis C et D: concurrant illæ Tangentes in G; ex G per centrum circuli ducatur linea G H I quæ erit perpendicularis in chordam C D eamque bifariam secabit, ut etiam ejus Parallelam A B, et chordam E F (per 3. 3. Elem.) est ergo I A = I B, et I E = I F, unde I A — I E sive A E = I B — I F sive B F et (per 36. 3. Elem.) $\overline{CA}^2 = AF \times AE = AF \times BF$.

Sit verò linea a b huic Parallela, sive in eâdem sive in oppositâ sectione; simili ratiocinio ostendetur esse a e = b f; et $\overline{ca}^2 = af \times ae = af \times bf$. Sed figura A C a c est Parallelogramma; est enim tota in plano Tangente Conum, et terminatur per sectiones planorum Parallelorum, nam C c et A a sunt sectiones plani Verticalis et plani Hyperbolarum ipsi Paralleli, et C A et c a sunt sectiones planorum basi coni Parallelorum; est ergo C A = c a et $\overline{CA}^2 = \overline{ca}^2$, ac per consequens $AF \times BF = af \times bf$.



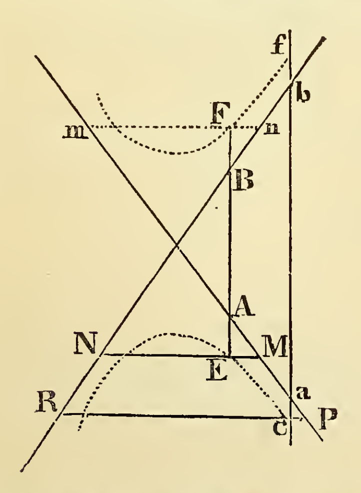
Casus 2dus. Quòd si linea A B utcumque sit ducta inter Asymptotos, et Hyperbolam secet in E et F erit A E = B F; nam per E et F ducantur lineæ M E N, m F n, tales ut plana per eas ducta sint basi Coni parallela, Triangula A E M et A F m, B F n et B E N erunt similia propter Parallelas, est ergo A E : A F = E M : F m et B E : B F = N E : n F; est ergo per compositionem rationis. . $AE \times BE : AF \times BF = EM \times NE : Fm \times nF$, sed per demonstrationem

primi casûs est E M × N E = F m × n F, ergo A E × B E = A F × B F, unde (per Prop. 16. 6. Elem.) A F : A E = B E : B F et dividendo A F — A E sive E F : A E = B E — B F sive E F : B F, cum ergo sit E F : A E = E F : B F est A E = B F.



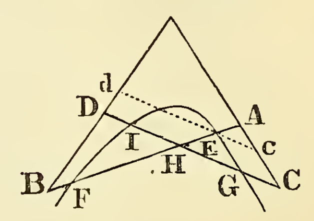
Ducatur verò linea quævis a b, priori A B parallela, et per punctum e ducatur linea P e R lineæ M E N parallela, similia erunt Triangula A E M et a e P, B E N et b e R ob parallelas, est ergo A E : a e = E M : e P et B E : b e = E N : e R, est ergo per compositionem rationis... A E × B E : a e × b e = E M × E N : e P × e R, sed per casum primum est E M × E N = e P × e R, ergo A E × B E = a e × b e.

Casus 3us. Si lineæ de quibus agitur, ab unâ



Hyperbolâ ad ejus oppositam ducerentur et per Asymptotas secarentur, eadem prorsus foret demonstratio ac in 2°. casu, nisi quod in primâ demonstrationis parte, componendo concluderetur, non dividendo.

Lemma II. Sint duæ lineæ in Hyperbolarum plano ductæ, quæ in quodam puncto sibi occurrant; facta partium singulæ lineæ sumptarum a puncto concursus usque ad punctum Hyperbolæ, sunt inter se sicut facta partium sumptarum ab Hyperbolâ usque ad utramque Asymptotum.

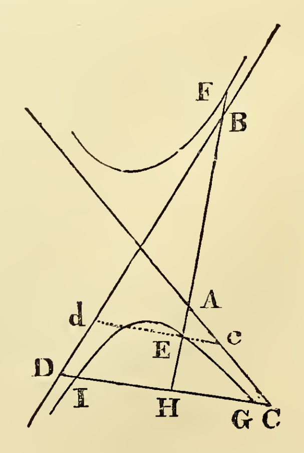


Lineæ A B, D C sibi mutuo occurrant in H, est E H × F H : G H × I H = A E × B E : C G × D G.

Demonstr. Ducatur per punctum E Hyperbolæ, in quo secatur per lineam A B productam si necesse sit, linea c E d, alteri lineæ datæ C H D Parallela: similia erunt Triangula A H C et A E c, B H D et B E d: unde habebuntur hæ proportiones

A H sive A E + E H : A E = H C sive C G + G H : c E

et B H sive B F + F H : B E = H D sive D I + I H : d E, et per compositionem rationis A E × B F + A E × F H + E H × B F (sive A E per *Lem*. I.) + E H × F H : A E × B E = C G × D I + C G × I H + G H × D I (sive C G per Lem. I.) + G H ×



I H : c E × d E (sive C G × D G per Lem. I.) est verò B F + F H + H E = B E, et D I

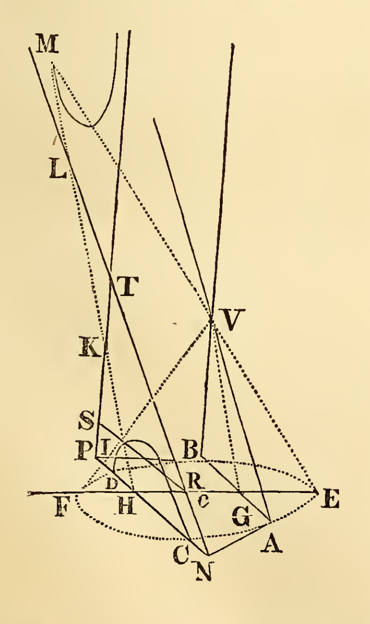
$+ IH + HG = DG$ ergo est $AE \times BE + EH \times FH : AE \times BE = DG \times CG + GH \times IH : CG \times DG$. et dividendo: $EH \times FH : AE \times BE = GH \times IH : CG \times DG$ ergo alternando $EH \times FH : GH \times IH = AE \times BE : CG \times DG$.

Eadem est demonstratio sive lineæ sint in eadem Hyperbola, sive, una sit in unâ Hyperbolâ altera inter oppositas, sive ambæ inter oppositas ducantur. Ergo facta partium, etc.

Lemma III. Sint duæ Parallelæ in sectione Conicâ ductæ quæ secentur per lineam quamvis, facta partium uniuscujusque Parallelæ sumptarum a curvâ ad punctum ejus intersectionis, sunt inter se ut facta partium lineæ secantis sumptarum a curvâ ad punctum intersectionis cum Parallelâ.

Sint A B, C D, parallelæ sectæ per lineam E F in punctis G et H, est $AG \times GB : CH \times HD = EG \times GF : EH \times HF$.

Sit V, vertex coni; ex eo ducantur V E, V F ad extremitates lineæ E F; ducatur in B A, planum V A B, per verticem coni transiens et in C D planum Hyperbolarum ipsi Parallelum, in plano V B A ducatur V G, et in H, H M ipsi V G parallela quæ jacebit in plano Hyper-



bolarum: erunt ergo Triangula V G E et M H E, VGF et I H F similia unde habentur hæ proportiones

$$VG : MH = EG : EH$$

et $VG : IH = FG,\ FH$, et per compositionem rationis

$\overline{VG}^2 : MH \times IH = EG \times GF : EH \times FH$.

Lineæ V E, V F ductæ per verticem coni et punctum in ejus superficie sumptum sunt semper in superficie coni, ergo earum intersectiones I et M cum lineâ H M in plano Hyperbolarum ductâ sunt in ipsâ curvâ Hyperbolicâ cujus Asymptoti sint T N, T P parallelæ lineis V A, V B; per punctum I in quo linea H M occurrit Hyperbolæ ducatur S I R lineis D C et A B parallela, similia erunt Triangula V A G et L R I, V B G et K S I lineis enim parallelis terminantur, erit ergo

$$VG : AG = LI : RI$$

et $VG : GB = KI : SI$ et per compositionem rationis

$\overline{VG}^2 : AG \times GB = LI \times KI : RI \times SI$ ($= PD \times DN$ per Lem. I.) Sed per Lemma II. est

$LI \times KI : PD \times DN = MH \times IH : CH \times DH$ est ergo

$\overline{VG}^2 : AG \times GB = MH \times IH : CH \times DH$ et alternando

$\overline{VG}^2 : MH \times IH = AG \times GB : CH \times DH$.

Erat autem $\overline{VG}^2 : MH \times IH = EG \times FG : EH \times FH$, ex primâ demonstrationis parte, est ergo $AG \times GB : CH \times DH = EG \times FG : EH \times FH$. Q. e. d.

Cas. 2. Si punctum F infinitè distaret a puncto E, linea F G æqualis censenda foret lineæ F H, ideoque $EG \times FG : EH \times FH = EG : EH = AG \times GB : GH \times DH$, hoc est ipsæ partes secantis forent inter se sicut facta partium parallelarum quas secat.

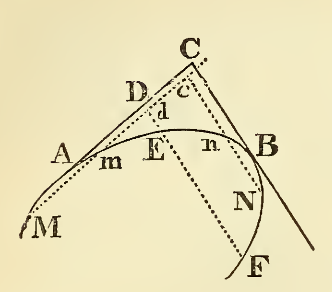
Cas. 3. Si punctum F non foret in eâdem sectione in qua est punctum E, sed in oppositâ, eadem foret demonstratio nisi quod puncta M et I, in eadem Hyperbola forent.

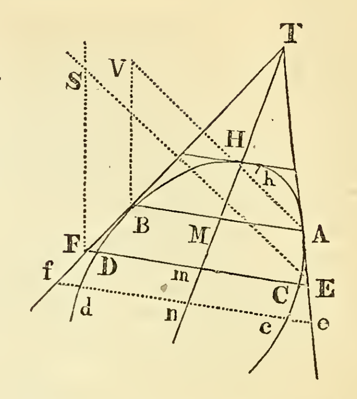
Cas. 4. Eadem etiam fiet demonstratio sive puncta G et H sint intra extremitates Parallelarum A B, C D, aut intra vertices E et F lineæ secantis, sive sint extra.

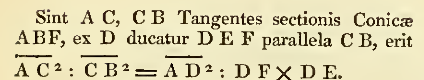
Corol. 1. Sumatur medium lineæ secantis puncta E et F sitque c, si intersectio ejus lineæ per Parallelam sit intra vertices, erit factum partium ejus æquale quadrato ejus dimidii dempto quadrato ejus portionis a Centro ad intersectionem sumptæ, v. gr. erit $EG \times GF = \overline{cE}^2 - \overline{cG}^2$ ut liquet per 5. 2. Elem. Si intersectio ejus lineæ sit extra vertices, erit factum ejus partium æquale quadrato portionis ejus a Centro ad intersectionem sumptæ dempto quadrato dimidiæ lineæ, v. gr. foret $EG \times GF = \overline{cG}^2 - \overline{cE}^2$, ut liquet per 6. 2. Elem.

Corol. 2. Ex puncto quovis ductæ sint duæ Tangentes ad sectionem Conicam, et ex quodam puncto unius ex illis Tangentibus, ducatur linea trans sectionem Conicam alteri Tangenti parallela. Quadratum prioris Tangentis est ad quadratum alterius Tangentis ut quadratum partis in primâ Tangente assumptæ ad factum lineæ Parallelæ alteri tangenti per ejusPartem inter Tangen-

tem et curvam comprehensam (Apol. lib. 3. Prop. 16.)



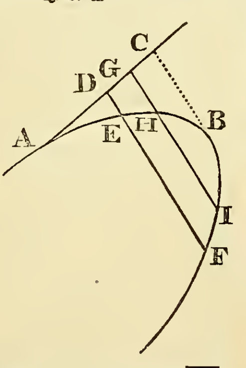




Sint A C, C B Tangentes sectionis Conicæ ABF, ex D ducatur D E F parallela C B, erit $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE$.

Ducatur M m c parallela Tangenti A C, et N n c parallela Tangenti C B, et M m c lineam D E F secet in d, erit per Lem. sup. $cn \times cN : dF \times dE = Mc \times mc : Md \times md$, est enim M c linea secans parallelas c N, d F; evanescant arcus M m, et N n, coincident lineæ M m c cum A C et N n c cum B C, eritque $cn = CN = CB$, $dF = DF$, $dE = DE$, $Mc = mc = AC$, $Md = md = AD$, ergo erit $\overline{CB}^2 : DF \times DE = \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2$ et permutando et alternando $\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE$. Q. e. d.

Corol. 3. Si ex variis punctis Tangentis ducantur lineæ Parallelæ trans sectionem Conicam, Quadrata partium Tangentis sunt inter se ut facta Parallelarum per earum partem inter Tangentem et curvam interceptam. Sit A C Tangens ex ejus punctis D et G



ducantur Parallelæ D E F, G H I, erit $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = DF \times DE : GI \times GH$; nam supponatur in B ea Tangens quæ his lineis sit Parallela secetque priorem in C erit per Corollarium superius $\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 : DF \times DE = \overline{AG}^2 : GI \times GH$ ergo alternando, $\overline{AD}^2 : \overline{AG}^2 = DF \times DE : GI \times GH$. Q. e. d.

Lemma IV. Dicatur sectionis Conicæ Diameter ea linea quæ Parallelas in curva terminatas bifariam dividit: sit ejus Diametri vertex punctum in quo curvæ occurrit; illæ Parallelæ, quas bisecat, ipsi ordinatim applicatæ dicantur, et earum alterutra pars dicatur ordinata illius Diametri; portio Diametri ab ejus vertice ad Ordinatam usque, dicetur ejus abscissa: et denique ea Diameter quæ Parallelas bisecando simul est illis perpendicularis, dicatur Axis.

His positis 1°. Linea quæ duas Parallelas bisecabit erit Diameter curvæ: id est cæteras omnes lineas hisce Parallelas etiam bisecabit. (Apol. Lib. 2. Prop. 28.)

2°. Linea in Vertice Diametri ducta et Ordinatis Parallela, erit Tangens curvæ in eo Vertice (Apol. Lib 1. Prop. 17.) et vice versâ ea linea erit Diameter quæ bisecabit lineam quæ erit Parallela Tangenti per ejus verticem ductæ: (Apol. Lib. 2. Prop. 7.)

Denique; Quadrata ordinatarum erunt inter se ut facta partium quas secant in Diametro.

Demonst. In extremitatibus lineæ A B ducantur Tangentes quæ concurrant in T, per medium M, lineæ A B ducatur T M m sitque linea D C parallela lineæ B A hinc inde producta donec Tangentibus T B, T A productis si necesse sit in E et F occurrat: per A B et Verticem coni V ducatur planum V A B, et per E F planum ipsi Parallelum quod Hyperbolam in Cono formabit, erit ergo D C linea ad Hyperbolam pertinens, et propter Tangentes B F, A E, puncta F et E ad Asymptotos pertinebunt, ergo (per Lem. I.) est $EC = FD$, sed ob parallelas A B, E F et quia bifariam dividitur A B in M per lineam T M m erit $mE = mF$, itaque $mE - EC$ (sive m C) $= mF - FD$ (sive m D) ergo linea T M, lineam C D lineæ A B parallelam bifariam dividit, idem verò de quâvis linea c d parellelâ lineæ A B demonstrabitur ergo linea M m per medium linearum A B, C D, transiens omnes earum Parallelas in curva terminatas bifariam dividit. Est ergo Diameter curvæ.

2°. Linea per Verticem Diametri H ducta, et ordinatis Parallela est tangens curvæ, pone enim illam lineam sectioni iterum occurrere in h, linea T M quæ dividit bifariam omnes Parallelas lineæ A B in curva terminatas, deberet bifariam dividere lineam H h, sed illud absurdum, siquidem illam attingit in ejus extremo H, ergo linea per verticem Diametri ducta ordinatis parallela curvam iterum non attingit, est ergo Tangens in puncto H. Vice versâ sit Tangens lineæ A B parallela, et ex medio M lineæ A B per H punctum contactus ducatur linea, ea erit Diameter; si enim Diameter quæ transit per M ad h non verò ad H pertingeret, ducatur per h linea Parallela lineæ A B, ea erit Tangens in h; eritque Parallela Tangenti in H, sed illud est absurdum, ergo linea M H est Diameter.

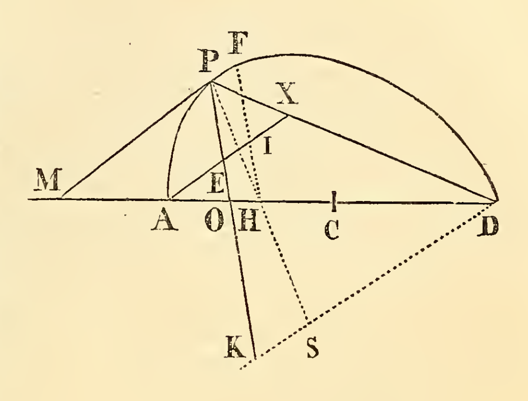
Denique cum Diameter secet Parallelas sunt (juxta Lem. III.) facta partium Parallelarum, ut facta partium quas secant in Diametro, sed partes singulæ Parallelæ a Diametro sectæ sunt utrinque æquales et ordinatæ dicuntur, ergo quadrata Ordinatarum sunt ut facta partium quas secant in Diametro.

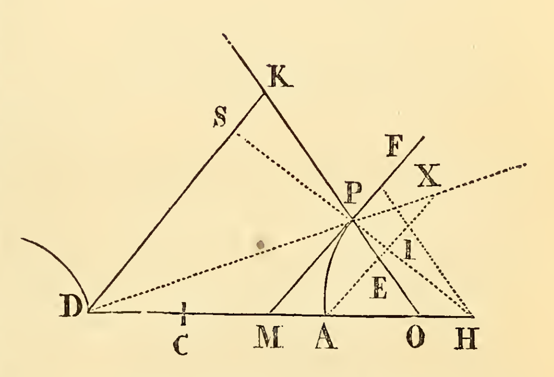
Lemma V. E quovis puncto Sectionis Conicæ ducatur ordinata ad Diametrum, et Tangens quæ illi Diametro occurrat in quodam puncto: distantiæ hujus puncti ab utroque vertice Diametri erunt inter se sicut abscissæ ab utroque vertice Diametri sumptæ (Apollon. l. 1. Prop. 34.)

E puncto P curvæ ducatur ordinata P O ad Diametrum A D, et in eâ sumatur punctum M tale ut sit $A M : D M = A O : D O$, ducaturque linea P M, illa in nullo alio puncto F curvæ occurret, hoc est, erit Tangens in P.

Demonst. Ex eo puncto supposito F ducatur ordinata F H, erit $M O : M H = P O : F H$ et $\overline{MO}^2 : \overline{MH}^2 = \overline{PO}^2 : \overline{FH}^2$, sed si F pertineat ad curvam est (per Lem. IV.) $A O \times O D : A H \times H D = \overline{PO}^2 : \overline{FH}^2$ ergo $A O \times O D : A H \times H D = \overline{MO}^2 : \overline{MH}^2$ et alternando $A O \times O D : \overline{MO}^2 = A H \times H D : \overline{MH}^2$. Ducantur autem per A et D lineæ A X, D K parallelæ P M quæ secent P O ejusque productionem in E et K, et per P et H ducatur linea quæ parallelas A X et D K in I et S, secet, similia erunt Triangula A O E, M O P, D O K ob parallelas, unde habentur hæ proportiones $A O : M O = A E : M P$.

et $O D : M O = D K : M P$ et per compositionem rationis erit
$A O \times O D : \overline{MO}^2 = A E \times D K : \overline{MP}^2$.
Pariter similia sunt Triangula A H I, M H P,





D H S, unde est: $A H : M H = A I : M P$
et $D H : M H = D S : M P$.
et per compositionem rationis erit
$A H \times D H : \overline{MH}^2 = A I \times D S : \overline{MP}^2$.
Sed si F pertinet ad curvam invenitur $A O \times O D : \overline{MO}^2 = A H \times D H : \overline{MH}^2$, foret ergo $A E \times D K : \overline{MP}^2 = A I \times D S : \overline{MP}^2$. sive $A E \times D K = A I \times D S$ et $A E : A I = D S : D K$, quod absurdum esse in datâ Hypothesi sic evincitur.

Ex P ad Diametri extremitatem D, ducatur P D, quæ lineam A E I (productam si necesse fit) secet in X; ob parallelas P M, X A est $A M : D M = P X : D P$
et $P X : D P = X E : D K$,
et ob Triangula similia A O E, D O K est $A O : D O = A E : D K$, et quia per Hypo-

thesim est A M : D M = A O : D O, erit X E : D K = A E : D K ideoque in datâ Hypothesi X E = A E et cum sit X I : X E = D S : D K ob parallelas, erit X I : A E = DS : D K erat verò ex suppositione quod F est in curva, A E : AI = D S : D K, foret ergo X I : A E = A E : A I, et $A E^2 = X I \times A I$. Sed $A E^2$ quadratum dimidii lineæ A X est semper majus Rectangulo ejus partium $X I \times A I$ (per 5. 2. Elem.), absurdum ergo est ea esse æqualia, quod tamen sequitur supposito punctum F ad curvam pertinere, ideoque, M P curvam tangit in P. Sed ad idem cujusvis curvæ punctum duas Tangentes rectas duci non posse ex naturâ curvarum liquet, ergo Tangens in P, ita occurrit Diametro ut sit A M : D M = A O : D O. Q. e. d.

Cor. 1. Si Diameter A D sit infinita, hoc est punctum D ad infinitum removeatur, D M et D O æqualia censenda sunt, cum ergo sit D M : A M = D O : A O erit A M = A O; sive distantia puncti concursus Tangentis cum Diametro, ab ejus vertice, æqualis erit abscissæ ab eodem vertice sumptæ (Ap. Lib. 1. 35.)

Cor. 2. Si Diameter A D sit terminata, ejusque medium sit C sitque P O ordinata fiatque C M : C A = CA : C O, erit P M tangens in puncto O; Etenim sumendo summam et differentiam terminorum harum rationum est,

C M + C A : C A + C O = C M — C A : C A — C O

sive in primâ ratione ponendo D C pro C A est D M : D O = A M : A O aut alternando D M : A M = D O : A O, ergo (per Lemma) M P erit Tangens in P; est ergo semidiameter media proportionalis inter abscissam a centro sumptam, et partem Diametri à centro ad concursum Tangentis comprehensam (Apol. Lib. 1. 37.)

Cor. 3. In Puncto P Sectionis Conicæ ducatur Tangens, quæ secet Diametrum in M, et ducatur ordinata P O quæ secet Diametrum in O factum partium Diametri $A O \times D O$ est æquale facto $C O \times O M$ ex partibus lineæ a Centro ad Tangentem sumptæ et per ordinatam in O sectæ. Cum enim sit C M : C A = C A : C O tollendo terminos secundæ rationis a terminis primæ erit M A : A O = C A (sive D C) : C O, unde componendo erit M O : A O = D O : C O, ideoque $A O \times D O = C O \times M O$: et (per 5. vel 6. II. Elem.) prout O est inter A et D vel ultra, erit $C O \times M O = A C^2 — C O^2$ vel $C O^2 — A C^2$, unde deducitur $M O = \frac{A C^2 — C O^2}{C O}$ vel $\frac{C O^2 — A C^2}{C O}$.

De Hyperbolâ.

Theor. I. Lineæ omnes ab Intersectione Asymptotorum in eorum Angulo ductæ et utrinque productæ, sunt Hyperbolæ utriusque Diametri, et earum portio inter utramque Hyperbolam comprehensa, dicitur Diameter transversa, et bifariam dividitur in Intersectione Asymptotorum quæ ideo centrum Hyperbolarum vocatur. Tangentes verò in utroque vertice ejusdem Diametri ductæ et inter Asymptotos comprehensæ sunt inter se Parallelæ et æquales, et bifariam dividuntur ab ea Diametro dicunturque ejus Diametri conjugatæ. (Apol. Lib. 1. Prop. 30. Lib. 2. Prop. 3. et 19.)

Demonst. Ductâ enim quomodocumque lineâ S C T in Angulo Asymptotorum Z C Y per earum intersectionem C, si crura C Z et C Y sumantur reciprocè proportionalia sinubus Angulorum adjacentium, ducaturque linea Z Y illa per lineam S C T bifariam dividetur; nam in Triangulo C Z Y est C Z : C Y = Sin. Y : Sin. Z = Sin. Y Co : Sin. Z C o (per const.) et alternando, Sin. Y : Sin. Y C o = Sin. Z : Sin. Z C o. Sed in Triangulo C o Y est

Sin. Y : Sin. Y C o = C o : Y o,

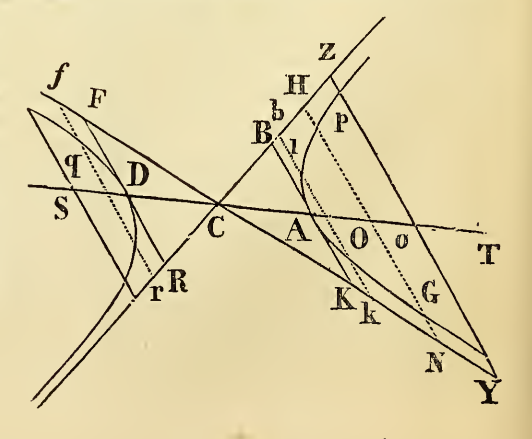
et in Triangulo C o Z est

Sin. Z: Sin. Z C o = C o : Z o,

ergo cùm duæ priores rationes sint æquales, est Co : Y o = C o : Z o, ideoque Y o = Z o.

Omnis autem linea H N lineæ Z Y parallela similiter bifariam dividetur in O per lineam S T, partes autem ejus inter Hyperbolam et Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales, per Lem. I. cùm ergo sit semper H O = O N, et H P = G N est H O — H P = N O — N G sive O P = O G. Ergo linea S T, lineas omnes lineæ Z Y parallelas, in Hyperbola contentas bifariam secat, est ergo ejus Diameter per Lemma V.

Sint verò A et D puncta in quibus linea S T occurrit Hyperbolis, per ea ducantur B A K, F D R parallelæ lineæ Z Y inter Asymptotos contentæ, ergo bisecantur in A et D, cùm verò sint parallelæ ordinatis Diametro S T sunt Tan-



gentes in verticibus A et D (per Lemma IV.) et inter se Parallelæ.

Dico præterea eas esse æquales; ducantur enim Parallelæ ipsis proximæ b i k, f q r: erit f q $\times$ q r = b i $\times$ k i (per Lem. I.) accedentibusque ordinatis ad Tangentes fit tandem f q = F D, q r = R D; b i = B A, et k i = K A est ergo F D $\times$ R D = B A $\times$ K A, sed est F D = D R et B A = K A ergo F D^2 = B A^2 et F D = B A = K A. Unde tandem cùm Triangula C A K et C D F sint similia, et sit C A : C D = K A : F D est etiam C A = C D.

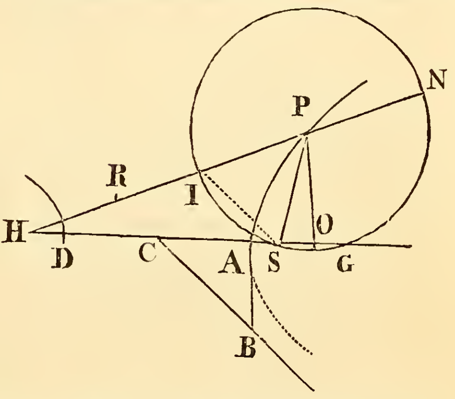
Theor. II. Tertia proportionalis Diametro transversæ et Diametro conjugatæ dicatur Latus Rectum; est Diameter transversa ad Latus Rectum ut factum Abscissarum ab utroque vertice sumptarum, ad quadratum Ordinatæ; hinc ista curva ὑπέϱβολα sive excedens dicitur, quia quadratum ordinatæ majus est facto lateris recti per abscissam a proximo vertice (Apol. Lib. I. Prop. XXI.) Coincidit verò hæc Propositio cum ista, est quadratum Diametri Transversæ ad quad. Diametri conjugatæ ut factum abscissarum ad quadratum ordinatæ.

Demonst. Sit ut prius Diameter transversa D A T, conjugata B A K et ordinata inter Asymptotas contenta H P O G N: sunt (per Lem. II.) facta partium sumptarum in lineis D O, H N a puncto Hyperbolæ ad utramque Asymptotum, sicut facta partium earundem linearum a puncto concursus O, usque ad Hyperbolam sumptarum; hoc est A C $\times$ A C : G N $\times$ G H = A O $\times$ D O : P O $\times$ G O. Sed G N $\times$ G H æqualis est quadrato semitangentis B A, sive semi-diametri conjugatæ; nam (per Lem. I.) est G N $\times$ G H = b i $\times$ k i (et per præced. Dem. b i $\times$ k i = B A^2) et est P O = G O ideo proportio superior huc redit. A C^2 : B A^2 = A O $\times$ D O : P O^2. Sit verò L latus rectum, est per ejus definitionem 2 A C : 2 B A = 2 B A : L, ergo est 2 A C : L = 4 A C^2 : 4 B A^2 = A C^2 : B A^2 ideóque 2 A C : L = A O $\times$ D O : P O^2.

Hinc deducitur quod $P\,O^2 = \dfrac{L \times A\,O \times D\,O}{2\,A\,C} = \dfrac{D\,O}{A\,D} \times L \times A\,O$; ut ergo D O est semper major quàm A D, est etiam P O^2 semper major quàm L $\times$ A O. Q. e. d.

Theor. III. Diameter illa quæ Asymptotorum Angulum bifariam dividit est perpendicularis suis ordinatis (ut liquet ex Elem.), ideóque est Axis Hyperbolæ et ejus Diameter conjugata Axis conjugatus: si a centro feratur utrinque in Axem longitudo Asymptoti a centro ad extremum Axis conjugati sumptæ, puncta notata in Axi dicuntur foci Hyperbolæ, et si a focis ad quodvis Hyperbolæ punctum ducantur lineæ, earum differentia est semper Axi transverso æqualis. Latus Rectum axis dicitur latus rectum Principale, et tota linea ordinatim Axi applicata in foco est æqualis illi lateri recto Principali, quod erit majus quadruplo distantiæ verticis a foco, si denique bifariam dividatur Angulus quem faciunt lineæ ab utroque foco ad idem curvæ punctum ductæ, linea eum angulum bisecans, erit Tangens curvæ in eo puncto. (Apol. lib. 3. 51.)

Demonst. Ducatur quævis linea ex foco H, sumatur H I = D A, et ducta I S ad alterum focum S, fiat I S P = P I S erit P I = P S, ideoque differentia linearum H P, S P erit H I = D A seu axi transverso, dico hoc posito, P ad Hyperbolam pertinere. Centro P, radio P S, describatur circulus I S G N habebitur hæc proportio, H I : H S = H G : H N sumatur dimidium harum linearum manebit proportio,



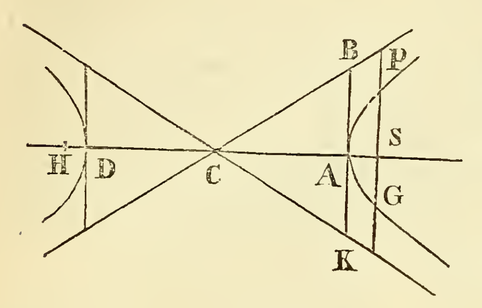
sit autem $\frac{1}{2}$ H I = H R, $\frac{1}{2}$ H S = C S, $\frac{1}{2}$ H G = $\frac{1}{2}$ H S + $\frac{1}{2}$ S G et demissa P O perpendiculari in S G est $\frac{1}{2}$ S G = S O, ergo $\frac{1}{2}$ H G = C S + S O = C O. Denique $\frac{1}{2}$ H N = $\frac{1}{2}$ H I + $\frac{1}{2}$ I N = R I + I P = R P est ergo H R : C S = C O : R P: componendo primum habetur H R : C S + H R = C O : R P + C O et prioris rationis terminos terminis secundæ jungendo habetur H R : C S + H R = C O + H R : H R + R P + C S + C O, sive quia H R = A C = D C, et C S = C H est A C : C S + A C = D O : H P + H O. At operationibus contrariis in eandem proportionem, H R : C S = C O : R P factis, hoc est, dividendo et postea prioris rationis terminos e terminis secundæ detrahendo, substitutionibus factis erit

A C : C S — A C = A O : H P — H O, multiplicatis ergo terminis utriusque proportionis erit

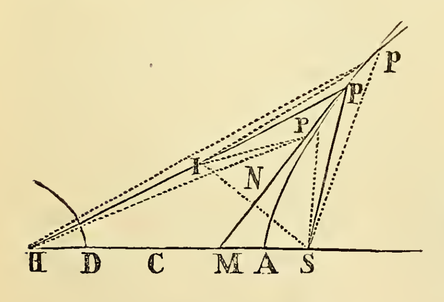
A C^2 : C S^2 — A C^2 = A O $\times$ D O : H P^2 — H O^2 sit autem perpendicularis A B erecta ab A usque ad Asymptotam C B, est C B = C S, et C S^2 — A C^2 = A B^2; est etiam H P^2 — H O^2 = P O^2, est ergo

A C^2 : A B^2 = A O $\times$ D O : P O^2, sed

est $AC^2 : AB^2 = DO \times AO$ ad quadratum ordinatæ in O, (per Theor. II.) ergo P O est ipsa illa ordinata et punctum P ad Hyperbolam pertinet.



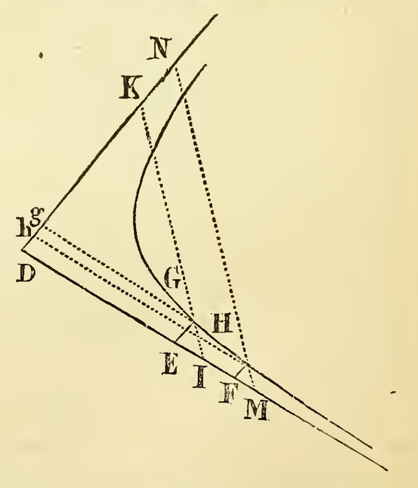
Sit autem P S ordinata in foco, erit $AC^2 : AB^2 = AS \times DS : PS^2$ est verò $DS = CS + AC$ et $AS = CS - AC$, ergo $DS \times AS = CS^2 - AC^2 = AB^2$, ergo $AC^2 : AB^2 = AB^2 : PS^2$, et $AC : AB = AB : PS$, et duplicando omnes terminos $2AC : 2AB = 2AB : 2PS$ sive P G. Sed est per naturam lateris recti $2AC : 2AB = 2AB : L$, ergo $L = PG$: et $\frac{1}{2}L = PS$, sed cum per Theor II. fit $PO^2 = \frac{DO}{AD} \times L \times AO$ erit ergo PS^2 sive $\frac{1}{4}L^2 = \frac{DS}{AD} \times L \times AS$ et $\frac{1}{4}L = \frac{DS}{AD} \times AS$, ut itaque D S est major A D, erit $\frac{1}{4}L$, major A S.



Denique. Ducantur a focis lineæ H P, S P, linea P M bifariam dividat angulum P, dico eam esse Tangentem Hyperbolæ in P; hoc est illam non occurrere Hyperbolæ in alio quovis puncto p; ex H P tollatur $HI = DA$, erit $PI = PS$ (per hoc Theor.) et ducta I S erit P M perpendicularis in medium N lineæ I S, ex alio quovis puncto p ducantur rectæ p I, p S erunt inter se æquales, ob æqualia Triangula p N I, p N S (per 4. I. Elem.) sed si p esset in Hyperbola, esset $Hp = HI + pS$ sive quia $pI = pS$ esset $Hp = HI + Ip$, quod absurdum (per 20. I. Elem.)

Theor. IV. Si sumantur pro abscissis portiones quævis Asymptoti ab Hyperbolæ centro, et Ordinatæ sint Parallelæ alteri Asymptoto, Ordinatæ erunt suis Abscissis reciprocè proportionales; et area inter Asymptotum, Hyperbolam, ordinatam Vertici axis occurrentem et ordinatam quamvis comprehensa erit abscissæ hujus ordinatæ Logarithmus.

Demonst. Sit C centrum Hyperbolæ, C E, C F abscissæ, E G, F H ordinatæ Asymptoto C N parallelæ, dico quod est $CE : CF = FH : EG$: Ductis enim per G et H lineis G g, H h parallelis Asymptoto C F, et I G K, M H N inter se parallelis trans Hyperbolam, erunt similia Triangula I G E et



M H F, G K g et H N h propter Parallelas ideóque est

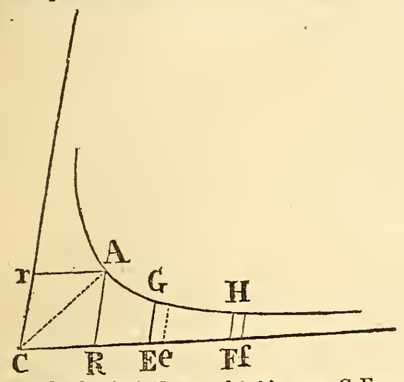
$IG : MH = GE : HF$

et $GK : HN = Gg$ (sive C E) : H h (sive F C) compositis rationibus est

$IG \times GK : MH \times HN = GE \times CE : HF \times FC$. Sed, (per Lem. I.) est $IG \times GK = MH \times HN$, ergo $GE \times CE = HF \times CF$ est ergo $CE : CF = HF : GE$, cum autem Parallelogrammata C G, C H, sint

æquiangula et ea lateribus reciprocis contineri sit demonstratum, sunt æqualia.

Dico denique areas Hyperbolæ esse abscissarum Logarithmos; ex centro C ducatur axis C A, et ex vertice A ducantur lineæ A R, A r Asymptotis Parallelæ, ob Angulum C bifariam divisum et parallelas, erit C R = A R sit A R = 1; et fingantur duæ ordinatæ quæ ita moveantur ut abscissæ unius sint semper potentia eadem n alterius; coincident quidem in R, nam quævis potentia unitatis est semper 1, sed



procedendo sit C E = x debebit esse C F = x^n, erunt ergo G E $\frac{1}{x}$ et H F $\frac{1}{x^n}$ est enim

C E : C R = A R : G E sive x : 1 = 1 : $\frac{1}{x}$

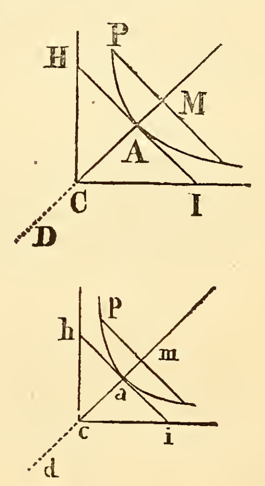
et C F : C R = A R : F H sive x^n : 1 = 1 : $\frac{1}{x^n}$,

fluxio autem lineæ C E erit d x = E e, et lineæ C F erit $n x^{n-1} dx$ = F f, ideo areæ R G fluxio erit $dx \times \frac{1}{x} = \frac{dx}{x}$ et areæ R H, $n x^{n-1} dx \times \frac{1}{x^n} = \frac{n\,dx}{x}$ sed $\frac{dx}{x} : \frac{n\,dx}{x} = 1 : n$, sunt ergo fluxiones earum arearum in Ratione constanti 1 ad n, ideoque et areæ integræ R G, R H quæ sunt earum summæ, sunt in eâdem ratione 1 ad n, sunt autem 1 et n Exponentes potentiarum abscissarum C E, C F; sunt ergo areæ sicut illi exponentes, sed Logarithmi sunt semper ut Exponentes potentiarum quantitatum quarum sunt Logarithmi, ergo illæ areæ R G, R H, sunt Logarithmi abscissarum C E, C F.

In puncto R ubi abscissa est unitas, area est o, ut Logarithmis convenit, fitque negativa retrocedendo ab R versus C, simulque cum sint abscissæ minores unitate C R fiunt fractiones.

Theor. V. Si Angulus Asymptotorum sit Rectus, Hyperbola dicitur æquilatera, æqualesque sunt Axes conjugati, ideoque latus Rectum Axi transverso est æquale: ac (per Theor. II.) facta abscissarum quadrato ordinatarum æqualia sunt, sicut in circulo: Diversæ Hyperbolæ eodem Asymptotorum angulo descriptæ sunt similes: si verò idem sit Hyperbolarum axis, sed diversus Angulus, erunt ordinatæ ad idem axeos punctum sicut Radices quadratæ Laterum Rectorum Principalium, et in eâ erunt ratione portiones earum Hyperbolarum per Ordinatas terminatarum quarum æquales sunt abscissæ.

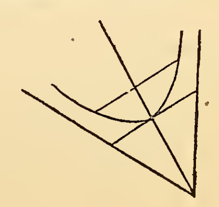
Demonst. Axis transversus est perpendicularis conjugato, dividitque bifariam angulum Asymptotorum; si ergo is angulus sit 90°. ejusque dimidium 45°. Triangulum C A H erit Isosceles et C A = A H, cætera ex his facilè deducuntur.



Si in duabis Hyperbolis anguli Asymptotorum sint æquales, ut bifariam dividuntur per axem, similia erunt Triangula C A H, c a h: ideoque C A^2 : A H^2 = c a^2 : a h^2 sumantur abscissæ A M, a m in ratione A D ad a d erit etiam D M : d m in eadem ratione; cum sit ergo A M : a m = A D : a d

et D M : d m = A D : a d.

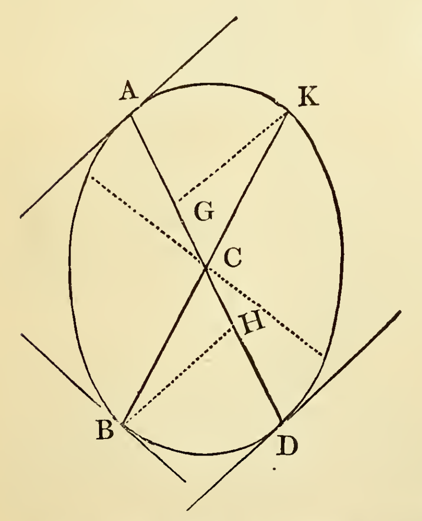
est A M $\times$ D M : a m $\times$ d m = A D^2 : a d^2 sed est C A^2 : A H^2 = c a^2 : a h^2 = A M $\times$ D M : M P^2 = a m $\times$ d m : m p^2, et altern. A M $\times$ D M : a m $\times$ d m = M P^2 : m p^2 est ergo A D^2 : a d^2 = M P^2 : m p^2 unde est M P : m p = A D : a d, omnes ergo ordinatæ ac omnia puncta Hyperbolæ determinantur per rationem A D ad a d.



Sint denique in duabus Hyperbolis æquales axes transversi, sed diversi Asymptotorum Anguli; diversa erunt Latera Recta, sumantur ergo æquales abscissæ, et quoniam Axis est ad latus Rectum sicut factum partium abscissæ ad quadratum ordinatæ, Axis verò et factum partium abscissæ æqualia sunt utrinque, eadem erit utrinque ratio Lateris recti principalis ad quadratum ordinatæ, erunt ergo ordinatæ quæ ad æquales abscissas pertinebunt, ut Radices quadratæ Laterum rectorum principalium, quæ ratio est constans, sit ergo utraque abscissa in portiones infinitè parvas et utrinque æquales divisa singula Parallelogrammata quam minima super æquales abscissæ portiones formata erunt in eadem ratione ac ordinatæ, ergo areæ Hyperbolarum, quæ sunt eorum Parallelogrammorum summæ, in eâdem erunt ratione, nempe ut Radices quadratæ laterum Principalium.

De Ellipsi.

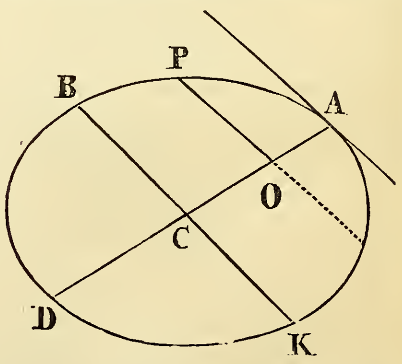
Theor. I. Omnes Ellipsis Diametri sese bifariam secant in eodem puncto quod dicitur centrum Ellipsis, eaque Diametri ordinata quæ per centrum transit est ipsa Diameter, quæ respectu Diametri, cujus est ordinata, conjugata dicitur: (Apol. l. 1. Prop. 30.)



Demonst. Si per medium C, Diametri Ellipsis A D, ducatur linea quævis B K, et per puncta B et K ducantur B H, K G ordinatæ Diametro A B, erit per Lemma V. $AG \times GD : AH \times HD = GK^2 : BH^2$ et propter triangula similia G K C, C B H est $GK : BH = CG : CH = BC : CK$, est ergo $AG \times GD : AH \times HD = CG^2 : CH^2$, est autem (per 5. II. Elem.) $AG \times GD = AC^2 - CG^2$ et $AH \times HD = AC^2 - CH^2$, est ergo $AC^2 - CG^2 : AC^2 - CH^2 = CG^2 : CH^2$. et jungendo terminos secundæ rationis terminis prioris, est $AC^2 : AC^2 = CG^2 : CH^2$, ideo $CG = CH$, ac per consequens $BC = CK$. Omnes ergo lineæ per punctum C transeuntes illic bifariam secantur. Sunt autem singulæ Diametri Ellipsis, nam in vertice B ducatur Tangens, et per Centrum C linea illi parallela, ea dividetur bifariam, cum itaque B K bisecet lineam Parallelam Tangenti per ejus verticem ductæ, est Diameter, per Lemma V.

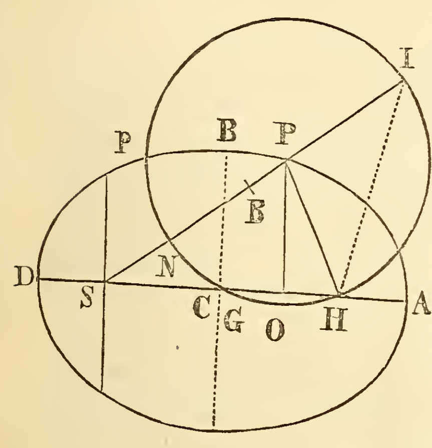
Denique solæ lineæ per Centrum transeuntes sunt Diametri; fingatur enim Diameter per centrum non transiens, ducatur Tangens in ejus Vertice, et illi Tangenti ducatur Parallela per Centrum C, bifariam dividetur in centro, ergo bifariam non dividetur a Diametro suppositâ quæ per centrum non transit, ergo male supponitur eam esse Diametrum: Omnes ergo Diametri Ellipsis per centrum transeunt, illicque bisecantur.

Theor. II. Tertia proportionalis Diametro transversæ ejusque conjugatæ dicatur Latus Rectum, erit Diameter transversa ad Latus Rectum, vel quod idem est quadratum diametri transversæ ad quadratum ejus conjugatæ, ut factum abscissarum sumptarum ab utroque Vertice Diametri ad quadratum ordinatæ, inde quadratum Ordinatæ semper minus deprehenditur facto Lateris recti per utramlibet abscissam, undè hæc curva dicitur Ellipsis; (Apol. lib. 1. Prop. 21.)



Demonst. Sit Ellipsis Diameter A C D, ejus conjugata B C K est per Lemma IV. $AC \times CD$ sive $AC^2 : AO \times DO = BC^2 : PO^2$ et alternando $AC^2 : BC^2 = AO \times DO : PO^2$, sed est $2AC : 2CB = 2CB : L$, ergo $4AC^2 : 4CB^2 = AC^2 : CB^2 = 2AC : L = AO \times DO : PO^2$, ergo est $PO^2 = \frac{L \times AO \times DO}{2AC} = \frac{DO}{2AC} \times L \times AO$ sed ut D O est semper minus quam 2 A C, est PO^2 semper minus facto Lateris recti per alterutram abscissam.

Theor. III. Sit A D axis major, a centro feratur utrinque C H, C S, æquales et tales ut quadratum CH^2 sive CS^2 cum quadrato semiaxis conjugati CB^2 sit æquale quadrato semiaxis majoris CA^2, dicanturque puncta H et S, Foci, summa linearum ab utroque foco ad quodvis punctum Ellipseos ductarum erit semper æqualis Axi majori, (Apol. Lib. III. Prop. LII.); et tota linea ordinatim applicata in foco erit æqualis Lateri Recto Principali, quod ergo minus erit quadruplo distantiæ foci a proximo Vertice.



Demonst. Ducatur quævis linea ex foco S, in eâ sumatur S I = D A et ducta I H ad alterum focum, fiat I H P = I erit I P = P H, ideoque S P + P H = S P + P I = S I = D A sive axi majori: quo posito dico punctum P ad Ellipsim pertinere. Centro P radio P H describatur circulus I H G N habebitur hæc Proportio S I : S H = S G : S N, sumendo dimidium harum linearum manebit proportio; sit autem $\frac{1}{2}$ S I = S R; $\frac{1}{2}$ S H = C H; $\frac{1}{2}$ S G = $\frac{1}{2}$ S H — $\frac{1}{2}$ G H et demissa P O perpendiculari in G H est $\frac{1}{2}$ G H = H O ergo $\frac{1}{2}$ S G = C H — H O = C O. Denique $\frac{1}{2}$ S N = $\frac{1}{2}$ S I — $\frac{1}{2}$ N I = R I — P I = R P est ergo

S R : C H = C O : R P et componendo habetur S R : S R + C H = C O : C O + R P, tum prioris rationis terminos jungendo terminis secundæ, est: S R : S R + C H = C O + S R : C O + R P + S R + C H sive quia S R = A C = D C et C H = C S, est

A C : A C + C H = D O : S P + S O.

At operationibus contrariis factis in eamdem proportionem S R : C H = C O : R P, hoc est, dividendo et postea prioris rationis terminos e terminis secundæ detrahendo substitutionibusque factis erit

A C : A C — C H = A O : S P — S O

multiplicatis autem terminis utriusque proportionis est

$AC^2 : AC^2 - CH^2$ (sive BC^2) = A O × D O : $SP^2 - SO^2$,

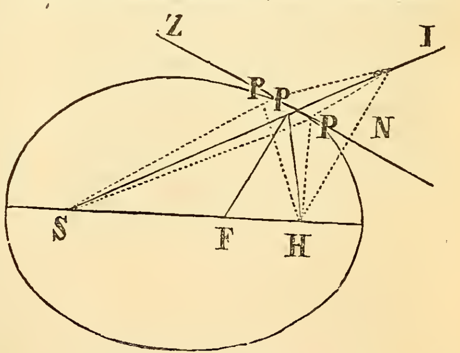
est autem (per 47. I. Elem.) $SP^2 - SO^2 = OP^2$, sed est $AC^2 : BC^2$ = A O × D O ad quadratum ordinatæ in O, est ergo P O ipsa illa ordinata, et punctum P ad Ellipsim pertinet.

Sit autem S p ordinata in foco erit $AC^2 : BC^2$ = A S × S D : Sp^2, est autem (per 5. II. Elem.) A S × S D = $AC^2 - CS^2 = BC^2$, est ergo $AC^2 : BC^2 = BC^2 : Sp^2$ sive, A C : B C = B C : S p, et duplicando omnes terminos: 2 A C : 2 B C = 2 B C : 2 S p, sed est 2 A C : 2 B C = 2 B C : L ergo L = 2 S p, et $\frac{1}{2}$ L = S p.

Est autem (per Theorema II.) Sp^2, sive $\frac{1}{4}L^2$ $= \frac{AS}{2AC} \times L \times DS$ et $\frac{1}{4}L = \frac{AS}{2AC} \times DS$ ut ergo est A S minor 2 A C erit $\frac{1}{4}$ L minor D S, hoc est latus rectum minus est quadruplo distantiæ foci a proximo Vertice.

Theor. IV. Tangens Ellipsis bifariam dividit Angulum qui fit inter unam e lineis a foco ductam et productionem alterius: et lineæ ab utroque foco ductæ, æquales faciunt angulos cum Tangente, et si bifariam dividatur angulus quem faciunt lineæ a foco ductæ, linea bisecans erit curvæ perpendicularis. (Apol. 48. b. 3. 48.)

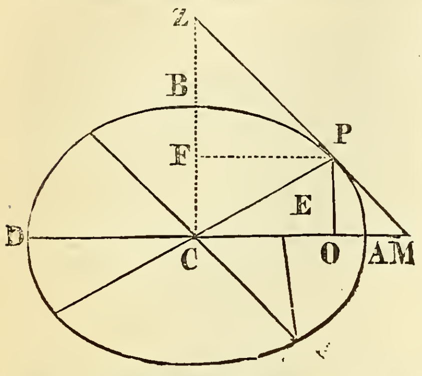
Demonst. Ducantur a focis lineæ S P, H P productaque S P in I, dividatur bifariam angulus S P H, dico lineam Z P N non occurrere Ellipsi in ullo alio puncto p, sit P I = P H et



ductâ I H, erit P N perpendicularis in ejus medium, ex alio quovis puncto p, ducantur p I, p H, quæ erunt æquales ob æqualia Triangula p N I, p N H (per 4. I. Elem.) sed si p foret in Ellipsi, esset S p + p H. sive S p + p I = S I quod absurdum (per 20. I. Elem.)

Est autem Z P S = I P N (per 15. I. Elem.) est I P N = N P H, per const. ergo Z P S = N P H. Si ergo F P S = F P H est Z P S + F P S = N P H + F P H, sunt

autem omnes simul æquales duobus rectis ergo $ZPS + FPS$ est Recto æqualis et PF angulum SPH bisecans est in Tangentem, ideoque in curvam perpendicularis.



Theor. V. Sit Diameter quævis AD, et ducantur utlibet duæ aliæ Diametri inter se conjugatæ CP, CK, ex utriusque vertice ducantur ordinatæ KE, PO in priorem AD, factum abscissarum a curvâ sumptarum, unius vertici respondentium erit æquale quadrato abscissæ a centro sumptæ respondenti Vertici alterius Diametri: unde quadrata ambarum abscissarum a Centro sumptarum erunt simul æqualia quadrato $\frac{1}{2}$ Diametri in quam sumuntur, et quadrata ordinatarum erunt æqualia quadrato ejus $\frac{1}{2}$ Diametri conjugatæ. Hinc deducitur summam quadratorum duarum Diametrorum conjugatarum quarumvis esse semper eamdem: eas verò Diametros conjugatas esse inter se æquales quarum vertices determinantur per ordinatam erectam in Axem majorem cujus abscissa a centro sumpta sit æqualis radici dimidii quadrati semiaxis majoris.

Demonst. Sint CP CK Diametri conjugatæ, PO, KE ordinatæ ex earum verticibus in Diametrum AD ductæ; PM Tangens Parallela Diametro CK: Triangula POM, KEC erunt similia et $PO : KE = MO : CE$, vel $PO^2 : KE^2 = MO^2 : CE^2$ sive quia (per Cor. 3. Lem. V.) est $MO = \frac{CA^2 - CO^2}{CO}$ est $PO^2 : KE^2 = \overline{\frac{CA^2 - CO^2}{CO^2}}^2 : CE^2$, sed per Lemma IV. est $PO^2 : KE^2 = AO \times DO : AE \times DE$ sive (per 5. 2. Elem.) $= CA^2 - CO^2 : CA^2 - CE^2$ est ergo, $CA^2 - CO^2 : CA^2 - CE^2 = \overline{\frac{CA^2 - CO^2}{CO^2}}^2 : CE^2$, dividendo primum et tertium terminum per $\frac{CA^2 - CO^2}{CO^2}$ est $CO^2 : CA^2 - CE^2 = CA^2 - CO^2 : CE^2$ et addendo terminos secundæ rationis terminis primæ est $CA^2 : CA^2 = CA^2 - CO^2 : CE^2$ ergo $CE^2 = CA^2 - CO^2 = AO \times DO$: pari modo addendo terminos primæ rationis terminis secundæ erit $CO^2 : CA^2 - CE^2 = CA^2 : CA^2$: ergo $CO^2 = CA^2 - CE^2 = AE \times DE$. Quod erat primum.

Junctis ergo quadratis abscissarum CO^2, CE^2 summa est æqualis CA^2; nam est $CE^2 = CA^2 - CO^2$ ergo $CE^2 + CO^2 = CA^2 - CO^2 + CO^2 = CA^2$.

Sit BC diameter conjugata diametri AC, est $PO^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times \overline{CA^2 - CO^2}$ et $KE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times \overline{AC^2 - CE^2} = \frac{BC^2}{AC^2} \times (AC^2 - AC^2 + CO^2) = \frac{BC^2}{AC^2} CO^2$, ergo $PO^2 + KE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times \overline{AC^2 - CO^2 + CO^2} = BC^2$.

Si autem Diameter AC axis, ordinatæ erunt perpendiculares, $PO^2 + CO^2 = PC^2$, et $CE^2 + KE^2 = CK^2$ (per 47. I. El.) ergo $PO^2 + CO^2 + CE^2 + KE^2 = PC^2 + CK^2$, sed $PO^2 + KE^2 = BC^2$, $CO^2 + CE^2 = AC^2$, ergo $PC^2 + CK^2 = AC^2 + BC^2$. Quarumvis Diametrorum conjugatarum quadrata æqualem summam facient ac quadrata axium.

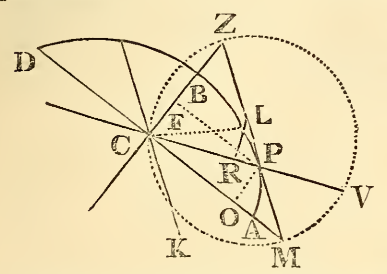
Denique si punctum O in axi ita sit sumptum ut sit $\frac{1}{2} CA^2 = CO^2$ et sit ducta in O ejus ordinata et per ejus verticem P ducatur Diameter ejusque conjugata, quadratum abscissæ quæ respondebit vertici Diametri conjugatæ erit æquale $AO \times DO$ sive $AC^2 - CO^2$ sed $CO^2 = \frac{1}{2} CA^2$ per hypothesim, ergo hoc quadratum erit etiam æquale $\frac{1}{2} AC^2$, eadem ergo abscissa ac proinde æquales ordinatæ verticibus utriusque Diametri respondebunt, æquales ergo erunt illæ Diametri conjugatæ siquidem sunt Hypothenusæ æqualium abscissarum et ordinatarum.

Cor. 1. Si a vertice Diametri PC, producatur Tangens terminata utrinque in M et Z, ad Diametros conjugatas CA, CB productas, erit semi-Diameter CK priori conjugata media proportionalis inter partes Tangentis PM, PZ: ductis enim ordinatis PF, PO, ob similia Triangula CKE, ZFP, POM, est $CK : CE = ZP : FP$ (sive CO) et $CK : CE = PM : MO$ unde compositis rationibus est $CK^2 : CE^2 = ZP \times PM : CO \times MO$, sed $CO \times MO = AO \times DO$ (per Cor. 3. Lem. V.) et $AO \times DO = CE^2$ per præsens Theorema, ergo $CK^2 : CE^2 = ZP \times PM : CE^2$ et $CK^2 = ZP \times PM$ sive $ZP : CK = CK : PM$. Q. e. d.

Et conversa per se liquet, nempe quod si duæ Diametri occurrant Tangenti ductæ in Vertice alterius Diametri, ita ut hujus $\frac{1}{2}$ Diameter conjugata sit media proportionalis inter partes tangentis, duæ illæ priores Diametri erunt inter se conjugatæ.

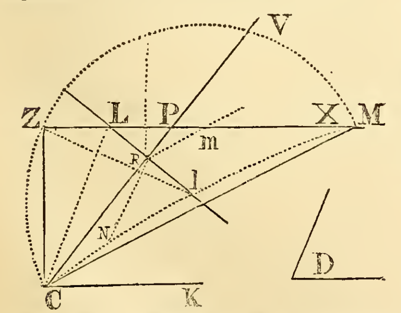
Problema. Datis tâm positione quàm magnitudine Ellipseos alicujus non descriptæ duabus

Diametris conjugatis invenire positionem et magnitudinem duarum aliarum Diametrorum conjugatarum, quæ faciant inter se angulum quemvis datum.



Primus Casus. Angulus qui datur sit rectus, h. e. Diametri quæsitæ sint Axes conjugati. Sint verò semi-Diametri datæ C P, C K, per verticem P unius ducatur linea alteri C K parallela, quæ ideo erit Ellipsis Tangens in eo puncto. (per Lem. IV.) producatur C P in V ita ut sit C P : C K = C K : P V, in medium R lineæ C V erigatur perpendicularis tangentem secans in L, et ex L velut Centro radio L C qui æqualis est L V; describatur circulus transiens per puncta C et V, et Tangentem secans in punctis Z et M, dico lineas Z C, M C, esse in axium positione.

Demonst. Angulus enim Z C M est rectus quia est in semi-circulo per constructionem, præterea quia chordæ C V, Z M sese secant in P, est C P $\times$ P V = Z P $\times$ P M (per 35. 3. Elem.) sed C P $\times$ P V = C K^2 per constructionem, ergo C K^2 = Z P $\times$ P M ideoque, per Corollarii præcedentis conversam, lineæ C Z, C M, cadunt secundum Diametros conjugatas.

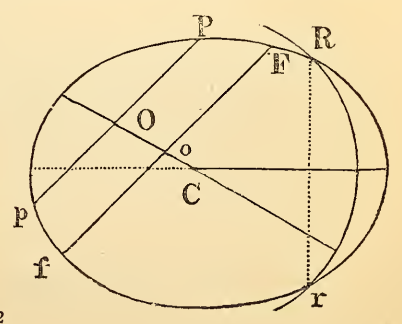


Sec. Casus. Si angulus datus D rectus non sit, centrum circuli describendi non erit in L sed in alio puncto l ejusdem lineæ R L in medio R lineæ C V perpendicularis: sic verò invenitur: ducatur ex R perpendicularis in Tangentem fiatque cum eâ angulus æqualis dato, et linea eum formans secet Tangentem in m, ducatur L C, et per R linea R N ipsi Parallela, ex C ut centro, radioque æquali R m secetur R N in N, ductaque C N quæ secet L R in l erit l centrum circuli ex quo si radio l C circulus describatur is transibit per C et etiam per V (per const. et 1. 3. Elem.) secabit verò Tangentem in punctis Z et M, e quibus ductis C Z, C M habetur Diametrorum quæsitarum positio.

Demonst. Evidens est, sicut in priore hujus demonstrationis parte, lineas C Z, C M, cadere secundum Diametros conjugatas, quæstio est utrum faciant in C angulum datum, ex centro l ducatur linea parallela lineæ R m, dico illam occurrere Tangenti in puncto M, hoc est illam fore æqualem radio l M sive l C, occurrat enim Tangenti in X erit ob Parallelas L R : R m = L l : l X; sed propter Parallelas R N et L C triangula N l R, C l L, sunt similia, estque l R : l N = L l : l C, et sumptis vel differentiis vel summis terminorum utriusque rationis est L R : C N = L l, l C est verò per constructionem C N = R m ergo L R : R m = L l : l C ergo L l : l X = L l : L C, scilicet est l X = l C, hoc est X cadit in M; radius ergo l M cum sit Parallelus lineæ R m, faciet cum perpendiculari quæ in lineam Z M duceretur eumdem angulum quem format linea R m cum perpendiculari in eamdem lineam ductâ angulum nempe quæsitum: et angulus Z l M ejus erit duplum; sed angulus Z C M est anguli Z l M dimidium, ergo est æqualis angulo quæsito.

Determinatur autem Diametrorum magnitudo, ductis ex P in utramq. Diametrum ordinatis P O, P F lineis C Z, C M, Parallelis; $\frac{1}{2}$ Diametri enim erunt mediæ proportionales inter abscissas a centro, et lineas a centro ad Tangentem sumptas, hoc est, erit C O : C A = C A : C M, et C F : C B = C B : C Z; undè cum cognoscantur C O et C M, C F et C Z determinantur C A et C B.

Cor. I. Datis axibus, foci inveniuntur si ex vertice axis minoris, ut centro, cum radio æquali semi axi majori ipse major axis secetur, et datis focis et axi majori puncta quotlibet ad Ellipsim pertinentia inveniri possunt, si ab uno foco ducatur ut libet linea æqualis axi majori et ab ejus extremitate ducatur linea ad alterum focum, fiat in hoc foco super hanc lineam angulus æqualis angulo, qui sit inter lineas a focis ductas, secabitur prima linea in puncto ad Ellipsim pertinente.

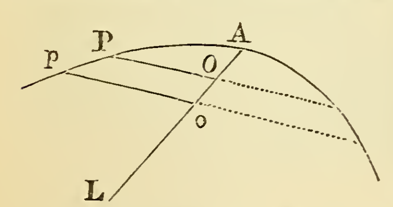


Cor. II. Si Ellipsis sit data, sic inveniuntur centrum et Axes: ducantur ut lubet duæ Parallelæ P p, F f, per earum medium O, o, ducatur linea, erit Diameter, ejus medium C erit Centrum ex quo describatur circulus qui secet curvam in duobus punctis R, r ducatur per centrum linea perpendicularis in lineam R r quæ eam bifariam dividet (per 3. 3. Elem.) erit ergo Axis, alter axis habetur erigendo lineam huic perpendicularem in Centro ad curvam usque.

IX. *De Parabola.*

Theor. I. Omnes Diametri Parabolæ sunt infinitæ et inter se Parallelæ: quadrata ordinatarum sunt inter se ut Abscissæ Diametrorum, et cum tertia proportionalis abscissæ et ordinatæ dicatur Latus Rectum, factum lateris Recti per abscissam est æquale quadrato ordinatæ, hincque derivatur nomen hujus curvæ. (Apol. Lib. 1. Prop. 20.)

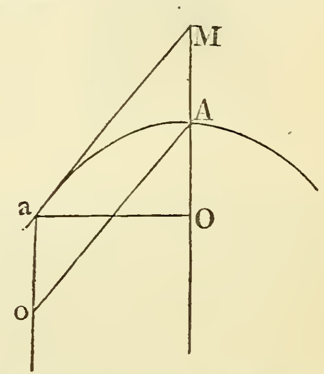
Dem. Ducatur in basi coni chorda parallela plano Parabolæ, et infinitè parva, per verticem coni et eam chordam ducatur Planum et aliud illi parallelum per unam e lineis Parabolæ in hoc plano formabitur Hyperbola, sed quam proxima Parabolæ, et cujus centrum tanto magis a Vertice coni removetur quo minor est chorda per quam transit planum per Verticem coni ductum, evanescat hæc chorda, centrum ejus Hyperbolæ in infinitum abibit, et ut Planum verticale fiet tangens cono, coincidet hæc Hyperbola cum Parabolâ, sed omnes ejus Diametri a puncto infinitè remoto divergentes erunt Parallelæ et infinitæ, tales ergo etiam erunt Diametri Parabolæ. Præterea ex casu 2do. Lem. III. constat, quòd si secans infinita plures lineas Parallelas in Sectione Conicâ secet, abscissæ erunt inter se ut facta partium linearum Parallelarum, sed hæ bifariam dividuntur a Diametro, sunt ergo Diametri abscissæ sicut quadrata ordinatarum.



Fiat A O : O P = O P : L erit $OP^2 = AO \times L$; esto verò quævis alia abscissa A o et ordinata o p erit $AO : Ao = OP^2 : op^2$, et multiplicando primam rationem per L erit $L \times AO : L \times Ao = OP^2 : op^2$, sed per Hypothesim $AO \times L = OP^2$ ergo etiam $L \times Ao = op^2$ hoc est factum Lateris recti per quamvis abscissam æquale est quadrato ordinatæ ipsi respondenti.

Cor. I. Si in Diametrum productam sumatur a Vertice longitudo æqualis lateri Recto, et ab ejus extremo ad extremum abscissæ describatur semi-circulus, et in vertice diametri Parabolæ erigatur Perpendicularis ad circulum usque, erit hæc perpendicularis æqualis ordinatæ ad eam abscissam pertinenti.

Cor. II. Si in Diametro quâvis sumatur a vertice quarta pars ejus Lateris recti, ordinatim applicata illi puncto erit æqualis lateri recto. Sit enim $Ao = \frac{1}{4} L$ est $\frac{1}{4} LL = op^2$: ergo $LL = 4\,op^2$ et $L = 2\,op$. sive toti ordinatim applicatæ in p

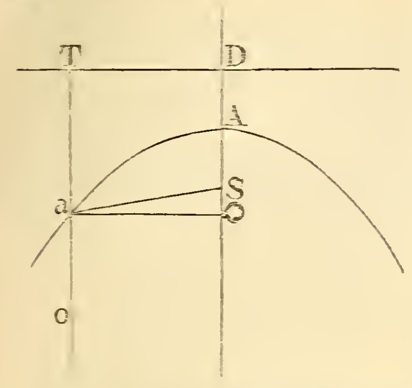


Cor. III. Latus Rectum Diametri cujusvis est æquale Lateri recto axis et quadruplo abscissæ axis determinatæ per ordinatam e vertice Diametri in axem ductam. Ducatur ex vertice a Diametri tangens a M quæ axi occurrat in M et a O ordinata axi, per Corollarium Lemmatis V. distantia verticis axis A ad M est æqualis distantiæ ejusdem verticis ab O, ergo M O = 2 A O, et (per 47. I. Elem.) est $aM^2 = MO^2$ (sive $4\,AO^2$) $+ aO^2$ (sive $L \times AO$) $= \overline{4\,AO + L} \times AO$; a vertice A axis ducatur ordinata A o ad Diametrum propositam, evidens est ob parallelas a o, A O, et Tangentem ordinatæ parallelam, esse a o = A M sive A O et o A = a M; sit verò l latus Rectum Diametri a o, erit oA^2, sive $aM^2 = l \times ao = \overline{l \times AO}$ sed erat $aM^2 = \overline{4\,AO + L} \times AO$ ergo $l \times AO = \overline{4\,AO + L} \times AO$, unde $l = L + 4\,AO$. Q. e. d.

Theor. II. Si in axe sumatur a vertice quarta pars ejus lateris recti, id punctum vocatur Parabolæ focus, si verò ultrà verticem eadem feratur longitudo et per punctum in quo cadit ducatur linea axi perpendicularis, dicetur Directrix Parabolæ: Si autem producatur quævis Diameter ad Directricem, portio ejus inter verticem et Directricem comprehensa est quarta pars lateris Recti ejus Diametri, et est æqualis distantiæ ejus verticis a foco.

Demonst. Ut enim Diameter et axis sunt paralleli, ducta perpendiculari a T a vertice diametri ad directricem erit a T = O D = D A + A O, est verò D A, quarta pars lateris recti principalis et A O abscissa axis quæ respondet ordinatæ a O a vertice Diametri ductæ, est verò (per Corol. 2. Theor. præced.) latus rectum diametri æquale quadruplo lateris recti et quadruplo A O, hoc est = 4 D A + 4 A O

ergo a T = D A + A O est quarta pars lateris Recti Diametri a o.

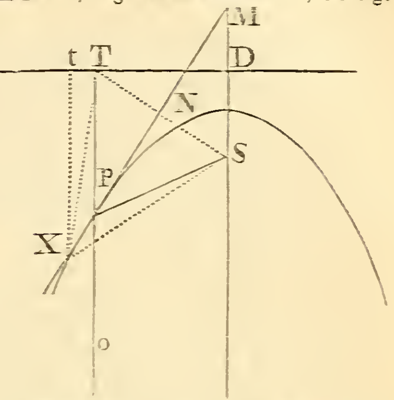


Secundè, E foco Parabolæ S, ad verticem Diametri ducatur S a, sitque ducta a O ordinata axi, (per 47. 1. Elem.) est $S a^2 = S O^2 + a O^2$ et $a O^2 = 4 D A \times A O$: ergo $S a^2 = S O^2 + 4 D A \times A O$, sed est $D O^2$ (per 8. 2. El.) $= S O^2 + 4 D A \times A O$, ergo $D O^2 = S a^2$ et $S a = D O = a T$.

Theor. III. Si a puncto Parabolæ ducatur perpendicularis ad Directricem, et linea ad focum, bifariamque dividatur Angulus quem faciunt, linea eum dividens erit Tangens in eo puncto, quæ si producatur donec secet axem, portio axis a foco ad occursum Tangentis contenta erit æqualis lineæ a foco ad punctum Parabolæ ductæ: Angulus Diametri cum Tangente erit æqualis angulo lineæ a foco ductæ cum eâ Tangente, ideo ea quæ secundum Diametros ad Parabolam adpellunt ad focum reflectentur. et Angulus Diametri cum lineâ a foco ductâ bifariam dividitur per perpendicularem ad curvam: si ea perpendicularis secet axem, pars axis inter eam et ordinatam axi ex Vertice Diametri ductam, est æqualis dimidio lateris recti principalis, et pars axis inter eam et Tangentem comprehensa, est dimidium lateris Recti Diametri, ipsa verò perpendicularis est media proportionalis inter ea semilatera recta.

Demonst. Sit T D directrix, a puncto P linea P T perpendicularis in Directricem ducatur, ducatur etiam ad focum linea P S et denique ducatur linea P N bifariam dividens angulum S P T; illa linea perpendiculariter et bifariam dividet lineam S T a foco ad punctum T ductam. Ex quovis puncto X lineæ P N ducantur lineæ X T, X S, erunt inter se æquales (per 4. 1. Elem.), erit verò X T directrici obliqua ideoque perpendicularis ab X in Directricem demissa erit brevior quam X T ac per consequens brevior quam X S, ergo id punctum X vicinius erit Directrici quam foco, erit ergo extra Parabolam, ideoque linea P N erit Tangens, cum in unico puncto P Parabolæ occurrat.

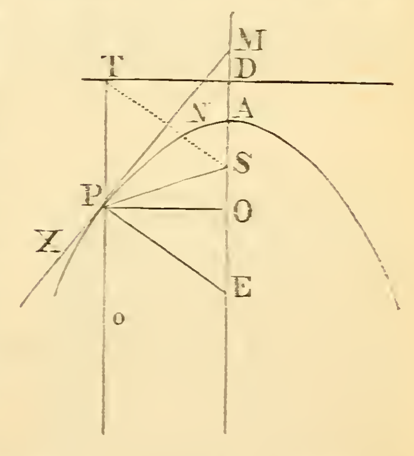
Anguli autem T P N, N M S sunt æquales ob Parallelas T P, M S, et per const. T P N = N P S, ergo N M S = N P S, est ergo



Triangulum M S P Isosceles, et M S = S P

Anguli autem X P o, T P N, per verticem sunt oppositi, ergo sunt æquales, sed T P N = N P S per constr. ergo X P o = N P S.

Dividatur bifariam angulus S P o per lineam P E ita ut sit o P E = E P S; erit X P o + o P E = N P S + E P S hi quatuor valent



duos rectos, ergo X P o + o P E valent rectum et est P E perpendicularis in Tangentem.

Est ergo in Triangulo Rectangulo M P E (ductâ perpendiculari P O) M O : P O = P O : O E $= \frac{P O^2}{M O}$, est verò $P O^2 = L \times A O$ et $M O = 2 A O$ ergo $O E = \frac{L \times A O}{2 A O} = \frac{L}{2}$.

Ergo etiam E M est æqualis dimidio lateris Recti Diametri P o, est enim ejus Latus Rectum æquale lateri Recto principali et quadruplo

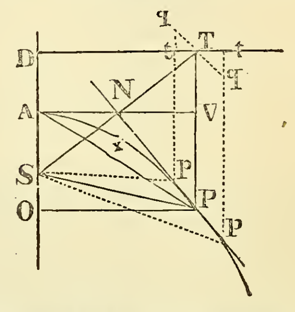
abscissæ A O, est verò O E dimidium lateris Recti Principalis et $M\,O = 2\,A\,O$, sive dimidium quadrupli A O, ergo $E\,M = \frac{1}{2}\,l$.

Est etiam ob Triangulum Rectangulum M P E, $E\,M : P\,E = P\,E : O\,E$; ergo est P E hoc est perpendicularis in curvam, media proportionalis inter semilatus rectum Diametri et semilatus rectum Axis.

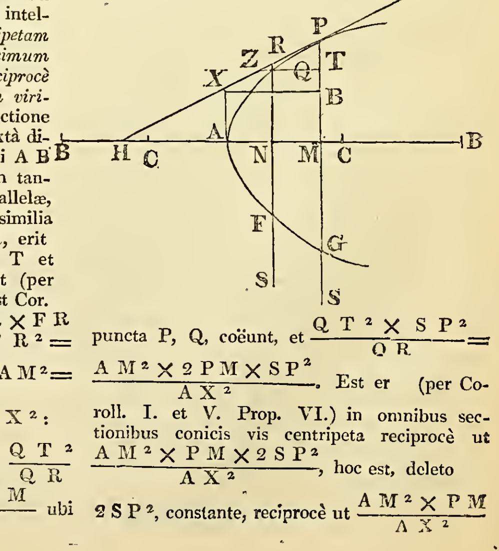
Theor. IV. Superficies Parabolica inter curvam, abscissam axis et ejus ordinatam comprehensa, est ad factum abscissæ per Ordinatam ut duo ad tres, segmentum verò Parabolicum inter curvam et chordam a Vertice ductam terminatum, est ejusdem facti sexta pars.

Demonst. Ex foco S ducatur S P ad quodvis Parabolæ punctum P et ex P ducatur P T ad directricem perpendicularis, ducatur Tangens in puncto P, et in ea sumantur puncta p, p puncto P proxima et utrinque a puncto P æqualiter dissita, ab iis ducantur ad focum lineæ S p S p, et p q, p q, lineæ P T parallelæ et æquales; ducaturque q T q, habebitur Parallelogrammum p q q p, cujus basis p p est eadem cum basi Trianguli S p p; si verò ducatur S T, quam Tangens P N, bifariam et perpendiculariter dividit in N, erit S N altitudo Trianguli S p p, et $N\,T = S\,N$, altitudo Parallelogrammi p q q p, cum ergo bases et altitudines sint æquales, (per 41. 1. Elem.) erit Parallelogramma p q q p duplum Trianguli S p p, sed est p q q p æquale Trapezio t p p t, cum ergo tota superficies D A X P T talibus Trapeziis t p p t constet, et superficies A S P X, talibus Triangulis S p p, erit superficies D A X P T dupla superficiei A S P X.

Si verò ducatur A V Tangens in A et chorda A P, erit Parallelogrammum D A V T, duplum Trianguli A S P, bases enim A D, A S sunt æquales, altitudo verò Trianguli est P O, parallelogrammi A V et $P\,O = A\,V$: si ergo D A V T ex D A X P T detrahatur, et A S P ex A S P X, residuum primæ figuræ A X P V erit duplum segmenti A P X in altera residui, hæc verò simul sumpta faciunt Triangulum A V P, vel



A O P, quod est ergo triplum segmenti A P X, et tota figura A O P V ejus sextuplum, et area Parabolica A O P X, ejus quadruplum, est ergo area Parabolica ad Parallelogrammum A O P V ut 4. ad 6. sive ut 2. ad 3. Q. e. d.



HIS verò circa Conicas Sectiones ad mentem revocatis, sine quibus sequentia intelligi nequeunt, probabitur, *vim centripetam quâ corpus tendens ad punctum remotissimum Sectionem Conicam describit, esse reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium tendentis;* Corpus P moveatur in Sectione conicâ P A F, et vis centripeta agat juxtà directionem parallelarum P S, R S, axi A B applicatarum. Linea P H, Sectionem tangat in P, sintque Z T, X B, axi parallelæ, et X A ipsa Tangens in A, et ob similia triangula X P B, Z T P, Z Q R, erit $P\,X : B\,X$ (seu A M) $= P\,R : Q\,T$ et $P\,X^2 : A\,M^2 = P\,R^2 : Q\,T^2$, et (per Prop. 16. Lib. 3. Conic. Appoll. quæ est Cor. 2. Lem. III. de Conicis) $P\,R^2 : Q\,R \times F\,R = P\,X^2 : A\,X^2$, adeòque $P\,R^2 = \frac{P\,X^2 \times Q\,R \times F\,R}{A\,X^2}$, ergò $P\,X^2 : A\,M^2 = \frac{P\,X^2 \times Q\,R \times F\,R}{A\,X^2} : Q\,T^2$; et $A\,X^2 : A\,M^2 = Q\,R \times F\,R : Q\,T^2$, undè $\frac{Q\,T^2}{Q\,R} = \frac{A\,M^2 \times F\,R}{A\,X^2} = \frac{A\,M^2 \times 2\,P\,M}{A\,X^2}$ ubi puncta P, Q, coëunt, et $\frac{Q\,T^2 \times S\,P^2}{Q\,R} = \frac{A\,M^2 \times 2\,P\,M \times S\,P^2}{A\,X^2}$. Est er (per Coroll. I. et V. Prop. VI.) in omnibus sectionibus conicis vis centripeta reciprocè ut $\frac{A\,M^2 \times P\,M \times 2\,S\,P^2}{A\,X^2}$, hoc est, deleto $2\,S\,P^2$, constante, reciprocè ut $\frac{A\,M^2 \times P\,M}{A\,X^2}$

Porrò ob similitudinem triangulorum H A X, H M P, est H M : P M = H A : A X = $\frac{PM \times HA}{HM}$ et $AX^2 = \frac{PM^2 \times HA^2}{HM^2}$ et $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2} = \frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$, vis igitur est etiam in omni sectione conicâ reciprocè ut $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$

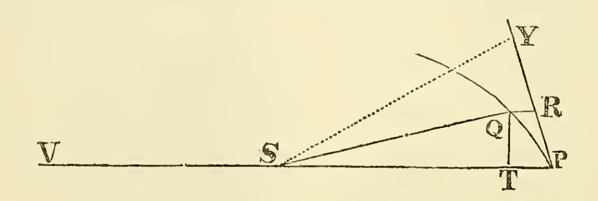
In Parabolâ (per Prop. 35. Lib. 1. Conic. Appoll. sive Cor. 1. Lem. V. de Conicis) H A = A M, et H M = 2 A M, et (per Prop. 20. Lib. 1. Conic. Appoll. quæ est Theor. I. de Parabola) A M, adeóque et H M est semper ut PM^2. Ergò vis centripeta in parabolâ erit reciprocè ut $\frac{4AM^4}{PM \times AM^2}$ sive ut $\frac{AM^2}{PM}$, hoc est, ut $\frac{PM^4}{PM} = PM^3$, hoc est, reciprocè ut cubus ordinatæ P M.

In Ellipsi et Hyperbolâ, si latus rectum axis A B, dicatur L, erit (ex Prop. 21. Lib. 1. Conic. Appoll. sive Theor. II. de Ellip.) $PM^2 : AM \times MB = L : AB$ ac proindè $AM = \frac{PM^2 \times AB}{L \times MB}$, et $AM^2 = \frac{PM^4 \times AB^2}{L^2 \times MB^2}$, et $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2} = \frac{PM^3 \times AB^2 \times HM^2}{L^2 \times MB^2 \times HA^2}$, undè deletâ ratione constanti $\frac{AB^2}{L^2}$, erit vis centripeta reciprocè ut $\frac{PM^3 \times HM^2}{MB^2 \times HA^2}$; verùm (per Prop. 37. Lib. 1. Conic. Appoll. sup. Cor. 2. Lem. V.) posito centro sectionis C, est C M : C A = C A : C H, adeóque dividendo vel componendo C M : A M = C A : H A, ac proindè addendo vel detrahendo terminos secundæ rationis e terminis prioris M B : H M = C A : H A et $\frac{HM}{MB \times HA} = \frac{1}{CA}$ et $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2} = \frac{1}{CA^2}$ quæ est quantitas constans. Erit igitur etiam in hyperbolâ et Ellipsi adeóque in omni sectione conicâ vis centripeta reciprocè ut PM^3, seu reciprocè ut cubus ordinatæ P M; deletâ nimirum, in expressione vis centripetæ suprà inventâ, quantitate $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2}$, constante.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in spirali P Q S *secante radios omnes* S P, S Q, *&c. in angulo dato : requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.*

(s) Detur angulus indefinite parvus P S Q, et ob datos omnes angulos



dabitur specie figura S P R Q T. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, estque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut Q T, hoc est (ob datam specie figuram illam) ut S P. Mutetur jam utcunque angulus P S Q, et recta Q R angulum contactus Q P R subtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicatâ ratione ipsius P R vel Q T. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc est ut S P. Quare $\frac{QTq \times SPq}{QR}$ est ut S P cub. ideoque (per Corol. 1. et 5. Prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut cubus distantiæ S P. Q. e. i.

Idem aliter.

(t) Perpendiculum S Y in tangentem demissum, et circuli spiralem con-

(s) 225. Ob omnes angulos datos, dabitur specie figurâ S P Q R T, et ipsius latera omnia erunt inter se in datâ seu constanti ratione, ergò datur ratio $\frac{QT}{QR}$, estque proindè $\frac{QT}{QR} \times QT$, ut Q T hoc est, ob datam rationem Q T, ad S P, erit $\frac{QT^2}{QR}$, ut S P, mutetur jam utcumque angulus P S Q, et manebit $\frac{QT^2}{QR}$, ut S P. Nam Q R, ubi angulus P S R constans est, dicatur a, et Q T dicatur b; ubi verò angulus P S R utcumque mutatur, Q R dicatur x, et Q T dicatur y, et erit per Lem XI. a : x = b ² : y ², adeóque $\frac{b^2}{a} = \frac{y^2}{x}$ hoc est $\frac{y^2}{x}$ seu $\frac{QT^2}{QR}$ eadem manet quæ priùs, nimirùm ut S P. Quoniam autem evanescente angulo P S R, sive coëuntibus punctis Q, P, recta S R, rectæ S P parallela evadit, erit per Coroll. 1. et V. Prop. VI. vis centripeta reciprocè ut $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$, ac proindè substituendo S P, loco $\frac{QT^2}{QR}$, vis centripeta erit reciprocè ut SP^3.

(t) 226. Sit circuli spiralem osculantis in P

centricè secantis chorda P V sunt ad altitudinem S P in datis rationibus; ideoque S P cub. est ut S Y q × P V, hoc est (per Corol. 3. et 5. Prop. VI.) reciprocè ut vis centripeta.

LEMMA XII.

Parallelogramma omnia circa datæ ellipseos vel hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta esse inter se æqualia.

Constat ex conicis. (y)

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

Gyretur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipseos. (z)

Sunto C A, C B semiaxes ellipseos; G P, D K diametri aliæ conjugatæ; P F, Q T perpendicula ad diametros; Q v ordinatim applicata ad diametrum G P; et si compleatur parallelogrammum Q v P R, erit ([a] ex conicis) rectangulum P v G ad Q v quad. ut P C quad. ad C D quad. et

chorda per centrum virium S ducta P V, demissumque in tangentem perpendiculum S Y, et ob angulum S Y P, rectum, et S P Y, datum, dabitur specie triangulum S P Y. Ergò datur ratio S Y ad S P, et in virium centripetarum formulis S P scribi potest pro S Y. Præterea datur ratio P V ad S P, nam (210) S Y × Q P = S P × Q T, adeóque $Q\,P = \frac{S\,P \times Q\,T}{S\,Y}$; undè ob rationem $\frac{S\,P}{S\,Y}$ datam, Q P scribi potest pro Q T. Verùm (211) $P\,V = \frac{Q\,P^2}{Q\,R}$, ergò P V, est ut $\frac{Q\,T^2}{Q\,R}$. Cùm igitur ex demonstratis in Prop. IX. $\frac{Q\,T^2}{Q\,R}$, sit ut S P, erit etiam P V, ut S P, et propterea S P, loco P V, substitui potest in formulis.

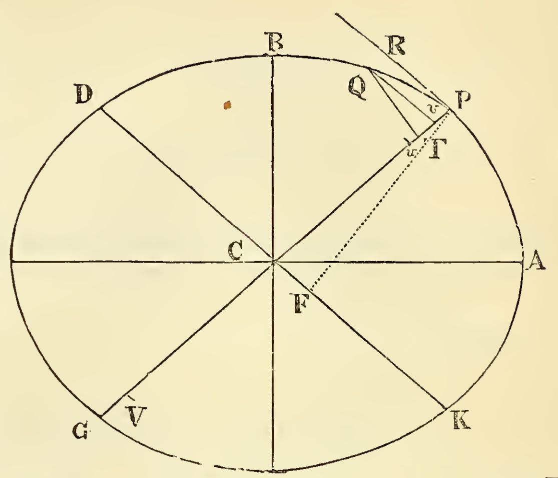
227. *Scholion.* Propositio IX. facilè demonstratur etiam per formulam Hermanni (214), $v = d\,p : p^3\,d\,z$; est enim in hoc casu S P = z, S Y = p; et si ratio $\frac{S\,Y}{S\,P}$ data dicatur $\frac{a}{b}$, erit $\frac{a}{b} = \frac{p}{z}$ ergo a z = b p, et (160) a d z = b d p, et $\frac{d\,p}{d\,z} = \frac{a}{b}$; undè $v = \frac{a}{b\,p^3}$; hoc est, ob datam $\frac{a}{b}$ vis centripeta v, est directè ut $\frac{1}{p^3}$, hoc est reciprocè ut p^3, aut quia $p = \frac{z\,a}{b}$, v erit ut $\frac{1}{z^3}$ directè, reciprocè autem ut z^3, deletis nimirùm constantibus.

(y) Demonstratio hujus Lemmatis inferius tradetur ubi nempe NEWTONUS eo Lemmate ad solutionem proximi Problematis utetur.

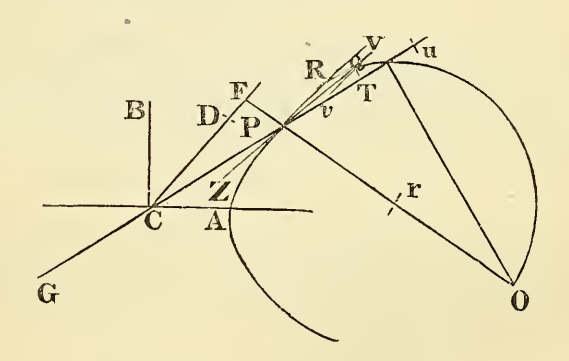
(z) 228. Gyretur corpus in Hyperbolâ, invenietur Lex vis centralis spectantis centrum Hyperbolæ simili modo, nisi quod vis illa ejus centri respectu sit centrifuga, quoniam centrum Hyperbolæ non est intra Hyperbolam constitutum, sed Hyperbola versus illud convexitatem obvertit; Legatur, si lubet, utraque solutio hujus Problematis et ad figuram infrà positam in quâ Hyperbola descripta est referatur, liquebit verè dici de Hyperbolâ ea quæ NEWTONUS de Ellipsi statuit.

(a) Ex Conicis, per 21. 1. lib. Apoll. Vide sup. Lemma IV. de Conicis.

(ob similia triangula Q v T, P C F) Q v quad. est ad Q T quad. ut P C quad. ad P F quad. et conjunctis rationibus, rectangulum P v G ad Q T quad. ut P C quad. ad C D quad. et P C quad. ad P F quad. id est, v G ad $\frac{Q\,T\ \text{quad.}}{P\,v}$ ut P C quad. ad $\frac{CDq \times PFq.}{P\,C\,q.}$



Scribe Q R pro P v, et (per Lemma XII. [b]) B C × C A pro C D × P F



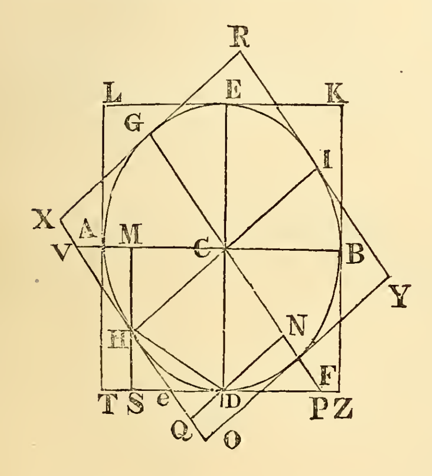
nec non (punctis P et Q coëuntibus) 2 P C pro v G, et ductis extremis et mediis in se mutuo fiet $\frac{Q\,T\ \text{quad.} \times P\,C\,q}{Q\,R}$ æquale $\frac{2\,B\,C\,q \times C\,A\,q}{P\,C}$. Est ergo (per Corol. 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2\,B\,C\,q \times C\,A\,q}{P\,C}$; id est (ob datum 2 B C q × C A q) reciprocè ut $\frac{1}{P\,C}$, hoc est, directè ut distantia P C Q. e. i.

(*b*) 229. *Parallelogramma omnia circa datæ Ellipseos vel Hyperbolæ Diametros quasvis conjugatas descripta sunt inter se æqualia.*

Idem aliter.

In rectâ P G ab alterâ parte puncti T sumatur punctum u ut T u sit æqualis ipsi T v; deinde cape u V, quæ sit ad v G ut est D C quad. ad P C quad. Et quoniam ex conicis est Q v quad. ad P v G ut D C quad. ad P C quad. erit Q v quad. æquale P v $\times$ u V. Adde rectangulum u P v utrinque, et prodibit quadratum chordæ arcûs (c)

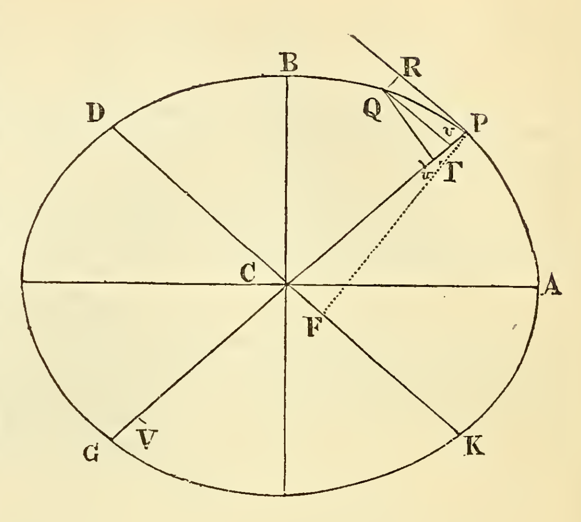
Dem. Sunto Ellipseos et hyperbolæ axes E D, A B, et G F, H I, diametri conjugatæ, ductisque per axium et diametrorum extrema tangentibus, describantur rectangulum L K Z T, et parallelogrammum X R Y O; jungatur D H,

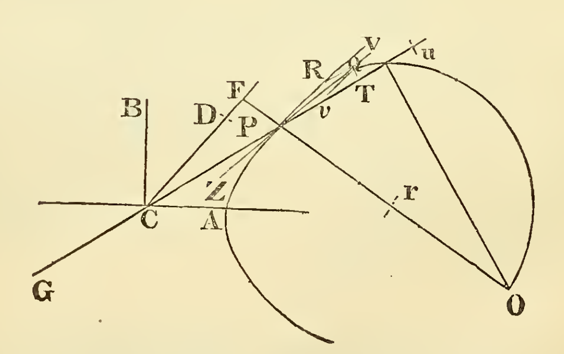


et D N ordinatim applicetur ad diametrum G F, erit (per Prop. 37. lib. 1. Conic. Appoll. sup. Cor. 2. Lem. V. de Conicis) P C ad C F, (hoc est, parallelogrammum P C V e, ad parallelogrammum æquè altum C H O F) sicut C F, ad C N, hoc est, sicut idem parallelogrammum C H O F, ad parallelogrammum C H Q N; et similiter V C, erit ad C A, (hoc est, parallelogrammum P C V e, ad æquè altum, C A T D) sicut C A ad C M, hoc est, sicut idem C A T D, ad rectangulum C M S D, seu ad prædictum parallelogrammum C H Q N; nam rectangulum C M S D, duplum est trianguli C H D, ejusdem basis C D ejusdemque altitudinis M C, et parallelogrammum C H Q N est etiam ejusdem trianguli duplum, cum sit utriusque basis communis H C et eadem altitudo ob parallelas H C, Q N; ac proinde C M S D $=$ C H Q N. Cum igitur sit P C V e : C H O F $=$ C H O F : C H Q N, et P C V e : C A T D $=$ C A T D : C H Q N, necesse est ut sit C A T D $=$ C H O F, quarè rectangulum L K Z T, quadruplum rectanguli C A T D, æquale est parallelogrammo X R Y O, etiam quadruplo parallelogrammi C H O F. Q. e. d.

(c) *Adde rectangulum* u P v *utrinque, et prodibit quadratum chordæ arcûs* P Q, *æquale rectangulo* V P $\times$ P v. Nam (per construct.) est quadratum chordæ arcus P Q $=$ Q T^2 $+$ P T^2, sed est Q T^2 $=$ Q v^2 $-$ T v^2 sive quia T v $=$ T u est Q T^2 $=$ Q v^2 $-$ T u^2, ideo quadratum chordæ arcus P Q $=$ Q v^2 $-$ T u^2 $+$ P T^2, est verò P T^2 $-$ T u^2 $=$ (P T $+$ T u) $\times$ (P T $-$ T u) sive P T^2 $-$ T v^2 $=$ P u $\times$ P v, ergo quadratum chordæ arcus P Q $=$ Q v^2 $+$ P v $\times$ P u. Quod si rectangulo P v $\times$ u V addas idem rectangulum P v $\times$ P u, est P v $\times$ V u $+$ P v $\times$ u P $=$ P v $\times$ V P, erat verò Q v^2 $=$ P v $\times$ u V, ergo Q v^2 $+$ P v $\times$ P u *sive quadratum chordæ arcus* P Q *erit æquale Rectangulo* P v $\times$ V P, *sive* V P v

P Q æquale rectangulo V P v; (d) ideoque circulus, qui tangit sectionem conicam in P et transit per punctum Q, transit etiam per punctum V. Coëant puncta P et Q, et ratio u V ad v G, quæ eadem est cum ratione D C q ad P C q, fiet ratio P V ad P G seu P V ad 2 P C; ideoque P V æqualis erit $\frac{2\ D\ C\ q}{P\ C}$. Pro-





(d) *Ideòque circulus qui tangit sectionem in* P, *et transit per punctum* Q, *transibit etiam per punctum* V; nam ductis circuli illius chordis Q P, Q Y, angulus P Q v = Q P R, (ob parallelas Q v, P R) = Q Y P (per 32. 3. Elem.) ac proindè duo triangula P Q v, P Y Q, quæ communem habent angulum, Q P Y, et æquales P Q v, P Y Q, similia sunt, et P v : Q P = Q P : P Y. Undè P Y $= \frac{Q P^2}{P v}$; quarè cum sit P v × P V = Q P q, ideoque P V $= \frac{Q P^2}{P v}$ erit P V = P Y.

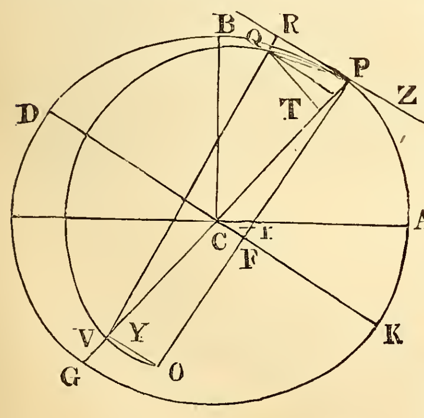
230. *Coroll.* 1. Ducantur circuli sectionem conicam osculantis diameter P O, et chorda V O, et ob similitudinem triangulorum P F C, P V O, erit P F : P C = P V : P O = $\frac{P C \times P V}{P F}$, sed per secundam demonstrationem Newtonianam P V $= \frac{2 D C^2}{P C}$, ergò P O $= \frac{2 D C^2}{P F}$, ac proindè radius osculi P r = $\frac{1}{2}$P O $= \frac{D C^2}{P F}$, et P F : D C = D C : P r.

inde vis, quâ corpus P in ellipsi revolvitur, erit reciprocè ut $\frac{2\,D\,C\,q}{P\,C}$ in P F q (per Corol. 3. Prop. VI.) hoc est (ob datum 2 D C q in P F q) directè ut P C. Q. e. i.

Corol. 1. Est igitur vis ut distantia corporis a centro ellipseos: (e) et vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in ellipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique ellipsis migrare potest

Quarè datis diametris conjugatis eorumque angulo P C D, facilè invenitur radius circuli sectionem conicam osculantis in diametri cujusvis extremo.

231. *Coroll.* 2. Datis radio osculi P r, semidiametro sectionis conicæ P C, et positione tangentis P R, seu angulo P C D, diametrorum conjugatarum, datur altera semidiameter conjugata D C, et describi potest sectio. His enim quæ diximus datis, datur quoque perpendicularis P F, ac proindè D C, media proportionalis inter P r, et P F, (230) datas. Datis autem diametris conjugatis earumque angulo, sectio conica describi potest; ut notum est ex Sectionum Conicarum elementis.



232. *Coroll.* 3. Hinc etiam problema V. aliter solvitur. Cùm enim sit vis centralis (212) ut $\frac{C\,P}{P\,r \times P\,F^3}$, sitque $P\,F = \frac{B\,C \times C\,A}{C\,D}$, (per Lem. XII.) et $P\,r = \frac{D\,C^2}{P\,F}$ (230). His valoribus in formulâ $\frac{C\,P}{P\,r \times P\,F^3}$, substitutis, ea fit $\frac{C\,P}{B\,C^2 \times C\,A^2}$ hoc est, ob constantem quantitatem $B\,C^2 \times C\,A^2$, vis est directè ut P C.

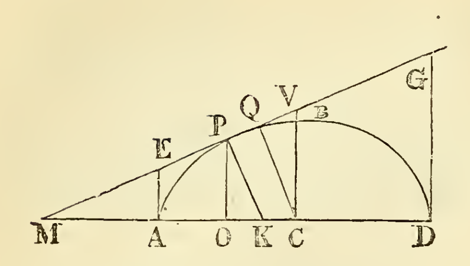
(e) *Et vicissim si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in Centro Virium, etc.*, ut hæc conversa demonstretur sequentia sunt præmittenda.

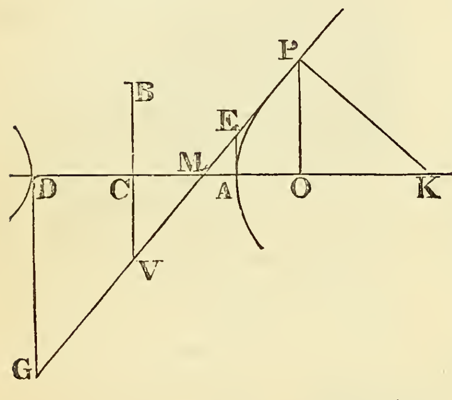
233. *Lemma* I. Ducatur in puncto contactus perpendicularis in Tangentem, ad axem terminatam, et a Centro ducatur ipsi Parallela ad Tangentem usque, harum linearum factum erit æquale quadrato semi-Axis.

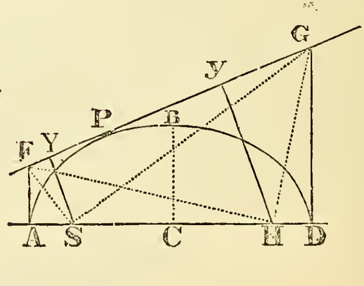
Ex P ducatur perpendicularis in Tangentem P K, ducatur ordinata P O perpendicularis in axem, et in C, ducatur C Q, Parallela, P K, et C V, parallela P O, triangula P O K, C Q V, erunt similia, ergo erit P O : P K = C Q : C V, ergo $P\,K \times C\,Q = P\,O \times C\,V$ similia etiam sunt Triangula C M V, O M P, erit ergo C M : M O = C V : P O; sed (per Cor. 2. Lem. V. de Conicis) est $C\,M = \frac{C\,A^2}{C\,O}$ et (per Cor. 3. ejusdem Lem.) $M\,O = \frac{A\,O \times D\,O}{C\,O}$ et (per Theor. II. tam de Hyp. quàm de Ellip.) est $C\,A^2 : A\,O \times D\,O = C\,B^2 : P\,O^2$ ergo est $C\,M : M\,O = \frac{C\,A^2}{C\,O} : \frac{A\,O \times D\,O}{C\,O} = C\,A^2 : A\,O \times D\,O = C\,B^2 : P\,O^2 = C\,V : P\,O$, ideoque $C\,B^2 \times P\,O = P\,O^2 \times C\,V$ utrumque vero dividendo per P O est $C\,B^2 = P\,O \times C\,V$, erat verò $P\,K \times C\,Q = P\,O \times C\,V$. Ergo $P\,K \times C\,Q = C\,B^2$. Q. e. d.

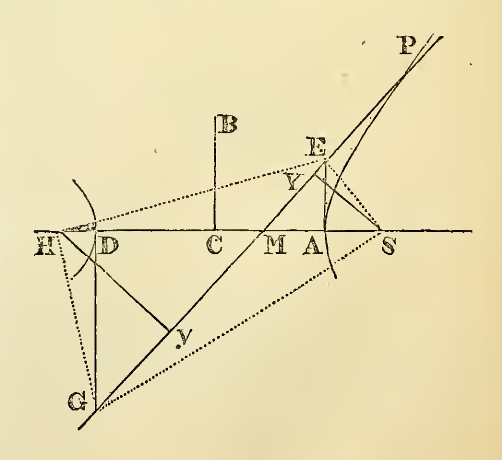
234. *Lemma* II. Sit P M, Sectionis Conicæ Tangens, C A axis, C B ejus conjugatus, in utroque axeos primæ Vertice erigantur perpendiculares A E, D G, ad Tangentem usque, factum earum $A\,E \times D\,G$, erit æquale quadrato semi-Axis.

Demonst. Ducta P O ordinata ad axem et C V ad Tangentem usque ipsi Parallela, erit (per Cor. 2. Lemma V. De Conicis) C O : C A = C A : C M. Dividendo verò, est C A — C O vel C O — C A, sive A O ad C A sive C D, sicut C M — C A vel C A — C M, sive M A ad C M, hoc est A O : C D = M A : M C, jungendo terminos primæ rationis terminis secundæ næc non mutatur, estque M A : M C = M A + A O (sive M O):









M C + D C, (sive M D) hoc est alternando M A : M O = M C · M D sed ob parallelas est M A : M O = A E : P O et M C : M D = C V : D G ergo est A E : P O = C V : D G et est A E × D G = P O × C V sed per Lemma præcedens est P O × C V = C B², ergo est A E × D G = C B². Q. e. d.

235. *Lemma* III. Ducantur a focis perpendiculares in tangentem Sectionis Conicæ, earum factum erit æquale quadrato semi-Axis.

Demonst. Sint illæ perpendiculares S Y, H y, ducantur in utroque vertice axeos transversæ lineæ A E, D G, perpendiculares axi usque ad tangentem, et ducantur a focis S et H, ad earum extremitates lineæ S E, S G et H G, H E.

Triangula E A S, S D G, E H G, G H y similia inter se, ut et Triangula G D H, H A E, G S E, E S Y: primò, similia sunt Triangula E A S, S D G quia latera E A et A S, S D et D G circa angulos rectos A et D posita proportionalia sunt, nam (per Lemma præced.) est E A × D G = C B², et per naturam focorum (et per 5. vel 6. II. Elem.) est A S × S D = C B² ergo est E A × D G = A S × S D ideoque E A : A S = S D : D G; Eâdem ratione probatur Triangula G D H, H A E esse similia, ob latera proportionalia G D et T H, H A et A E circa angulos rectos A et D posita, est enim ut prius E A × D G = C B² = D H × H A ideoque D G : D H = H A : E A.

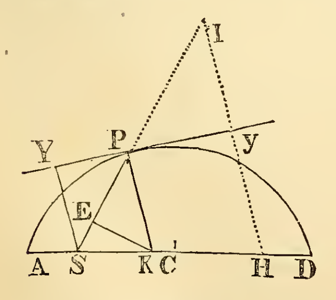
Secundò, Triangula S D G, E G H sunt similia, latera enim G H et H E, G D et D S circà angulos S D G et E H G posita sunt proportionalia, nam ob triangula similia G D H, H A E, est G H : H E = G D : H A, sed H A = D S, ergo est G H : H E = G D : D S; Præterea anguli S D G et E H G sunt ambo recti, S D G quidem per constructionem,

angulus verò E H G est in Ellipsi complementum ad duos rectos angulorum G H D et E H A, in Hyperbolâ eorum summa, cum autem illi duo anguli G H D et E H A pertineant ad Triangula Rectangula similia, simul sumpti faciunt Rectum, eorumque complementum ad duos rectos est recto æquale, ergo Angulus E H G est rectus; eodem modo probatur Triangula H A E, G S E esse similia, ob latera proportionalia S E et G S, A E et H A, circa angulos H A E et G S E rectos posita; nam ob Triangula similia E A S, S D G est E S : G S = A E : D S sive H A; et H A E est rectus per constructionem et G S E in Ellipsi est complementum ad duos rectos angulorum G S D et E A S, et in Hyperbola eorum summa, illi verò Anguli pertinent ad Triangula Rectangula similia, etc.

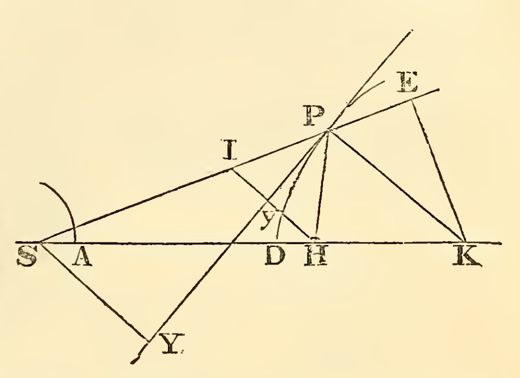
Tertiò, E G H est simile G H y (per 8. VI. El.) et eadem ratione est G S E simile E S Y.

Ex quibus liquet Triangula E A S, G H y esse similia ut et Triangula G S E, E S Y; ex similitudine Triangulorum E A S, G H y est E S : G H = E A : H y, et ex similitudine Triangulorum G D H et E S Y est E S : G H = S Y : G D ergo est E A : H y = S Y : G D et $E A \times G D = H y \times S Y$ sed $E A \times G D = C B^2$ (per Lemma præcedens,) ergo etiam $H y \times S Y = C B^2$. Q. e. d.

256. *Lem.* IV. Ducatur a foco S linea S P ad punctum contactûs et ex puncto P contactus ducatur perpendicularis in Tangentem quæ secet axem in K, et ex puncto K ducatur in lineam S P perpendicularis K E, pars P E lineæ P S erit æqualis semilateri recto.



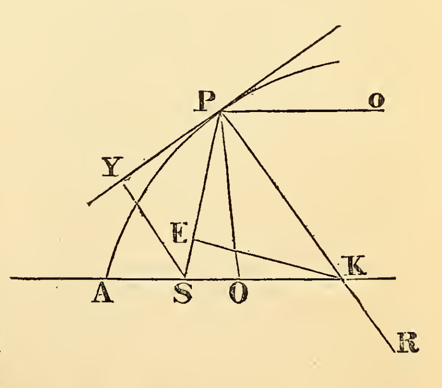
237. Producatur vel secetur S P in I ut sit S I = A D sive Axi ducaturque ex altero foco linea H I quæ dividitur bifariam et perpendiculariter per Tangentem in y (per Theor. III. de Hyp. et IV. de Ellip.) ergo H I = 2 H y et est H I parallela P K, ergo Triangula P S K, I S H sunt similia, estque P S : P K = S I : I H sive 2 H y, sed ob Parallelas S Y, P K, et angulos rectos Y et E similia sunt Triangula P S Y, P K E, ergo est P S : P K = S Y : P E, est ideo S I : 2 H y = S Y : P E et $P E = \frac{2 H y \times S Y}{S I}$



sed $H y \times S Y = C B^2$ et $S I = 2 A C$, ergo $P E = \frac{2 C B^2}{2 A C}$ et $2 P E = \frac{4 C B^2}{2 A C}$ sed Latus Rectum L est $\frac{4 C B^2}{2 A C}$, ergo 2 P E = L, sive P E est dimidium lateris recti.

237. 1. *Corol.* Ex eo quod est P S : P K = S Y : P E sive $\frac{1}{2}$ L, est $S Y = \frac{L \times P S}{2 P K}$ et $P K = \frac{L \times P S}{2 S Y}$.

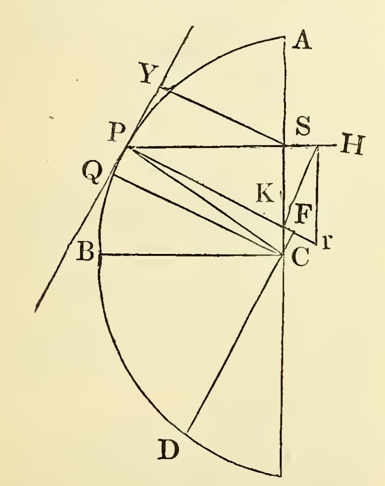
238. 2. *Corol.* Hoc Lemma cum suo Corollario de Parabola etiam verum est, sed aliter demonstratur, ducta ordinata P O Triangula



P K O, P K E sunt æqualia, propter Angulos rectos in O et E; latus P K commune, et angulum P K O angulo K P E æqualem, ducto

enim Diametro P o, erit o P K æqualis P K O ob Parallelas A K et P o sed o P K est etiam æqualis augulo K P E quia perpendicularis dividit bifariam angulum S P o (per Theor. III. de Parab.) ergo angulus P K O = K P E, et (per 26. 1. Elem.) Triangulum PK O est æquale Triangulo P K E ideoque P E = K O, sed K O est æqualis semilateri recto (per Theor. III. de Parab.) ergo et P E.

239. *Lemma* V. In omni sectione conicâ cujus focus S, P Y, taugens in P, S Y et P K, tangenti perpendiculares. L, latus rectum, est radius osculi $Pr = \frac{4 PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2 SY^3}$.



Dem. Sit A P B ellipsis cujus semiaxes A C, B C, semidiametri conjugatæ P C, D C, ac proindè D F, tangenti P Y parallela, atque adeò P F, Q C, tangenti perpendiculares æquales sunt. Est (per Lem. XII. Newt.) C D : B C = A C : P F, et $CD^2 : BC^2 = AC^2 : PF^2$, ideoque est $CD^2 = \frac{BC^2 \times AC^2}{PF^2}$. Et quia $BC^2 = CQ \times PK$ sive $PF \times PK$ (233.) est $CD^2 = \frac{PF \times PK}{PF^2} \times AC^2 = \frac{PK \times AC^2}{PF}$; sed est $Pr = \frac{CD^2}{PF}$ (230.) ergo est $Pr = \frac{PK \times AC^2}{PF^2}$; est autem A C : B C = B C : $\frac{1}{2}$ L, ergo $BC^2 = \frac{1}{2} L \times AC$, ideoque $PF \times PK = \frac{1}{2} L \times AC$, ergò $PF = \frac{L \times AC}{2 PK}$ et $PF^2 = \frac{L^2 \times AC^2}{4 PK^2}$ idque substituatur in valore P r mox reperto erit $Pr = \frac{4 PK^3}{L^2}$, et quia $PK = \frac{L \times SP}{2 SY}$ (237.) erit $\frac{4 PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2 SY^3} = Pr$. Q. e. 1um.

Idem eodem prorsùs modo demonstratur in hyperbolâ. Q. e. 2um.

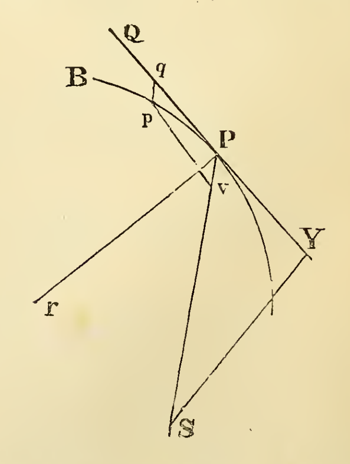
In Ellipsi crescente focorum distantiâ manet $Pr = \frac{4 PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2 SY^3}$, adeóque idem etiam verum est cum focorum distantia infinita evadit, seu cùm Ellipsis in Parabolam mutatur. Q. e. 3um.

240. *Corol.* 1. Ex his facillima oritur constructio pro determinando radio curvaturæ in quâvis sectione conicâ. Ex K, enim super P K, erigatur perpendicularis K H, cum P S concurrens in H, ex H erigatur super P H perpendicularis H r, erit P r, radius curvaturæ. Nam ob angulos rectos P K H, P H r, et lineas P K, S Y, parallelas est S P : S Y = P r : P H = P H : P K, atquè indè $SY^2 : SP^2 = PK : Pr$; adeóque $Pr = \frac{PK \times SP^2}{SY^2}$ sed $SY = \frac{L \times SP}{2 PK}$ (237), ergò $Pr = \frac{4 PK^3}{L^2}$, ac proindè P r est radius osculi (239).

241. *Corol.* 2. Quoniam in verticibus sectionum conicarum principalibus S P = S Y, erit ibi $Pr = \frac{L \times SP^3}{2 SY^3} = \frac{L}{2}$, seu radius osculi æqualis dimidio lateris recti principalis.

242. *Theor.* Datis in puncto P, vis centripetæ quâ corpus curvam P p B describit quantitate absolutâ, vis illius directione P S, velocitate corporis, et positione tangentis P Q, datur curvæ P p B curvatura in P, seu radius osculi P r.

Dem. Sit curvæ P p B, et circuli osculatoris arcus infinitesimus P p, et quoniam velocitas corporis P revolventis finita supponitur, vis centripeta constans est, et illius directio sibi parallela per arcum P p, adeòque arcus ille est



portio parabolæ cujus tangens P Q, et diameter

P S (ex notâ 40â.) Quoniam autem vis centripetæ quantitas absoluta in P, data est, datumque proindè spatium quod corpus vi illâ constante, dato tempore percurreret, et prætereà corporis P velocitas, ac tangentis P Q positio data sunt, data est ratio q p sive P v ad P q sive p v, data ergo est parabola quam corpus P describeret, si vis centripeta eadem maneret et directionem haberet lineæ P S perpetuò parallelam. Cùm igitur datus sit radius circuli parabolam datam in dato puncto osculantis (239.) datur P r, radius osculi in puncto P. Q. e. d.

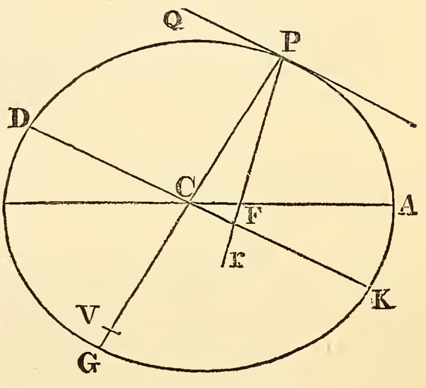
243. *Corol.* Hinc datis in puncto P, curvaturâ seu radio osculi P r, positione tangentis P Q, velocitate corporis, et vis centripetæ directione P S, datur vis illius quantitas absoluta in P; nam propter datas positionem Tangentis, et vis directionem, datur ratio S P ad S Y et SP^3 ad SY^3, sive $\frac{SP^3}{SY^3}$ et propter datum $Pr = \frac{L \times SP^3}{2 SY^3}$ datur $\frac{L}{2}$ sive L latus rectum principale Parabolæ cujus arcus P p est portio, P S Diameter et P Q Tangens unde datur tota Parabola et Latus rectum Diametri P S; denique cum data sit velocitas corporis in P datur lineola P q, vel p v dato tempore descripta, datur ergo abscissa P v sive q p quæ est vis centripetæ quantitas absoluta.

Datis verò in P, vis centripetæ quantitate absolutâ, vis illius directione P S, positione tangentis P Q, radio osculi P r, sive datâ curvaturâ, datur velocitas corporis in P; et generatim si ex his quinque, nimirum, vis centripetæ quantitate absolutâ, illius directione, velocitate corporis, positione tangentis et curvaturâ, quatuor data fuerint, quintum determinatum est.

244. *Theor.* Corpus P, circâ centrum virium S datum revolvendo, curvam P p B describat, sintque data, vis centripetæ quantitas absoluta in puncto P, data lex secundum quam in variis a centro S distantiis vis centripeta agit, positio tangentis P Q, et curvatura in P, determinata ac unica est curva P p B, quam corpus P, circâ centrum virium S, potest describere.—*Dem.* Quoniam datur centrum virium S et punctum P, datur quoque positio rectæ P S, hoc est, directio vis centripetæ, ac proindè ex cæteris etiam datis (243.) datur velocitas quâ corpus in puncto P movetur; sed datis in puncto P, vis centripetæ quantitate absolutâ, positione tangentis seu rectæ secundùm quam projicitur corpus, velocitate projectionis determinatur proximum punctum p, tangentis in eo puncto p positio, corporis P in eo velocitas, ut et nova distantia a centro p S, sed datâ lege vis centripetæ in variis a Centro distantiis, datur iterum in puncto novo p, vis centripeta, unde proximum punctum etiam determinabitur, ex his ergo datis omnia puncta curvæ P p B, successivè determinantur; ergo data ac unica est curva quam corpus P, his datis describere potest. Q. e. d.

Corol. Iisdem manentibus, si describatur nova curva quæ curvam P p B quam corpus P describit osculetur in P, quæque proindè eandem habet tangentem P Q, ut potè radio osculi P r, perpendicularem, impossibile est ut datis iis quæ numero 244. posuimus, corpus P, hanc novam curvam a priori diversam describat, hoc est, verba NEWTONI ferè usurpandò, orbes duo se mutuò osculantes eâdem vi centripetâ describi non possunt.

245. Hisce positis tandem probabimus quòd si vis centripeta sit ut distantia a centro, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut fortè in circulo in quem Ellipsis migrat focis coëuntibus.



Data sint centrum virium C, et vis centripetæ quantitas absoluta, data a centro distantia C P, et corpus datâ cum velocitate secundùm directionem datam rectæ P Q projiciatur, erit P Q tangens curvæ describendæ. Si fuerit C P ad tangentem P Q normalis, et velocitas quâ corpus P, projicitur æqualis velocitati quam idem corpus solâ vi centripetâ, ut est in P, constante sollicitatum acquireret, cadendo per dimidium radium P C, curva describenda erit circulus cujus centrum C, et radius C P (201.) si verò talis non fuerit velocitas projectionis, corpus P, aliam curvam describet, in quâ tangens P Q, non semper erit ad radium vectorem C P perpendicularis, cùm hæc sit solius circuli proprietas, ut notum est. Sit ergò P Q ad radium vectorem C P obliqua, per centrum C ducatur recta C K, ipsi P Q parallela, et radio osculi P r dato (242.) describatur circulus rectam P C intersecans in V; tùm sumatur C K, media proportionalis inter C P, et $\frac{1}{2}$ P V, et semidiametris conjugatis, C P, C K, describatur ellipsis P D G A, ea erit orbita quam corpus P, describet.—*Dem.* Ellipsis P D G A, describi potest per corpus aliquod A sollicitatum vi aliquâ centripetâ ad centrum C tendente, quæque sit semper ut distantia ab illo centro C P, (Prop. X.) ponamus

Corol. 2. ([d]) Et æqualia erunt revolutionum in ellipsibus universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in ellipsibus similibus æqualia sunt (per Corol. 3. et 8 Prop. IV.) in ellipsibus autem communem habentibus axem majorem sunt ad invicem ut ellipseon areæ totæ directè, et arearum particulæ simul descriptæ inversè; id est, ut axes minores directè, et corporum velocitates in verticibus principalibus inversè; hoc est, ut axes illi minores directè, et ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inversè; et propterea (ob æqualitatem rationum directarum et inversarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

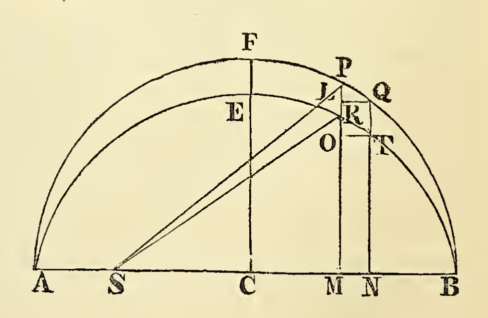
Si ellipsis centro in infinitum abeunte vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola; et vis ad centrum infinitè distans jam tendens

velocitatem corporis A, eandem esse ac velocitatem projectionis corporis P, et ex datâ velocitate corporis illius A, directione tangentis P Q directione vis C P, et curvaturâ Ellipsis in P, datur vis centripetæ quantitas absoluta (242.) quâ corpus A, in Ellipsi motum retinetur in puncto P, sed eadem est ellipsis illius, et orbitæ quam corpus P describit, curvatura; nam P r est radius circuli ellipsim P D G A osculantis in P, (per const. et secun. demonst. Newt. Prop. X.) est quoque radius circuli curvam quam corpus P describit osculantis in eodem puncto P, (per constr.) adeóque ellipsis P D G A, et orbita quam corpus P describit eandem habent curvaturam in puncto P, præterea recta P Q, orbitæ tangens cum sit diametro C K parallela ellipsim tangit in P, idem est orbitæ et ellipsis centrum C, idem punctum P, eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ ac proindè eadem vis illius quantitas absoluta in puncto P, tam in ellipsi quam in orbitâ a corpore P describendâ; cum igitur iis datis corpus P unicam curvam describere possit et reverâ ellipsim P D G A, possit describere, si vis centripeta sit ut distantia a centro (nec circulus describatur) corpus movebitur in Ellipsi centrum habente in centro virium. Q. e. d.

246. Si vis centrifuga sit ut distantia a centro, eodem modo demonstratur corpus moveri in hyperbolâ centrum habente in centro virium.

([d]) 247. Ut demonstretur *æqualia esse revolutionum circa idem centrum factarum periodica tempora in Ellipsibus universis ista ex conicis sunt repetenda.*

Lemma. Area circuli A F B, cujus radius F C æquatur semiaxi A C ellipsis A E B, est ad hujus Ellipseos aream ut semiaxis A C, seu F C, ad alterum semiaxem E C.—*Dem.*



Axis A B, divisus intelligatur in particulas innumeras æquales lineolæ M N, et per singula divisionum puncta erigantur rectæ P M, Q N, axi perpendiculares. Quoniam ex circuli et Ellipsis naturâ, $FC^2 : QN^2 = AC \times CB : AN \times NB = EC^2 : TN^2$, erit $FC : QN = EC : TN$, et $FC : EC = QN : TN$; verùm ejusdem basis rectangula N L, N O, sunt ut altitudines N Q, N T, ac proindè N L : N O

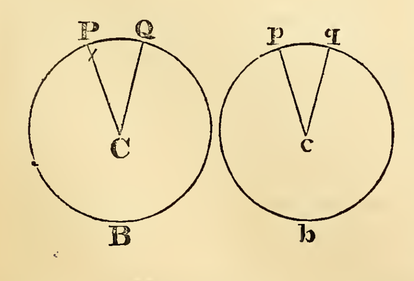
= F C : E C; ergò ultima summa rectangulorum evanescentium ut N L, ad summam rectangulorum, evanescentium ut N O, hoc est, area circuli ad aream Ellipsis (per Lem. IV.) rationem habet semiaxis F C, ad alterum semiaxem E C. Q. e. d.

248. *Corol.* 1. Idem eodem prorsùs modo demonstratur, si A F B fuerit Ellipsis communem axem A B, habens cum Ellipsi A E B. Et generatim duæ quævis figuræ A F B, A E B, quarum semiordinatæ Q N, T N, sunt in datâ ratione et quarum est communis diameter A B, sunt inter se in ratione datâ ordinatarum Q N, T N.

249. *Corol.* 2. Area circuli cujus diameter est medius proportionalis inter duos Ellipsis axes æqualis est areæ Ellipsis. Nam sit E C : R = R : F C, et radio R, describatur circulus, illius circuli area, erit ad aream circuli A F B, ut R^2 ad $F C^2$, adeóque ut E C ad F C; Quarè cum Ellipsis A E B, eandem habeat rationem ad circulum A F B (247), manifestum est aream circuli radio R, descripti æqualem esse areæ Ellipsis A E B.

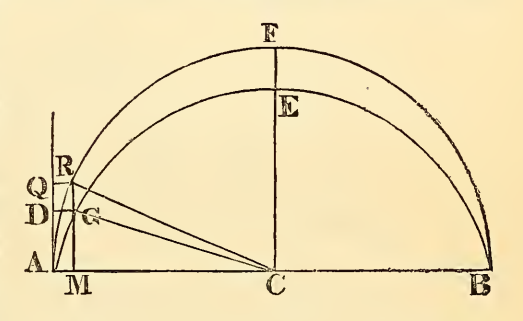
250. *Corol.* 3. Quoniam $R^2 = F C \times E C$, et areæ circulorum sunt ut radiorum quadrata, erunt areæ Ellipsium ut axium rectangula.

251. *Corol.* 4. Patet etiam in Ellipsibus vel ellipsi et circulo aut etiam in quibuslibet curvis quarum ordinatæ Q N, T N, datam habent rationem, et quarum est diameter communis A B, aream M R B, esse ad aream correspondentem M P B, ut est E C, ad F C, seu ut R M ad P M; sed ductis ex quocumque diametri puncto S, rectis S P, S R, est etiam triangulum S M R, ad triangulum S M P, ut M R ad M P, ob communem utriusque trianguli altitudinem M S; ergò sector S B R, est ad sectorem S B P, in ratione datâ E C, ad F C.



252. *Theor.* Corpora duo P, p, circa virium centra C, c, revolvendo, orbitas P Q B, p q b, describant; tempus periodicum in orbitâ P Q B, est ad tempus periodicum in alterâ orbitâ p q b, ut area P Q B P, ad aream p q b p, directè et sectores P C Q, p c q, simul descripti inversè.—*Dem.* Ob æquabilem arearum circà centra C, c, descriptionem (Prop. I.) tempus periodicum T, in orbe P Q B, est ad tempus t, quo describitur sector P C Q, ut area P Q B P, ad sectorem P C Q, et similiter tempus t, quo describitur sector p q c, est ad tempus periodicum θ, in orbe p q b, ut sector p c q, ad aream p q b p, hoc est T : t = P Q B P area : P C Q, et t : θ = p c q : p q b p area, unde per compositionem rationum et ex æquo T : θ = P Q B P $\times$ p c q : p q b p $\times$ P C Q. Q. e. d.

253. Si corpora duo Ellipses A E B, A F B, quarum est axis communis A B, describant, viribus ad centrum Ellipsium C tendentibus, tempora periodica erunt æqualia.—*Dem.* Sint arcus A R, A G, infinitesimi eodem tempore descripti, A Q tangens ad verticem A, Q R,



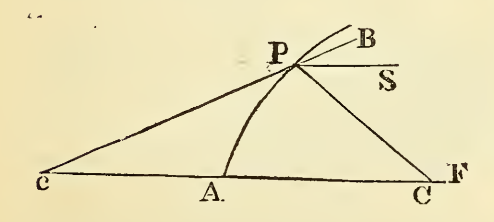
D G, axi A B, parallelæ, et quoniam vires centrales sunt ut Q R, D G (Prop. VI.) et ob communem distantiam a centro A C, æquales sunt vires, seu eadem vis (Prop. X.) erit Q R = D G, sectores verò A C G, A C R, sunt ut G M, R M, seu E C, F C, (251), et areæ Ellipsium A E B, A F B, sunt etiam ut E C, F C, (247, 248.) quarè cum tempora periodica in illis Ellipsibus sint ut areæ A E B, A F B directè et sectores A C G, A C R, inversè (252.) erunt eædem ut E C ad F C directè, et E C ad F C inversè, hoc est, ut E C $\times$ F C ad F C $\times$ E C, ac proindè in ratione æqualitatis. Q. e. d.

254. His positis facilè *demonstratur æqualia esse revolutionum in Ellipsibus universis circum centrum idem factarum periodica tempora.* Nam duæ quævis ellipses circa idem centrum descriptæ dicantur A, et B, describatur tertia Ellipsis C, similis Ellipsi A, et axem unum communem habens cum Ellipsi B, tempora periodica in Ellipsibus similibus A et C, sunt æqualia (per Corol. 3. et 8. Prop. IV. Newt.) et tempora periodica in ellipsibus C, et B, axem alterum communem habentibus sunt etiam æqua-

evadet æquabilis. Hoc est theorema *Galilæi.* ([e]) Et si coni sectio parabolica (inclinatione plani ad conum sectum mutata) vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam versâ. Et quemadmodum in circulo vel ellipsi si vires tendunt ad centrum figuræ in abscissâ positum, hæ vires augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quâcunque datâ, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinatarum ad abscissam, semper augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro, si modo tempora periodica maneant æqualia; ([f]) sic etiam in figuris universis si ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quâcunque

lia (253.) tempora igitur periodica in Ellipsibus quibusvis A et B sunt æqualia. Q. e. d.

([e]) 255. *Et si coni sectio parabolica (inclinatione plani ad conum sectum mutata), vertatur in hyperbolam movebitur corpus in hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam versâ.* Cùm enim Ellipsis centrum C, a vertice A, in plagam F abit, vis centripetæ directio est per lineas P C, P F, a puncto P, ad centrum, et ubi infinita evadit distantia P C, atque P S, ad centrum ducta axi parallela fit, Ellipsi in parabolam mutatâ, directio est a puncto P, ad S, secundum lineam P S; mutatâ in Hyperbolam parabolâ, et centro ad alteram verticis A partem translato in c, vis centralis directio est secundùm lineam P B, a P ad B, hoc est, a centro c ad P, adeóque in centrifugam versa (228.).



256. Ex quibus sequitur hæc generalis lex; Si corpus revolvatur in sectione conicâ, et vis centralis tendat ad sectionis centrum, aut a centro, vis illa erit directè ut distantia a centro, et contrà si vis fuerit ut distantia a centro, corpus movetur in sectione conicâ. (245, 246.)

([f]) 257. *In figuris universis, si ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione datâ vel angulus ordinationis mutetur, manente tempore periodico, vires augentur vel minuuntur in ratione distantiarum a centro.* Hujus veritas sequentium Lemmatum ope patebit.

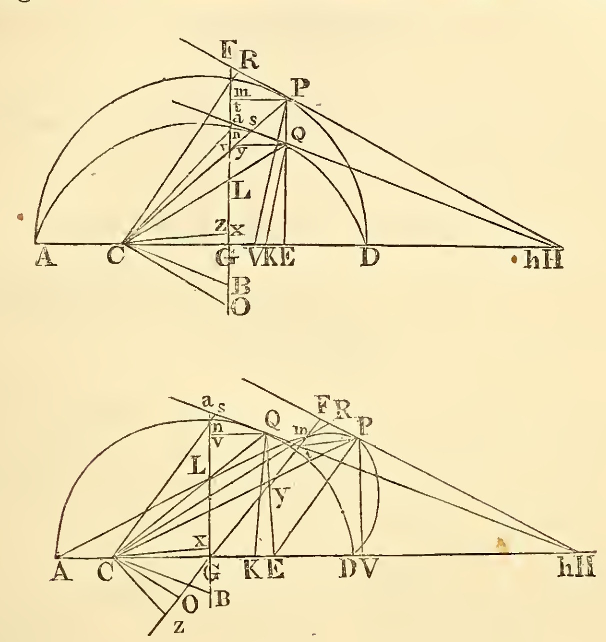
Lemma. In figurâ quâvis A Q D, cujus diameter A D, ad hanc diametrum ordinatæ Q E, n G, augeantur vel minuantur in ratione datâ Q E, ad P E, vel ad angulum quemvis datum P E D, inclinentur, novaque describatur curva A P D, per novarum ordinatarum extrema transiens, sitque centrum virium C, in diametro positum utrique curvæ commune, rectæ P H, Q h, quæ curvas in punctis correspondentibus Q, P, tangunt, ad idem diametri punctum H convergunt.—*Dem.* Ductis rectis P t, Q v, diametro A D parallelis, erit Q v = G E = P t, et (per hypothesim) n v : m t = E Q : E P, unde et alternando n v : Q E = m t : E P, et coëuntibus punctis n et Q, m et P, erit propter similitudinem triangulorum n v Q et Q E h, m t P et P E H

n v : E Q = Q v (G E) : E h
m t : E P = P t (G E) : E H

Cùm ergo sit n v : E Q = m t : E P, erit G E : E h = G E : E H, ideoque E H = E h, ac proindè tangentes ad idem diametri punctum H convergunt. Q. e. d.

258. *Lemma.* Iisdem manentibus sector evanescens, C Q n, est ad sectorem C P m, in alterâ curvâ correspondentem ut area A Q D, ad aream A P D.—*Dem.* ob parallelas G m et E P, G n, et E Q, est G y : C G = E P : C E et C G : G L = C E : E Q undè ex æquo G y : G L = E P : E Q = G m : G n (per const.) et hinc G m — G y : G n — G L = y m : L n = G m : G n = E P : Q E. Ex puncto C, demittantur in G m, et G n, perpendiculares C z, C x; et ex punctis P et Q, in diametrum A D, perpendiculares P V, Q K, et erit triangulum C y m : triang. C L n = y m × C z : L n × C x = G m × C z : G n × C x. Verum ob similia triangula C z G, et P V E, C x G et Q K E, est C z : C G = P V : P E, et C G : C x = Q E : Q K : atquè adeò per compositionem rationum C z : C x = P V × Q E : Q K × P E = P V × G n : Q K × G m (per constr.) cum ergo sit triangulum C y m :

datâ, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires ad centrum quodcunque in abcissâ positum tendentes in singulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro.



triang. C L n = G m × C z : G n × C x = G m × P V × G n : G n × Q K × G m = P V : Q K, et P V sit ad Q K, ut parallelogrammum G E P m, ad parallelogrammum G E Q n, hoc est, (per Lem. IV.) et per construct. ut area A P D, ad aream A Q D; ergò triangula C y m, C L n, sunt in ratione arearum A P D, A Q D; at punctis m et P, n et Q coëuntibus, sector C P m, æquatur triangulo C y m, et sector C Q n triangulo C L n; sunt igitur sectores illi evanescentes ut areæ A P D, A Q D, directè. Q. e. d.

259. *Theor.* Iisdem manentibus, si tempora periodica in curvis A P D, A Q D fuerint æqualia, vires centripetæ in punctis correspondentibus P et Q erunt inter se ut distantiæ a centro C P, C Q.

Demonst. Figura A Q D rectis ex centro C ductis in sectores innumeros inter se æquales, ut C Q n, et figura A P d, in totidem sectores correspondentes, ac proindè etiam inter se æquales (258), ut C P m divisæ intelligantur; et ob eumdem sectorum in utrâque figurâ numerum, æquabilem illorum descriptionem (Prop. I.) et æqualia tempora periodica, sectores C P m, C Q n, æquali tempore describentur. Quare (per Prop VI). Vires centripetæ in punctis P et Q, sunt inter se ut rectæ m R, s n punctis m et P, n et Q coëuntibus; verùm propter Parallelas Q E, a G et P E, F G, est, a G : F G = Q E : P E, (257) et quia n G et m G in eadem sunt ratione, iis ex a G et F G subductis manent a n ad F m sicut Q E ad P E; ductis autem ex C. Parallelis C B, C O ad tangentes a H, F H, Triangula B C G et O G C sunt similia triangulis a G H, F G H unde est

B G : a G = G C : G H

et O G : F G = G C : G H ideoque B G : O G = a G : F G = Q E : P E = n G : m G et jungendo terminos primæ et secundæ rationis terminis ultimæ est B n : O m = Q E : P E = a n : F m. Denique quia ob C B, C O, Tangentibus a H, F H Parallelas, similia etiam sunt Triangula, a n s et n C B, F m R et m C O, est

B n : n a = C n : s n

et est F m : m O = R m : m C, et Compositis Rationibus est B n × F m : n a × m O = C n × R m : s n × m C, sed quia B n : O m = a n : F m, est B n × F m = a n × O m, ergo etiam C n × R m = s n × m C, ideoque C n : C m = R m : s n; sive distantiæ a Centro in eâdem sunt ratione ac vires Centrales.

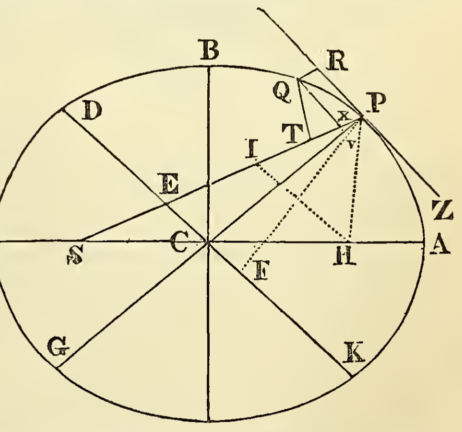
SECTIO III.

De motu corporum in conicis sectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos.

Esto ellipseos umbilicus S. Agatur S P secans ellipseos tum diametrum D K in E, tum ordinatim applicatam Q v in x, et compleatur parallelogrammum Q x P R. Patet E P æqualem esse semiaxi majori A C, eo quod, actâ ab altero ellipseos umbilico H lineâ H I ipsi E C parallelâ, ob æquales C S, C H æquentur E S, E I, (g) adeo ut E P semi-summa sit ipsarum P S, P I, id est (ob parallelas H I, P R, et angulos æquales I P R, H P Z) ipsarum P S, P H, quæ conjunctim axem totum 2 A C adæquant. Ad S P demittatur perpendicularis Q T, et ellipseos latere recto principali (seu (h) $\frac{2 \text{ B C quad.}}{\text{A C}}$) dicto L, erit L × Q R ad L × P v ut Q R ad P v (i) id est, ut P E seu A C ad P C



(g) 260. Quia (per Prop. 48. Lib. 3. Conic. Apoll. sup. Theor. IV. de Ellipsi) æquales sunt anguli quos rectæ P H, P S, constituunt cum tangente P R, et ob parallelas H I, P R, æquales quoque sunt anguli alterni P I H, P H I, æquales erunt rectæ P I, P H, adeóque E P $= \frac{\text{P S} + \text{P H}}{2} =$ A C, (Prop. 52. Lib. 3. Conic. Apoll. superius Theor. III. de Ellip.)

(h) 261. In Ellipsi et Hyperbolâ latus rectum principale L $= \frac{2 \text{ B C}^2}{\text{A C}}$ nam 2 A C : 2 B C = 2 B C : L, undè L $= \frac{4 \text{ B C}^2}{2 \text{ A C}} = \frac{2 \text{ B C}^2}{\text{A C}}$.

(i) Per constructionem Q R = P x, sed propter Triangula similia P x v, P E C, P x : P v = P E (A C) : P C, ergò Q R : P v = A C : P C.

et L × P v ad G v P ut L ad G v; et (k) G v P ad Q v quad. ut P C quad. ad C D quad. et (per Corol. 2. Lem. VII.) Q v quad. ad Q x quad. punctis Q et P coëuntibus est ratio æqualitatis; et Q x quad. seu Q v quad est ad Q T quad. ut E P quad. ad P F quad. (l) id est, ut C A quad. ad P F quad. sive (per Lem. XII.) ut C D quad. ad C B quad. (m) Et conjunctis his omnibus rationibus, L × Q R fit ad Q T quad. ut A C × L × P C q × C D q, seu 2 C B q × P C q × C D q ad P C × G v × C D q × C B q, sive ut 2 P C ad G v. Sed punctis Q et P coëuntibus æquantur 2 P C et G v. Ergo et his proportionalia L × Q R et Q T quad. æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, et fiet L × S P q æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. 1. et 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè est ut L × S P q, id est, reciprocè in ratione duplicata distantiæ S P. Q. e. i.

Idem aliter.

Cum vis ad centrum ellipseos tendens, quâ corpus P in ellipsi illâ revolvi potest, sit (per Corol. 1. Prop. X.) ut C P distantia corporis ab ellipseos centro C; ducatur C E parallela ellipseos tangenti P R; et vis, quâ corpus idem P circum aliud quodvis ellipseos punctum S revolvi potest, si C E et P S concurrant in E, (n) erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$ (per Corol. 3. Prop. VII.) hoc est, si punctum S sit umbilicus ellipseos, ideoque P E detur, ut S P q reciprocè. Q. e. i.

(k) Per naturam Conicorum, facta partium Diametri sunt ad quadrata Ordinatarum ut Diametri transversæ quadratum ad quadratum ejus conjugatæ. (Vide superius de Conicis Theor. II. de Ellipsi et de Hyperbolâ.)

(l) Est $CA^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2$: nam per Lem. XII. $PF \times CD = AC \times BC$, adeóque $PF^2 \times CD^2 = CA^2 \times BC^2$, ac proindè $CA^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2$.

(m) 262. Scriptis seorsim analogiis res clara sit.

$L \times QR : L \times Pv = AC : PC$

$L \times Pv : GvP = L : Gv$

$GvP : Qv^2 = PC^2 : CD^2$

$Qv^2 : QT^2 = CD^2 : CB^2$.

Undè conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR : QT^2 = AC \times L \times PC^2 \times CD^2 : PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$, hoc est, ob $AC \times L = 2BC^2$, $L \times QR : QT^2 = 2PC : Gv$, et ob $2PC = Gv$, $L \times QR = QT^2$, et $L = \frac{QT^2}{QR}$.

(n) Nam (per Corol. 3. Prop. VII.) vis tendens ad centrum C, quam exponat recta C P, est ad vim tendentem ad aliud punctum S, quam exponat recta A, ut $CP \times SP^2$ ad cubum rectæ quæ a centro A ad Tangentem R P Z duceretur parallela ad lineam S P a secundo virium centro ad punctum P curvæ ductam, quæ quidem recta æqualis foret P E, quoniam ipsi esset Parallela et inter easdem Parallelas D C, R P Z, adeóque $CP \times SP^2 : PE^3 = CP : A = \frac{PE^3}{SP^2}$; hoc est, si punctum S sit umbilicus Ellipseos, adeóque P E = A C (260) detur, erit vis ut SP^2 reciprocè; hic autem supponitur talem esse vim ad centrum C tendentem ut tempora periodica circà centra C, et S, æqualia sint, quod supponi potest.

Eâdem brevitate, quâ traduximus problema quintum ad parabolam, et hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem problematis, et usum ejus in sequentibus non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

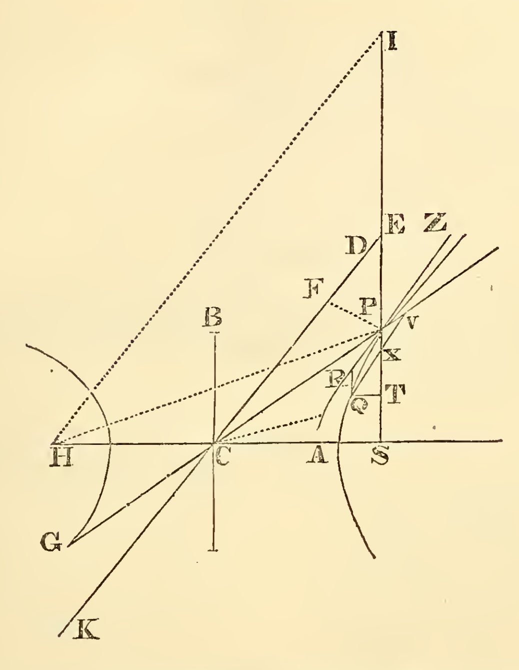
Moveatur corpus in hyperbolâ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto C A, C B semiaxes hyperbolæ; P G, K D, diametri aliæ conjugatæ; P F perpendiculum ad diametrum K D; et Q v ordinatim applicata ad diametrum G P. Agatur S P secans cum diametrum D K in E, tum ordinatim applicatam Q v in x, et compleatur parallelogrammum Q R P x. (°) Patet E P æqualem esse semiaxi transverso A C, eo quod, actâ ab altero hyperbolæ umbilico H lineâ H I, ipsi E C parallelâ, ob æquales C S, C H æquentur E S, E I; adeo ut E P semidifferentia sit ipsarum P S, P I, id est (ob parallelas I H, P R et angulos æquales I P R, H P Z) ipsarum P S, P H, quarum differentia axem totum 2 A C adæquat. Ad S P demittatur perpendicularis Q T. Et hyperbolæ latere recto principali (seu $\frac{2\,B\,C\,q}{A\,C}$) dicto L, erit L × Q R ad L × P v ut Q R ad P v, seu P x ad P v, id est (ob similia triangula P x v, P E C) ut P E ad P C, seu A C ad P C. Erit etiam L × P v ad G v × P v ut L ad G v; et (ex naturâ conicorum) rectangulum G v P ad Q v quad. ut P C q ad C D q; et (per Corol. 2. Lem. VII.) Q v quad. ad Q x quad. punctis Q et P coëuntibus sit ratio æqualitatis; et Q x quad. seu Q v quad. est ad Q T q ut E P q ad P F q, id est, ut C A q ad P F q, sive (per Lem. XII.) ut C D q ad C B q: et conjunctis his omnibus rationibus L × Q R fit ad Q T q ut A C × L × P C q × C D q, seu 2 C B q × P C q × C D q ad P C × G v × C D q × C B q, sive ut 2 P C ad G v. Sed punctis P et Q coëuntibus æquantur 2 P C et G v. Ergo et his proportionalia L × Q R et Q T q (p) æquantur. Ducantur hæc

(°) 263. Est S E = S P + P E et ob æquales E S, E I, est P I = E I + P E = E S + P E = S P + 2 P E, ac proinde P I — S P = 2 P E, ac P E est semidifferentia ipsarum P S, P I; sed angulus H P R = R P S, angulus enim interceptus inter lineas a focis ad punctum Hyperbolæ ductas bifariam dividitur per Tangentem (per Prop. 48. Lib. 3. Conic. Apoll. vide Theor. V. de Hyp.) et R P S = E P Z (per 15. 1. Elem.) adeóque I P R = H P Z, et ob parallelas I H, P R, angulus P H I = H P R = I P Z = H I P, unde H P = P I, adeóque E P, est semidifferentia ipsarum P S P H, et quia differentia rectarum P S, P H, axem totum 2 A C, adæquat (per Prop. 51. Lib. 3. Conic. Apoll. Vide sup. Theor. IV. de Hyberb.) est E P = A C.

(p) 264. Notandum est quod hyperbola

æqualia in $\frac{S P q}{Q R}$, et fiet L × S P q æquale $\frac{S P q \times Q T q}{Q R}$. Ergo (per



Corol. 1. et 5. Prop. VI.) vis centripeta reciprocè est ut L × S P q, id est, reciprocè in ratione duplicatâ distantiæ S P. Q. e. i.

Idem aliter.

Inveniatur vis, quæ tendit ab hyperbolæ centro C. Prodibit hæc distantiæ C P proportionalis. Inde vero (per Corol. 3. Prop. VII.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{P E \text{ cub.}}{S P q}$, hoc est, ob datam P E reciprocè ut S P q. Q. e. i.

Eodem modo demonstratur, quod corpus (q) hac vi centripetâ in centrifugam versâ movebitur in hyperbolâ oppositâ.

sicut in Ellipsi, (ut liquet ex demonstratione Prop. X. et XI.) latus rectum principale sive $L = \frac{Q T^2}{Q R}$.

(q) 265. Nam ex centro C, in tangentem P R productam ducta intelligatur recta ipsi H P parallela, et ea æqualis erit lineæ P E; Etenim ob parallelas P R, C E, et H I, angulus quem linea ipsi H P, parallela efficit cum C E, æqualis erit angulo P H I = H I P = C E P; lineæ autem intrà duas parallelas æqualiter inclinatæ sunt æquales. Est igitur, (per Corol. 3. Prop. VII.) vis centrifuga à Centro C, tendens quâ corpus P, hyperbolam A Q P,

LEMMA XIII.

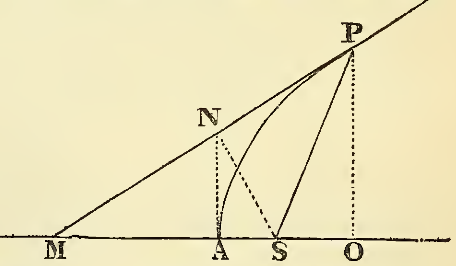
([r]) *Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens est quadruplum distantiæ verticis illius ab umbilico figuræ.*

Patet ex conicis.

LEMMA XIV.

Perpendiculum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici a puncto contactus et a vertice principali figuræ.

Sit enim A P parabola, S umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactus, P O ordinatim applicata ad diametrum principalem, P M tangens diametro principali occurrens in M, et S N linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur A N et ob æquales M S et S P, M N et N P, M A et A O parallelæ erunt rectæ A N et O P; et inde triangulum S A N rectangulum erit ad A, et simile triangulis æqualibus S N M, S N P: ergo P S est ad S N ut S N ad S A. Q. d. e.



Corol. 1. P S q est ad S N q ut P S ad S A.

([s]) *Corol.* 2. Et ob datam S A est S N q ut P S.

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis P M cum recta S N, quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam A N quæ parabolam tangit in vertice principali.

describit ad vim centrifugam a foco H tendentem quâ eandem hyperbolam percurrit ut C P $\times$ H P^2 ad P E^3. Vim a centro C, tendentem quæ est ut C P, exponat recta C P, et alteram vim à foco H directam exponat recta A, et erit $CP \times HP^2 : PE^3 = CP : A = \frac{PE^3}{HP^2}$, hoc est, ob P E æqualem datæ A C, vis a foco H tendens est reciprocè ut H P^2.

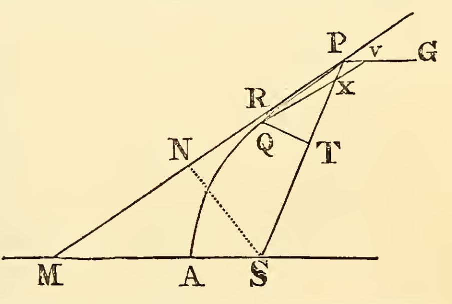
([r]) 266. *Dem.* Illius demonstrationem jam superius in Compendio de Conicis, Theor. IV. de Parobolâ dedimus.

([s]) Cum sit (per Coroll. 1.) $SA \times PS^2 = SN^2 \times PS$, adeóque $SA \times PS = SN^2$; erit ob datam S A, S N^2 ut P S, id est, variationes quadrati S N^2, in eâdem parabolâ erunt ut variationes rectæ S P sive ut distantiæ a foco.

PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VIII.

Moveatur corpus in perimetro parabolæ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat constructio lemmatis, sitque P corpus in perimetro parabolæ, et a loco Q, in quem corpus proxime movetur, age ipsi S P parallelam Q R et perpendicularem Q T, necnon Q v tangenti parallelam, et occurrentem tum diametro P G in v, tum distantiæ S P in x. Jam ob similia triangula (t) P x v, S P M, et æqualia unius latera S M, S P, æqualia sunt alterius latera P x seu Q R et P v. Sed ex conicis quadratum ordinatæ Q v æquale est rectangulo sub latere recto et segmento diametri P v, id est (per Lem. XIII.) rectangulo 4 P S × P v, seu 4 P S × Q R; et punctis P et Q coëuntibus, ratio Q v ad Q x (per Corol. 2. Lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo Q x quad. eo in casu æquale est rectangulo 4 P S × Q R. Est autem (ob similia triangula Q x T, S P N) Q x q ad Q T q ut P S q ad S N q, hoc est (per Corol. 1. Lem. XIV.) ut P S ad S A, id est, ut 4 P S × Q R ad 4 S A × Q R, et inde (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) (u) Q T q et 4 S A × Q R æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, et fiet $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ æquale S P q × 4 S A: et propterea (per Corol. 1. et 5. Prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut S P q × 4 S A, id est, ob datam 4 S A reciprocè in duplicatâ ratione distantiæ S P. Q. e. i.



Corol. 1. (x) Ex tribus novissimis propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis P secundum lineam quamvis rectam P R quâcunque

(t) * Nam ob parallelas M P et Q v, M S et P G, est angulus v P x = P S M et P x v = Q x T = M P S.

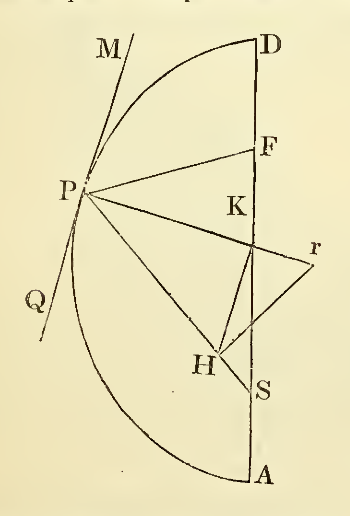
(u) 267. Quoniam latus rectum principale L = 4 A S, et est 4 A S × Q R = Q T², erit etiam in parabolâ ut in cæteris Sectionibus conicis (264), latus rectum principale $L = \frac{QT^2}{QR}$.

(x) 268. Si corpus moveatur in aliquâ sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium, vis centripeta erit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum ab umbilico, et contrà si vis centripeta fuerit quadrato distantiæ a centro virium reciprocè proportionalis, corpus movebitur in aliquâ sectionum conicarum.--Dem. Prima pars propositionis a NEWTONO eleganter demonstrata, potest adhuc aliter et generatim demonstrari. Vis centripeta ut $\frac{SP}{SY^3 \times R}$ (212.) sed in omni sectione conicâ $R = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$ (239.) Ergò $\frac{SP}{SY^3 \times R} = \frac{2SY^3 \times SP}{SY^3 \times L \times SP^3} = \frac{2}{L \times SP^2}$ hoc est, ob datam $\frac{2}{L}$, vis est ut $\frac{1}{SP^2}$. Q. e. 1um.

cum velocitate exeat de loco P, et vi centripetâ, quæ reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliquâ sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; et contra. Nam datis umbilico, et puncto contactus, et positione tangentis, describi potest sectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex datâ vi centripetâ, et velocitate corporis: et orbes duo se mutuo tangentes eâdem vi centripetâ eâdemque velocitate describi non possunt.

Corol. 2. Si velocitas, quâcum corpus exit de loco suo P, ea sit, quâ

Corpus P, datâ cum velocitate secundum directionem datam P Q projiciatur, sitque vis centripetæ ad punctum S tendentis quantitas absoluta data in puncto dato P, in variis a centro distantiis ea vis sit semper in ratione inversâ quadrati distantiæ a centro S, si ea fuerit corporis P velocitas quam vi centripetâ ut est in P uni-



formiter urgente acquireret cadendo per $\frac{1}{2}$ S P et prætereà P S sit ad P Q perpendicularis, corpus P circulum describet cujus centrum S et radius P S (201.) Si verò alia fuerit velocitas, aut P S ad P Q obliqua, corpus P aliam describet orbitam in quâ tangens P Q, non semper erit ad radium vectorem S P perpendicularis. Sit igitur P Q ad S P obliqua, datur P r, radius circuli orbitam a corpore P describendam osculantis in P; ex r in P S demittatur perpendicularis r H, et ex H in P r perpendicularis H K, jungaturque S K; Deindè fiat angulus Q P F complementum ad duos rectos anguli Q P S, et si fuerit P F parallela ipsi S K, describatur parabola cujus umbilicus S, axis S K, et punctum perimetri P, data sunt. Si verò P F ipsi S K occurrat in puncto aliquo F, tunc focis S, et F, et perimetri puncto P datis describatur Hyperbola si puncta S et F cadant ad eandem partem puncti K, et Ellipsis si cadant ad partes contrarias, et corpus P movebitur in sectione conicâ per eam constructionem descriptâ. Nam (per construct.) angulus Q P F, est complementum anguli Q P S, ad duos rectos; sed angulus S P M, est quoque ejusdem anguli Q P S, complementum ad duos rectos, ac proindè Q P F = S P M, ergò subducto communi angulo S P F, erit angulus Q P S = F P M, adeòque Q P, tangens sectionis in P, (Prop. 48. Lib. 3. Conic. Apoll. et per Theor. III. aut IV. de Hyp. Ell. et Parab.) Cum igitur sectionis axis sit S K, et P K, ad tangentem P Q normalis (per constr.) erit P r radius curvaturæ sectionis in puncto P, (239.) eadem igitur est sectionis conicæ et orbitæ quam corpus P describit tangens atque curvatura in puncto P, porrò sectio conica D P A describi potest vi aliquâ centripetâ ad umbilicum S tendente quæ fit semper reciprocè proportionalis quadrato distantiæ ab illo puncto S (per superiùs demonstrata) et ex datis corporis alicujus A sectionem describentis, velocitate in puncto P, directione tangentis P Q, directione vis P S, et curvaturâ sectionis conicæ in P, datur vis centripetæ quantitas absoluta in puncto P, (242.) quâ corpus A in sectione conicâ retinetur in P, ponamus velocitatem corporis A eandem cum velocitate projectionis corporis P orbitam suam describentis, tùm eadem erit ejus orbitæ et Sectionis Conicæ curvatura in P, idem virium centrum S, idem punctum P, eadem tangens P Q, eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ, ac proindè eadem illius quantitas absoluta in puncto P, tam in sectione conicâ quàm in orbitâ a corpore P describendâ. Cùm igitur corpus P, iis positis unicam curvam describere possit et quidem sectionem conicam D P A possit describere, eam reverâ describet (244.) Q. e. 2[um].

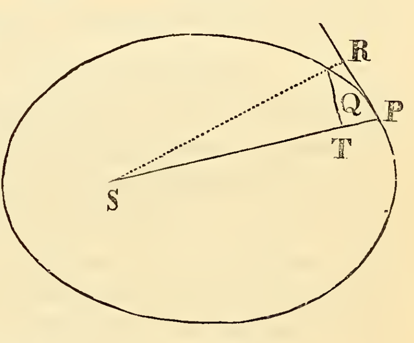
2[am]. hujusce propositionis partem formulis analyticis invenerunt Hermannus et Bernoullius in Monumentis Academiæ Parisiensis, an. 1710.

lineola P R in minimâ aliquâ temporis particulâ describi possit; et vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium Q R movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ sectione; cujus latus rectum principale est quantitas illa (y) $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi lineolæ P R, Q R in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad ellipsin; et casum excipio, ubi corpus rectà descendit ad centrum.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, et vis centripeta sit reciprocè in duplicatâ ratione distantiæ locorum a centro; dico quod orbium latera recta principalia sunt in duplicatâ ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore describunt.

(z) Nam (per Corol. 2. Prop. XIII.) latus rectum L æquale est quantitati $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi coëunt puncta P et Q. Sed linea minima Q R dato tempore est ut vis centripeta generans, hoc est (per hypothesin) reciprocè ut S P q. Ergo $\frac{QTq}{QR}$ est ut Q T q × S P q, hoc est, latus rectum L in duplicatâ ratione areæ Q T × S P. Q. e. d.



Corol. (a) Hinc ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti, et

(y) * Patet ex notâ 267.

(z) 269. Sint in Hypothesi propositionis XIV. duarum sectionum conicarum arcus quam minimi P Q, p q, simul descripti, L, l, earumdem latera recta, (et per Prop. VI. et Hyp.) Q R : q r = $Sp^2 : SP^2$. Sed (267.) $\frac{QT^2}{QR} : \frac{qt^2}{qr} = L : l = \frac{QT}{Sp^2} : \frac{qt^2}{SP^2} = QT^2 \times SP^2 : qt^2 \times Sp^2$. Sunt autem Q T × S P, q t × S p, ut sectores evanescentes S Q P, S q p, ergò latera recta L, l, sunt in duplicatâ ratione arearum simul descriptarum · nam areæ quævis simul descriptæ sunt semper ut sectores S Q P, S q p, simul descripti, ob æquabilem circà centrum virium S arearum descriptionem in utrâque sectione conicâ. Hinc in analogiis loco quadrati areæ dato tempore descriptæ substitui potest sectionis latus rectum et contrà, dummodo id fiat in Hypothesi propositionis.

(a) 270. *Hinc Ellipseos area tota eique proportionale rectangulum sub axibus* (250.) *est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti et ratione temporis periodici.* Namque tempus periodicum (252.) est ut area tota directè et area tempore dato descripta inversè, adeòque area tota est ut area Q T × S P quæ dato tempore describitur (hoc est, (269.) ut radix quadrata lateris recti) ducta in tempus periodicum.

ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore describitur, ducta in tempus periodicum.

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

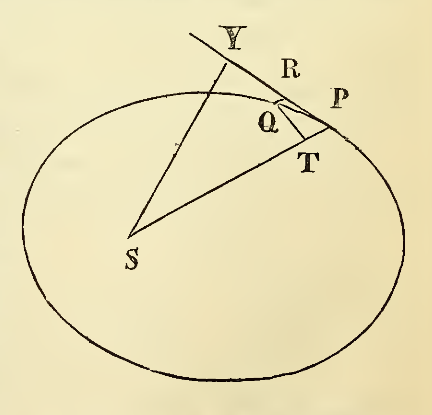
Iisdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsibus sunt in ratione sesquiplicatâ majorum axium.

([b]) Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem et latus rectum, atque ideo rectangulum sub axibus est in ratione composita ex subduplicatâ ratione lateris recti et sesquiplicatâ ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per Corol. Prop. XIV.) est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti et ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, et manebit sesquiplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis. Q. e. d.

([c]) *Corol.* Sunt igitur tempora periodica in ellipsibus eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus ellipseon.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Iisdem positis, et actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione compositâ ex ratione perpendiculorum inversè, et subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.



Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendiculum SY, et velocitas corporis P erit reciprocè in subduplicatâ ratione quantitatis $\frac{SYq}{L}$. Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus PQ in datâ temporis particulâ descriptus, hoc est (per Lem. VII.) ut tangens ([d]) PR, id est, ob proportionales PR ad QT et SP ad SY, ut $\frac{SP \times QT}{SY}$,

([b]) 271. Sit Ellipsis axis major A, minor B, Latus rectum L, tempus periodicum T; et quoniam $A : B = B : L$, erit $B^2 = A \times L$, $B = A^{\frac{1}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$, $A \times B = A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$, sed rectangulum $A \times B$, (270.) est ut $T \times L^{\frac{1}{2}}$, ergò $A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$ est ut $T \times L^{\frac{1}{2}}$, et dividendo utrumque terminum per $L^{\frac{1}{2}}$ erit $A^{\frac{3}{2}}$ ut T.

([c]) 272. Circulus est species ellipsis cujus foci cum centro coincidunt et Latus rectum cum diametro; sed tempora periodica in Ellipsibus quæ axem majorem æqualem habent sunt æqualia (271.) ergò in Ellipsi et circulo cujus diameter seu axis æquatur axi majori ellipsis, tempora periodica æquantur.

([d]) • Velocitas est ut tangens PR, sed ob an-

sive ut S Y reciprocè et S P × Q T directè; estque S P × Q T ut area dato tempore descripta, id est (per Prop. XIV.) in subduplicatâ ratione lateris recti. Q. e. d.

Corol. 1. (e) Latera recta principalia sunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum, et duplicatâ ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum, in (f) maximis et minimis ab umbilico communi distantiis, sunt in ratione compositâ ex ratione distantiarum inversè, et subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè. Nam perpendicula jam sunt ipsæ distantiæ.

Corol. 3. (g) Ideoque velocitas in conicâ sectione, in maximâ vel minimâ ab umbilico distantiâ, est ad velocitatem in circulo in eadem a centro distantia in subduplicatâ ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam.

Corol. 4. (h) Corporum in ellipsibus gyrantium velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi sunt eædem, quæ corporum gyrantium in circulis ad easdem distantias; hoc est (per Corol. 6. Prop. IV.) reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum. Nam perpendicula jam sunt semiaxes minores, et hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias et latera recta. Componatur hæc ratio inversè cum subduplicatâ ratione laterum rectorum directè, et fiet ratio subduplicata distantiarum inversè.

Corol. 5. In eadem figurâ, vel etiam in figuris diversis, quarum latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corporis est reciprocè ut perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. (i) In parabolâ velocitas est reciprocè in subduplicatâ rati-

gulos ad T et Y rectos et angulos Q P T, Y P S, punctis P, Q, coëuntibus æquales, triangulum evanescens Q P T, simile erit triangulo P S Y, adeòque Q P (P R) : Q T = S P : S Y, et $P R = \frac{SP \times QT}{SY}$.

(e) * Velocitatis quadratum c^2, est directè ut $\frac{L}{SY^2}$ (Prop. XVI.). ergò L est ut $c^2 \times SY^2$.

(f) * Maximæ et minimæ distantiæ sunt axis partes ab umbilico ad vertices principales contentæ, adeoque cùm illic axis sit perpendicularis tangenti, ipsa perpendicula ad tangentem in maximis et minimis distantiis sunt ipsæ distantiæ; mediocres distantiæ sunt distantiæ ab umbilico ad vertices axis minoris Ellipseos, adeòque semiaxi majori æquantur.

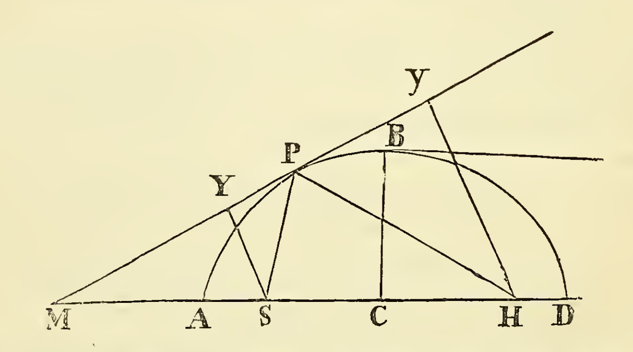
(g) * Nam circulus ille (272.) est ellipsis cujus latus rectum est ipsa diameter, ideoque est ipsa dupla distantia ab umbilico seu centro, quare cum eadem ponatur distantia tam in conicâ sectione quàm in circulo, velocitates sunt in subduplicatâ ratione laterum rectorum, hoc est in subduplicatâ ratione lateris recti sectionis conicæ, ad duplam illam distantiam quæ est latus rectum circuli.

(h) * Sit A corporis in Ellipsi gyrantis mediocris distantia ab umbilico, sit etiam circuli radius A; semiaxis minor, seu perpendicularis demissa ex umbilico in tangentem axi majori parallelam sit B, latus rectum L, et circuli latus rectum (272.) erit 2 A, velocitas in Ellipsi sit C, in circulo c, et erit (per Prop. XVI.) $C^2 : c^2 = \frac{L}{B^2} : \frac{2A}{A^2} = L \times A : 2B^2$; sed ex Conicis distantiâ a foco ad extremitatem semiaxis minoris (quæ est mediocris distantia) est æqualis semiaxi majori, est ergo distantia A semiaxis major, ideoque cum ex conicis sit A : B = 2 B : L, est $2B^2 = A \times L$, ergò $C^2 = c^2$, et C = c.

(i) *In Parabolâ velocitas est reciprocè in subduplicatâ ratione distantiæ corporis ab umbilico figuræ;* cùm enim velocitas sit reciprocè ut per-

one distantiæ corporis ab umbilico figuræ; in ellipsi magis variatur, in hyperbolâ minus quam in hac ratione. Nam (per Corol. 2. Lem. XIV.) perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem parabolæ est in subduplicatâ ratione distantiæ. In hyperbolâ perpendiculum minus variatur, in ellipsi magis.

Corol. 7. (k) In parabolâ velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem a



pendiculum demissum ab umbilico ad Tangentem, per præced. Coroll, et (per Cor. 2. Lem. XIV.) quadratum ejus perpendiculi sit semper in Parabolâ ut distantia a foco, erit velocitas reciproce ut radix quadrata illius distantiæ a foco, sive in *subduplicatâ ratione distantiæ*, &c.

276. *Lemma.* Sit Ellipsis A P B, cujus axis major A D, foci S et H, semiaxis minor B C; M y tangens in P, S Y et H y in tangentem perpendiculares; ob angulos Y P S, H P y, æquales (Prop. 48. Lib. 3. Conic. Apoll. sup. Theor. IV. de Ellip.) similia sunt triangula S P Y, H P y, undè S P : S Y : = H P : H y $= \frac{SY \times HP}{SP}$, ac proindè $SY \times Hy = \frac{SY^2 \times HP}{SP} = BC^2$ (ex conicis. Vid. sup. n. 236.) sed H P + S P = A D (Prop. 52. Lib. 3. Conic. Apoll. sup. Theor. III. de Ellipsi) unde est HP = A D — S P ergò $\frac{SY^2 \times \overline{AD - SP}}{SP} = BC^2$; et $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$. Ergò in Ellipsi, S Y variatur in ratione $\frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$ sive ob quantitatem BC^2, constantem in ratione $\frac{SP}{AD - SP}$.

Crescat distantia S P, minor fiet A D — S P, si non mutaretur denominator fractionis $\frac{SP}{AD - SP} = SY^2$, cresceret SY^2 sicut S P, cum autem minuatur denominator S P crescente, eo ipso major fit valor fractionis $\frac{SP}{AD - SP}$ ergo crescente S P, SY^2 magis crescit quam in solâ ratione S P, *ergo perpendiculum in ellipsi magis variatur quam in subduplicatâ ratione distantiæ* S P.

In Hyperbolâ verò, quoniam H P — S P = A D (Prop. 51. Lib. 3. Conic. Apoll. Theor. III. de Hyp.) et H P = A D + S P, eodem modo reperitur $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD + PS}$, et crescente S P, crescit etiam A D + S P, si idem maneret denominator cresceret SY^2 sicut S P, denominatore aucto, fractio $\frac{SP}{AD + SP}$ fit minor quam eo manente, sed ea exprimit valorem quadrati perpendiculi S Y, ergo SY^2 minus crescit quàm S P sive *perpendiculum in Hyperbolâ minus variatur quam in subduplicatâ ratione distantiæ* S P.

(k) 277. Sit latus rectum parabolæ L, adeoque distantia foci a vertice $\frac{1}{4}$ L, et ex umbilico tanquam centro ac radio $\frac{1}{4}$ L, describatur circulus, ejus latus rectum seu diameter erit $\frac{1}{2}$ L: unde velocitas corporis in vertice parabolæ erit ad velocitatem corporis in illo circulo revolventis ut $\sqrt{L}$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}L}$, hoc est, ut $\sqrt{2}$ ad 1. (Corol. 2. hujusce Prop.) sed per Corol. 6. velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in aliâ quâvis ab umbilico distantiâ S P, ut $\sqrt{SP}$ ad $\sqrt{\frac{1}{4}L}$, et (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{4}$ L, est etiam ad

centro distantiam in subduplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem; ([l]) in ellipsi minor est, in hyperbolâ major quàm in hac ratione. Nam per hujus corollarium secundum velocitas in vertice parabolæ est in hac ratione, et per corollaria sexta hujus et propositionis quartæ servatur eadem proportio in omnibus distantiis. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam, in ellipsi minor est, in hyperbolâ major.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in sectione quâvis conicâ est ad velocitatem gyrantis in circulo in distantiâ dimidii lateris recti principalis sectionis, ut distantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem sectionis demissum. ([m]) Patet per corollarium quintum.

Corol. 9. ([n]) Unde cum (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas gyran-

velocitatem in alio circulo cujus radius S P, ut $\sqrt{SP}$, ad $\sqrt{\frac{1}{4}L}$; quarè velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in eâdem parabolâ ad distantiam S P, ut velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{4}$ L, ad velocitatem in circulo cujus radius est S P, ac proindè alternando velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in circulo radio $\frac{1}{4}$ L descripto, hoc est, $\sqrt{2}$ ad 1, ut velocitas in parabolâ in distantiâ SP, ad velocitatem in circulo ad eandem a centro seu umbilico distantiam descripto.

278. *Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam*; nam velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$ S P est ad velocitatem in circulo cujus radius S P, ut $\sqrt{2}$ ad 1, (per Corol. 6. Prop. IV.) sed velocitas in parabolâ ad distantiam S P, est ad velocitatem in circulo cujus radius S P, etiam ut $\sqrt{2}$ ad 1, velocitas igitur in parabolâ ad distantiam S P, æquatur velocitati in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$ S P.

([l]) 279. *In Ellipsi velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem a centro distantiam in minore ratione* quam $\sqrt{2}$ ad 1; *in Hyperbolâ in ratione majore.* Sit enim Ellipsis vel hyperbolæ latus rectum L, distantia ab umbilico S P, perpendiculum ad tangentem sectionis in puncto P demissum S Y; S P, sit radius circuli, c sit velocitas in Ellipsi vel hyperbola ad distantiam S P; C, velocitas in circulo, et erit (per Prop. XVI.) $c^2 : C^2 = \frac{L}{SY^2} : \frac{2SP}{SP^2} = L \times SP : 2SY^2$; sed (276) $2SY^2 = \frac{2BC^2 \times SP}{AD \mp SP}$, ergo $c^2 : C^2 = L \times SP : \frac{2BC^2 \times SP}{AD \mp SP} = L \times \overline{AD \mp SP} : 2BC^2$; et ob $L \times AD = 4BC^2$ seu $2BC^2 = \frac{L \times AD}{2}$, est $c^2 : C^2 = 2AD \mp 2SP : AD$; undè in Ellipsi in quâ 2 S P habet signum —, ratio c^2 ad C^2, minor est quam ratio 2, ad 1, et ratio c ad C, minor quam ratio $\sqrt{2}$, ad 1; in hyperbolâ major ob + 2 S P (276.)

280. *Corol.* Quoniam distantia ab altero sectionis foco $HP = AD \mp SP$, erit $c^2 . C^2 = 2HP : AD = HP : \frac{1}{2}AD$, hoc est, velocitas in Ellipsi et hyperbolâ ad quamvis ab umbilico seu centro virium distantiam S P est ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam in ratione subduplicatâ distantiæ H P ab altero umbilico ad semiaxem majorem.

([m]) * Nam iste circulus et sectio Conica idem latus rectum habent, quia in circulo distantia a Centro semi-diametro æquatur et tota diameter est latus Rectum, ideo velocitates sunt reciprocè ut perpendicula in Tangentem demissa (per Cor. 5 hujusce) sed in circulo semidiameter perpendiculo æquatur, ergo velocitates in sectione et in circulo sunt ut semi-diameter circuli ad Perpendiculum, &c.

([n]) 281. Sit C velocitas corporis gyrantis in circulo ad distantiam dimidii lateris recti $\frac{1}{2}$ L, c velocitas in sectione conicâ ad distantiam S P, K velocitas in circulo ad eandem distantiam S P, et erit (per Corol. 8.) $c^2 : C^2 = \frac{1}{4}L^2 : SY^2$ (et per Cor. 6. Prop. IV.) $C^2 : K^2 = SP : \frac{1}{2}L$. undè, ex æquo, $c^2 : K^2 = SP \times \frac{1}{4}L^2 : SY^2 \times \frac{1}{2}L = SP \times \frac{1}{2}L : SY^2$ Fiat $SP : m = m : \frac{1}{2}L$, et erit $m^2 = SP \times \frac{1}{2}L$, ac proindè $c^2 : K^2 = m^2 : SY^2$ et $c : K = m : SY$.

282. Sit C, centrum Ellipsis, C B semiaxis minor, foci S et H, tendatque vis centripeta ad focum S; velocitas in P erit ad velocitatem in B, in subduplicatâ ratione distantiæ H P a foco H, ad distantiam S P ab altero foco seu centro virium S; Nam velocitas in P dicatur C, velocitas in B dicatur c. et erit (per Cor. 5. Prop. XVI.) $C : c = CB : SY$, adeóque $C^2 : c^2 = CB^2 : SY^2$, hoc est, ob $CB^2 = SY \times Hy$ (235.) $C^2 : c^2 = SY \times Hy : SY^2 = Hy : SY$; sed ob similia

tis in hoc circulo sit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in conicâ sectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eâdem distantiâ, ut media proportionalis inter distantiam illam communem et semissem principalis lateris recti sectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

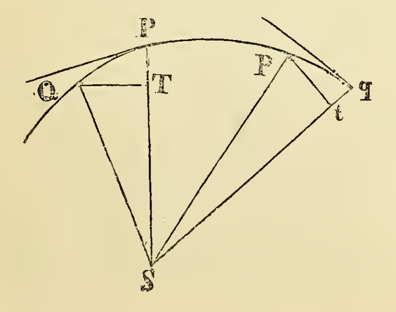
Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, et quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea, quam corpus describit de loco dato cum datâ velocitate secundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum S ea sit, quâ corpus p in orbitâ quâvis datâ p q gyretur, et cognoscatur hujus velocitas in loco p. De loco P secundum lineam P R exeat corpus P cum datâ velocitate, et mox inde, cogente vi centripetâ, deflectat illud in coni sectionem P Q. Hanc igitur recta P R tanget in P. Tangat itidem recta aliqua p r orbitam p q in p, et si ab S ad eas tangentes demitti intelligantur per-

triangula S P Y, H P y, H y : S Y = H P : S P. Ergò $C^2 : c^2 = H P : S P$, et $C : c = H P^{\frac{1}{2}}, S P^{\frac{1}{2}}$, Q. e. d.

Theorema illud invenit clarissimus Geometra Abrahamus de Moivre.

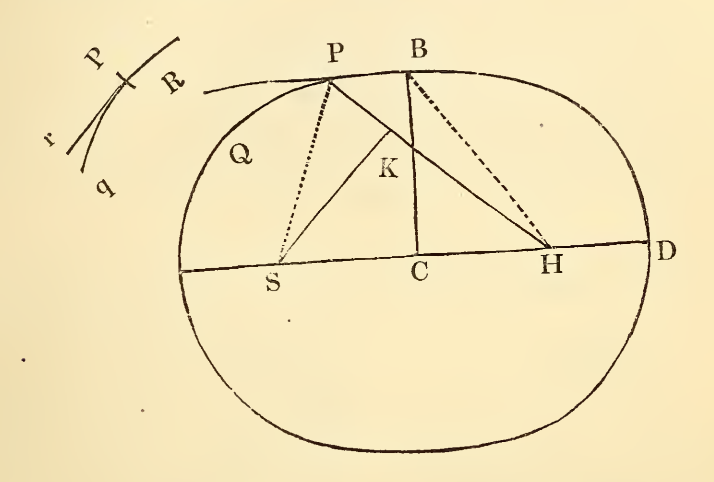
283. Velocitas angularis corporis P, in quâvis orbitâ Q P p, revolventis seu angulus P S Q, quem radius vector S P, dato tempore minimo describit est directè ut Q T perpendicularis ad radium vectorem S P, et distantia S P inversè, dum puncta Q et P coëunt, nam linea perpendicularis Q T pro arcu circuli haberi potest, undè angulus $P S Q = \frac{Q T}{S P}$ (155.)



284. *Corol.* 1. Hinc velocitas angularis in eâdem orbitâ est ubique reciprocè in duplicatâ ratione distantiæ SP a centro virium S. Nam sectores P S Q, p S q, eodem tempusculo descripti sunt æquales (Prop. I.) Undè $Q T \times S P = q t \times S p$, adeóque $Q T : q t = Sp : S P$, et hinc $\frac{Q T}{S P} : \frac{q t}{S p} = \frac{S p}{S P} : \frac{S P}{S p} = S p^2 : S P^2$.

285. *Corol.* 2. Velocitates angulares in sectionibus conicis circà umbilicum communem ceu centrum virium descriptis sunt inter se ut radices quadratæ laterum rectorum principalium directè et quadrata distantiarum inversè. Nam, (per Prop. XIV.) Latera recta L, l, sunt in duplicatâ ratione sectorum P S Q, p S q, simul descriptorum, seu $L^{\frac{1}{2}} : l^{\frac{1}{2}} = Q T \times S P : q t \times S p$, adeóque $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{S P} : \frac{l^{\frac{1}{2}}}{S p} = Q T : q t$; et hinc velocitates angulares seu anguli minimi P S Q, p S q, hoc est, $\frac{Q T}{S P}, \frac{q t}{S p}$, sunt ut $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{SP^2}, \frac{l^{\frac{1}{2}}}{S p^2}$.

pendicula, erit (per Corol. 1. Prop. XVI.) latus rectum principale coni sectionis ad latus rectum principale orbitæ in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum et duplicatâ ratione velocitatum, atque ideo



datur. ([a]) Sit L coni sectionis latus rectum. Datur præterea ejusdem coni sectionis umbilicus S. Anguli R P S complementum ad duos rectos fiat angulus R P H; et dabitur positione linea P H, in quâ umbilicus alter H locatur. Demisso ad P H perpendiculo S K, erigi intelligatur semiaxis conju-

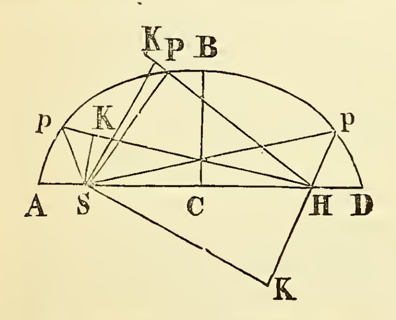
([a]) 286. Solutio hujus problematis duas continet partes; Sit enim corpus e puncto P secundum lineam P R datâ cum velocitate projectum et retineatur circa punctum S per vim centripetam quæ sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro cujusque quantitas absoluta in puncto P sit cognita, id corpus describet (per Cor. 1. Prop. XIII.) sectionem aliquam conicam cujus 1°. quæritur latus rectum principale, 2°. Dato umbilico S illius sectionis, puncto P, tangente P R, et latere recto quæritur alter umbilicus, quo nempe invento et ex cæteris datis describetur sectio conica quam corpus propositum percurrit.

Ad primam solutionis partem, fingitur sectio quælibet conica cujus umbilicus sit S, et alter umbilicus et latus rectum ad arbitrium sumuntur, unde in quovis ejus puncto P duci poterit tangens, et quantitas vis in eo puncto erit cognita, est enim ad vim in puncto P quæ data est reciprocè ut quadrata linearum S p, S P; Invenietur etiam velocitas in eo puncto p; Nam velocitas corporis gyrantis in circulo ad distantiam S p (sive arcus in eo descriptus tempore quo arcus P Q describitur) est media proportionalis inter vim centripetam in p, quæ inventa est, et duplam distantiam S p (per naturam circuli), hæc verò est ad velocitatem in hâc sectione conicâ, ut perpendiculum ab S ad tangentem communem demissum ad mediam proportionalem inter distantiam S p et semissem lateris recti istius sectionis.

Cum ergo (per Cor. 1. Prop. XVI.) *Latera recta principalia sectionum circà umbilicum communem descriptarum sint in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendiculorum et duplicatâ ratione velocitatum* et ob datas tangentes in p et P dentur perpendicula ex S in eas tangentes demissa, deturque velocitas corporis moti in P et inventa sit velocitas in puncto p, datur ratio lateris recti sectionis assumptæ ad latus rectum sectionis quam corpus P describit; Quod ergo invenitur, eratque primum.

gatus B C, (b) et erit $S\,P\,q - 2\,K\,P\,H + P\,H\,q = S\,H\,q = 4\,C\,H\,q = 4\,B\,H\,q - 4\,B\,C\,q = \overline{S\,P + P\,H}$: quad. $- L \times \overline{S\,P + P\,H}$ (c) $= S\,P\,q + 2\,S\,P\,H + P\,H\,q - L \times \overline{S\,P + P\,H}$. Addantur utrobique $2\,K\,P\,H - S\,P\,q - P\,H\,q + L \times \overline{S\,P + P\,H}$, et fiet $L \times \overline{S\,P + P\,H} = 2\,S\,P\,H + 2\,K\,P\,H$, seu S P + P H ad P H ut 2 S P + 2 K P ad L. Unde datur P H tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam 2 S P + 2 K P, jacebit P H ad eandem partem tangentis P R cum linea P S; ideóque figura erit ellipsis, et ex datis umbilicis S, H, et axe principali S P + P H, dabitur. Sin tanta sit corporis velocitas ut latus rectum

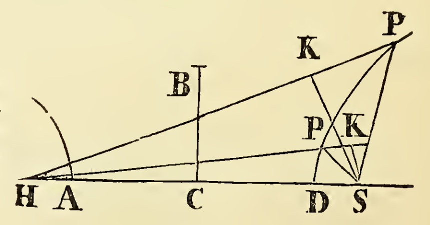
(b) *Erit* $S\,P^2 - 2\,K\,P \times P\,H + P\,H^2 = S\,H^2$, Etenim (per 12. et 13. 2. Elem.) in omni triangulo S P H, quadratum lateris S H



quod consideratur ut hypothenusa anguli P, æquatur quadratis aliorum laterum S P, P H dempto duplo rectanguli lateris P H in quod cadit perpendiculum, ducti in partem P K ab angulo P ad perpendiculum usque interceptam, quæ quidem P K sumitur cum signo + si sit ab eâdem parte tangentis ac S et cum signo — si sit in parte oppositâ.

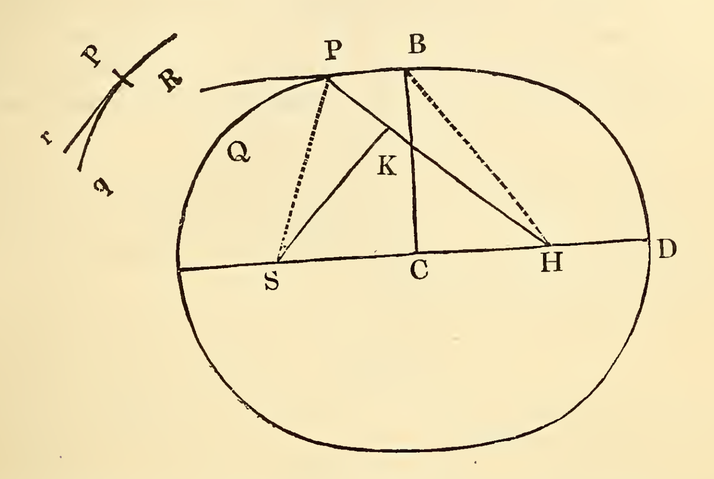
(c) 287. $S\,H^2 = 4\,C\,H^2 = 4\,B\,H^2 - 4\,B\,C^2$, &c. Ex naturâ ellipseos est 2 B H æqualis axi majori 2 A C ideóque æqualis S P + P H et $4\,B\,H^2 = \overline{S\,P + P\,H}^2$, pariter est 2 A C : 2 B C = 2 B C : L est ergo $4\,B\,C^2 = L \times 2\,A\,C$ sive $L \times \overline{S\,P + P\,H}$ unde est $4\,B\,H^2 - 4\,B\,C^2 = \overline{S\,P + P\,H}^2 - L \times \overline{S\,P + P\,H}$.

Collatis itaque valoribus ejusdem quantitatis $S\,H^2$, est $S\,P^2 - 2\,K\,P \times P\,H + P\,H^2 = S\,P^2 + 2\,S\,P \times P\,H + P\,H^2 - L \times \overline{S\,P + P\,H}$, utrinque detractis æqualibus manet $- 2\,K\,P \times P\,H = 2\,S\,P \times P\,H - L \times \overline{S\,P + P\,H}$ transpositisque partibus negativis est $L \times \overline{S\,P + P\,H} = 2\,S\,P \times P\,H + 2\,K\,P \times P\,H$ sive $\overline{2\,S\,P + 2\,K\,P} \times P\,H$ unde est 2 S P + 2 K P : L = S P + P H : P H et dividendo 2 S P + 2 K P — L : L = S P : P H unde quo magis accedit valor lateris recti L ad quantitatem 2 S P + 2 K P, eo major est P H respectu S P, si L = 2 S P + 2 K P, infinitum est S P respectu P H, hoc est, ellipsis abit in parabolam, si L sit majus quam 2 S P + 2 K P, primus terminus proportionis fit negativus, ideóque P H in partem oppositam tangentis cadet et sectio fiet hyperbola; manentibus autem cæteris crescit latus rectum cum velocitate in puncto P datâ: Unde quo major fit velocitas respectu vis centripetæ eo magis elongatur ellipsis quam describit corpus propositum vel etiam in parabolâ movetur, et tandem in hyperbolâ.



288. Demonstratio pro hyperbolâ ita instituitur: Quia P K non est in eâdem parte tangentis ac S, sumitur P K cum signo — ideóque est $S\,H^2 = S\,P^2 + 2\,K\,P \times P\,H + P\,H^2$, et per naturam hyperbolæ $S\,H^2 = 4\,C\,H^2 = 4\,C\,A^2 + 4\,C\,B^2$ sive quia $2\,C\,A = P\,H - S\,P$ et $4\,C\,B^2 = L \times 2\,C\,A$ est $S\,H^2 = P\,H^2 - 2\,S\,P \times P\,H + S\,P^2 + L \times \overline{P\,H - S\,P}$ unde collatis valoribus $S\,H^2$ et detractis quantitatibus communibus est $2\,K\,P \times P\,H = - 2\,S\,P \times P\,H + L \times \overline{P\,H - S\,P}$ et transpositis quantitatibus negativis est $2\,K\,P \times P\,H + 2\,S\,P \times P\,H = L \times \overline{P\,H - S\,P}$ unde est 2 S P + 2 K P : L = P H — S P : P H, et convertendo L — 2 S P — 2 K P : L = S P : P H.

L æquale fuerit 2 S P + 2 K P, longitudo P H infinita erit; et propterea figura erit parabola axem habens S H parallelum lineæ P K, et inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo



P exeat, capienda erit longitudo P H ad alteram partem tangentis; ideóque tangente inter umbilicos pergente, figura erit hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum S P et P H, et inde dabitur. Nam si corpus in his casibus revolvatur in conicâ sectione sic inventâ, demonstratum est in Prop. XI, XII, et XIII, quod vis centripeta erit ut quadratum distantiæ corporis a centro virium S reciprocè; ideóque linea P Q rectè exhibetur, quam corpus tali vi describet, de loco dato P, cum datâ velocitate, secundum rectam positione datam P R egrediens. Q. e. f.

Corol. 1. Hinc in omni coni sectione ex dato vertice principali D, latere recto L, et umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo D H ad D S ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum et 4 D S. ([d]) Nam proportio S P + P H ad P H ut 2 S P + 2 K P ad L in casu hujus corollarii, fit D S + D H ad D H ut 4 D S ad L, et divisim D S ad D H ut 4 D S — L ad L.

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali D, invenietur orbita expeditè, capiendo scilicet latus rectum ejus ad duplam distantiam D S, in duplicatâ ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam D S gyrantis (per Corol. 3. Prop. XVI.);

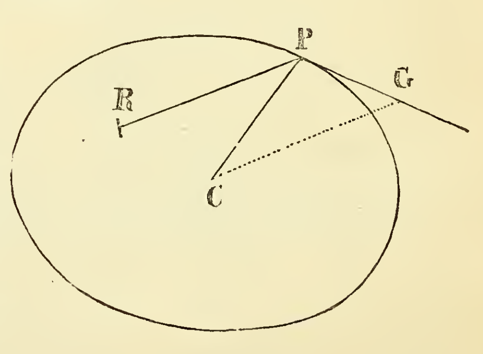
([d]) 289. In casu hujus corollarii punctum P cadit in D, punctum K cadit in S, fitque P K = D S = S P, et P H = D H. Quarè in omni sectione conicâ est D H, ad D S, ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum et 4 D S.

dein D H ad D S ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum et 4 D S.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in sectione quâcunque conicâ, et ex orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest orbis, in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliquâ extrinsecus impressâ continuo perturbetur, innotescet cursus quam proximè, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, et ex seriei analogiâ mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Scholium.



Si corpus P vi centripetâ ad punctum quodcunque datum R tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque sectionis conicæ, cujus centrum sit C; et requiratur lex vis centripetæ: ducatur C G radio R P parallela, et orbis tangenti P G occurrens in G; et [e] vis illa (per Corol. 1. et Schol. Prop. X. et Corol. 3. Prop. VII.) erit ut $\frac{\text{C G cub.}}{\text{R P quad.}}$

[e] 290. Vis ad centrum vel a centro C, tendens est ut C P, (per Corol. 1. Prop. X. et Not. 232.) adeóque exponatur per lineam C P; vis ad punctum R, tendens exponatur per lineam A, et (per Corol. 3. Prop. VII.) erit C P $\times$ R P^2 : C G^3 = C P : A = $\frac{\text{C G}^3}{\text{R P}^2}$.

SECTIO IV.

De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum et hyperbolicorum ex umbilico dato.

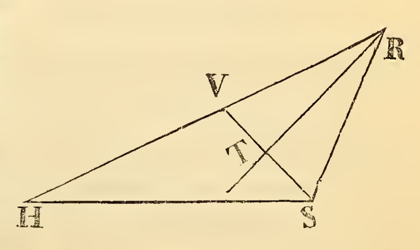
LEMMA XV.

Si ab ellipseos vel hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* S V, H V, *quarum una* H V *æqualis sit axi principali figuræ, id est, axi in quo umbilici jacent, altera* S V *a perpendiculo* T R *in se demisso bisecetur in* T; *perpendiculum illud* T R *sectionem conicam alicubi tanget: et contra, si tangit, erit* H V *æqualis axi principali figuræ.*

Secet enim perpendiculum T R rectam H V productam, si opus fuerit, in R; et jungatur S R. Ob æquales T S, T V, æquales erunt et rectæ S R, V R et anguli T R S, T R V. ([f]) Unde punctum R erit ad sectionem conicam, et perpendiculum T R tanget eandem et contra. Q. e. d.

([f]) * Si fuerint S, et H, Ellipseos umbilici, erit S R + R H = H V = axi majori, ac proindè R punctum perimetri Ellipsis quam T R tangit in R, ob angulos T R S, T R V, æquales (per Prop. 52. et 46. Lib. 3. Conic. Apollon. Theor. III. et IV. de El.) et contrà si T R tangat Ellipsim in R, et ducatur S V, ad T R perpendicularis, erit ob angulos T R S, T R V, æquales V R = S R, et V H = S R + R H = axi majori.

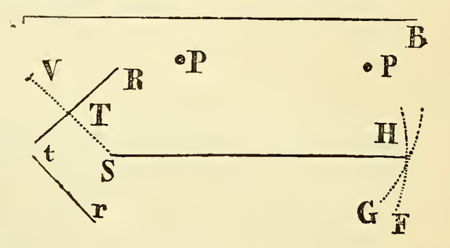
* Si fuerint S, et H, Hyperbolæ umbilici ob æquales T S, T V, erit S R = V R, et H R — S R = H V æqualis axi majori, et R punctum Hyperbolæ quam tangit in R recta T R ob angulos V R T, T R S, æquales (per Prop. 51. et 46. Lib. 3. Conic. Apoll. Theor. III. et IV. de Hyperb.) et contrà si T R tangat Hyperbolam in R, et agatur S V ad T R perpendicularis erit V R = S R, et H V = H R — R S, æqualis axi majori, ut patet.



PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

Datis umbilico et axibus principalibus describere trajectorias ellipticas et hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, et rectas positione datas contingent.

Sit S communis umbilicus figurarum; A B longitudo axis principalis trajectoriæ cujusvis; P punctum per quod trajectoria debet transire; et T R recta quam debet tangere. Centro P intervallo A B—S P, si orbita sit ellipsis, vel A B + S P, si ea sit hyperbola, describatur circulus H G. Ad tangentem T R demittatur perpendiculum S T, et producatur idem ad V, ut sit T V æqualis S T; centroque V et intervallo A B describatur circulus F H. Hâc methodo sive dentur duo puncta P, p, sive duæ tangentes T R, t r, sive punctum P et tangens T R, describendi sunt circuli duo. Sit H eorum intersectio communis, et umbilicis S, H, axe illo dato describatur trajectoria. Dico factum. Nam trajectoria descripta (eo quod P H + S P in ellipsi, et P H — S P in hyperbola æquatur axi) transibit per punctum P, et (per Lemma superius) tanget rectam T R. Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo P, p, vel tanget rectas duas. T R, t r. (g) Q. e. f.



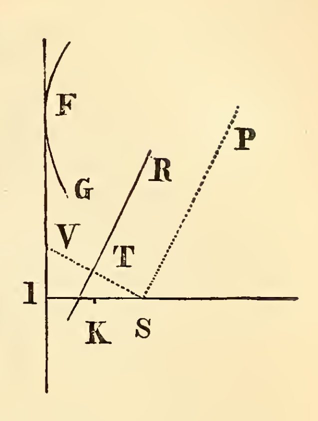
PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, et rectas positione datas continget.

Sit S umbilicus, P punctum et T R tangens trajectoriæ describendæ. Centro P intervallo P S describe circulum F G. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem S T, et produc eam ad V, ut sit T V æqualis S T. Eodem modò describendus est alter circulus f g, si datur alterum punctum p; vel inveniendum alterum punctum v, si datur altera tangens

(g) Si orbita sit Hyperbola, focus H, erit in rectâ H S, ultra S, productâ.

t r; dein ducenda recta I F quæ tangat duos circulos F G, f g si dantur duo puncta P, p, vel transeat per duo puncta V, v, si dantur quæ tangentes T R, t r, vel tangat circulum F G et transeat per punctum V, si datur punctum P et tangens T R. Ad F I demitte perpendicularem S I, eamque biseca in K; et axe S K, vertice principali K describatur parabola. Dico factum. (h) Nam parabola, ob æquales S K et I K, S P et F P, transibit per punctum P; et (per Lem. XIV. Corol. 3.) ob æquales S T et T V et angulum rectum S T R, tanget rectam T R. Q. e. f.



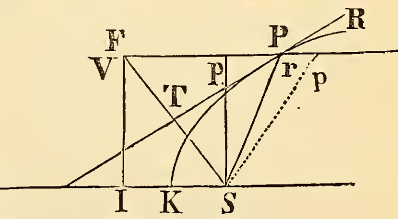
PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis specie (i) datam describere, quæ per data puncta transibit et rectas tanget positione datas.

Cas. 1. Dato umbilico S, describenda sit trajectoria A B C per puncta duo B, C. Quoniam trajectoria datur specie, dabitur ratio axis principalis

(h) 291. *Nam Parabola ob æquales S K et I K, S P et F P, transibit per punctum P* scilicet Parabola descripta *ob æquales S K et I K* habet pro directrice lineam I F (per Theor. II. de Parab. n. 224. de Conicis), cùm verò distantia puncti cujusvis Parabolæ a Directrice sit æqualis distantiæ ejus puncti a foco, vice versâ, punctum quod æqualiter a foco et a Directrice distabit, pertinebit ad Parabolam. Finge enim lineam F P Directrici perpendicularem occurrere quidem Parabolæ in puncto P, ita ut sit F P = S P, sed in eâ posse sumi aliud punctum p ita ut sit etiam S p = F p = F P ± P p, erit ob F P = S P, S p = S P ± P p sed cùm S P p sit Triangulum, absurdum est (per 20. 1. Elem.) esse S p = S P ± P p ergo absurdum est fingere aliud Punctum præter id quod ad Parabolam pertinet tale ut ejus distantia a directrice sit æqualis ejus distantiæ a foco, ergo ob *æquales S P et F P,* Parabola cujus directrix est I F et umbilicus S *transibit per punctum P.*

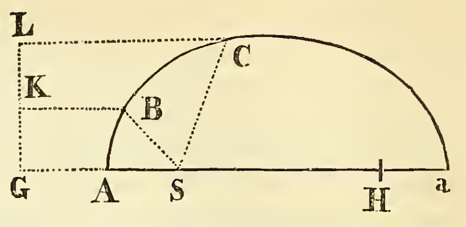
2us. *Casus.* Parabola descripta *ob æquales S T, T V, ob angulum Rectum S T R tanget rectam T R,* ejus enim Parabolæ descriptæ directrix est V I. Jam verò ducatur ex V perpendicularis in directricem quæ rectæ T R occurrat in r et ab r ducatur ad focum linea r S, ob æquales S T, T V et angulum rectum S T R erit V r = r S et punctum r ad Parabolam pertinebit per superiorem demonstrationis partem, eâdem ratione probabitur angulum V r T æqualem esse angulo



T r S, ideoque linea T r bifariam dividit angulum V r S, sed ea linea Parabolæ Tangens est quæ bifariam dividit angulum quem faciunt duæ lineæ ductæ a puncto quovis Parabolæ una ad focum altera perpendiculariter ad directricem (per Theor. III. de Parabola n. 224.) ergo linea T R tangit Parabolam descriptam sive *Parabola descripta tanget Rectam T R.*

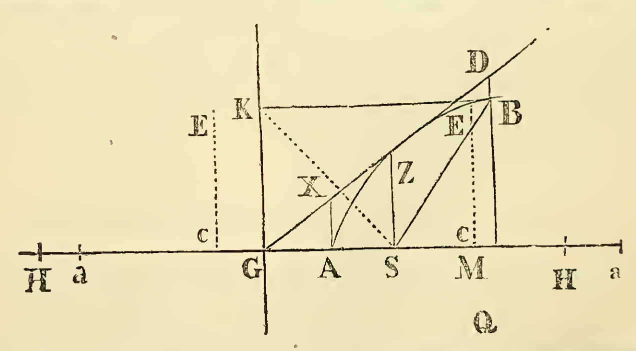
(i) 292. Sectiones conicæ sunt ejusdem speciei, seu similes, quarum axes duo, vel quod idem est, axis major et focorum distantia sunt inter se in datâ ratione; Ex hâc enim ratione unicè pendent partium sectionis ratio ac respectiva positio, atque hinc fit ut parabolæ omnes similes sint quod in omnibus focorum distantia infinita majori axi æqualis sit.

ad distantiam umbilicorum. In ea ratione cape K B ad B S, et L C ad C S. Centris B, C, intervallis B K, C L, describe circulos duos, et ad rectam K L, quæ tangat eosdem in K et L, demitte perpendiculum S G,



idemque seca in A et a, ita ut sit G A ad A S et G a ad a S ut est K B ad B S et axe A a, verticibus A, a, describatur trajectoria. Dico factum. Sit enim H umbilicus alter figuræ descriptæ, et cum sit G A ad A S ut G a ad a S, erit divisim G a — G A seu A a ad a S — A S seu S H in eâdem ratione, ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus; (k) et propterea figura descripta est ejusdem speciei cum describenda. (l) Cumque sint K B ad B S et L C ad C S in eâdem ratione, transibit hæc figura per puncta B, C, ut ex conicis manifestum est.

(k) * Si describenda sit hyperbola, punctum a, sumi debet in perpendiculo S G, ad alteram partem lineæ G L, producto ut sit G, inter A, et a, tumque erit G a + G A, seu A a ad a S + A S, seu S H, in ratione G A ad A S, adeóque in ratione quam habet axis principalis hyperbolæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, et propterea hyperbola descripta similis est hyperbolæ describendæ.



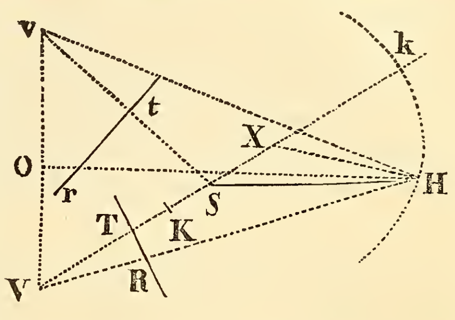
(l) Ut demonstretur *puncta B et C ad sectionem conicam descriptam pertinere* quædam prævia ex conicis sunt usurpanda.

293. *Lemma.* Sit sectionis conicæ A Z B, axis major A a, foci S, H, semiaxis minor c E, erectâ ad axem perpendiculari S Z per punctum Z, ducatur tangens D Z G quæ axi occurrat in G; tum ex punctis G, A, et quovis alio axis puncto M, erigantur ad axem perpendiculares G K, A X, M B D, et ex puncto sectionis B, ducatur ad G K, perpendicularis B K, erit 1°. S Z = $\frac{1}{2}$ L, seu dimidio lateri recto, etenim ordinata in focc est semper æqualis semilateri recto, (per Theor. III. de Ell. et Hyp. et Cor. 2 Theor. I. de Parab. n. 224.)

294. 2°. Erit G A ad A S sicut axis major ad distantiam focorum, hoc est G A : A S = A a : S H; nam cum G sit punctum in quo Tangens secat Diametrum, ejus distantiæ G A, G a, ab utroque vertice sunt inter se sicut abscissæ A S, S a ab utroque vertice Diametri sumptæ, sive est (per Lem. V. de Conic. n. 224.) G A : G a = A S : S a et convertendo G A : A a = A S : S a — A S sive S H (quia A S = H a) ergo alternando G A : A S = A a : S H.

295. 3°. Erit factum G S × S c æquale quadrato semiaxis minoris, nam quia est G A : A S = A a : S H, est componendo G S : A S = S H + A a : S H, et sumendo dimidium terminorum ultimæ rationis est G S : A S = S c + c a (sive S a) : S c, est ergo G S × S c = A S × S a, sed factum A S × S a, (partium ab uno foco ad utrumque axis majoris verticem sumptarum) est semper æquale quadrato semiaxis mi-

Cas. 2. Dato umbilico S, describenda sit trajectoria quæ rectas duas T R, t r alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula S T, S t et produc eadem ad V, v, ut sint T V, t v, æquales T S, t S. Biseca V v in O, et erige perpendiculum infinitum O H, rectamque V S infinite productam seca in K et k, ita ut sit V K ad K S et V k ad k S ut est trajectoriæ describendæ axis principalis ad umbilicorum distantiam. Super diametro K k describatur circulus secans O H in H, et umbilicis S, H, axe principali ipsam V H æquante, describatur trajectoria. Dico factum. Nam biseca K k in X, et junge H X, H S, H V, H v. Quoniam est V K ad K S ut V k ad



noris, nam id factum æquatur in Ellipsi $c A^2 - c S^2$ (per 5. 2. Elem.) et in Hyperbola $c S^2 - c A^2$ (per 6. 2. Elem.) utrumque verò æquatur quadrato semi-axis minoris per naturam focorum (Theor. III. de Hyper. et Ellip. 224.) est ergo $G S \times S c = c E^2$.

296. 4°. Perpendicularis A X in axis Vertice A erecta et terminata ad Tangentem in extremitate Z ordinatæ quæ insistit foco S est æqualis A S distantiæ foci a Vertice. Nam cum ob Triangula similia X G A, Z G S sit $G A : A X = G S : S Z$ sive $\frac{1}{2} L = \frac{2 c E^2}{2 c A}$ et sit $c E^2 = G S \times S c$ est $G A : A X = G S : \frac{G S \times S c}{c A} = c A : S c$ (et duplicando hos terminos) $= A a : S H$, sed in eadem ratione est G A ad A S (294) ergo $G A : A X = G A : A S$ et $A X = A S$.

In Parabolâ idem verum est, in ea enim est $G A = A S$, $G S = 2 A S$ et $S Z = \frac{1}{2} L = 2 A S$ (Cor. 1. Lem. V. de Coni. 224.) Ergo hæc proportio $G A : A X = G S : S Z$ in hanc mutatur $A S : A X = 2 A S : 2 A S$ ergo $A S = A X$.

297. 5°. Linea a foco S, ad curvæ punctum quodvis B ducta est æqualis lineæ D M, quæ per id punctum transit, et perpendiculariter ad axim ducitur, terminaturque hinc ab axi, illinc a Tangente G Z. Produc enim D M ad Q ubi iterum occurrit Sectioni Conicæ sitque $M Q = B M$, erit (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) $Z X^2 : Z D^2 = A X^2 : D M \times D B$ (sive $D M^2 - B M^2$ per 6. 2. Elem.) sed ob Parallelas A X, S Z, M D est $Z X : Z D = A S : S M$ et $Z X^2 : Z D^2 = A S^2 : S M^2$. Ergo est $A S^2 : S M^2 = A X^2$ (sive $A S^2$ per 296) : $D M^2 - B M^2$ unde est $S M^2 = D M^2 - B M^2$ et addendo utrinque $B M^2$, $S M^2 + B M^2$ (sive $S B^2$ per 47. 1. Elem.) $= D M^2$ et $S B = D M$.

298. 6°. Si ex sectionis quovis puncto B, ducatur perpendicularis B K ad lineam G K, et linea B S ad focum, erit semper $K B : B S = G A : A S$, nam propter Triangula similia G M D, G A X, est G M (sive K B ob Parallelas G M et K B, G K et M B) : M D (sive B S per 297) $=$ G A : A X (sive A S per 296) hoc est $K B : B S = G A : A S$ ideoque $K B : B S = A a : S H$ quoniam $G A : A S = A a : S H$ (per 294).

299. Conversa etiam vera est si ducatur perpendicularis in lineam G K, et in ea sumatur B, ita ut sit $K B : B S = G A : A S = A a : S H$ punctum B est in Sectione Conicâ descriptâ. Sit enim Sectio Hyperbola aut Parabola, illa in unico puncto B secabitur per lineam K B, eritque (per 298) $K B : B S = A a : S H$, dico autem nullum aliud punctum β sumi posse in ea linea K B producta si lubet, ita ut sit $K B : B S = A a : S H$, fingatur enim dari illud punctum β, subtrahanturque termini duarum priorum rationum a se mutuo, erit $K B - K \beta$ (sive $B \beta$) : $B S - \beta S = A a : S H$ sed quia in Hyperbola est A a, minor quam S H, et in Parabola ei est æqualis, erit $B \beta$ minor aut æqualis differentiæ $S B - S \beta$, sed $S B \beta$ est Triangulum, ergo absurdum est (per 20. 1. Elem.) unum ejus latus ut $B \beta$ esse minus aut æquale differentiæ aliorum, non datur ergo punctum illud β.

2°. Sectio sit Ellipsis; Ducatur S K; si G K sit æqualis semi-axi minori, erit $S K : G K = A a : S H$ nam (per 295) est $G S : c E$ (sive G K ex Hyp.) $= c E : S c$ et $G S^2 : G K^2 = c E^2 : S c^2$, et componendo $G S^2 + G K$ (sive $S K^2$ per 47. 1. Elem.) : $G K^2 = c E$

k S; et composite ut V K + V k ad K S + k S; divisimque ut V k — V K ad k S — K S, id est, (m) ut 2 V X ad 2 K X et 2 K X ad 2 S X, ideoque ut V X ad H X et H X ad S X, similia erunt triangula V X H, H X S, et propterea V H erit ad S H ut V X ad X H, ideoque ut V K ad K S. Habet igitur trajectoriæ descriptæ axis principalis V H eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam S H, quam habet trajectoriæ describendæ axis principalis ad ipsius umbilicorum distantiam, et propterea ejusdem est speciei. Insuper cum V H, v H æquentur axi principali, et

+ Sc^2 = (sive cA^2 per nat. focorum) : Sc^2 et S K : G K = c A : S c et duplicando terminos posterioris rationis est S K : G K = A a : S H.

Si G K sit major quam c E erit $GS^2 : GK^2$ in minori ratione quam cE^2 ad Sc^2, et componendo erit $GS^2 + GK^2$, sive SK^2 ad GK^2 in minori ratione quam $cE^2 + Sc^2$ ad Sc^2 unde tandem deducetur in hoc casu esse S K ad G K in minori ratione quam A a ad S H.

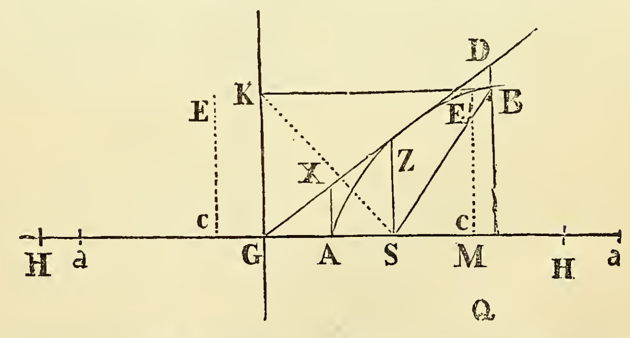
Et pariter si G K sit minor quam c E, erit S K ad G K in majori ratione quam A a ad S H.

Sed (per princ. trigo.) est in triang. S K G, sinus totalis ad sinum ang. K S G (sive ad sinum anguli S K B huic æqualem ob Parallelas G S, K B) sicut K S ad K G. Ergo ratio ret sinu K S B quod quidem est absurdum, nulla ergo duci poterit linea S B quæ determinet punctum B tale ut sit K B ad S B sicut A a ad S H, sicut etiam in eo casu linea K B nullibi occurrit Sectioni Conicæ.

Denique si G K sit minor c E, est sin. tot. ad sin. S K B in majori ratione quam sinus K S B ad sin. S K B, dabitur ergo sinus K S B, sed ut ad acutum vel obtusum angulum æqualiter pertinet duæ duci poterunt lineæ S B (sed non plures) quæ requisitam cum K B habeant rationem, ut etiam linea K B hoc in casu duobus in punctis Ellipsim secat.

Ergo si K B : B S = G A : A S = A a : S H punctum B est in Sectione Conicâ.

Ex his autem liquet curvam secundum New-



sinus totalis ad sin. Ang. S K B, æqualis est rationi A a ad S H, si G K sit æqualis c E, est illâ minor si G K superet c E, est illâ major si G K minor sit quam c E.

Ut verò lineæ K B, B S habeant rationem A a ad S H, oportet ut in Triang. K B S, sinus angulorum K S B, S K B sint in eâ ratione A a ad S H; ergo si G K sit æqualis c E, est sinus totalis: Sin. S K B = Sin. K S B . Sin. S K B, ideoque in hoc casu erit Sin. tot. = Sin. K S B, hoc est, linea S B erit perpendicularis in S K, unica ergo erit, unicumque punctum B, sicut etiam linea K B in unico puncto Sectioni Conicæ occurret.

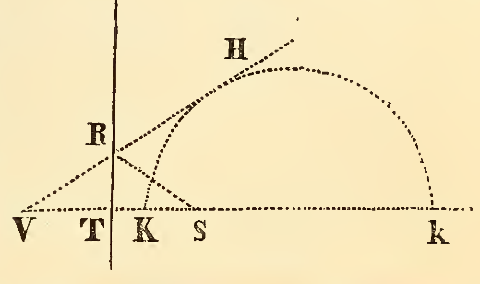
Si G K sit major c E est sin. totalis ad sin. S K B in minori ratione quam sin. K S B ad sin. S K B, unde sinus totalis minor esse debe tonianam solutionem descriptam transire per puncta B et C omnia enim planè conveniunt ad Lemmatis (293) Hypothesim.

In iis omnibus parabolam usurpamus pro ellipsi in quâ distantia focorum infinita est, ac proindè axi majori æqualis.

(m) * *Id est, ut 2 V X ad 2 K X, et 2 K X ad 2 S X;* nam K X = k X = H X (per constr.) adeóque V K + V k = 2 V K + 2 K X = 2 V X, et K S + k S = K k = V k — V K = 2 K X; et quia k S = k X + S X = K X + S X = K S + 2 S X, erit k S — K S = 2 S X, adeóque V K : K S = V X : H X = H X : S X. Quare similia erunt triangula V X H, H X S, quorum latera V X et X H, H X et K S, proportionalia communem angulum X, complectuntur.

V S, v S a rectis T R, t r perpendiculariter bisecentur, liquet (ex Lem. XV.) rectas illas trajectoriam descriptam tangere. Q. e. f. (n)

Cas. 3. Dato umbilico S describenda sit trajectoria quæ rectam T R tanget in puncto dato R. In rectam T R, demitte perpendicularem S T, et produc eandem ad V, ut sit T V æqualis S T. Junge V R et rectam V S infinite productam seca in K et k, ita ut sit V K ad S K et V k ad S k ut ellipseos describendæ axis principalis ad distantiam umbilicorum; circuloque super diametro K k descripto secetur producta recta V R in H, et umbilicis S, H, axe principali rectam V H æquante, describatur trajectoria. Dico factum. Namque V H esse ad S H ut V K ad S K atque ideo ut axis principalis trajectoriæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, (o) patet ex demonstratis in casu secundo, et propterea trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describendâ, rectam vero T R quâ angulus V R S bisecatur, tangere trajectoriam in puncto R, patet ex conicis. Q. e. f.

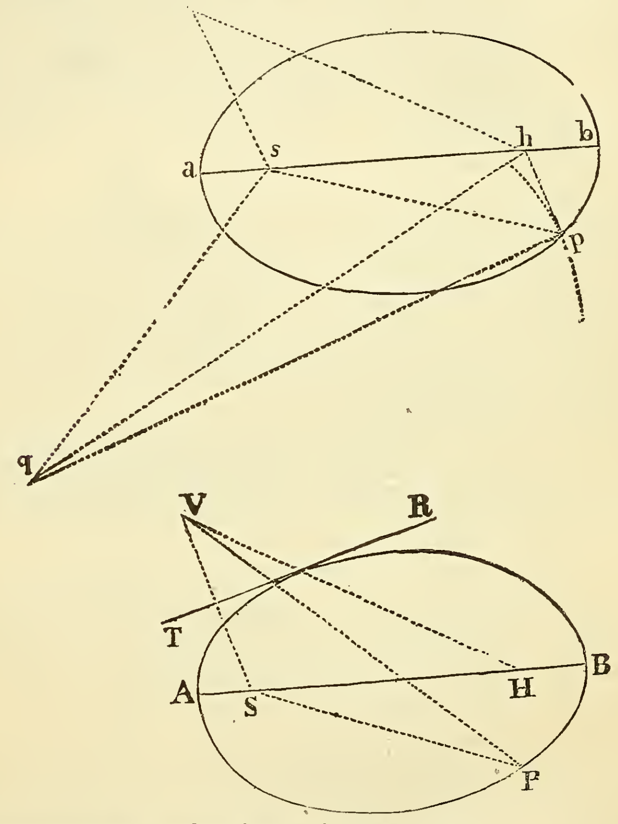


Cas. 4. Circa umbilicum S describenda jam sit trajectoria A P B, quæ tangat rectam T R, transeatque per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæque similis sit figuræ a p b, axe principali a b et umbilicis s, h descriptæ. In tangentem T R demitte perpendiculum S T, et produc idem ad V, ut sit T V æqualis S T. Angulis autem S V P, S P V fac angulos h q s, s h q æquales; centroque q et intervallo quod sit ad a b ut S P ad V S describe circulum secantem figuram a p b in p. Junge s p et age S H quæ sit ad s h ut est S P ad s p, quæque angulum P S H angulo p s h et angulum V S H angulo p s q æquales constituat. Denique umbilicis S, H, et axe principali A B distantiam V H æquante, describatur sectio conica. Dico factum. Nam si agatur s v quæ sit ad s p ut est s h ad s q, quæque constituat angulum v s p angulo h s q et angulum v s h angulo p s q æquales, triangula s v h, s p q erunt similia, et propterea v h

(n) * Si describenda sit hyperbola, in S V, versùs V productâ, ità sumantur puncta K, k, ut inter utrumque positum sit V, cæteraque fiant ut NEWTONUS præscribit, et quoniam V K : K S = V k : k S, erit V k — V K : k S — K S = V K : K S = V K + V k : K S + k S, sed V k — V K = 2 V X, k S — K S = 2 K X, V K + V k = 2 K X, et K S + k S = 2 S X. Reliqua demonstratio eadem est ac pro ellipsi.

(o) * Centro circuli litterâ X, notato, jungantur H X, H S, H V, et eadem est demonstratio quæ casus 2i pro ellipsi, et si producatur R V, S V, versùs V, ut punctum V, situm sit inter K et k, eadem quoque erit demonstratio pro hyperbolâ.

erit ad p q ut est s h ad s q, id est (ob similia triangula V S P, h s q) ut est V S ad S P seu a b ad p q. Æquantur ergo v h et a b. Porro (p) ob similia triangula V S H, v s h, est V H ad S H ut v h ad s h, id est,



axis conicæ sectionis jam descriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis a b ad umbilicorum intervallum s h; et propterea figura jam descripta similis est figuræ a p h. Transit autem hæc figura per punctum P, (q) eo quod triangulum P S H simile sit triangulo p s h; et quia V H æquatur ipsius axi et V S bisecatur perpendiculariter a recta T R, tangit eadem rectam T R. (r) Q. e. f.

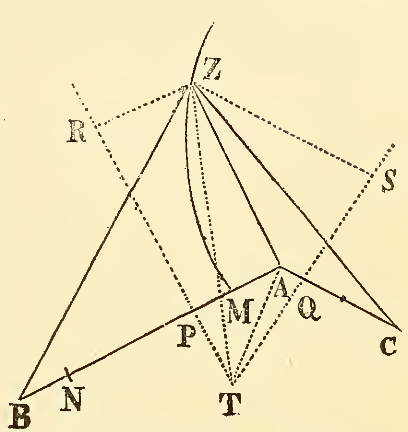
* (p) Similia sunt triangula V S H, v s h, nam (per constr.) angulus V S P = h s q = v s p, et angulus H S P = h s p, adeóque angulus V S H = v s h; et prætereà s p : s h = S P : S H, et s v : s p = s h : s q = S V : S P, ob similia triangula V S P, h s q; quarè ex æquo s v : s h = S V : S H, triangula igitur V S H, v s h, quorum latera proportionalia æquales angulos complectuntur sunt similia.

* (q) Nam si ducatur recta S P, perimetro figuræ cccurrens iu P, et angulum P S H, æqualem faciens angulo p s h, patet ob similitudinem sectionum conicarum, triangula duo P S H, p s h, fore similia; undè vicissim manifestum est punctum P, esse in perimetro figuræ, si triangulum P S H, simile sit triangulo p s h.

* (r) Eadem est constructio ac demonstratio pro hyperbolâ, si foci H, h, et vertices B, b, ad contrariam partem transferantur.

LEMMA XVI.

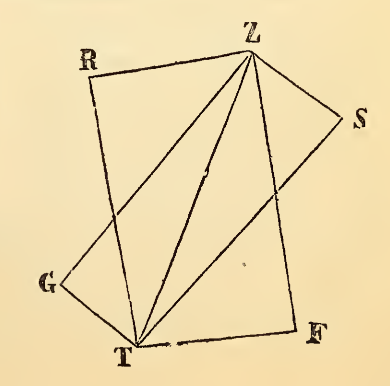
A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.



Cas. 1. Sunto puncta illa data A, B, C et punctum quartum Z, quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum A Z, B Z, locabitur punctum Z in hyperbola cujus umbilici sunt A et B, et principalis axis differentia illa data. Sit axis ille M N. Cape P M ad M A ut est M N ad A B, et erecta P R perpendiculari ad A B, demissaque Z R perpendiculari ad P R; erit, (s) ex naturâ hujus hyperbolæ, Z R ad A Z ut est M N ad A B. Simili discursu punctum Z locabitur in aliâ hyperbolâ, cujus umbilici sunt A, C et principalis axis differentia inter A Z et C Z, ducique potest Q S ipsi A C perpendicularis, ad quam si ab hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis Z S, hæc fuerit ad A Z ut est differentia inter A Z et C Z ad A C. Dantur ergo rationes ipsarum Z R et Z S ad A Z, et idcirco datur earundem Z R et Z S ratio ad invicem; ideoque si rectæ R P, S Q concurrant in T, et agantur T Z et T A, figura T R Z S dabitur specie, et recta T Z in qua punctum Z alicubi locatur, dabitur positione. Dabitur etiam recta T A, ut et angulus A T Z; et ob datas rationes ipsarum A Z ac (t) T Z ad Z S dabitur earundem ratio ad invicem; et inde dabitur triangulum A T Z, cujus vertex est punctum Z. Q. e. i.

* (s) Erit ex naturâ hujus hyperbolæ Z R, ad A Z, ut est M N, ad A B, (298).

(t) 300. Et recta T Z, in quâ punctum Z, alicubi locatur, dabitur positione; ductis enim T F ad R T, et T G ad S T perpendicularibus, quæ sint in ratione datâ R Z ad Z S, agantur G Z, F Z, ipsis T S, R T parallelæ et se mutuò intersecantes in puncto aliquo Z, juncta T Z, habebit positionem quæsitam; patet enim perpendicula Z S, Z R, ex puncto Z, in rectas T S, T R, demissa, esse lineis T G, T F æqualia adeóque in datâ ratione.



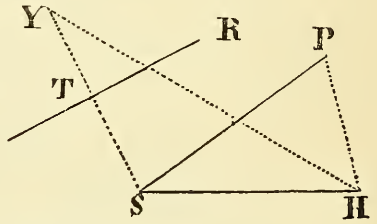
Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta A Z et B Z, æquantur, ita age rectam T Z, ut bisecet rectam A B; dein quære triangulum A T Z ut supra.

Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro circuli per puncta A, B, C transeuntis. Q. e. i.

Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum Tactionum *Apollonii* a *Vieta* restitutum.

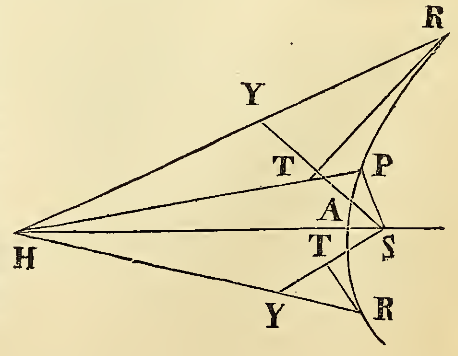
PROPOSITIO XXI. THEOREMA XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data et rectas positione datas continget.



Detur umbilicus S, punctum P, et tangens T R, et inveniendus sit umbilicus alter H. Ad tangentem demitte perpendiculum S T, et produc idem ad Y, ut sit T Y æqualis S T, et erit Y H æqualis axi principali. Junge S P, H P, et erit S P differentia inter H P et axem principalem. (u) Hoc modo si dentur plures tangentes T R, vel plura puncta P, devenietur semper ad lineas totidem Y H, vel P H, a dictis punctis Y vel P ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus S P differunt ab iisdem, atque ideò quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; et inde, per lemma superius, datur umbilicus ille alter H. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel est Y H; vel, si trajectoria ellipsis est, P H + S P; sin hyperbola, P H — S P) habetur trajectoria. Q. e. i.

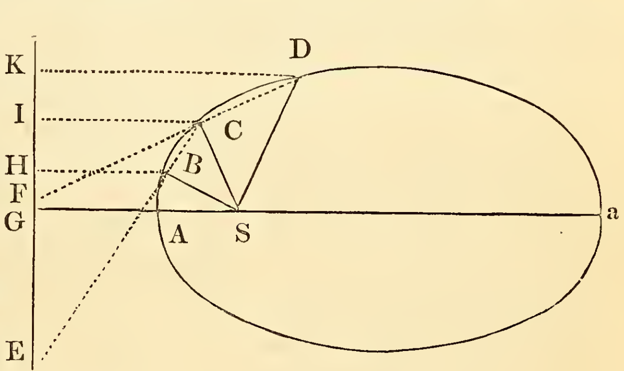
(u) 301. Si dentur tres tangentes, dabuntur tria puncta ut Y, ex quibus ad umbilicum H, inflectendæ erunt tres rectæ æquales ut Y H, quod fit per Cas. 3. Lemmatis superioris. Si duæ dentur tangentes et punctum perimetri sectionis P, dabuntur duo puncta ut Y, ex quibus ad umbilicum H, inflectendæ erunt duæ rectæ æquales, et 3[um] punctum P, ex quo ducenda P H, cujus differentia a lineâ Y H, est data S P. Nam in ellipsi P H + S P = Y H, adeóque Y H — P H = S P; in hyperbolâ P H — S P = Y H, undè P H — Y H = S P, estque Casus 2[us] Lem. XVI. Tandem si dentur tria perimetri puncta ut P, locum habet Casus 1[us] ejusdem Lemmatis.



Scholium.

Ubi trajectoria est hyperbola, sub nomine hujus trajectoriæ oppositam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim pergendo in motu suo in oppositam hyperbolam transire non potest.

Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur puncta B, C, D. Junctas B C, C D produc ad E, F, ut sit E B ad E C ut S B ad S C, et F C ad F D ut S C ad S D. Ad E F ductam et productam demitte normales S G, B H, inque G S infinite productâ cape G A ad A S et G a ad a S ut est H B ad B S; et erit A vertex, et A a axis principalis trajectoriæ: quæ, perinde ut G A major, æqualis, vel minor fuerit quam A S, erit ellipsis, parabola vel hyperbola; puncto a in primo casu cadente ad eandem partem lineæ G F cum puncto A; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ G F.



Nam si demittantur ad G F perpendicula C I, D K; erit I C ad H B ut E C ad E B, hoc est, ut S C ad S B; et vicissim I C ad S C ut H B ad S B sive ut G A ad S A. Et simili argumento probabitur esse K D ad S D in eâdem ratione. (x) Jacent ergo puncta B, C, D in coni sectione circa umbilicum S ita descripta, ut rectæ omnes, ab umbilico S ad singula sectionis puncta ductæ, sint ad perpendicula a punctis iisdem ad rectam G F demissa in datâ illâ ratione.

Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit clarissimus Geometra *de la Hire*, Conicorum suorum Lib. VIII. Prop. XXV.

(x) * *Jacent ergo puncta B, C, D, in coni sectione* (vide n. 298.)

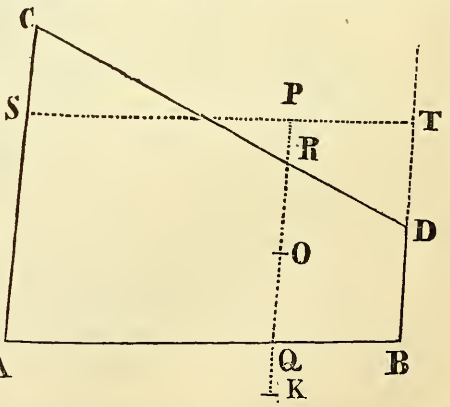
SECTIO V.

Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

Si a datæ conicæ sectionis puncto quovis P *ad trapezii alicujus* A B C D, *in conicâ illâ sectione inscripti, latera quatuor infinitè producta* A B, C D, A C, D B *totidem rectæ* P Q, P R, P S, P T *in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera* P Q × P R, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita* P S × P T *in datâ ratione.*

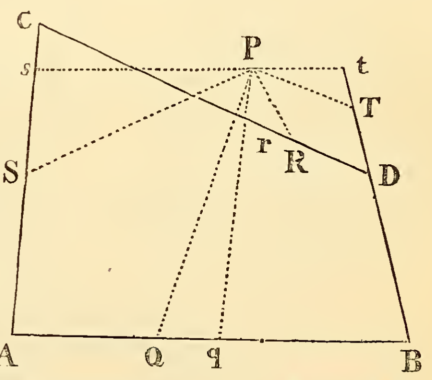
Cas. 1. Ponamus primò lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, putà P Q et P R lateri A C, et P S ac P T lateri A B. Sintque insuper latera duo ex oppositis, putà A C et B D, sibi invicem parallela. Et recta, quæ bisecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ sectionis, et bisecabit etiam R Q. Sit O punctum in quo R Q bisecatur, et erit P O ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc P O ad K, ut sit O K æqualis P O, et erit O K ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta A, B, P et K sint ad conicam sectionem, et P K secet A B in dato angulo, erit (per Prop. 17, 19, 21 et 23. Lib. III. Conicorum *Apollonii*) rectangulum P Q K ad rectangulum A Q B in datâ ratione. (y) Sed Q K et P R æquales sunt, utpote æqualium O K, O P, et O Q, O R differentiæ, et inde etiam rectangula P Q K et P Q × P R æqualia sunt; atque ideo rectangulum P Q × P R est ad rectangulum A Q B, hoc est ad rectangulum P S × P T in datâ ratione. Q. e. d.



(y) *Erit rectangulum P Q K ad rectangulum A Q B in datâ ratione.* Liquet (per Lem. III. de Conic.) quod si linea quævis in Sectione Conicâ terminata ut P K secet aliam lineam etiam in Sectione Conicâ terminatam ut A B, rectangulum partium lineæ P K erit ad rectangulum partium lineæ A B ut rectangulum partium lineæ cujusvis alîus Parallelæ lineæ P K et ad sectionem terminatæ, ad rectangulum partium quas hæc nova linea secat in lineâ A E: ideo ubicumque sit punctum P rectangula P Q K et A Q B erunt in eâdem datâ ratione.

Cas. 2. Ponamus jam trapezii latera opposita A C et B D non esse parallela. Age B d parallelam A C et occurrentem tum rectæ S T in t, tum conicæ sectioni in d. Junge C d secantem P Q in r, et ipsi P Q parallelam age D M secantem C d in M et A B in N. Jam ob similia triangula B T t, D B N; est B t seu P Q ad T t ut D N ad N B. Sic et (z) R r est ad A Q seu P S ut D M ad A N. Ergo ducendo antecedentes in antecedentes et consequentes in consequentes, ut rectangulum P Q in R r est ad rectangulum P S in T t, ita rectangulum N D M est ad rectangulum A N B, et (per Cas. 1.) ita rectangulum P Q in P r est ad rectangulum P S in P t, (†) ac divisim ita rectangulum P Q × P R est ad rectangulum P S × P T. Q. e. d.

Cas. 3. Ponamus denique lineas quatuor P Q, P R, P S, P T non esse parallelas lateribus A C, A B, sed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age P q, P r parallelas ipsi A C; et P s, P t parallelas ipsi A B; et propter datos angulos triangulorum P Q q, P R r, P S s, P T t, dabuntur rationes P Q ad P q, P R ad P r, P S ad P s, et P T ad P t; atque ideo rationes compositæ P Q × P R ad P q × P r, et P S × P T ad P s × P t. Sed, per superius demonstrata, ratio P q × P r ad P s × P t data est: ergo et ratio P Q × P R ad P S × P T. Q. e. d.



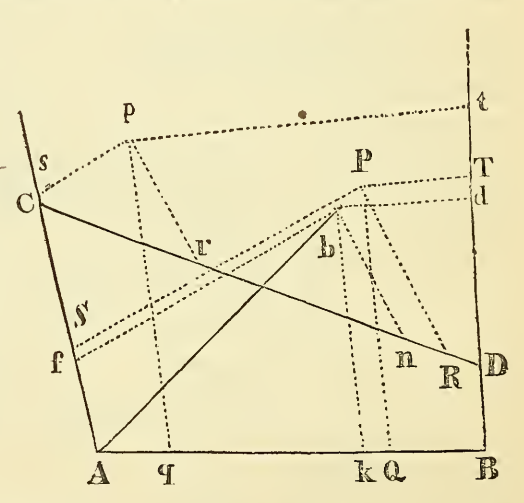
(z) * *R r : A Q seu P S = D M : A N.* Sunt enim propter parallelas R r, D M, triangula r C R M C D similia, ideóque R r : D M = C r : C M; sed est C r : C M = A Q vel P S : A N; ergò R r : D M = Q A vel P S : A N et R r.: P S = D M : A N.

(†) * *Ac divisim.* Ex demonstratis N D M : A N B = P Q × R r : P S × T t = P Q × P r : P S × P t, et divisim N D M : A N B = P Q × P r — P Q × R r : P S × P t — P S × T t = P Q × P R : P S × P T, sed ratio N D M ad A N B data est, ergò et ratio P Q × P R ad P S × P T.

LEMMA XVIII.

Iisdem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera trapezii P Q × P R *sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* P S × P T *in datâ ratione; punctum* P, *a quo lineæ ducuntur, tanget conicam sectionem circa trapezium descriptam.*

Per puncta A, B, C, D et aliquod infinitorum punctorum P, putà p, concipe conicam sectionem describi: dico punctum P hanc semper tangere. Si negas, junge A P secantem hanc conicam sectionem alibi quam in P, si fieri potest, putà in b. Ergo si ab his punctis p et b ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ p q, p r, p s, p t et b k, b n, b f, b d; erit ut b k × b n ad b f × b d ita (per Lem. XVII.) p q × p r ad p s × p t, et ita (per hypoth.) P Q × P R ad P S × P T. Est et propter similitudinem trapeziorum b k A f, P Q A S, ut b k ad b f ita P Q ad P S. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit b n ad b d ut P R ad P T. (†) Ergo trapezia æquiangula D n b d, D R P T similia sunt, et (a) eorum diagonales D b, D P propterea coincidunt. Incidit itaque b in intersectionem rectarum A P, D P ideóque coincidit cum puncto P. Quare punctum P, ubicunque sumatur, incidit in assignatam conicam sectionem. Q. e. d. (b)



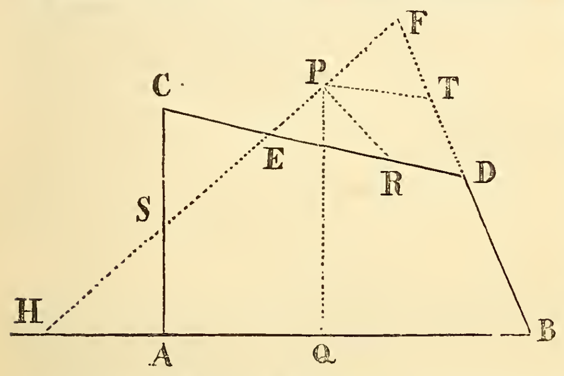
(†) * Cum sit b k × b n : b f × d b = P Q × P R : P S × P T
item b f : b k = P S : P Q
erit b n : b d = P R : P T.

(a) *Ergò trapezia æquiangula D n b d, D R P T, similia sunt, et eorum diagonales D d, D P, propterea coincidunt;* nam jungantur n d, R T, et duo triangula n d b, R T P, æquiangula erunt ob latera b n, b d, et P R, P T, proportionalia, et angulos n b d, R P T, æquales; quarè et duo triangula n d D, R T D, æquiangula erunt ob angulum D, communem, et angulos ad T et t, R et n, æquales, erit igitur b n : n D = P R : R D, adeóque ductis diagonalibus D b, D P, duo triangula b D n, P D R, erunt similia, ac proindè angulus P D R, æqualis angulo b D n, quod esse non potest, nisi diagonales D b, D P, coincidant.

(b) 302. Lemma XVIII. per analysim facilè demonstrari potest. Producta enim P S, donec

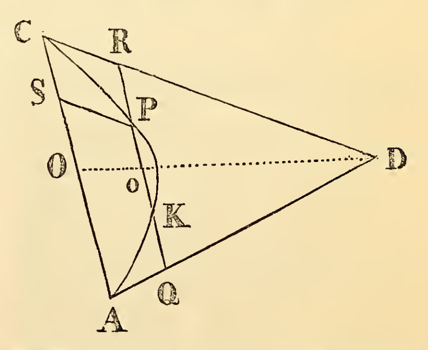
Corol. Hinc si rectæ tres P Q, P R, P S, a puncto communi P ad alias totidem positione datas rectas A B, C D, singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitque rectangulum sub duabus ductis (c) P Q × P R ad quadratum tertiæ P S in datâ ratione: punctum P, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione conicâ quæ tangit lineas A B, C D in A et C; et contra. Nam coeat linea B D cum lineâ A C, manente positione trium A B, C D, A C; dein coeat etiam linea P T cum linea P S: et rectangulum P S × P T evadet P S quad. rectæque A B, C D, quæ

singulis trapezii lateribus occurrat in F, E, S, H, ob datos omnes angulos figuræ, data erit ratio laterum quibus singula triangula F P T, F E D, P E R, E C S, S H A, P H Q, clauduntur.



Assumptis igitur C E, tanquam abscissâ et P E tanquam ordinatâ loci punctorum P, data erit ratio P E, ad P R, adeóque P E, in datam quantitatem ducta æquabitur ipsi P R; ob datam C D, invenietur E D, ut potè æqualis C D — C E, et per triangulum F E D specie datum invenietur E F, ac proindè P F = E F — E P, et inde per triangulum F P T, invenietur P T, omnesque illæ lineæ exprimentur per lineas C E, P E, unius dimensionis, et alias datas quantitates. Similiter E S et C S et S A = C A — C S, atquè H S, per triangulum S A H, specie datum, et hinc P H = H S + S E + E P, adeóque P Q, per triangulum P H Q, inveniuntur in lineis C E et P E, unius dimensionis et aliis datis quantitatibus. Quarè in rectangulis P Q × P R, P S × P T, rectæ variabiles C E, P E, non plures quam duas dimensiones obtinebunt, undè æquatio quæ ex rectangulorum illorum ratione datâ reperitur secundum gradum non superabit; Cùm igitur, ut vulgò notum est, æquationis quadraticæ locus sit sectio conica, patet locum punctorum P, esse ad sectionem conicam. Quod autem sectio illa per puncta C, D, P, A, transeat inito calculo facilè ostenditur, nam si in æquatione loci ponatur C E = o in-venietur valor unus ipsius P E = o, adeóque punctum P, cadit in C, si ponatur C E = C D, invenietur quoque valor unus P E = o, ac proindè punctum P, cum puncto D, coincidit; idem pari argumento respectu punctorum A, B, reperitur, si ponatur A Q = o vel A Q = A B.

(c) *Hinc si rectæ tres*, &c. Sint tres lineæ A B, C D, A C positione datæ, et lineæ A B, C D tangant sectionem conicam in A et C, et a puncto communi P ducantur tres rectæ P Q, P R, P S in datis angulis ad singulas A B, C D, A C erit P Q × P R in ratione datâ ad quadratum tertiæ P S: Sit enim P S parallela lineæ D C, et sint R P, P Q parallelæ lineæ C A sitque P K chorda sectionis, sumatur medium O chordæ A C ducaturque per punctum D, D O, quæ secabit tam chordam P K quam totam R Q in medio (vide Lem. IV. de Conic. n. 224.) hinc erit R K = P Q,



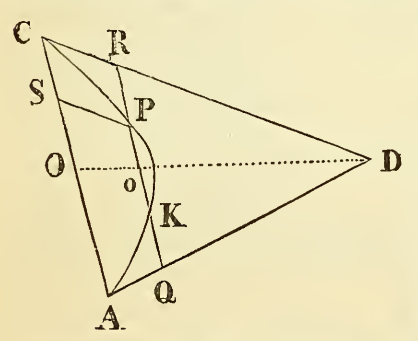
sed est (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) C R ^{2} ad R P × R K in datâ ratione, ideóque est C R ^{2} ad R P × P Q in datâ ratione, sed ob parallelas C R, S P et C S, R P est P S = C R, ergo P S ^{2} est ad R P × P Q in datâ ratione.

curvam in punctis A et B, C et D secabant, jam (†) curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantùm tangent.

Scholium.

Nomen conicæ sectionis in hoc lemmate latè sumitur, ita ut sectio tam rectilinea per verticem coni transiens, quam circularis basi parallela includatur. ([d]) Nam si punctum p incidit in rectam, quâ puncta A et D vel C et B junguntur, conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum p incidit, et altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquentur duobus rectis, et lineæ quatuor P Q, P R, P S, P T ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitque rectangulum sub duabus ductis P Q × P R æquale rectangulo sub duabus aliis P S × P T, sectio conica evadet circulus. ([e]) Idem fiet,

Si lineæ P S, R P, P Q in aliis sed datis angulis ad lineas A C, C D, A D inclinentur, dabuntur earum rationes ad has priores, unde

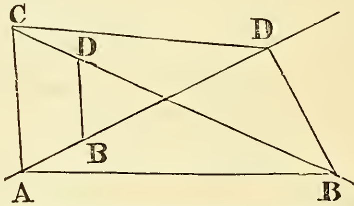


deducetur eodem modo ac in Lemmate XVII. in isto etiam casu fore S P ² ad R P × P Q in datâ ratione.

Pariter et conversa demonstrabitur ut Lemma XVIII.

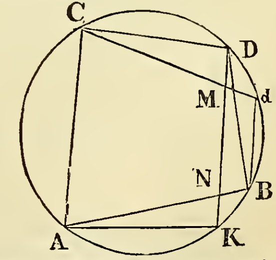
(†) * *Jam curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantùm tangent;* puncta enim A et B, C et D, semper supponuntur in conicæ sectionis perimetro posita; quarè evanescentibus distantiis A B et C D, lineæ A B et C D, ultimò coincidunt cum tangentibus sectionem in punctis A et C. Vid. Lem. VI. Newt.

([d]) 303. Puncta quatuor A, B, D, C, sint in perimetro hyperbolæ vel in perimetris duarum hyperbolarum oppositarum, planum sectionis quo hyperbola in cono generatur accedat ad coni verticem; hyperbolæ in triangula rectilinea mutantur quæ erunt loca punctorum P, et quorum latera vel coincidunt cum duobus trapezii lateribus vel sunt ipsius diagonales, ac proindè punctum P,



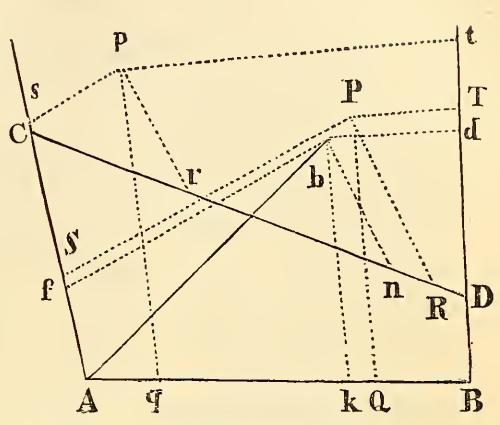
incidit in rectam quâ quævis ex punctis quatuor A, B, C, D, junguntur et *conica sectio vertitur in geminas rectas quarum una est recta illa in quâ punctum P incidit et altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur.*

([e]) 304. *Sectio conica evadet circulus.* Si ex trapezii A B D C circulo inscripti angulo quovis D, agatur recta D N, lateri A C parallela, et lateri A B occurrens in N, deindè ex



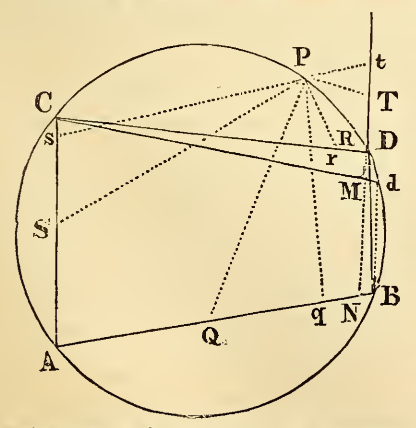
altero angulo B, ducatur B d, lateri A C parallela circulo occurrens in d, jungaturque C d rectam D N, secans in M, erit D N × D M = A N × N B. Nam jungatur A K, et quoniam arcus C D, et A K, D d, et K B, inter easdem parallelas intercepti æquales sunt, anguli D C d, et B A K, C D K et A K D, iis arcubus insistentes et æqualium

si lineæ quatuor ducantur in angulis quibusvis, et rectangulum sub duabus ductis P Q × P R sit ad rectangulum sub aliis duabus P S × P T ut rectangulum sub sinubus angulorum S, T, in quibus duæ ultimæ P S, P T ducuntur, ad rectangulum sub sinubus angulorum Q, R, in quibus duæ primæ P Q, P R, ducuntur. (f) Cæteris in casibus locus puncti P erit aliqua trium figurarum, quæ vulgo nominantur sectiones conicæ. (g) Vice autem trapezii A B C D substitui potest quadrilaterum, cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed et è punctis quatuor A, B, C, D possunt unum vel duo abire ad infi-



arcuum chordæ C D, A K, æquantur; quarè triangula A K N, C D M, similia et æqualia sunt; est igitur D M = N K; sed ex naturâ circuli A N × N B = K N × D N, ergò A N × N B = D M × D N.

305. Si ergo sectio conica trapezio circum-



scripta vertatur in circulum, hoc est, si sectionis planum basi coni fiat parallelum, erit rectangulum P Q × P R ad rectangulum P S × P T, ut rectangulum sub sinubus angulorum S, T, ad rectangulum sub sinubus angulorum Q, R.— *Dem.* factâ constructione Cas. 3i. Lem. XVII. agantur rectæ D N, B d, lateri A C parallelæ, ut in articulo superiori; et erit per demonstrationem casus 2i. Lem. XVII., N D × D M : A N × N B = P q × P r : P s × P t, hoc est (304) P q × P r = P s × P t. Jam verò angulorum sinubus litterâ S designatis erit S. P q A = S. C A B, et S. P r C = S. A C D, ob parallelas P q, A C, et S. P s S = S. P s C = S. C A B, et S. P t T = S. A B D, ob parallelas s t, A B, et ob angulum A C D, complementum anguli A B D ad duos rectos, S. P t T = S. A C D.

Porrò

P Q : P q = S. P q A (S. C A B) : S. P Q B
P s : P S = S. P S C : S. P s S (S. C A B).
P R : P r = S. P r C (S. A C D.) : S. P R C
P t : P T = S. P T t : S. P t T. (S. A C D).

Ergò per compositionem rationum
P Q × P R × P s × P t : P S × P T × P q × P r = P Q × P R : P S × P T = S. P S C × S. P T t : S. P Q B × S. P R C. Q. e. d.

306. *Corol.* Eâdem manente proportione, si omnes anguli ad S, T, Q, R, fuerint æquales, rectangulum P Q × P R, erit quoque æquale rectangulo P S × P T.

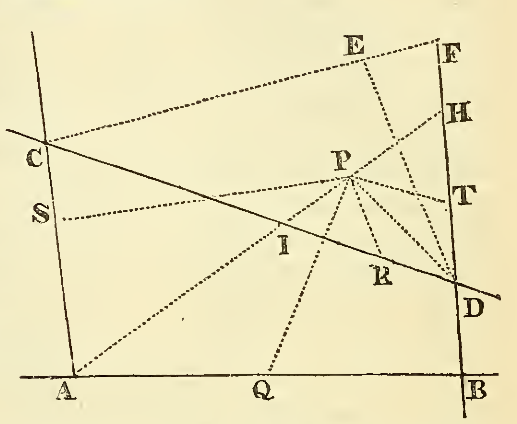
(f) * Nam vel punctum P, locabitur in sectione rectilineâ per verticem coni transeunte, vel in circulo, vel tandem in aliquâ trium sectionum conicarum, nullæ enim aliæ sunt sectiones conicæ, ut notum est.

(g) 307. *Vice autem trapezii substitui potest quadrilaterum A B D C, cujus latera duo A B, C D, se mutuò instar diagonalium decussant*; huic enim quadrilatero absque mu-

nitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, et in plagas parallelarum abibit in infinitum.

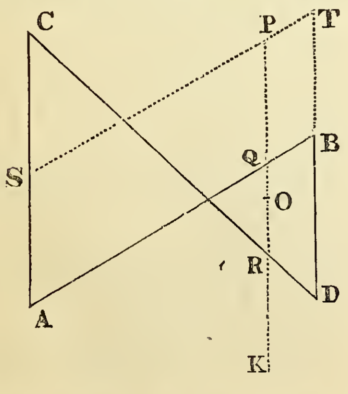
LEMMA XIX.

Invenire punctum P, *a quo si rectæ quatuor* P Q, P R, P S, P T *ad alias totidem positione datas rectas* A B, C D, A C, B D, *singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis,* P Q × P R, *sit ad rectangulum sub aliis duabus,* P S × P T, *in datâ ratione.*



Lineæ A B, C D, ad quas rectæ duæ P Q, P R unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus positione datis lineis in punctis A, B, C, D. Ab eorum aliquo A age rectam quamlibet A H, in quâ velis punctum P reperiri. Secet ea lineas oppositas B D, C D, nimirum B D in H et C D in I, et ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes P Q ad P A et P A ad P S, ideoque ratio P Q ad P S. Auferendo hanc a datâ ratione P Q × P R ad P S × P T, dabitur ratio P R ad P T, et addendo datas rationes P I ad P R, et P T ad P H dabitur ratio P I ad P H, atque ideo punctum P. Q. e. i.

Corol. 1. Hinc (h) etiam ad loci punctorum infinitorum P punctum

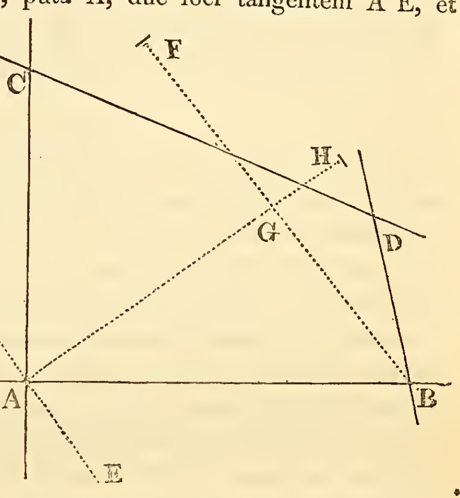


tatione aptari possunt tam constructiones quam demonstrationes Lemmatum XVII. et XVIII. Exemplum sit Cas. 1. Lem. XVII. ponamus lineas ex puncto P, ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, putà P Q et P R, lateri A C et P S, ac P T, lateri A B; sintque insuper latera duo ex oppositis putà A C et B D, sibi invicem parallela et recta quæ bisecat, &c. cæteræ omnes demonstrationis partes eodem modo transferuntur ad quadrilaterum C A B D.

(h) 508. Minima sit punctorum P, D, distantia P D, agantur D s, D q, ad A C, A B, in angulis datis P S C, P Q A, et junctâ, AD, ex illius quovis puncto Y, ducantur Y r, lateri C D, parallela, et Y t, ad D B, in angulo dato P T H; tum ex puncto D, ad Y r, ducatur D r, in angulo dato P R I; punctis P, D, coëuntibus erit P Q : P A = D q : D A, et P A : P S = D A : D s, adeóque P Q : P S = D q : D s, et

quodvis D tangens duci potest. Nam chorda P D, ubi puncta P ac D conveniunt, hoc est, ubi A H ducitur per punctum D, tangens evadit. Quo in casu, ultima ratio evanescentium I P et P H invenietur ut supra. Ipsi igitur A D duc parallelam C F, occurrentem B D in F, et in eâ ultimâ ratione sectam in E, et D E tangens erit, propterea quod C F et evanescens I H parallelæ sunt, et in E et P similiter sectæ.

Corol. 2. Hinc etiam locus punctorum omnium P definiri potest. Per quodvis punctorum A, B, C, D, puta A, duc loci tangentem A E, et per aliud quodvis punctum B duc tangenti parallelam B F occurrentem loco in F. Invenietur autem punctum F per Lem. XIX. Biseca B F in G, et actâ indefinita A G erit positio diametri ad quam B G et F G ordinatim applicantur. Hæc A G occurrat loco in H, (i) et erit A H diameter sive latus transversum, ad quod latus rectum erit ut B G q ad A G × G H. Si (k) A G nusquam oc-



proindè P Q × P R : P S × P T = D q × P R : D s × P T. Ratio data rectanguli P Q × P R ad P S × P T sit A ad B, et erit D q × P R : D s × P T = A : B, adeóque
P R : P T = A × D s : B × D q

et evanescente P D, ob similia triangula P I R, D Y r, erit
P I : P R = D Y : D r.
et ob similia triangula P T H, Y t D, erit
P T : P H = Y t : D Y
ergò per compositionem rationum
P I : P H = A × D s × Y t : B × D q × D r = C E : E F, ob parallelas I H, C F, ducta D E, erit tangens in D.

(i) * Et erit A H, diameter (per Prop. 7am Lib. 2. Conic. Apoll. Lemma IV. de Conic. 224.) sive latus transversum ad quod latus rectum erit ut B G ^{2} ad A G × G H (per Prop. 21. Lib. 1. Conic. Apoll. Theor. II. de Hyp. et de Ellip. et Theor. I. de Parab. n. 224.)

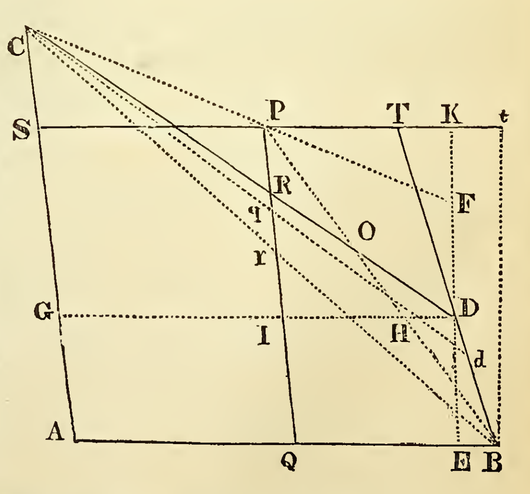
(k) 309. Locus omnium punctorum P, est aliqua ex quinque coni sectionibus, per Lem. XVIII. et ipsius scholium. Si locus fuerit linea recta ac proindè tangens ipsa A E, (303) recta B F, tangenti parallela nullibi occurret loco; si verò locus fuerit alia coni sectio, recta B F, huic sectioni occurret in puncto aliquo F, tumque diameter A G, vel utrinque terminabitur ad hyperbolas oppositas, quo casu, puncta A et H, sita erunt ad easdem partes ipsius G, vel claudetur Ellipsi aut circulo, et punctum G, inter A et H positum erit, vel tandem nullibi occurret loco qui proindè erit para-

currit loco, lineâ A H existente infinitâ, locus erit parabola, et latus rectum ejus ad diametrum A G pertinens erit $\frac{BGq}{AG}$. Sin ea alicubi occurrit, locus hyperbola erit, ubi puncta A et H sita sunt ad easdem partes ipsius G: et ellipsis, ubi G intermedium est, nisi forte angulus A G B rectus sit, et insuper B G quad. æquale rectangulo A G H, quo in casu circulus habebitur.

Atque ita problematis veterum de quatuor lineis ab Euclide incœpti et ab Apollonio continuati non calculus, sed compositio geometrica, qualem veteres quærebant in hoc corollario exhibetur. (1)

LEMMA XX.

Si parallelogrammum quodvis A S P Q *angulis duobus oppositis* A *et* P *tangit sectionem quamvis conicam in punctis* A *et* P; *et lateribus unius angulorum illorum infinitè productis* A Q, A S *occurrit eidem sectioni conicæ in* B *et* C; *a punctis autem occursuum* B *et* C *ad quintum quodvis sectionis conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* B D, C D *occurrentes alteris duobus infinitè productis parallelogrammi lateribus* P S, P Q *in* T *et* R: *erunt semper abscissæ laterum partes* P R *et* P T *ad invicem in datâ ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in datâ ratione, punctum* D *tanget sectionem conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *transeuntem.*



Cas. 1. Jungantur B P, C P et a puncto D agantur rectæ duæ D G, D E, quarum prior D G ipsi A B parallela sit et occurrat P B, P Q, C A in H, I, G; altera D E parallela sit ipsi A C et occurrat P C, P S, A B in F, K, E: et erit (per Lem. XVII.) rectangulum D E × D F ad rectangulum D G × D H in ratione datâ. Sed est P Q ad D E (seu I Q) ut P B ad H B,

bola. Porrò datis sectionis conicæ vertice, diametro, hujus latere recto ac ordinatarum angulo sectio describi potest (per Prop. 52. 53. 54. 55. Lib. 1. Conic. Apoll. sive ex iis quæ in notâ 224. de Conicis tradita fuere).

(1) * Hoc veterum problema primus in suâ

ideoque ut P T ad D H; et vicissim P Q ad P T ut D E ad D H. Est et P R ad D F ut R C ad D C, ideoque ut (I G vel) P S ad D G, et vicissim P R ad P S ut D F ad D G; et conjunctis rationibus fit rectangulum P Q × P R ad rectangulum P S × P T ut rectangulum D E × D F ad rectangulum D G × D H, atque ideo in datâ ratione. Sed dantur P Q et P S, et propterea ratio P R ad P T datur. Q. e. d.

Cas. 2. Quod si P R et P T ponantur in datâ ratione ad invicem, (m) tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum D E × D F ad rectangulum D G × D H in ratione datâ, ideoque punctum D (per Lem. XVIII.) contingere conicam sectionem transeuntem per puncta A, B, C, P. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si agatur B C secans P Q in r, et in P T capiatur P t in ratione ad P r quam habet P T ad P R: erit B t tangens conicæ sectionis ad punctum B. Nam concipe punctum D coire cum puncto B, ita ut chordâ B D evanescente, B T tangens evadat; et C D ac B T coincident cum C B et B t.

Corol. 2. Et vice versâ si B t sit tangens, et ad quodvis conicæ sectionis punctum D conveniant B D, C D; erit P R ad P T ut P r ad P t. Et contra, si sit P R ad P T ut P r ad P t: convenient, B D, C D ad conicæ sectionis punctum aliquod D.

Corol. 3. Conica sectio non secat conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ conicæ sectiones per quinque puncta, A, B, C, P, O; easque secet recta B D in punctis D, d, et ipsam P Q secet recta C d in q. Ergo P R est ad P T ut P q ad P T; (n) unde P R et P q sibi invicem æquantur, contra hypothesin.

LEMMA XXI.

Si rectæ duæ mobiles et infinitæ B M, C M *per data puncta* B, C *ceu polos ductæ, concursu suo* M *describant tertiam positione datam rectam* M N; *et aliæ duæ infinitæ rectæ* B D, C D, *cum prioribus duabus ad puncta illa*

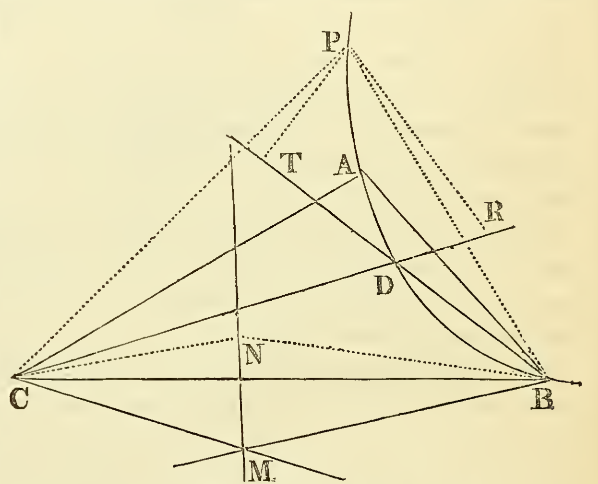
Geometriâ Cartesius per calculum analyticum generaliter resolvit.

(m) * *Nam si P R et P T* ponantur *in ratione datâ*, erit quoque ob datas P Q, P S, rectangulum P Q × P R, ad rectangulum P S × P T, in ratione datâ; sed per demonstrata in 1°. casu P Q × P R : P S × P T = D E × D F : D H × D G; ergò D E × D F ad D H × D G in ratione datâ.

(n) * Cum enim duæ sectiones conicæ se mutuò intersecent in punctis O et B, (per hyp.) duci poterit recta B D, quæ duos sectionum arcus in B et O convenientes secet in punctis duobus, eritque per Coroll. 1. Lem. XX. P R : P T = P r : P t = P q : P T, adeóque P R : P T = P q : P T, undè P R et P q sibi invicem æquantur, ac proindè C d, coincidit cum C D, et punctum d, cum puncto D, (contra hyp.).

data B, C *datos angulos* M B D, M C D *efficientes ducantur: dico quod hæ duæ* B D, C D *concursu suo* D *describent sectionem conicam per puncta* B, C *transeuntem. Et vice versâ, si rectæ* B D, C D *concursu suo* D *describant sectionem conicam per data puncta* B, C, A *transeuntem, et sit angulus* D B M *semper æqualis angulo dato* A B C, *angulusque* D C M *semper æqualis angulo dato* A C B: *punctum* M *continget rectam positione datam.*

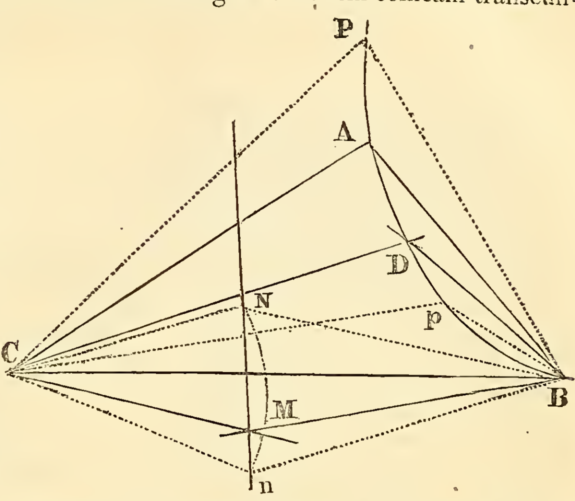
Nam in rectâ M N detur punctum N, et ubi punctum mobile M incidit in immotum N; incidat punctum mobile D in immotum P. Junge C N, B N, C P, B P, et a puncto P age rectas P T, P R occurrentes ipsis B D, C D in T et R, et facientes angulum B P T æqualem angulo dato B N M, et angulum C P R æqualem angulo dato C N M. Cum ergo (ex hypothesi) æquales sint anguli M B D, N B P, ut et anguli M C D, N C P; aufer communes N B D et N C D, et restabunt æquales N B M et P B T, N C M et P C R: ideoque triangula N B M, P B T similia sunt, ut et triangula N C M, P C R. Quare P T est ad N M ut P B ad N B, et P R ad N M ut P C ad N C. Sunt autem puncta B, C, N, P immobilia. Ergo P T et P R datam habent rationem ad N M, proindeque datam rationem inter se; atque ideo [per Lem. XX. (°)] punctum D, perpetuus rectarum mobilium B T et C R concursus, contingit sectionem conicam, per puncta B, C, P transeuntem. Q. e. d.

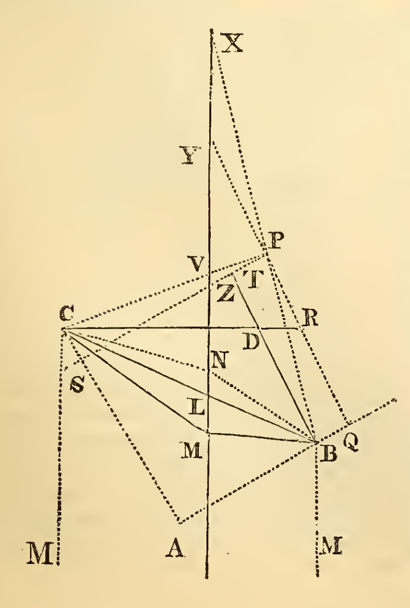


(°) *Atque ideo per Lemma* XX. &c. ut pateat Lemma XX. ad hanc demonstrationem applicari, hæc sunt supplenda constructioni Newtonianæ.

Concurrant lineæ B M, C M in puncto lineæ N M infinitè distanti, hoc est, sint illæ lineæ N M parallelæ, et ducantur lineæ B A C A facientes cum illis lineis B M, C M angulos M B A, M C A datis M B D, M C D æquales. Dico lineas B A, C A fore parallelas lineis P T, P R secundum constructionem Newtonianam descriptis: Productis enim B P et P T (si necesse sit) donec secent rectam datam M N in X et Z, erit angulus B P Z exterior respectu Trianguli P Z X, ideoque æqualis angulis X et P Z X, et angulus B N M erit exterior respectu Trianguli B N X ideoque æqualis angulis X et X B N, anguli vero B P Z et B N M æquales sunt per constructionem Newton. ergo anguli X et P Z X æquales sunt angulis X et X B N, unde angulus P Z X, quem facit linea P T cum recta N M est æqualis angulo X B N sive angulo dato M B D quem facit linea B A cum linea B M ipsi N M

Et contra, si punctum mobile D contingat sectionem conicam transeuntem per data puncta B, C, A, et sit angulus D B M semper æqualis angulo dato A B C, et angulus D C M semper æqualis angulo dato A C B, et ubi punctum D incidit successivè in duo quævis sectionis puncta immobilia p, P, punctum mobile M incidat successivè in puncta duo immobilia n N : per eadem n, N, agatur recta n N, et hæc erit locus perpetuus puncti illius mobilis M. Nam, si fieri potest, versetur punctum M in lineâ aliquâ curvâ. Tanget ergo punctum D sectionem conicam per puncta quinque B, C, A, p, P transeuntem, ubi punctum M perpetuò tangit lineam curvam. Sed et ex jam demonstratis tanget etiam punctum D sectionem conicam per eadem quinque puncta B, C, A, p, P, transeuntem, (p) ubi punctum M perpetuò tangit lineam rectam. Ergo duæ sectiones





parallela, ergo per naturam Parallelarum, est linea P T parallela lineæ B A.

Eodem planè modo demonstrabitur lineam C A esse Parallelam lineæ P R. Quibus positis, sit sectio Conica per puncta B, C, P et A transiens, lineæ B D, C D juxta conditiones in Lemmate præscriptas ductæ, concursu suo D percurrent eam sectionem Conicam : Productis enim lineis P T, P R, donec secent lineas C A, B A, in S et Q fiet *Parallelogrammum A S P Q, quod in Angulis suis oppositis A et P tangit sectionem conicam et lateribus anguli A productis occurrit eidem sectioni in B et C, et lineæ BD, CD a punctis occursuum B et C ductæ* (secundum conditiones Lemmatis hujusce XXI.) *abscindunt a Parallelogrammi lateribus P S, P Q partes P T, P R quæ sunt ad invicem in datâ ratione* (per demonstrationem Newtonianam hujusce) *ergo* (per 2. Casum Lem. XX.) *punctum D tangit sectionem Conicam per puncta quatuor A, B, C, P transeuntem.*

(p) * *Ubi punctum M, perpetuò tangit lineam rectam* n N, &c. cum enim angulorum datorum A B C, A C B, latera duo coincidunt cum rectâ C B, punctum A, aliorum laterum B A, C A, intersectio, locatur in sectione conicâ per polos C, B, transeunte; dum

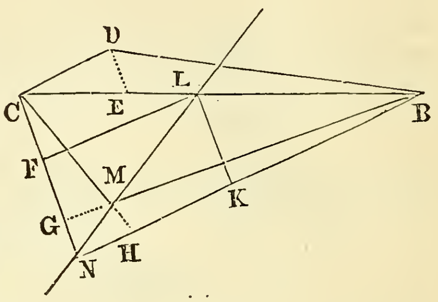
conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lemmat. XX. Igitur punctum M versari in lineâ curvâ absurdum est. Q. e. d. (q)

verò latera duo B n, et C n, B N, et C N, sese intersecant in n, N, aliorum laterum B p, et C p, B P et C P intersectiones p, P, sunt in eâdem sectione conicâ ex demonstratis.

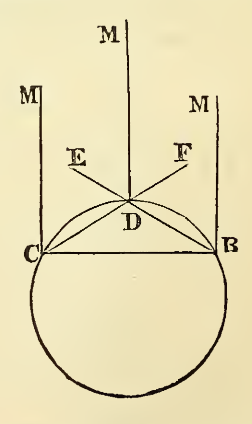
(q) 310. In hâc organicâ sectionum conicarum descriptione, angulorum circà polos mobilium crura utrinque producantur, ut cum duo crura v. gr. C P, B P suprà lineam C B divergunt, infrà eandem producta convergant.

Si recta N M, per polorum alterutrum C, vel B, transeat, aut si anguli B C D, C B D, simul evanescant, punctum D describet lineam rectam. Nam in 1°. casu angulorum datorum unus immobilis manet, dum alter circà polum suum rotatur et crurum suorum cum immobilis anguli cruribus intersectione lineam rectam describit; Si enim recta N M cum anguli dati D C M crure altero C M coincidat, immobili manente angulo D C M, alterius D B M crura rectas M C, C D perpetuò intersecabunt; deindè si crure B M, coincidente cum C B, ut rectam C M positione datam perpetuò secet in C, immobilis maneat angulus D B M, alterius D C M circà polum C rotati crus C D rectam B D perpetuò intersecabit.

In 2° casu anguli B C N, C B N circà polos C, B mobiles, crurum duorum C N, B N concursu, rectam N M L positione datam et aliorum crurum C B, B C seu C D, B D concursu D lineam quamlibet percurrant, sintque N punctum fixum M et D puncta mobilia; ductis ex puncto L dato ad latera data C N, B N perpendicularibus L F, L K ex puncto mobili M ad easdem perpendicularibus M G, M H et ex puncto D ad rectam C B, perpendiculari D E; sit C E = x, D E = y, C B = a, ac proindè E B = a — x, M N = z, L N = b, L F = c, F N = d, C N = e, L K = f, N K = h, N B = g; et ob triangula N M G, N F L similia, N L (b) : L F (c) = M N (z) : G M $= \frac{cz}{b}$, et L N (b) : F N (d) = M N (z) : G N $= \frac{dz}{b}$, adeòque C G = C N — G N $= \frac{be - dz}{b}$; porrò ob angulos æquales D C E, M C G, et D E C, M G C, triangula D C E, M C G similia sunt; quarè C G $(\frac{be - dz}{b})$: G M $(\frac{cz}{b})$ = C E (x) : D E (y). Undè $czx = bey - dzy$, et $z = \frac{bey}{cx + dy}$; ob triangula N L K, N M H, similia N L (b) : L K (f) = N M (z) : M H $= \frac{fz}{b}$, et N L (b) : N K (h) = M N (z) : N H $= \frac{hz}{b}$.

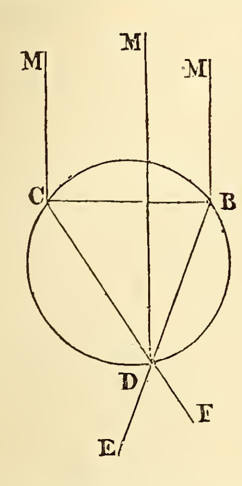


undè B H $= \frac{gb - hz}{b}$; ob similia triangula B E D, B H M, B H $(\frac{gb - hz}{b})$: M H $(\frac{fz}{b})$ = B E (a — x) : D E (y) quarè $faz - fzx = gby - hzy$, et $z = \frac{gby}{fa + hy - fx} = \frac{bey}{cx + dy}$, adeóque $gcx + gdy = fae + hey - fex$. Cum igitur æquatio sit unius dimensionis, locus punctorum D, est linea recta.

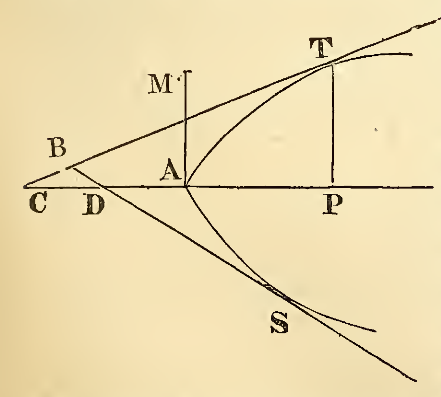


311. Si angulorum mobilium M C D, M B D crura C M, B M sibi invicem parallela maneant, seu, si recta N M ad distantiam infinitam abeat, crura alia C D, B D concursu suo D circulum describent, et contrà. Concurrant enim C M, D M, B M ad distantiam infinitam, et angulus M C D æqualis erit angulo M D F, ac M B D æqualis M D E; quoniam igitur dati sunt anguli M C D, M B D dabuntur quoque anguli M D F, M D E ac etiam an-

gulus E D F et ei æqualis C D B. quarè cum curva concursu D descripta, necessariò transeat per puncta data C, et B, patet punctum D seu

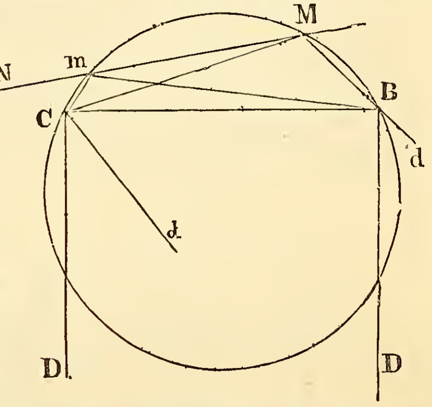


verticem anguli dati C D B chordæ C B insistentis esse in circuli peripheriâ. Et contrà, si concursus D, tangat circulum per puncta C, et B transeuntem, dabuntur tres anguli C D B, M C D, M B D atque adeò in quadrilatero M C D B M, cujus duo latera C M, B M concurrunt in M, dabitur angulus C M B, quod fieri nequit, nisi recta N M ad distantiam infinitam abeat, hoc est, nisi parallela fiant crura C M B M.



312. *Lemma.* Si duæ rectæ parabolam tangant, et puncta contactuum in infinitum abeant, binæ tangentes se mutuò intersecant ad angulum infinitesimum et evadunt parallelæ axi parabolæ. Sit enim parabolæ axis C P, vertex A, C T tangens in T et axem secans in C, T P ad axem ordinata, A M latus rectum axis, erit C P = 2 A P, et A P · P T = P T : A M, adeóque 2 A P (C P) : P T = 2 P T : A M. Si punctum contactûs T, in infinitum abeat, erit 2 P T, infinita respectu A M, et proindè C P, infinita respectu P T, hoc est, sinus totus C P infinitus evadit respectu tangentis P T anguli T C P, quarè angulus ille infinitesimus est, et tangens axi C P parallela, altera tangens B S, axem secet in D, et tangentem C T in B, et punctum contactûs S in infinitum abeat; erit angulus S D P infinitesimus et angulus T B D duobus internis atque infinitesimis B C D, B D C æqualis, erit quoque infinitesimus.

313. Super datâ rectâ C B, describatur segmentum circuli B M m C, quod capiat angulum B M C, datorum M C D, M B D supplemen-



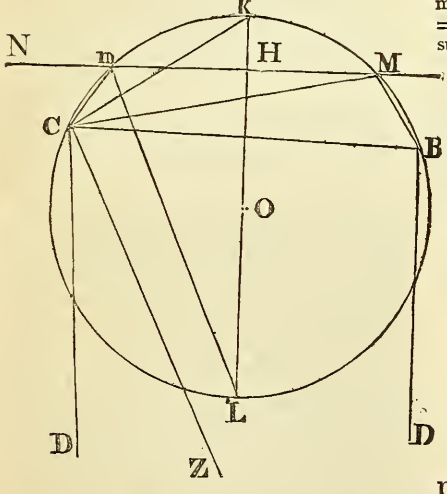
tum ad quatuor rectos et compleatur circulus. Si recta data N M, quam in descriptione sectionis conicæ percurrit crurum B M, C M concursus M hunc circulum secet, describetur hyperbola; si recta N M circulum contingat, describetur parabola; si recta N M circulo nullibi si occurrat, describetur ellipsis.

Cas. 1. Recta N M circulum secet in punctis m, M, et crura C d, B d, et C D, B D, sibi invicem parallela erunt sive concurrent ad distantiam infinitam; nam cum in quadrilatero D C M B D d C m B d angulus M vel m sit complementum angulorum C et B ad quatuor Rectos, angulus ad D vel d, evanescit, ideoque lineæ C D, B D erunt parallelæ. Cum verò in omni Sectione Conicâ inveniri possit Tangens parallela chordæ cuivis datæ (per Lemma IV. de Conicis pag. 129.) ductæ intelligantur Tangentes Sectionis chordis C D, C d Parallelæ, illæ Tangentes facient inter se angulum æqualem angulo D C d quem faciunt inter se illæ chordæ, et puncta contactuum erunt ad distantiam infinitam, nulla verò est sectio conica præter hyperbolam cujus ad infinitam distantiam tangentes angulum finitum communi intersectione faciant; in Ellipsi enim nulla est tangens ad distantiam infinitam, et in parabolâ hujusmodi tangentes angulum infinitesimum duntaxat, facerent (per Lemma superius 313). Si igitur recta M N circulum secet, describetur hyperbola cujus asymp-

toti seu tangentes ad distantiam infinitam rectis C D, C d parallelæ sunt et se mutuò intersecant in centro trajectoriæ. Q. e. i.

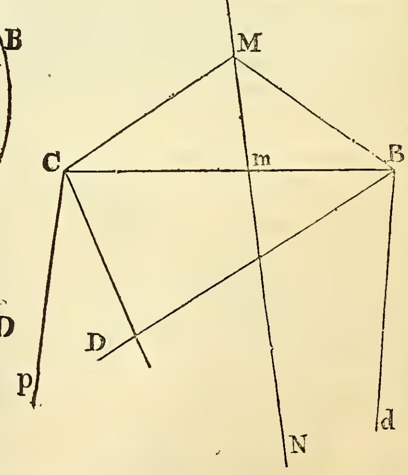
Cas. 2. Quoniam angulus m C M, in 1°. casu æqualis est asymptotorum angulo D C d, ob æquales D C M, d C m; si manentibus circulo et distantiâ polorum C B, puncta intersectionum m, M ad se mutuò accedant, decrescet angulus D C d, et tandem punctis m, M coëuntibus, hoc est, secante M N in tangentem mutatâ angulus ille evanescet, dum rectæ C D, B D manent parallelæ, et ad distantiam infinitam cum trajectoriâ conveniunt. In hoc igitur casu duæ rectæ, ipsis C D, C d parallelæ et trajectoriam ad distantiam infinitam tangentes, se mutuò intersecant in angulo infinitesimo, seu in unicam lineam coëunt axi trajectoriæ parallelam, et proindè hyperbola casus primi mutatur in parabolam (312). Q. e. 2.

Cas. 3. Si recta N M nullibi circulo occurrat, rectæ B D, C D quarum concursu D sectio conica describitur nunquam possunt fieri parallelæ, et proindè curva non abit in infinitum, sed in se redit, estque adeò Ellipsis. Q. e. 3.



314. *Corol.* 1 Ex his axes trajectoriæ facilè determinantur. Sit O centrum circuli C m M B ut suprà (313) descripti, ab hoc centro in rectam N M cadat perpendicularis O H circulo occurrens in punctis K et L, et rectæ N M in H, jungatur C K, et fiat angulus K C Z æqualis angulo mobili M C D, aut quod idem est, anguli M C D crus C M ducatur ad positionem C K, et alterum crus C Z erit parallelum axi majori, et perpendiculare axi minori trajectoriæ, modò punctum K sit rectæ M N propius quam punctum oppositum L; nam arcus K m, K M sunt æquales et angulus K C m = K C M = $\frac{1}{2}$ m C M = D C Z; cumque m C M æqualis sit angulo quo asymptoti se mutuò intersecant, erit D C Z dimidium illius anguli, adeóque C Z parallela axi qui asymptotorum angulum bisecat; et si punctum K regulæ propius sit quam punctum oppositum L, erit angulus m C M acutus, ac proindè axis major qui angulum asymptotorum acutum bisecat, erit rectæ C Z parallelus, axis verò minor huic rectæ perpendicularis; undè si detur trajectoriæ centrum dabuntur axes, et si descripta sit trajectoria, invenitur axis positio, ductâ ad C Z normali ad trajectoriam utrinque terminatâ quam axis perpendiculariter et bifariam dividit; inventâ autem axium positione, habetur centrum in eorum intersectione communi. Superior autem constructio non solum hyperbolæ convenit, sed et parabolæ in quam hyperbola mutatur, dum puncta m, M coëunt, atque etiam Ellipsi in quam vertitur parabola, dum recta M N, extrà circulum transit.

315. *Corol.* 2. Axium trajectoriæ quadrata sunt ad invicem ut K H, ad L H; nam axes sunt inter se ut cosinus dimidii anguli asymptotorum ad sinum dimidii ejusdem anguli; est verò K C m qui æqualis est dimidio anguli asymptotorum, etiam æqualis angulo m L K, adeóque L H est ad H m ut axis ad axem; sed L H : m H = H m : K H, ac proindè L H : K H = L H ^{2} : H m ^{2}. Ergò quadrata axium sunt ad invicem ut L H ad K H.

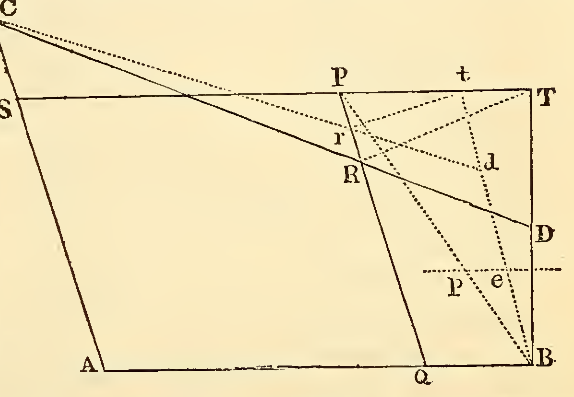


316. *Corol.* 3. Si angulorum mobilium summa duobus rectis æqualis fuerit, rectæ B D, C D fiunt parallelæ, quandò punctum M pervenit ad m, ubi recta N M occurrit rectæ C B productæ, si opus est, et quandò M abit in infinitum, cum in utroque casu evanescat angulus B M C. Si itaque linea M N, in hâc hypothesi alicubi occurrat rectæ B C productæ, duæ rectæ trajectoriam in distantiâ infinitâ contingent, et se mutuò ad angulum datum intersecabunt, adeóque describetur hyperbola; at si M N rectæ C B non occurrat, sed

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta describere.

Dentur puncta quinque A, B, C, P, D. Ab eorum aliquo A ad alia duo quævis B, C, quæ poli nominentur, age rectas A B, A C, hisque parallelas T P S, Q R P per punctum quartum P. Deinde a polis duobus B, C age per punctum quintum D, infinitas duas B D T, C R D, novissimè ductis TPS, PRQ (priorem priori et posteriorem posteriori) occurrentes in T et R. Denique de rectis P T, P R, actâ rectâ t r ipsi T R parallelâ, abscinde quasvis P t, P r ipsis P T, P R porportionales; et si per earum terminos t, r et polos B, C actæ B t, C r concurrant in d, locabitur punctum illud d in trajectoriâ quæsitâ. Nam punctum illud d (per Lem. XX.) versatur in conicâ sectione per puncta quatuor A, B, C, P transeunte; et lineis R r, T t evanescentibus, coit punctum d cum puncto D. Transibit ergo sectio conica per puncta quinque A, B, C, P, D. Q. e. d.



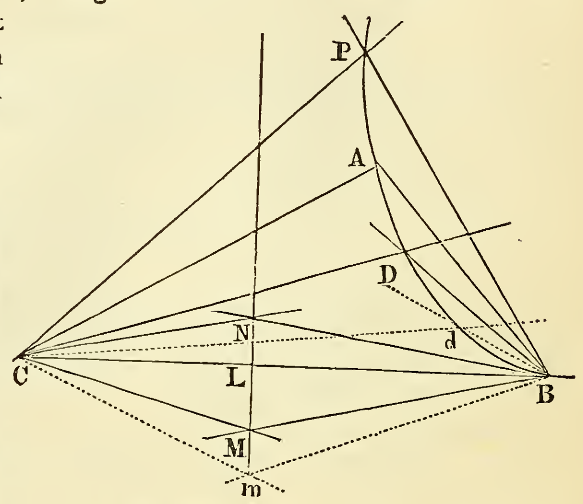
Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis A, B, C; et circum duo eorum B, C, ceu polos, rotando angulos magnitudine datos A B C, A C B, applicentur crura B A, C A primò ad punctum D, deinde ad punctum P,

ipsi parallela sit, rectæ C D, B D non evadent parallelæ, nisi quando punctum M abit in infinitum, ac proindè trajectoria erit parabola. Quoniam igitur recta M N rectæ C B productæ occurrit, vel ipsi parallela est, patet nunquam posse Ellipsim describi, si angulorum mobilium summa duobus rectis æqualis fuerit.

Scholium. Si crura C M, B M concursu suo M percurrant sectionem conicam per polum alterum C transeuntem, crura duo reliqua C D, B D concursu suo D describunt curvam secundi generis per polum alterum B transeuntem, præterquam ubi anguli B C D, C B D simul evanescunt, quo casu punctum D describet sectionem conicam per polum C transeuntem, et eâdem methodo curvas varias tertii, quarti, superiorum generum describere licet. Sed hæc ad præsens institutum non pertinent, qui plura desideraverit legat Geometriam Organicam Celeberrimi Matheseos Professoris Colini Mac Laurin, ex quo eximio opere non pauca excerpsimus.

et notentur puncta M, N in quibus altera crura B L, C L casu utroque se decussant. Agatur recta infinita M N, et rotentur anguli illi mobiles circum polos suos B, C, eâ lege ut crurum B L, C L vel B M, C M intersectio, quæ jam sit m, incidat semper in rectam illam infinitam M N; et crurum B A, C A, vel B D, C D, intersectio, quæ jam sit d, trajectoriam quæsitam P A D d B delineabit. Nam punctum d (per Lem. XXI.) continget sectionem conicam per puncta B, C transeuntem; et ubi punctum m accedit ad puncta L, M, N, punctum d (per constructionem) accedet ad puncta A, D, P. Describetur itaque sectio conica transiens per puncta quinque A, B, C, P, D. Q. e. f.



Corol. 1. (r) Hinc recta expeditè duci potest, quæ trajectoriam quæsitam in puncto quovis dato B continget. Accedat punctum d ad punctum B, et recta B d evadet tangens quæsita.

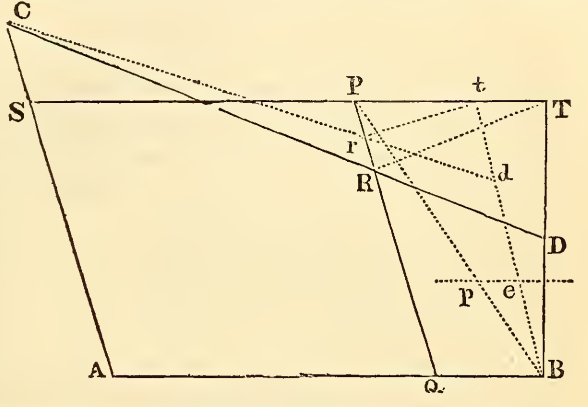
Corol. 2. (s) Unde etiam trajectoriarum centra, diametri et latera recta inveniri possunt, ut in corollario secundo Lemmatis XIX.

(r) 317. Tangens in B, coincidit cum crure B d anguli mobilis d B m, dum alterius anguli d C m, crus C d, coincidit cum rectâ C B. Nam in hoc casu, chorda B d evanescit et positione congruit cum tangente; undè tangens per punctum quodvis datum expeditè duci potest etiam nondùm descriptâ sectione conicâ, si punctum illud datum pro polo usurpetur.

(s) 318. Per quodvis punctorum datorum puta b, duc trajectoriæ tangentem, et per aliud quodvis punctum datum C, duc tangenti parallelam occurrentem trajectoriæ jam descriptæ in puncto aliquo; aut si descripta non fuerit trajectoria circà polos, rotentur anguli mobiles, donec crurum C D, B D concursus D, reperiatur in rectâ tangenti parallelâ; vel tandem punctum illud in quo recta tangenti parallela trajectoriæ occurrit, geometricè quæratur per Lem. XIX. Nam (vid. fig. et demonstr. Lem. XX.) cum data sint quinque puncta C, A, B, D, P, dabitur ratio constans rectangulorum P Q × P R, P S × P T, hoc est, rectangulorum D E × D F, D G × D H, adeóque (per Lem. XIX.) invenietur punctum concursus trajectoriæ cùm lineâ per punctum datum C ductâ. Cætera fiant ut in Coroll. 2°. Lem. XIX. possent etiam trajectoriarum axes et centra inveniri eo modo quo docuimus num. 314.

Scholium.

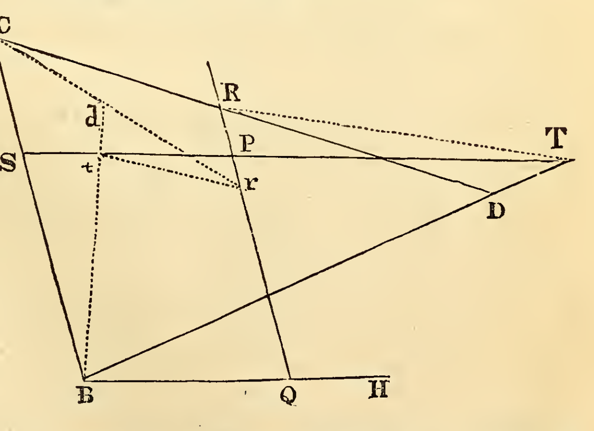
Constructio prior evadet paulo simplicior jungendo B P, et in eâ, si opus est, productâ capiendo B p ad B P ut est P R ad P T; et per p agendo rectam infinitam p e ipsi S P T parallelam, et in eâ (t) capiendo semper p e æqualem P r; et agendo rectas B e, C r concurrentes in d. Nam cum sint P r ad P t, P R ad P T, p B ad P B, p e ad P t in eâdem ratione; erunt p e et P r semper æquales. Hâc methodo puncta trajectoriæ inveniuntur expeditissimè, nisi mavis curvam, ut in constructione secundâ, describere mechanicè.



PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

Trajectoriam describere, quæ per data quatuor puncta transibit, et rectam contingct positione datam.

Cas. 1. Dentur tangens H B, punctum contactus B, et alia tria puncta C, D, P. Junge B C, et agendo P S parallelam rectæ B H, et P Q parallelam rectæ B C, comple parallelogrammum B S P Q. Age B D secantem S P

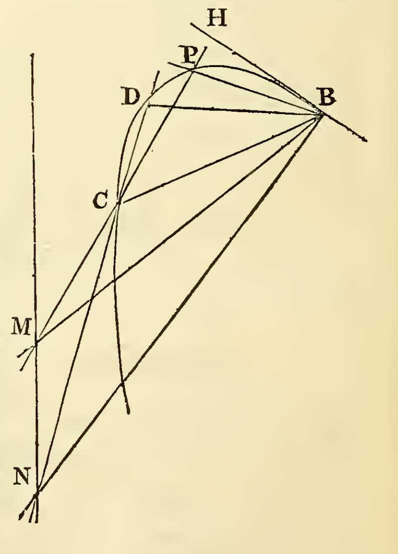


(t) * Hoc est linearum p e, P r, alterutra ad arbitrium capiatur, et altera assumptæ æqualis fiat, aganturque rectæ B e, C r, concurrentes in d; nam (per priorem constr.) P r : P t =

in T, et C D secantem P Q in R. Denique, agendo quamvis t r ipsi T R parallelam, de P Q, P S abscinde P r, P t ipsi P R, P T proportionales respectivè; et actarum C r, B t concursus d (per Lem. XX.) (u) incidet semper in trajectoriam describendam.

Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus C B H circa polum B, tum radius quilibet rectilineus et utrinque productus D C circa polum C. Notentur puncta M, N, in quibus anguli crus B C secat radium illum, ubi crus alterum B H concurrit cum eodem radio in punctis P et D. Deinde ad actam infinitam M N concurrant perpetuo radius ille C P vel C D et anguli crus B C, et cruris alterius B H concursus cum radio delineabit trajectoriam quæsitam.



Nam si in (x) constructionibus problematis superioris accedat punctum A ad punctum B, lineæ C A et C B coincident, et linea A B in ultimo suo situ fiet tangens B H; atque ideo constructiones ibi positæ evadent eædem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris B H concursus cum radio sectionem conicam per puncta C, D, P transeuntem, et rectam B H tangentem in puncto B. Q. e. f.

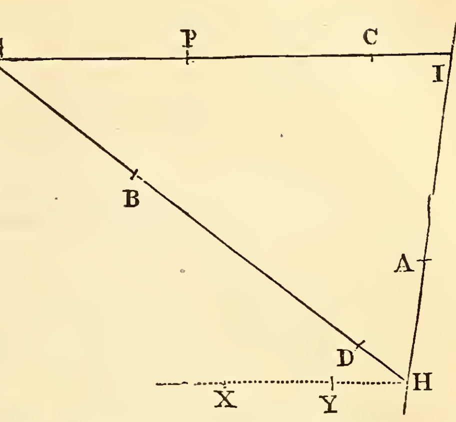
P R : P T = p B : P B, (per hanc constr.); et junctâ B t, ob parallelas p e, P t, erit p B : P B = p e : P t, atque adeò P r : P t = p e : P t, unde P r = p e.

(u) * Demonstratio clara fit, si in figurâ Lem. XX: punctum B accedat ad punctum A, et recta A B Q sectionis conicæ tangens evadat.

(x) * Nam in alterâ problematis XXII. solutione A B C, A C B, sunt anguli circà polos C et B mobiles; undè si punctum A accedat ad punctum B, coincidunt crura C A, C B, et unicam rectam constituunt, evanescente angulo A C B, remanet verò angulus A B C quem tangens A B cum B C continet; quarè dum anguli A B C, crus B C cum radio A C, si necessum sit, producto, perpetuò concurrit in rectâ aliquâ positione datâ ut N M, cruris A B et radii C A concursus trajectoriam describit.

(y) 319. *Erit ex Conicis;* scilicet si A sit punctum contactus erit (per Cor. 3. Lem. III. de Conic. p. 119.) H A ^{2} ad A I ^{2} ut rectangulum X H Y ad rectangulum P I C, sed ratio rectanguli X H Y ad rect. P I C, potest considerari ut composita ex ratione rect. X H Y ad rect. B H D, et ex ratione ejusdem rect. B H D ad rect. P I C. Est verò rect. X H Y ad rect. B H D ut rect. C G P ad rect. D G B (per Lem. III. de Conic. p. 117.) sunt enim H X, G C, duæ Parallelæ in Sectione Conicâ ductæ et per tertiam lineam G H sectæ, ideoque factum partium H X, H Y Parallelæ H X, quæ sumuntur ab intersectione H ad curvæ puncta X et Y, est ad B H × H D factum partium lineæ secantis G H sumptarum ab intersectione H ad puncta curvæ B et D, sicut factum partium alterius Parallelæ C G × G P, ad D G × G B factum partium correspondentium lineæ secantis. Est ergo ratio H A ^{2} ad A I ^{2} æqualis

Cas. 2. Dentur puncta quatuor B, C, D, P extra tangentem H I sita. Junge bina lineis B D, C P concurrentibus in G, tangentique occurrentibus in H et I. Secetur tangens in A, ita ut sit H A ad I A, ut est rectangulum sub mediâ proportionali inter C G et G P et mediâ proportionali inter B H et H D, ad rectangulum sub mediâ proportionali inter D G et G B et mediâ proportionali inter P I et I C; et erit A punctum contactus. Nam si rectæ P I parallela H X trajectoriam secet in punctis quibusvis X et Y: erit (ex conicis) (y) punctum A ita locandum, ut fuerit H A quad. ad A I quad. in ratione compositâ ex ratione rectanguli X H Y ad rectangulum B H D, seu rectanguli C G P ad rectangulum D G B, et ex ratione rectanguli B H D ad rectangulum P I C. Invento autem contactus puncto A, describetur trajectoria ut in casu primo. Q. e. f.



rationi compositæ ex ratione rect. C G P ad rect. D G B et, rect. B H D ad rect. P I C ideoque est H A : ad A I ut $\surd$ C G P $\times$ $\surd$ B H D ad $\surd$ D G B $\times$ $\surd$ P I C, sed Radices quadratæ illorum Rectangulorum sunt ipsæ mediæ proportionales inter illorum latera; Ergo *est H A ad A I ut est rect. sub media proportionali inter C G et G P et media proportionali inter B H et H D ad rect. sub media proportionali inter D G et G B et media proportionali inter P I et I C.* Si itaque H I in A secetur in eâ ratione, habebitur punctum contactus.

320. *Corol.* 1. Si ex punctis quibuslibet H et I rectæ H I sectionem conicam tangentis in A, agantur duæ quævis rectæ I G, H G convenientes in G, et sectionem conicam secantes in punctis quatuor C, P, D, B; factum C G P $\times$ B H D, erit ad factum D G B $\times$ P I C, in datâ ratione, nempè in ratione H A², ad A I²; Ducta enim linea H Y X lineæ I C P parallela, erit ut prius (per Lem III. de Conic. p. 117.) D G B : B H D = C G P : X H Y = $\frac{\text{C G P} \times \text{B H D}}{\text{D G B}}$, est verò H A² : A I² = X H Y $\left(\frac{\text{C G P} \times \text{B H D}}{\text{D G B}}\right)$: P I C (per Cor. 3. ejusdem Lem.) ergo H A² : A I² = C G P $\times$ B H D : D G B $\times$ P I C.

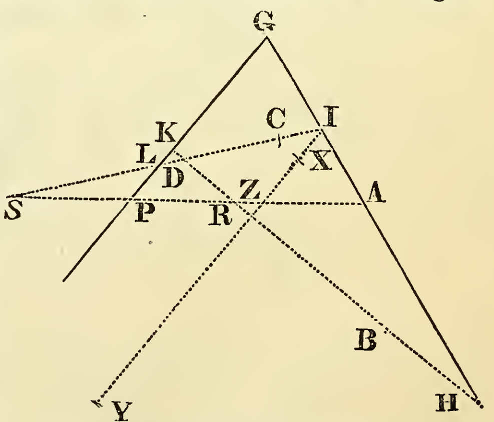
Quod si linea H Y X, extra sectionem cadat aut eam tangat, ex puncto quovis h lineæ H A I, ducatur alia linea h y x lineæ I C P parallela quæ sectioni occurrat in x et y, et ducatur alia linea h d b g lineæ H D B G Parallela ita ut sectioni occurrat in d et b, et lineæ P C in g, habebiturque ut prius h A² : A I² = C g P $\times$ b h d : d g b $\times$ P I C. Sed cum ob parallelas G H, b h sit (per Lemma 3um. de Con. p. 117.) C g P : d g b = C G P : D G B, et (per Cor. 3. ejusd. Lem.) sit h A² : b h d = H A² : B H D substitutis his ultimis rationibus loco priorum in proportione h A² : A I² = C g P $\times$ b h d : d g b $\times$ P I C fiet H A² : A I² = C G P $\times$ B H D : D G B $\times$ P I C ut prius. Undè satis

Capi autem potest punctum A vel inter puncta H et I, vel extra; et perinde trajectoria dupliciter describi.

PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

Trajectoriam describere, quæ transibit per data tria puncta, et rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes H I, K L et puncta B, C, D. Per punctorum duo quævis B, D age rectam infinitam B D tangentibus occurrentem in punctis H, K. Deinde etiam per alia duo quævis C, D age infinitam C D tangentibus occurrentem in punctis I, L. Actas ita seca in R et S, ut sit H R ad K R ut est media proportionalis inter B H et H D ad mediam proportionalem inter B K et K D; et I S ad L S ut est media proportionalis inter C I et I D ad mediam proportionalem inter C L et L D. Seca autem pro lubitu vel inter puncta K et H, I et L, vel extra eadem; dein age R S secantem tangentes in A et P, et erunt A et P puncta contactuum. Nam si A et P supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; et per punctorum H, I, K, L quodvis I, in tangente alterutra H I situm, agatur recta I Y tangenti alteri K L parallela, quæ occurrat curvæ in X et Y, et in ea sumatur I Z media proportionalis inter I X et I Y, erit ex conicis, (z) rectangulum XIY seu I Z quad. ad L P quad. ut rectangulum C I D ad rectangulum C L D, id est (per constructionem) ut S I quad. ad S L quad. atque ideo I Z ad L P ut S I ad S L. Jacent ergo puncta S, P, Z in unâ rectâ. Porro tangentibus concurrentibus in G, erit (ex conicis) rectangulum X I Y seu I Z quad. ad I A quad. ut G P quad. ad G A quad. ideoque I Z ad I A ut G P ad G A. Jacent ergo puncta P, Z et A in unâ rectâ, ideoque

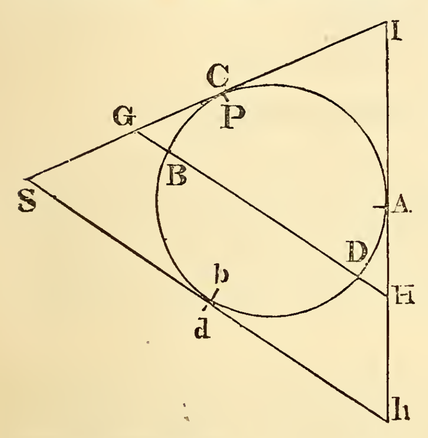


patet demonstrationem constructionis universalem esse, quomodocumque rectæ G I, G H flectantur, adeóque etiam valere, ubi recta H X sectioni non occurrit.

321. *Corol.* 2. Coëuntibus punctis C, P, recta I G fit tangens in C et G P = G C, C I = P I, adeóque C G P = G C², et P I C = C I²; undè in hoc casu H A²: A I² = G C² × B H D: C I² × D G B. Coëuntibus quoque punctis B et D, et secante G H, in tangentem g h, mutatâ, erit h A²: A I² = g C² × d h²: C I² × g d², ac proindè h A : A I = g C × d h : C I × g d; et h A × C I × g d = A I × g C × d h. Quare si ducantur tres rectæ sec-

puncta S, P et A sunt in unâ rectâ. Et [a] eodem argumento probabitur quod puncta R, P et A sunt in unâ rectâ. Jacent igitur puncta contactuum A et P in rectâ R S. Hisce autem inventis, trajectoria describetur ut in casu primo problematis superioris [b]. Q. e. f.

tionem conicam tangentes et inter se concurrentes in punctis I, g, h, facta ex tribus tangentium partibus inter concursuum et contactuum

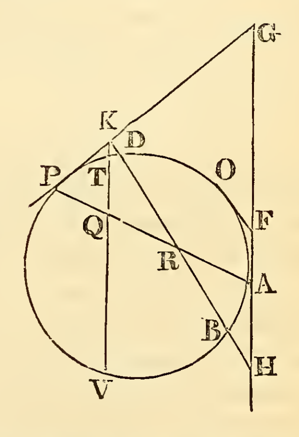


puncta alternatim sumptis A I, C g, d h, et A h, I C, g d, sunt æqualia.

(z) *Erit ex Conicis rect. X I Y ad L P² ut rect. C I D ad rect. C L D.* Scilicet cum P supponatur punctum contactus alicubi in Tangente K L situm et cum linea I Y sit (per const.) parallela Tangenti K L et utraque secetur per lineam I L, illa in I hæc in L erit (per Lem. III. de Conic p. 117.) rect. partium Parallelæ I Y ab intersectione I ad curvæ puncta X et Y sumptarum ad Rectang. partium Parallelæ L P ab intersectione L ad curvæ puncta (quæ coëunt in uno P quia L P debet esse Tangens, ideóque illud rectangulum est quadratum L P) sicut rect. C I D, ad rect. C L D quia nempe hæc rectangula sunt facta partium lineæ secantis I L factis partium singulæ Parallelæ correspondentia, ideóque (per const.) $I Z^2 : L P^2 = S I^2 : S L^2$ atque adeo $I Z : L P = S I : S L$, cum igitur sit I Z parallela L P (per const.) puncta S, P, Z, jacent in unâ rectâ. Porrò Tangentibus concurrentibus in G, cum supponatur punctum contactus alicubi situm in Tangente G A erit (per Cor. 2. ejusdem Lem. III. de Con. p. 118.) X I Y (sive $I Z^2$) : $I A^2 = G P^2 : G A^2$ ideoque, &c.

(a) *Et eodem argumento probabitur quod puncta R, P et A, sunt in unâ rectâ,* si per punctum K, agatur recta K V, tangenti G H, parallela, quæ occurrat curvæ in T et V, et in eâ sumatur K Q, media proportionalis inter K T et K V, cum recta K H secet Parallelas K V et A H erit (per Lem. III. de Con. p. 117.) rectan. V K T (sive $K Q^2$) ad $A H^2$ sicut rect. B K D ad rect. B H D hoc est ut $K R^2$ ad $H R^2$ (per const.) adeóque erit $K Q : A H = K R : R H$, quare puncta Q, R, et A erunt in eadem rectâ. Porrò Tangentibus concurrentibus in G erit (per Cor. 2. Lem. III. de Conic.) V K T $(K Q^2)$: $P K^2 = G A^2 : G P^2$ et $K Q : P K = G A : G P$, unde erunt P, Q et A in eâdem rectâ, ideoque P, R, et A in eâdem rectâ.

(b) 322. *Corol.* 1. Hinc si duæ rectæ H G, P G (vid. fig. Newt.) concurrentes in G, sectionem conicam tangant in A et P, jungaturque A P et producatur, et ex punctis quibusvis I et



H, in unâ tangentium G H, sumptis agantur ad idem sectionis conicæ punctum D, duæ rectæ I D, H D, quarum altera I D secet sectionem conicam in C, rectam A P in S, et tangentem G P in L, altera verò H D secet sectionem in B, rectam A P, in R, et tangentem G P, in K; erit semper $H R^2 : K R^2 = B H D : B K D$. et $I S^2 : L S^2 = C I D \cdot C L D$, quomodocumque inflectantur rectæ I D, H D, et tangentes G A, G P.

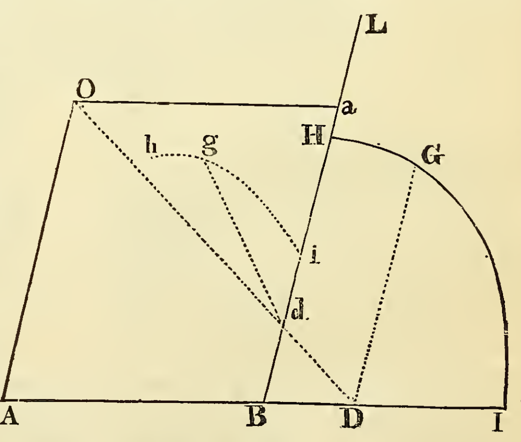
323. *Corol.* 2. Si puncta D et C, coëant, (vid. fig. Newt.) ut I L S, tangens evadat in D, seu C, erit $C I = D I$, et $C L = D L$, adeóque $I S^2 : L S^2 = D I^2 : D L^2$, et $I S : L S = D I : D L$. h. e. si Tangens I L, terminata per duas alias Tangentes, secet in S lineam A B jungentem puncta contactus earum Tangentium, ejus partes a sectione S ad utramque Tangentem sumptæ, erunt inter se sicut ejus partes a puncto contactus ad easdem Tangentes terminatæ.

In hâc propositione, et casu secundo propositionis superioris constructiones eædem sunt, sive recta X Y trajectoriam secet in X et Y, sive non secet; eæque non pendent ab hâc sectione. Sed demonstratis constructionibus ubi recta illa trajectoriam secat, innotescunt constructiones, ubi non secat; iisque ultra demonstrandis brevitatis gratiâ non immoror.

LEMMA XXII.

Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.

Transmutanda sit figura quævis H G I. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ A O, B L tertiam quamvis positione datam A B secantes in A et B, et a figuræ puncto quovis G, ad rectam A B ducatur quævis G D, ipsi O A parallela. Deinde a puncto aliquo O, in linea O A dato, ad punctum D ducatur recta O D, ipsi B L occurrens in d, et a puncto occursus erigatur recta d g datum quemvis angulum cum rectâ B L continens, atque eam habens rationem ad O d quam habet D G ad O D; et erit g punctum in figurâ novâ h g i puncto G respondens. Eâdem ratione puncta singula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ. Concipe igitur punctum G motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, et punctum g motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ et eandem describet. Distinctionis gratiâ nominemus D G ordinatam primam, d g ordinatam novam; A D abscissam primam, a d abscissam novam; O polum, O D radium abscindentem, O A radium ordinatum primum, et O a (quo parallelogrammum O A B a completur) radium ordinatum novum.



Dico jam quod, si punctum G tangit rectam lineam positione datam, punctum g tanget etiam lineam rectam positione datam. Si punctum G tangit conicam sectionem punctum g tanget etiam conicam sectionem. Conicis sectionibus hic circulum annumero. Porro si punctum G tangit

lineam (c) tertii ordinis analytici, punctum g tanget lineam tertii itidem ordinis; et sic de curvis lineis superiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis analytici quas puncta G, g tangunt. (d) Etenim ut est a d ad O A ita sunt O d ad O D, d g ad D G, et A B ad A D; ideoque il A D æqualis est $\frac{OA \times AB}{ad}$, et D G æqualis est $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam si punctum G tangit rectam lineam, atque ideo in æquatione quâvis, quâ relatio inter abscissam A D et ordinatam D G habetur, indeterminatæ illæ A D et D G ad unicam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hâc æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro A D, et $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro D G, (e) producetur æquatio nova, in qua abscissa nova a d et ordinata nova d g ad unicam tantum dimensionem ascendent, atque ideo quæ designat lineam rectam. (f) Sin A D et D G, vel earum alterutra, ascendebant ad duas dimensiones in æquatione primâ, ascendent itidem a d et d g ad duas in æquatione secundâ. Et (g) sic de tribus vel pluribus dimensionibus.

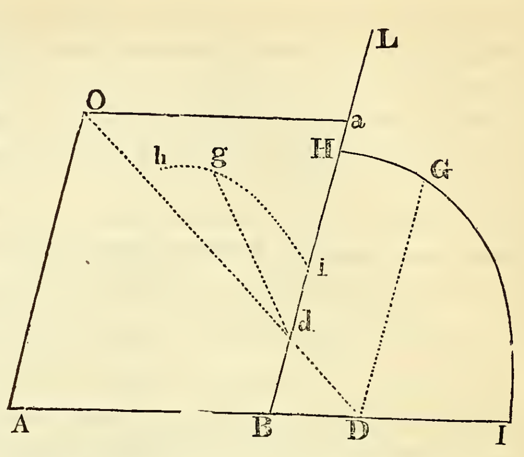
(c) 324. NEWTONUS lineas geometricas in ordines analyticos distinguit secundùm numerum dimensionum æquationis quâ relatio inter ordinatas et abscissas definitur, vel (quod proinde est) secundùm numerum punctorum in quibus a lineâ rectâ secari possunt; tot enim dimensiones habet æquatio ad curvam quot possunt esse illius curvæ et rectæ intersectiones; nam si intersectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex et conditio, idem erit calculus in casu unoquoque et propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti et indifferenter exhibere, adeóque tot esse debent æquationis radices ac proinde dimensiones quot sunt intersectiones. Hinc linea primi ordinis erit recta sola, lineæ secundi sive quadratici ordinis erunt sectiones conicæ et circulus, et lineæ tertii sive cubici ordinis parabola cubica, parabola Neiliana, Cissois veterum et aliæ. Cum autem recta inter curvas non sit numeranda, curva primi generis eadem est cum lineâ secundi ordinis, et curva secundi generis eadem cum lineâ tertii ordinis, et linea ordinis infinitesimi ea est quam recta in punctis infinitis secare potest, qualis est spiralis, cyclois, quadratrix et linea omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

(d) 325. Etenim ob similia triangula, a d O, A O D, a d : O A = O d : O D, (et per constr.) O d : O D = d g : D G, et ob rectas A O, B d parallelas O d : O D = A B : A D; unde a d : O A = d g : D G = A B : A D, atque adeò $AD = \frac{OA \times AB}{ad}$ et $DG = \frac{OA \times dg}{ad}$. Sit O A = a, A B = b, A D = x, D G = y, a d = z, d g = u, et erit $x = \frac{ba}{z}$, $y = \frac{au}{z}$.

(e) * Sit G I, recta positione data et ad illam æquatio quævis $cx + dy + ef = 0$, in qua +, significat vel +, vel —, loco x et y, substituantur eorum valores (325.) $\frac{ba}{z}$, $\frac{au}{z}$ et producetur $\frac{cba}{z} + \frac{dau}{z} + ef = 0$, hoc est, reductione ad communem denominatorem factâ $cba, + dau + efz = 0$ æquatio nova unius dimensionis ad rectam lineam g i.

(f) * Sit G I, sectio conica et ad illam æquatio generalis, $cxx + dyy + exy + g^2x + m^2y + n^3 = v$, loco x, y, substituantur $\frac{ba}{z}$, $\frac{au}{z}$, et prodibit æquatio nova ad conicam sectionem $\frac{cb^2a^2}{z^2} + \frac{da^2u^2}{z^2} + \frac{eba^2u}{z^2} + \frac{bag^2}{z} + \frac{m^2au}{z} + n^3 = 0$, hoc est, reductione factâ, $cb^2a^2 + da^2u^2 + eba^2u + bag^2z + m^2auz + n^3z^2 = 0$.

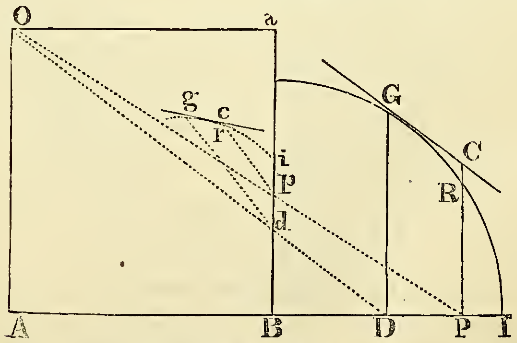
(g) * *Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus*, nam si in serie 1, x, x^2, x^3, x^4, &c. loco x, et dignitatum ejus substituantur $\frac{1}{z}$, et ipsius dignitates prodibit series nova $1, \frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^3}, \frac{1}{z^4}$, &c. et reductione ad communem denominatorem factâ habebitur $\frac{z^4, z^3, z^2, z^1, 1}{z^4}$. Similiter si in serie y, y^2, y^3, y^4, &c. loco y, substituatur



Indeterminatæ a d, d g in æquatione secundâ, et A D, D G in primâ ascendent semper ad eundem dimensionum numerum, et propterea lineæ, quas puncta G, g tangunt, sunt ejusdem ordinis analytici.

([h]) Dico præterea, quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figurâ primâ; hæc recta eodem modo cum curvâ in figuram novam translata tanget lineam illam curvam in figurâ novâ; et contra. Nam si curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem et coëunt in figurâ primâ, puncta

$\frac{u}{z}$, prodibit series nova $\frac{u}{z}, \frac{u^2}{z^2}, \frac{u^3}{z^3}, \frac{u^4}{z^4}$, &c. et per reductionem ad denominatorem communem $\frac{u z^3, u^2 z^2, u^3 z, u^4}{z^4}$, iisdem x et y valoribus substitutis in seriebus factorum x y, x y^2, x y^3, &c. et x^2 y, x^3 y, &c. et reductione ad communem denominatorem z^4 factâ, habebuntur series $\frac{z^2 u, z u^2, z u^3}{z^4}$, et $\frac{z u, u}{z^4}$. Porrò æquatio omnis ex hujusmodi dignitatibus et factis composita est, et abjici potest communis omnium terminorum denominator qui hic est z^4, ergò hujusmodi substitutionibus non mutatur gradus æquationis. Eadem quoque demonstrari possunt ex eo quod si linea recta curvam H G I, secet in quotlibet punctis, eadem recta translata curvam h g i in totidem punctis intersecare debeat, quoniam singulæ nec plures intersectiones in novam figuram transferuntur.



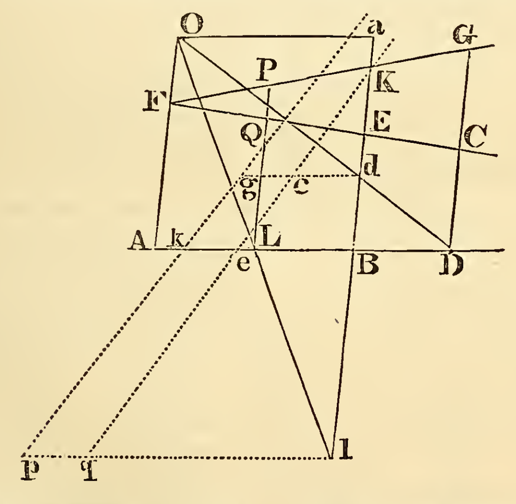
(h) 526. Recta G C curvam G I tangat in G, transferatur punctum G, in g, et ductâ P C parallelâ D G, quæ curvæ occurrat in R et tangenti in C; transferatur punctum C, in c, faciendo ut O P : P C = O p : p c parallelam d g, et recta g c, quæ puncta g, et c, jungit, novam curvam g i, tanget in g; nam accedat P C, ad D G, et accedat correspondens p c, ad d g, et punctis C, R, G, coëuntibus, coibunt in figurâ novâ puncta c, r, g, adeóque linea g c, positione coincidit cum chordâ evanescente g r, hoc est cum tangente in g. Idem aliâ ratione potest demonstrari; quoniam enim P C : p c = P O : p o = P R : p r, et proindè P C : P R = p c : p r, ergo punctum c, non est in curvâ g i, nisi cum C reperitur in curvâ G I, hoc est, nisi C et G coëant.

eadem translata accedent ad invicem et coibunt in figurâ novâ; atque ideo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, simul evadent curvarum tangentes in figurâ utrâque.

Componi possent harum assertionum demonstrationes more magis geometrico. Sed brevitati consulo.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum, a quibus conflatur, intersectiones transferre, et per easdem in figurâ novâ lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes, et lineæ rectæ, quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc lemma solutioni difficiliorum problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam (i) rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit; idque

(i) 327. Radius ordinatus primus O A, per concursum F rectarum F G, F C transeat, ductâ G D radio O A parallelâ, transferantur puncta G, C, in g, c, et puncta K, E, in k, e, rectæ k g, e c, erunt parallelæ; nam ducta intelligatur O L radio O A infinitè proxima, et rectas A D, a B secans in L et l, et actâ L Q P radio O A, parallelâ, puncta P, Q in p, q, translata concipiantur, et erit O L : O l = P L : p l = Q L : q l. coëuntibus verò punctis P, Q, F erit O l infinita et Q L = F A = P L, adeóque p l = q l. Punctum igitur concursus F ad distantiam infinitam transfertur, et lineæ g p, c q, ad illud convergentes sunt parallelæ.



328. *Corol.* 1. Puncta K et E, seu intersectiones linearum F G, F C cum a B, transferuntur capiendo in novâ ordinatâ B k = B K, B e = B E; est enim (per constr.) BK : BO = B k : B O. et B E : B O = B e : B O.

329. *Corol.* 2. Si punctum F, cum puncto A, coincidat, erunt g k, c e, rectis O A, a B parallelæ; nam ob parallelas B K, D G, A O et (per constr.) A B : A D = O d : O D = d g : D G, et coëuntibus punctis F, A, A B : A D = B K (B k) : D G, adeóque d g : D G = B k : D G, ac proindè B k = d g, unde g k lineæ B d est parallela.

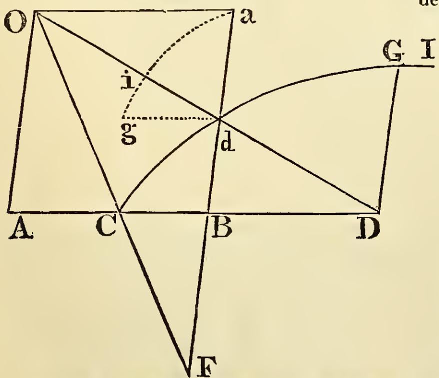
330. *Corol.* 3. Si recta linea F G, coincidat cum A D, transformabitur in rectam coincidentem cum a B, nam punctum D, transfertur in d, punctum L, in l.

quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum; lineæ autem parallelæ sunt, quæ nusquam concurrunt. Postquam autem problema solvitur in figurâ novâ; si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, ([k]) habebitur solutio quæsita.

([l]) Utile est etiam hoc lemma in solutione solidorum problematum. Nam quoties duæ sectiones conicæ obvenerint, quarum intersectione problema solvi potest, transmutare licet earum alterutram, si hyperbola sit vel parabola, in ellipsin: deinde ellipsis facile mutatur in circulum. Recta item et sectio conica, in constructione planorum problematum, vertuntur in rectam et circulum.

([k]) 331. (Vide fig. Newt. pag. 218.) Figura h g i data in figuram primam H G I, transformatur, faciendo ut O d, ad d g, ita O D, ad D G, parallelam radio O A.

([l]) 332. Sit curva C G I, parabola cujus diameter C D, diametri vertex C, ordinata G D radio ordinato primo A O parallela, latus rectum l, sitque $OA = a$, $AB = b$, $AC = c$, $AD = x$, $CD = x - c$, $GD = y$, nova abscissa, $ad = z$, nova ordinta $gd = u$, erit ex naturâ parabolæ $lx - lc = yy$, et substitutis pro x, et y, eorum valoribus $\frac{ba}{z}$, $\frac{bu}{z}$ (325.) producetur æquatio nova ad novam curvam g i, $\frac{lba}{z} - lc = \frac{b^2u^2}{z^2}$ hoc est, reductione factâ $b^2u^2 - lbaz + lcz^2 = o$, æquatio ad Ellipsim cujus diameter $aF = \frac{ba}{c}$, latus rectum $= \frac{la}{b}$ nam $\frac{baz}{c} - z^2 : u^2 = \frac{ba}{c} \frac{la}{b}$.



Si nova ordinata g d, ponatur ad abscissam a d, perpendicularis, et prætereà fiat $lc = b^2$, sive $l \times AC = AB^2$ superior ad Ellipsim æquatio in hanc mutabitur $u^2 - \frac{baz}{c} + zz = o$, quæ est ad circulum cujus diameter $\frac{ba}{c}$, ex tribus autem rectis a, b, c, binæ a et b, vel a et c, possunt ad arbitrium assumi, et tertia determinatur per æquationem $lc = bb$, in circulo.

Si vertex C cum puncto A coëat, hoc est, si $AC = c = o$ æquatio ad novam curvam erit $b^2u^2 - lbaz = o$, hoc est, curva g i, erit parabola; et eodem modo invenitur Ellipsim et Hyperbolam atque adeò Sectiones omnes conicas in parabolam transformari, dum diametri A D radio O a parallelæ vertex C coincidit cum puncto A radii ordinati primi O A ordinatis ad diametrum paralleli.

Si parabolæ vertex C cum puncto B coëat, erit $b = c$, adeóque Ellipsis vel circuli g i diameter $\frac{ba}{c}$, erit $a = OA = aB$.

Si curva C G I, fuerit hyperbola cujus sit diameter d, latus rectum l, manentibus cæteris denominationibus ut suprà, erit ex naturâ hyperbolæ $dy^2 = lx^2 - 2clx + dlx - ldc + lcc$, et substitutis loco x et y, eorum valoribus et reductione ad communem denominatorem factâ, producetur.

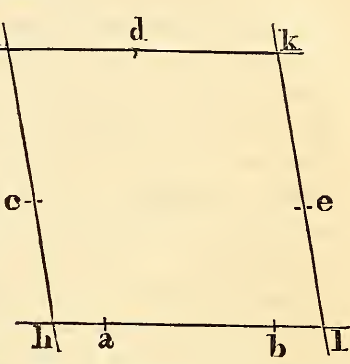
$$db^2u^2 + 2clbaz + ldcz^2 - lb^2a^2 - dlbaz - lc^2z^2 = o$$

nova æquatio ad parabolam vel hyperbolam aut Ellipsim prout assumitur linea c, æqualis vel major vel minor diametro d, Ellipsis autem in circulum abit ponendo $ldc - lc^2 = db^2$, et angulum g d a, rectum, ut ex locorum geometricorum doctrinâ liquet. Eâdem ratione transformatur Ellipsis.

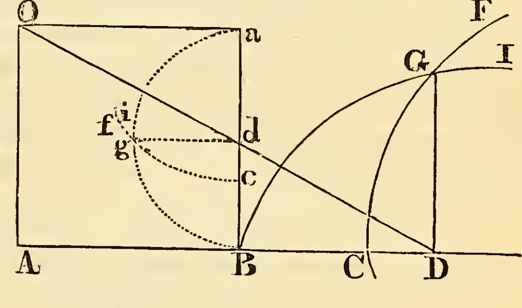
333. His præmissis facilè intelligitur hujus lemmatis usus in solidorum aut etiam planorum problematum solutione. Nam sit quærenda intersectio G conicæ sectionis B G I cum alterâ sectione conicâ aut rectâ lineâ C G F positione datâ. transformetur (332.) sectio conica B G I in circulum B G a, et linea C G F, in lineam c g f, tum ex puncto intersectionis g, circuli B g a, et lineæ c g f, demit.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

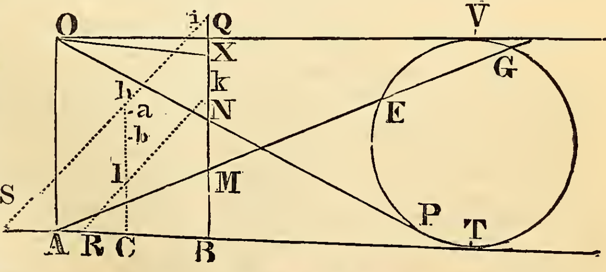
Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit, et rectas tres continget positione datas.



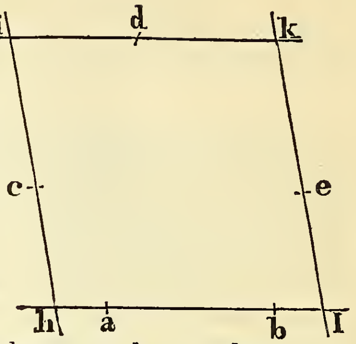
Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, et concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per lemma superius, in figuram novam. (m) In hâc figurâ tangentes illæ duæ evadent sibi invicem parallelæ, et tangens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data transeunti. Sunto h i, k l tangentes illæ duæ parallelæ, i k tangens tertia, et h l recta huic parallela transien per puncta illa a, b, per quæ conica sectio in hâc figurâ novâ transire debet, et parallelogrammum h i k l



tatur ad a B nova ordinata sive perpendicularis g d, et per punctum d, agatur radius abscindens O d D secans rectam A B in D, denique per D agatur G D radio ordinato primo O A parallela quæ sit ad O D ut g d, ad O d, et erit G punctum intersectionis quæsitum. Cum enim in puncto inter sectionis duarum linearum B G I, C G F, communis sit ordinata G D manifestum est intersectionem illam transformari in intersectionem linearum B g a, c g f, et vice versâ (331).



(m) 334. Sit O, concursus tangentium duarum O V, O P, A concursus tangentis tertiæ A T, cum rectâ A G, quæ per puncta duo E, G, data transit, age rectam infinitam O A, eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, et O X parallelâ A T, pro radio ordinato novo usurpatâ, transmutetur figura in figuram novam, quod facillimum est, si ordinatæ novæ parallelæ sumantur radio ordinato novo O X, nam recta A T transformatur in rectam B X i (330), recta A G in rectam C h ipsi B X parallelam (329) et punctum illius C, reperitur, capiendo B C = B M (328). rectæ O V, O P transmutantur in rectas parallelas R k, S i, (327); earumque puncta R, S, habentur capiendo B R = B N, B S = B Q, et alia puncta duo (per Lem. XXII.) facilè reperiuntur. Puncta E, et G, transferantur in b, et a, et productis lineis parallelis B i et C h, R k, et S i, donec sibi mutuò occurrant, compleatur parallelogrammum l h i k, et nova sectio conica transibit per puncta b, et a, et tangetur a rectis tribus h i, l k, k (326).



complens. (n) Secentur rectæ h i, i k, k l in c, d, e, ita ut sit h c ad latus quadratum rectanguli a h b, i c ad i d, et k e ad k d ut est summa rectarum h i et k l ad summam trium linearum quarum prima est recta i k, alteræ duæ sunt latera quadrata rectangulorum a h b et a l b: et erunt c, d, e puncta contactuum. Etenim, ex conicis, sunt h c quadratum ad rectangulum a h b, et i c quadratum ad i d quadratum, et k e quadratum ad k d quadratum, et e l quadratum ad rectangulum a l b in eâdem ratione; et propterea h c ad latus quadratum ipsius a h b, i c ad i d, k e ad k d et e l ad latus quadratum ipsius a l b sunt in subduplicatâ illâ ratione, et compositè, in datâ ratione omnium antecedentium h i et k l ad omnes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectanguli a h b, et recta i k, et latus quadratum rectanguli a l b. Habentur igitur ex datâ illâ ratione puncta contactuum c, d, e, in figura nova. Per inversas operationes lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam, et ibi (per Prob. XIV.) describetur trajectoria. Q. e. f. (o) Cæterum perinde ut puncta a, b jacent vel inter puncta h, l, vel extra, debent puncta c, d, e vel inter puncta h, i, k, l capi, vel extra. Si punctorum a, b alterutrum cadit inter puncta h, l, et alterum extra, problema impossibile est.

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

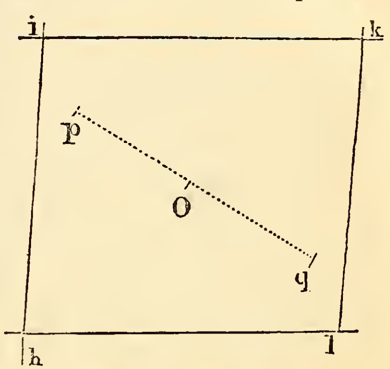
Trajectoriam describere, quæ transibit per punctum datum, et rectas quatuor positione datas continget.

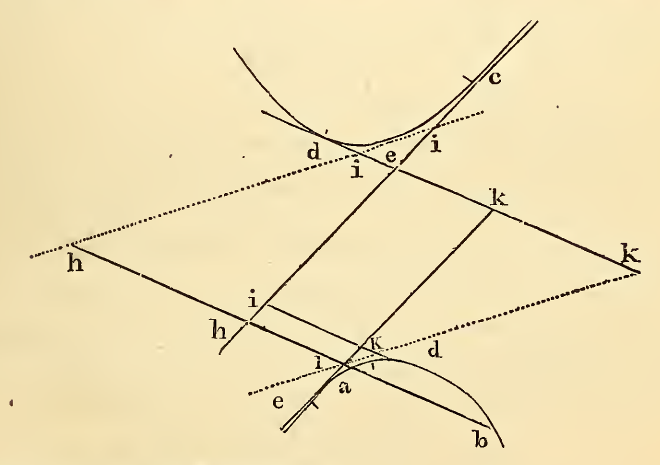
Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad inter-

* (n) Inter a b, h b, quæratur media proportionalis quæ dicatur M, et inter a l, l b, media proportionalis N; et deinde ita secentur rectæ h i, i k, k l, in c, d, e, ut sit h c, ad M, i c, ad i d, et k e ad k d, ut est h i + k l, ad i k + M + N, et erunt c, d, e, puncta contactuum; Etenim si fuerint c, d, e, puncta contactuum, o b, h l parallelam tangenti i k, quæ cum alterâ tangente h i, concurrit in i, erit (per Prop. 16. et 18. lib. 3. Conic. Apoll. sive per Corol. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.) $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2$, et o b, h i, occurrentem sectioni in solo puncto c, et parallelam tangenti l k, quæ alteri tangenti i k occurrit in k, erit (per easdem Prop. Apoll.) $ic \times ic\ (ic^2) : id^2 = ke^2 : kd^2$, et o b, h l, parallelam tangenti i k, quæ cum alterâ tangente l k, convenit in k, erit (per easdem Prop. Apoll.) $ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, adeóque $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2 = ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, et propterea $hc : \sqrt{ah \times hb}\ (M) = ic : id = ke : kd = el : \sqrt{al \times lb}\ (N)$, et compositè summa omnium antecedentium est ad summam omnium consequentium ut quilibet antecedens ad suum consequentem, hoc est $hc : M = ic : id = ke : kd = el : N = hc + ic + ke + el\ (hi + kl) : M + id + kd + N\ (ik + M + N)$. Habentur igitur (per constr.) ex datâ illâ ratione puncta contactuum c, d, e, in figurâ novâ per inversas operationes (331).

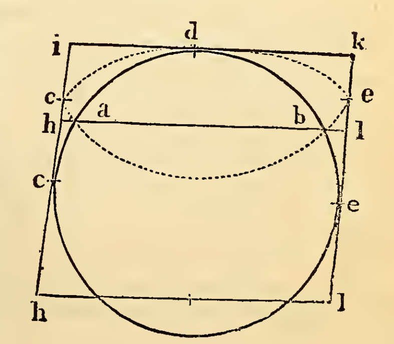
(o) 335. Quoniam duæ parallelæ h i, l k, neque parabolam, neque hyperbolam simplicem contingere possunt, tangent hyperbolas oppositas

sectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, et eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, transmutetur figura (per Lem. XXII.) in figuram novam, et tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ h i et k l, i k et h l continentes parallelogrammum h i k l. Sitque p punctum in hâc novâ figurâ puncto in figurâ primâ dato respondens. (p) Per figuræ centrum O agatur p q, et existente O q aquali O p, erit q punctum alterum per quod sectio conica in hâc figurâ novâ transire debet. Per Lemmatis XXII. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, et ibi habebuntur puncta duo per quæ trajec-





vel ellipsim, circulo inter ellipses annumerato. Porrò Ellipsis tota inter tangentes parallelas, et hyperbolæ oppositæ totæ extra easdem sunt; quarè in Ellipsi puncta a, b, inter puncta h, l, sita sunt; in hyperbolis extra; atque adeò si punctorum a, b, alterum cadit inter puncta h, l et alterum extrà, problema impossibile est. In Ellipsi punctum contactûs d, inter puncta i, k, necessariò cadit; alia duo c, e, inter puncta h et i, l et k, vel aliquandò extrà esse possunt; in hyperbolis oppositis contactuum puncta duo ut c, d, extrà puncta h, i, k, l, necessariò posita sunt, tertium ut e, vel extrà vel intra esse potest, undè præscribit Newtonus ut puncta c, d, e, vel inter puncta h, i, k, l, vel extrà capiantur, perindè ut puncta a, b, jacent vel inter puncta h, l, vel extrà.



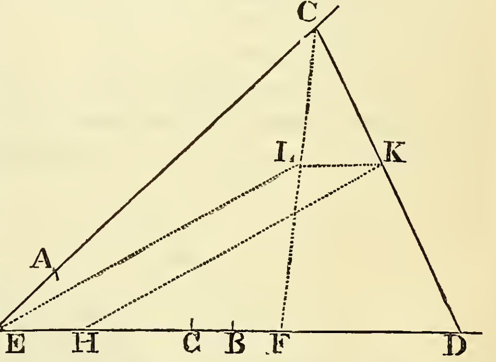
(p) 336. Parallelogrammi h, i, k, l, sectioni conicæ circumscripti diagonales in sectionis

toria describenda est. Per eadem vero describi potest trajectoria illa per Problema XVII. Q. e. f.

LEMMA XXIII.

Si rectæ duæ positione datæ A C, B D *ad data puncta* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, et recta* C D, *quâ puncta indeterminata* C, D *junguntur, secetur in ratione datâ in* K : *dico quod punctum* K *locabitur in rectâ positione datâ.*

(q) Concurrant enim rectæ A C, B D in E, et in B E capiatur B G ad A E ut est B D ad A C, sitque F D semper æqualis datæ E G; et erit ex constructione E C ad G D, hoc est, ad E F ut A C ad B D, ideoque in ratione datâ, et propterea dabitur specie triangulum E F C. Secetur C F in L ut sit C L ad C F in ratione C K ad C D; et ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum E F L; proindeque punctum L locabitur in rectâ E L positione datâ. Junge L K, et similia erunt triangula C L K, C F D; et ob datam F D et datam rationem L K ad F D dabitur L K. Huic æqualis capiatur E H, et erit semper E L K H parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere positione dato H K. Q. e. d.



Corol. Ob datam specie figuram E F L C, rectæ tres E F, E L et E C, id est G D, H K et E C, datas habent rationes ad invicem.

LEMMA XXIV.

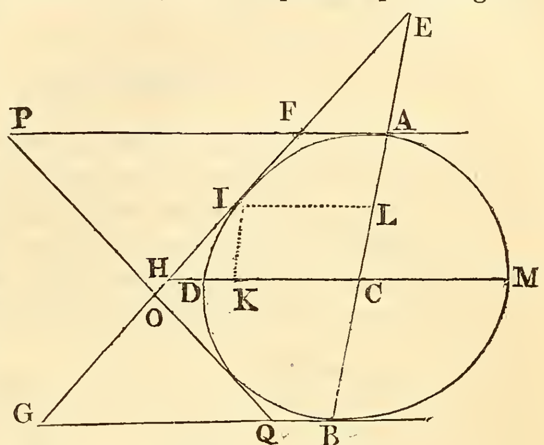
Si rectæ tres tangant quamcunque coni sectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione; dico quod sectionis semidiameter hisce duabus parallela, sit media proportionalis inter harum segmenta, punctis contactuum et tangenti tertiæ interjecta.

Sunto A F, G B parallelæ duæ coni sectionem A D B tangentes in A et B; E F recta tertia coni sectionem tangens in I, et occurrens prioribus tangentibus in F et G; sitque C D semidiameter figuræ tangentibus parallela: dico quod A F, C D, B G sunt continuè proportionales.

centro O, se mutuò intersecant. Nam rectæ quæ opposita contactuum puncta jungunt, sunt sectionis diametri centro O bisectæ (per Prop. 27. et 31. Lib. 2. Conic. Apoll. utque sequitur ex Lem. IV. de Conic. p. 119).

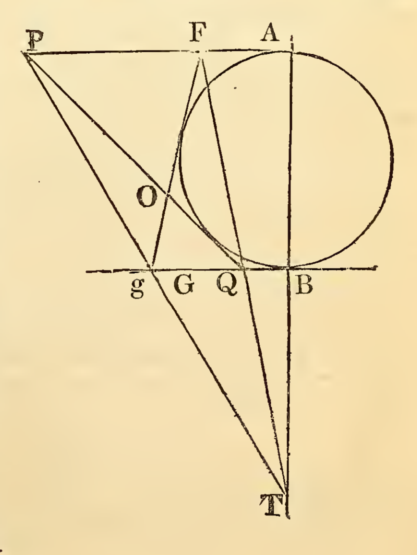
(q) * Vid. not. 67. pag. 28.

Nam si diametri conjugatæ A B, D M tangenti F G occurrant in E et H seque mutuo secent in C, et compleatur parallelogrammum I K C L; (r) erit ex naturâ sectionum conicarum ut E C ad C A ita C A ad C L, et ita divisim E C — C A ad C A — C L, seu E A ad A L, et compositè E A ad E A + A L seu E L ut E C ad E C + C A seu E B; ideoque ob similitudinem triangulorum E A F, E L I, E C H, E B G, A F ad L I ut C H ad B G. Est itidem, ex naturâ sectionum conicarum, L I seu C K ad C D ut C D ad C H; (s) atque ideo ex æquo perturbatè A F ad C D ut C D ad B G. Q. e. d.



Corol. 1. Hinc si tangentes duæ F G, P Q tangentibus parallelis A F, B G occurrant in F et G, P et Q, seque mutuo secent in O; erit ex æquo perturbatè A F ad B Q ut A P ad B G, (t) et divisim ut F P ad G Q, atque ideo ut F O ad O G.

Corol. 2. (u) Unde etiam rectæ duæ P G, F Q, per puncta P et G, F



(r) * *Erit ex naturâ sectionum conicarum,* &c. (per Prop. 37. 38. Lib. 1. Conic. Apoll. vide Cor. 2. Lem. V. de Conic. p. 121.)

(s) * Cum sit E A : E L = E C : E B, et ob similitudinem triangulorum E A F E I L sit E A : E L = A F : L I, seu C K, et ob similitudinem triangulorum E C H, E B G sit E C : E B = C H : B G, erit A F : C K = C H : B G, et quia (ex Conic. loco citato) C K : C D = C D : C H, erit A F × C K : C K × C D = C H × C D : B G × C H, hoc est, A F : C D = C D : B G.

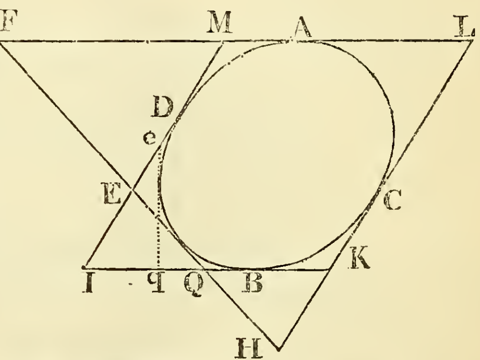
(t) * Est enim A F : C D = C D: B G, et similiter B Q : C D = C D : A P, seu C D : B Q = A P : C D, adeóque A F × C D : C D × B Q = C D × A P : B G × C D, hoc est A F : B Q = A P : B G = A P — A F : B G — B Q = F P : G Q = F O : O G, ob similia triangula F O P, G O Q.

(u) * Agatur enim recta F Q, ipsi A B occurrens in T, et jungatur P T, rectam B G, secans in g, erit A F : B Q = A T : B T = A P : B g, sed per Corol. 1. A F : B Q =

et Q ductæ, concurrent ad rectam A C B per centrum figuræ et puncta contactuum A, B transeuntem.

LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant sectionem quamcunque conicam, et abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa alterutra sit ad latus illud a quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus et latus tertium est ad abscissarum alteram.



Tangant parallelogrammi M L I K latera quatuor M L, I K, K L, M I sectionem conicam in A, B, C, D, et secet tangens quinta F Q hæc latera in F, Q, H et E; sumantur autem laterum M I, K I abscissæ M E, K Q, vel laterum K L, M L, abscissæ K H, M F: dico quod sit M E ad M I ut B K ad K Q; et K H ad K L ut A M ad M F. Nam per corollarium primum lemmatis superioris est M E ad E I ut A M seu B K ad B Q, et componendo M E ad M I ut B K ad K Q. Q. e. d. Item K H ad H L ut (x) B K seu A M ad A F, et dividendo K H ad K L ut A M ad M F. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si datur parallelogrammum I K L M, circa datam sectionem conicam descriptum, dabitur rectangulum K Q × M E, ut et huic æquale rectangulum K H × M F. Æquantur enim rectangula illa ob similitudinem triangulorum K Q H, M F E.

Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens e q tangentibus K I, M I occurrens in q et e; (y) rectangulum K Q × M E æquabitur rectangulo K q × M e; eritque K Q ad M e ut K q ad M E, et divisim ut Q q ad E e.

A P : B G, est igitur B G = B g ac proindè punctum g, cum G coincidit.

(x) * Nam si puncta contactuum A, et B, rectâ jungantur, hæc transibit per centrum commune sectionis conicæ et parallelogrammi, (336) adeóque erit A M = B K.

(y) * Nam rectangula K Q × M E, K q × M e æquantur rectangulo M I × B K.

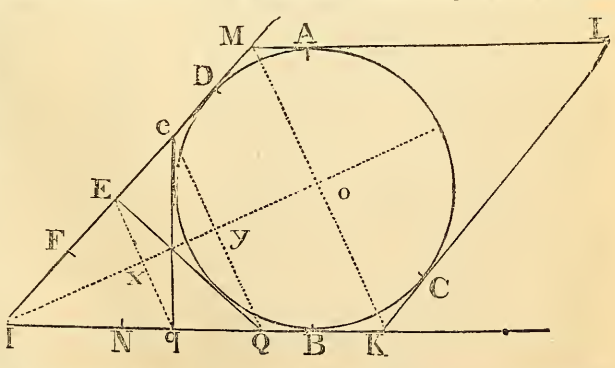
Corol. 3. Unde etiam si E q, e Q jungantur et bisecentur, et recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum sectionis conicæ. Nam cum sit Q q ad E e ut K Q ad M e, transibit eadem recta per medium omnium E q, e Q, M K (z) (per Lem. XXIII.) et medium rectæ M K est centrum sectionis. (a)

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam describere, quæ rectas quinque positione datas continget.

Dentur positione tangentes A B G, B C F, G C D, F D E, E A. Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ A B F E diagonales A F, B E biseca in M et N, et (per Corol. 3. Lem. XXV.) recta M N per puncta bisectionum acta tran-

(z) * In rectis I M, I K, positione datis capiatur q N, ad E F, ut est q Q, ad E e, et puncta N, F, tanquam data seu fixa considerentur, et erit N q : F E = q Q : E e = Q K : e M, et compositè, N q : F E = N Q : F e = N K : F M; quarè si rectæ E q, e Q, M K, quibus puncta indeterminata E, et q, E, Q, M et K junguntur, secentur in ratione datâ in x, y, o, puncta omnia x, y, o, locantur in unâ eâdemque rectâ x y, (per Lem. XXIII). Si itaque recta x y, lineas E q, e Q, bisecat, rectam M K bisecabit, adeóque (336) per centrum sectionis conicæ transibit.



(a) Hinc si lineæ quatuor ut E D, e q, E Q, Q B sectionem conicam tangant et sibi mutuò occurrant in punctis e, E, q, Q junganturque puncta opposita e, Q et E, q, bifariamque divi-

sibit per centrum trajectoriæ. Rursus figuræ quadrilateræ B G D F sub aliis quibusvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) B D, G F biseca in P et Q: et recta P Q per puncta bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concursu bisecantium. Sit illud O. (b) Tangenti cuivis B C parallelam age K L, ad eam distantiam ut centrum O in medio inter parallelas locetur, et acta K L tanget trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes alias quasvis duas G C D, F D E in L et K. Per harum tangentium non parallelarum C L, F K cum parallelis C F, K L concursus C et K, F et L age C K, F L concurrentes in R, et recta O R ducta et producta secabit tangentes parallelas C F, K L in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eâdem methodo invenire licet alia contactuum puncta, et tum demum per construct. Prob. XIV. trajectoriam describere. Q. e. f.

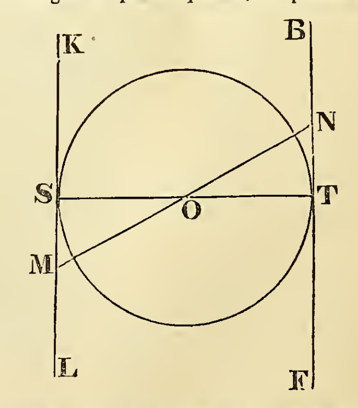
Scholium.

Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel asymptoti, includuntur in præcedentibus. (c) Nam datis punctis et tangentibus unà cum

dantur lineæ e Q, E q, linea eas bisecans erit locus centri figuræ: Idque semper verum erit quamcumque figuram faciant lineæ E D, e q, E Q, Q B sive sese decussent sive trapezium constituant, concipiatur illas diametros duci quarum vertex est in puncto contactûs harum linearum donec occurrant curvæ altero suo vertice, tangentes in eo vertice ductæ erunt parallelæ prioribus: Dabuntur ergo parallelæ duabus lineis E D, Q B, quæ erunt tangentes curvæ, ideoque fiet ut in Lemmatis hypothesi parallelogrammum M I K L constans quatuor tangentibus quarum oppositæ erunt inter se parallelæ, et tangentes E Q et e q considerari poterunt ut quinta et sexta tangens de quibus agitur in hoc Lemmate, ideoque per ejus Corollarium 3. *si bisecentur lineæ E q, e Q et recta per bisectionum puncta agatur, transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ*, &c.

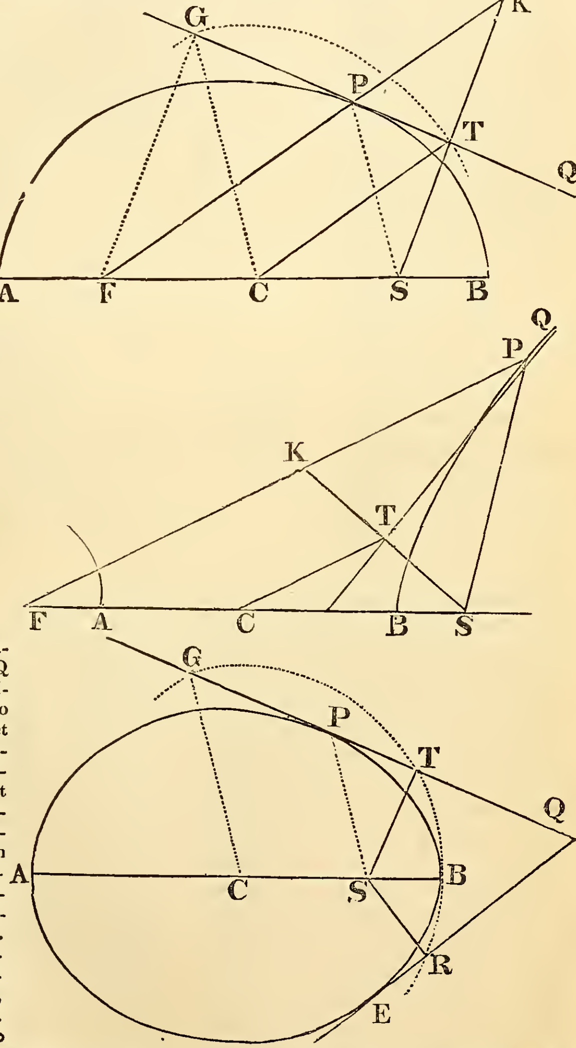
(b) 337. Datis sectionis conicæ centro O, et tangente quâvis B F, altera tangens L K datæ parallela facile invenitur; Nam per centrum O ducatur recta quævis infinita M O N tangenti datæ occurrens in N, et sumptâ O M = O N per M ducatur M K tangenti datæ F B parallela, erit M K tangens; si enim per punctum contactûs T et centrum O agatur sectionis diameter T O S, erit S O = O T et tangens in S tangenti in T parallela lineam N O M ita secabit in M, ut sit M O = O N, ob, S O : O T = M O : O N.

(c) 338. Hinc datis præter centrum tribus tangentibus non parallelis vel duabus tangentibus convergentibus et puncto, vel tangente et punctis duobus, vel punctis tribus, dantur sex tangentes, vel tangentes quatuor et puncta duo, vel tangens et puncta quatuor, vel puncta sex,



quibus datis trajectoria describi potest per Prop. (27. 26. 25. 24. 23. 22.). Ex datis centro, alterutro axe, et duabus tangentibus non parallelis, vel tangente et puncto trajectoriæ Ellipticæ et Hyperbolicæ ex Lemmatibus sequentibus facilè describuntur.

centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes a centro ex alterâ parte æqualiter distantes. Asymptotos autem pro tangente habenda est, et ejus terminus infinitè distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, et tangens vertetur in asymptoton, atque constructiones Problematum præcedentium vertentur in constructiones ubi asymptotos datur.

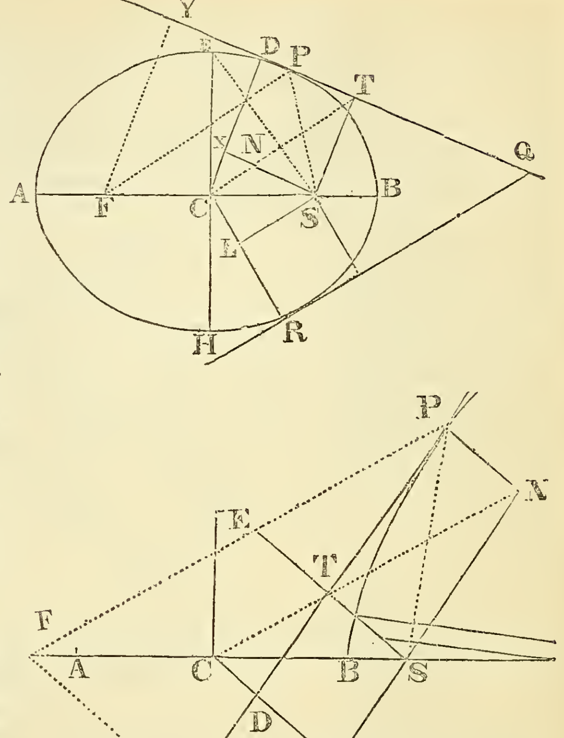


339. *Lemma.* Si ex sectionis conicæ umbilico utrovis S demittantur ad tangentem P Q normales S T, F G, rectæ C T, C G centrum sectionis C et puncta intersectionum T, G jungentes æquales erunt semiaxi principali C B, et parallelæ lineis F P, S P ex altero umbilico F et S ad punctum contactûs P ductæ. Producantur enim F P, S T, donec concurrant in K, et erit (per Lem. XV. Newt.) F K = 2 C B, K T = T S, cumque sit etiam F C = C S, erit S T : S K = S C : S F, et ideo quia latera S K, S F secantur proportionaliter in T et C erit C T parallela F K sive F P, ideoque erit S T : S K = C T : F K et quia S T = $\frac{1}{2}$ S K erit C T æqualis $\frac{1}{2}$ F K, seu æqualis C B. Eodem modo probabitur, C G esse æqualem C B et parallelam lineæ P S.

340. Datis centro C, duabus tangentibus P Q, E Q convergentibus et axe principali A B, describitur sectio conica. Nam si centro C et intervallo C B æqualis semiaxi principali describatur circulus tangentes secans in T et R, agantur tangentibus perpendiculares T S, R S, concurrentes in S, erit punctum S, alteruter umbilicus quo dato cum centro C, dantur positio axis principalis C B, et ipsius longitudo ac umbilici duo.

341. Datis centro C, tangente P Q, et puncto contactûs P, cum axe principali, trajectoria conica describitur. Centro enim C, et intervallo æquali semiaxi principali describatur circulus tangentem secans in T et G; in T excitetur perpendiculum T S, et junctâ C G, per punctum contactus ducatur P S ipsi C G parallel perpendiculo T S occurrens in S, erit S umbilicus (339).

542. Si ex centro C sectionis conicæ ad tangentem P Q, demittatur perpendicularis C D, et ex altero umbilico S ad C D agatur normalis S X, sitque C E semiaxis minùs principalis, erit in ellipsi $CX^2 = CD^2 - CE^2$, et in hyperbolâ $CX^2 = CD^2 + CE^2$, et demissâ ex umbilico in tangentem perpendiculari S T, junctâque C T, rectam S X secante in N, erit in utrâque sectione X N æqualis D P distantiæ puncti contactûs P a perpendiculari C D; Nam in Ellipsi $CS^2 = CT^2$ $(CB^2) - CE^2$, in Hyperbolâ $CS^2 = CT^2 + CE^2$, et in utrâque sectione $CS^2 = CX^2 + SX^2 = CX^2 + DT^2$; Ergò in Ellipsi $CX^2 + DT^2 = CT^2 - CE^2 = CD^2 + DT^2 - CE^2$, et hinc $CX^2 = CD^2 - CE^2$, et in hyperbolâ $CX^2 + DT^2 = CT^2 + CE^2 = CD^2 + DT^2 + CE^2$, adeòque $CX^2 = CD^2 + CE^2$. Q. e. 1.



Ex altero umbilico F, in tangentem demittatur perpendicularis F Y, et junctis F P, S P, similia erunt triangula F P Y, S P T, ob angulos æquales (per natur. tangentium et focorum) F P Y, S P T, et S T P, F Y P rectos; et quoniam F P et C T, F Y et C D sunt parallelæ, similia quoque erunt triangula C T D, F P Y, ideóque duo triangula C T D, S P T sunt similia; quarè C D : D T = S T (D X) : P T, et divisim C D : D T = C D — D X : D T — P T, et compositè C D : D T = C D + D X : D T + P T. Undè quoniam in Ellipsi C D — D X = C X, et D T — P T = D P; in hyperbolâ verò C D + D X = C X, et D T + P T = D P, erit in utrâque sectione C D : D T = C X : D P. Verùm ob S X tangenti D T parallelam, C D : D T = C X : X N, ergò X N = D P. Q. e. 2.

343. Hinc datis centro C, semiaxe minùs principali C E, tangentibus duabus non parallelis, D Q, R Q, trajectoria Elliptica et Hyperbolica describitur. Nam ex centro C, ad tangentes demittantur perpendicula C D, C R, et capiantur C X, C L, ità ut $CX^2 = CD^2 - CE^2$, $CL^2 = CR^2 - CE^2$, si describenda sit ellipsis; vel ità ut $CX^2 = CD^2 + CE^2$, et $CL^2 = CR^2 + CE^2$, si describenda sit hyperbola; et per X et L puncta, erigantur ad C D, C R perpendicula X S, L S concurrentia in S, erit S focus ex quo si ad tangentem alterutram D Q, demittatur normalis S T, juncta C T, erit semiaxis principalis.

344. Datis centro C, semiaxe minùs principali C E, tangente P Q, et puncto contactûs P, sectio conica describitur. Nam ductâ X S, infinitâ ut suprà (343.) capiatur X N = D P et jungatur C N, producaturque donec tangenti occurrat in T, recta T S, tangenti normalis secabit rectam X S in umbilico S, eritque C T semiaxis principalis.

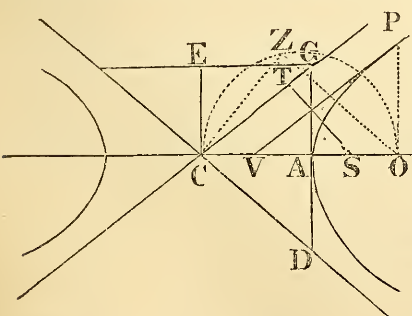
345. Dato centro cum tangente et alterutro axe datur positio rectæ per umbilicum transeuntis; undè si prætereà detur punctum extrà tangentem, facile erit umbilicum invenire. Eâdem ferè methodo quâ superiora Lemmata demonstravimus, Hermannus in Tom. IV. Academiæ Petropolitanæ solvit problema de Ellipsi Conicâ, cujus axis alteruter datus est, angulo positione et magnitudine dato ità inscribendâ ut

centrum ejus intrà datum angulum sit etiam positione datum.

346. Datis asymptotis, dantur hyperbolæ centrum seu asymptotorum concursus; 2°. datur positio axium qui asymptotorum angulos deinceps positos bifariam dividunt, 3°. datur eorum axium ratio, sunt enim sicut sinus dimidiorum illorum angulorum C G A, A C G ideóque datis asymptotis cum puncto vel tangente, hyperbola describi potest (per Prop. 4. et 9am. Lib. 2. Conic. Apoll.) Scilicet per punctum P ducatur P O perpendicularis in axem et P V asymptoto parallela et descripto circulo super diametrum C O in eo secetur chorda O Z = O V, et sumatur C A = C Z et erit A vertex hyperbolæ. Nam sit a verus hyperbolæ vertex, sit C a semi-axis major et a g semi-axis minor, erit $C a^2 : a g^2 = C O^2 - C a^2 : P O^2$ (per nat. Hyp. vid. Theor. 2. de Hyp. p. 93. et Cor. 1. Lem. 3. de Conicis p. 90.) sed (per const.) est C a : a g = O V : P O. sive $C a^2 : a g^2 = O V^2 : P O^2$ est ergo $O V^2 = C O^2 - C a^2$, Rursus (per constr.) est $O V^2$ sive $O Z^2 = C O^2 - C Z^2$ ergo $C O^2 - C a^2 = C O^2 - C Z^2$ et C a = C Z = C A, ergo erit A vertex hyperbolæ.

Si detur tangens, producatur illa usque ad utramque asymptoton ubi utrinque terminetur, ejus medium erit punctum contactûs, sive punctum ad hyperbolam pertinens, cujus ope axis major invenietur ut supra.

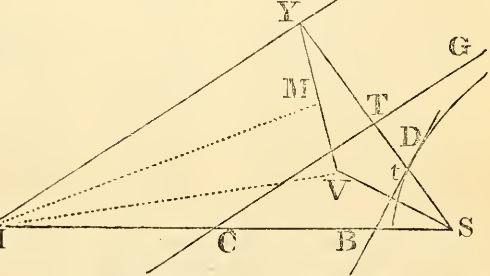
347. Datis asymptotis et umbilico vel alterutro axe, facile est hyperbolam describere. Sunto asymptoti C G, C D concurrentes in C, S umbilicus, C A, C E semiaxes; si ex umbilico S, in asymptotum quæ est tangens, demittatur perpendiculum S T, erit C T, æqualis semiaxi principali C A, (339), et S T æqualis semiaxi minùs principali C E seu G A, ob triangula C A G, C T S, similia et æqualia propter latus C A æquale lateri C T. Quare dato præter asymptotos semiaxe principali C T seu C A, datur umbilicus S, et contrà. Dato præter asymptotos semiaxe minùs principali C E, seu G A, invenitur alter semiaxis C A, seu E G rectæ C E normalis in E, et asymptoto occurrens in G, et hinc reperitur umbilicus.



348. Asymptotus data, ut notum est, in problematum solutione æquivalet tangenti datæ cum puncto contactûs ad distantiam infinitam posito, atque adeò recta quævis ex puncto dato ad punctum contactûs asymptoti ducta ipsi asymptoto parallela est et positione data. Hinc facile erit problematum sectionis IV. constructiones ad hyperbolam transferre ubi asymptotus alterutra cum umbilico data est.

Datis umbilico S, axe principali, et asymptoto C G, invenitur axis positio, demittendo ex umbilico S ad asymptotum perpendicularem S T, et capiendo T C æqualem semiaxi dato, est enim C hyperbolæ centrum, C S axis principalis positio, T S semiaxis minùs principalis (348).

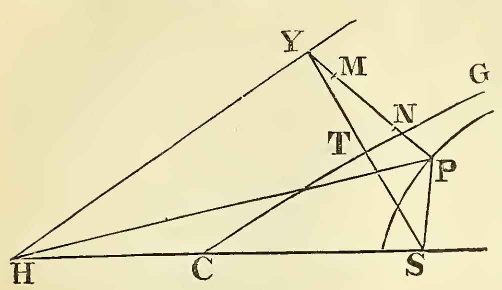
Datis umbilico et asymptoto describitur hyperbola specie data, per constr. Cas. 3. Prop. XIX. vel brevius, observando datam esse T S semiaxem minus principalem, undè ob datam axium rationem, dabitur centrum et axium positio cum alterâ asymptoto, et hyperbola describitur (348).



Datis asymptoto, umbilico et tangente, invenitur umbilicus alter ac proindè axis transversi positio et centrum. Sit enim asymptotus data C G, umbilicus S, tangens B D, ex umbilico S, ad asymptotum et tangentem, demittantur perpendicula S T, S t, et producantur ad Y et V ut sint T Y = S T, t V = S t; per punctum Y, agatur Y H, asymptoto parallela, et juncta Y V, bisecetur in M, perpendiculo M H; perpendiculi hujus et rectæ Y H communis intersectio H, est umbilicus alter, recta enim H Y, asymptoto parallela transit per punctum contactûs asymptoti, adeóque ob T Y = T S, transit etiam per umbilicum H; Porrò rectæ Y H, V H, per umbilicum H, ductæ sunt æquales axi principali hyperbolæ per Lem. XV., et ideò æquales inter se; quarè perpendiculum H M, ex umbilico H in rectam Y V demissum eam in M bisecat.

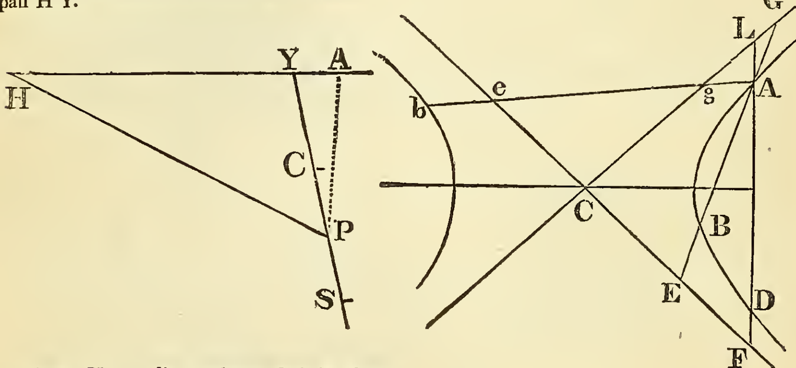
Datis asymptoto C G, puncto P, et umbilico S, invenitur umbilicus alter H, demisso ad asymptotum perpendiculo S T, et sumptâ T Y = S T, actâque Y H asymptoto parallelâ jungatur Y P, et in eâ capiatur M N = S P, et ità locetur ut sit Y M = P N, hyperbola umbilicis Y, P, et axe principali M N, descripta, rectam Y H secabit in altero umbilico H quæsito.

Nam P S seu M N est rectarum H Y, H P,



differentia, quæ semper æqualis est axi principali H Y.

Per puncta duo data C, D, age rectam infinitam C D, asymptoto et tangenti occurrentem in punctis I, L, actam ita seca in S, ut sit I S ad L S, ut est media proportionalis inter C I et I D ad mediam proportionalem inter C L et L D, deinde age S P asymptoto G I parallelam, hæc secabit tangentem G L, in puncto contactûs P; nam si P supponatur esse punctum contactûs, et per punctum I agatur I Y tangenti G L parallela quæ occurrat hyperbolæ in X et Y, et in eâ sumatur I Z, media proportionalis inter I X et I Y erit (per Prop. 3. et 10. Lib. 2.

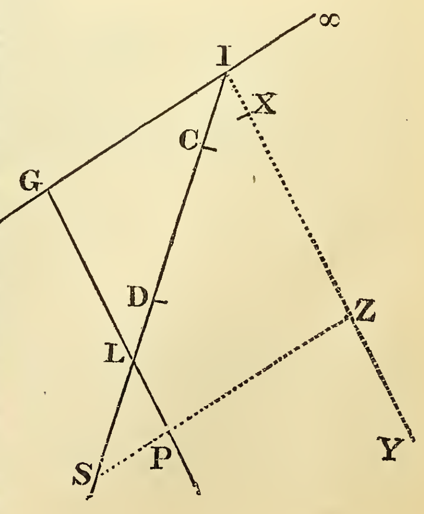


Aliter, Huc redit problema, datis in triangulo H Y P latere P Y, angulo Y, et laterum H Y, H P differentia P S, invenire latera. Ex puncto P, in H Y, demittatur perpendicularis P A, capiatur laterum H P, H Y, differentia P C = P S, et sumatur Y H ad C Y, ut est Y S ad S C ∓ 2 Y A, scribendo — 2 Y A, si angulus H Y P est obtusus, et + 2 Y A, si acutus, et delendo ∓ Y A, si fuerit rectus, erit H punctum quæsitum, facilis est demonstratio ob angulum rectum A.

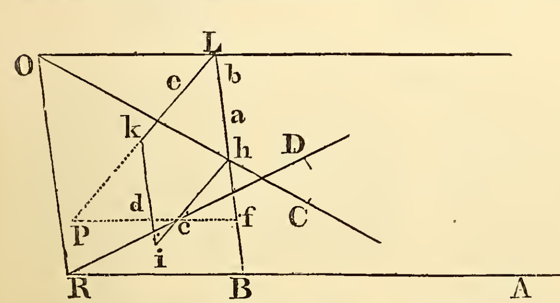
Sectionis Væ. problemata, ubi asymptotus alterutra data est ad sequentia revocantur.

349. Datâ asymptoto C G, cum tribus punctis A, D, B, vel b, hyperbolam describere. Per punctum quodvis A, datum et alia duo D, B, vel b, agantur lineæ infinitæ A D, A B vel A b, asymptoto datæ occurrentes in L et G, vel g; tum capiantur F D = A L, B E = G A, vel b e = g A, juncta F E, aut F e, erit asymptotus altera (per Prop. 8am. Lib. 2. Conic. Apoll. per Lem. I. de Conic. p. 87.) quare (346.) hyperbola describitur, cum facilè inveniri possint quinque sectionis puncta, per angulos mobiles organicè potest describi.

350. Datis asymptoto G I, tangente G L, punctisqueduobus C, D, hyperbolam describere, constructio et demonstratio eædem ferè sunt ac Problematis (XVI.).



Conic. Apoll.) $IX \times IY$ sive $IZ^2 = PG^2$, sit enim ∞ punctum contactus hyperbolæ et asymptoti erit $\infty I^2 : \infty G^2 = IX \times IY : PG^2$ (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. p. 90.) sed cum ∞I et ∞G sint lineæ infinitæ quantitate finitâ GI differentes, pro æqualibus habentur, ergo etiam $IX \times IY$ sive $IZ^2 = PG^2$, atque adeò $IZ = PG$, et consequenter juncta PZ, parallela est asymptoto GI; recta ZP producta secet rectam IL, in puncto aliquo S, et ob similia triangula SIZ, SLP, erit $IZ^2 : LP^2 = IS^2 : LS^2$; verùm (vid. Not. ad Probl. XVI. aut Lem. III. de Conic. p. 89.) $XI \times IY$ (IZ^2) : $LP^2 = CI \times ID : CL \times LD$; ergò $IS^2 : LS^2 = CI \times ID : CL \times LD$, quare si recta IL ita secetur in S, ut sit $IS^2 : LS^2 = CI \times ID : CL \times LD$, et agatur SP, asymptoto GI parallela, erit P punctum contactûs. Datis autem tribus punctis C, P, D, hyperbola describitur (349).

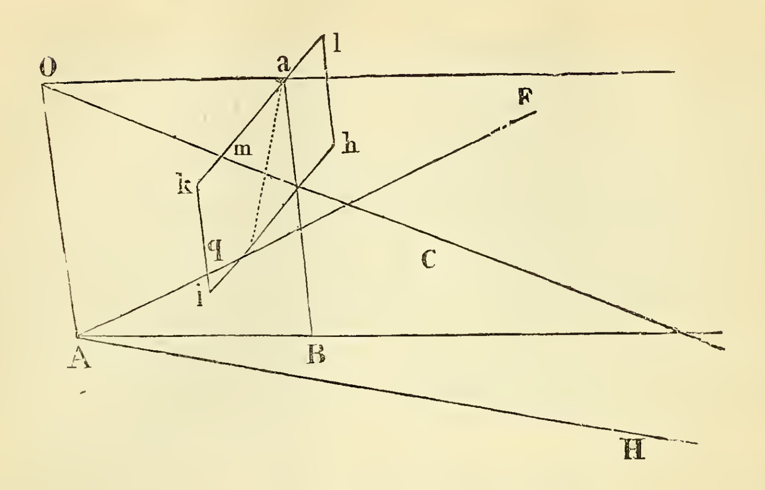


351. Datis asymptoto O L, duabus tangentibus O C, R D, et puncto A, hyperbolam describere; (solutio facilè deducitur ex Problemate XVII).

Per concursum O asymptoti O L cum tangente O C, et concursum R tangentis alterius R D cum rectâ R A quæ per punctum datum A et punctum contactûs asymptoti transit, seu quæ est asymptoto parallela; age rectam infinitam O R, eâque adhibitâ pro radio ordinato primo, O L verò pro radio ordinato novo usurpatâ, sumptisque ordinatis novis asymptoto parallelis (ad majorem constructionis facilitatem), transmutetur figura per Lem. XXII. in figuram novam, nimirùm linea B A in lineam B a, (330), punctum A in a, linea R D in i k ipsi B L parallelam (329) O C in i h, O L in k L ipsi i h parallelam (327) et punctum contactûs asymptoti infinitè distans transferetur in L; Nam punctum contactûs asymptoti est communis intersectio linearum R A, O L infinitarum, et ideò transfertur in L communem intersectionem rectarum k L, B L parallelogrammi h i k L; Tria ergo latera h i, i k, k L tangunt novam sectionem conicam quæ transire debet per punctum a, dicantur c et d puncta contactuum linearum h i, i k, sic invenietur punctum c, sumatur Radix quadrata facti $hL \times ha$ et addatur lineæ ik, illa summa erit ad duplum lineæ hi ut ea ipsa Radix quadrata ad portionem hc. Hoc est $ik + \sqrt{hL \times ha} : 2hi = \sqrt{hL \times ha} : hc$. Nam (per Cor. 2. et 3. Lem. III. de Conic. p. 90.) est $dk^2 : kL^2 = di^2 : ic^2 = hL \times ha : hc^2$ inde est $dk : kL = di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$, et sumendo summam Antec. et Conseq. est $dk + di + \sqrt{hL \times ha} : kL + ic + hc$ sive $ik + \sqrt{hL \times ha} : kL + hi$ ($2hi$) $= \sqrt{hL \times ha} : hc$: Invento autem puncta c invenitur punctum d, si quidem est $di : ic = \sqrt{hL \times ha} : hc$: Construitur autem hæc solutio capiendo h f, æqualem mediæ proportionali inter L h et a h, et productâ L k ad P, ut sit $kP = kL$, agendo per f et P rectam f P, illa f P latera h i, i k secabit in punctis quæsitis c, d; nam ob parallelas c h, P L et i k, f L est Lf ($ik + \sqrt{ah \times hL}$) : LP ($2kL$ sive $2ih$) $= hf$ ($\sqrt{ah \times hL}$) : hc, et $hc : hf = ic : id$; per inversas operationes Lem. XXII. (331), transferantur puncta c, d, in figuram primam, nimirum in C, D, et data erunt tria hyperbolæ puncta D, C, A, cum asymptoto O L, quarè describetur hyperbola (349).

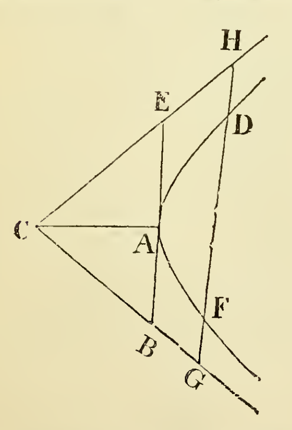
352. Datâ asymptoto O a, (*Vid. Fig. prim. pag. seq.*) et tribus tangentibus O C, A F, A H hyperbolam describere, solvitur ut Problema XVIII. Ab intersectione communi O asymptoti O a, et tangentis O C, ad intersectionem communem A aliarum tangentium A F, A H agatur recta infinita O A, et eâdem pro radio ordinato primo adhibitâ, O a verò asymptoti parte pro radio ordinato novo sumptâ, transmutetur figura in figuram novam, nimirùm tangens O C et asymptotus in parallelas i h, k l punctum contactûs asymptoti in a, et duæ tangentes A F, A H in parallelas i k, h l, et parallelogrammi h l k i, latera singula novam sectionem conicam tangunt, et quidem latus k l, in a, per a, et parallelogrammi centrum m, agatur a q, tangenti, i h, occurrens in q, et erit q, punctum alterum quo i h, novam sectionem tangit. Per Lemmatis XXII. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, nempè in C, et erit C, punctum contactûs tangentis O C, quarè datis asymptoto O a, duabus tangentibus A F, A H, et puncto C, describetur hyperbola. (351).

353. Datis asymptoto, axium ratione, duobus punctis vel puncto et tangente aut binis tangentibus, hyperbolam describere. Sunto hyperbolæ asymptoti C E, C G, centrum C, vertex principalis A, semiaxis transversus C A, semiaxis conjugatus A E ad C A, normalis; in triangulo rectangulo C A E datâ ratione crurum C A, A E, datur angulus E C A, est enim C A, ad E A, ut sinus totus ad tangentem anguli E C A, quarè datâ



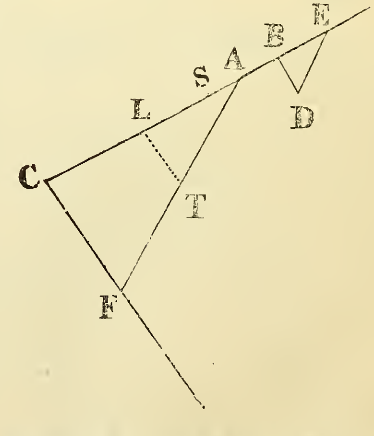
specie hyperbolæ seu axium ratione datur asymptotorum angulus E C B, et viceversâ dato asymptotorum angulo datur specie hyperbola; his positis problema facile solvitur.

Cas. 1. Data sit asymptotus C H, cum axium ratione seu asymptotorum angulo et punctis duobus D, F, per puncta illa age rectam infinitam D F, asymptoto datæ occurrentem in H, fac F G = H D, et per punctum G, age rectam infinitam G C, quæ cum asymptoto C H, efficiat angulum H C G, æqualem angulo



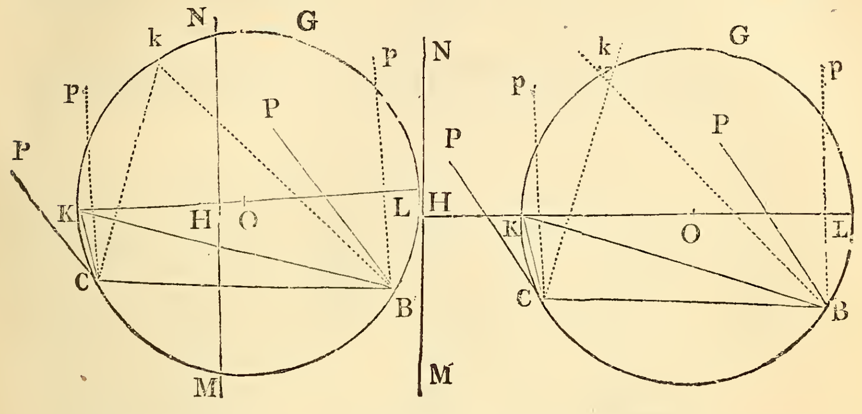
asymptotorum dato, erit C G, asymptotus altera (per Prop. 8^{am}. Lib. 2. Conic. Apoll. sive Lemma I. de Conic.) quarè describetur hyperbola (346).

Cas. 2. Data sit asymptotus C E, cum asymptotorum angulo, puncto D, et tangente F A; per punctum D datum agantur recta B D, ad angulum D B E datum, seu æqualem asymptotorum angulo, et D E tangenti F A parallela, capiantur B S æqualis mediæ proportionali inter B E et A E, et A C æqualis 2 S E, erit C hyperbolæ centrum, C F verò rectæ B D parallela asymptotus altera. Nam sit T punctum contactûs, C F asymptotus altera, ductâ T L



asymptoto F C parallelâ, erit F T = T A (per Prop. 3^{am}. Lib. 2. Conic. Apoll sup. Theor. 1. de Hyp. p. 95.) ac proindè L A = C L: Est autem ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos C L × L T, hoc est A L × L T = C B × B D, adeóque B D : L T = A L : C B. (2 A L + A B) et ob triangula similia A L T, E B D, B D : L T = B E : A L; ergò B E : A L = A L : 2 A L + A B, sed (per

Postquam trajectoria descripta est, invenire licet axes et umbilicos ejus hâc methodo. In constructione et figurâ Lemmatis XXI. fac ut angulo-

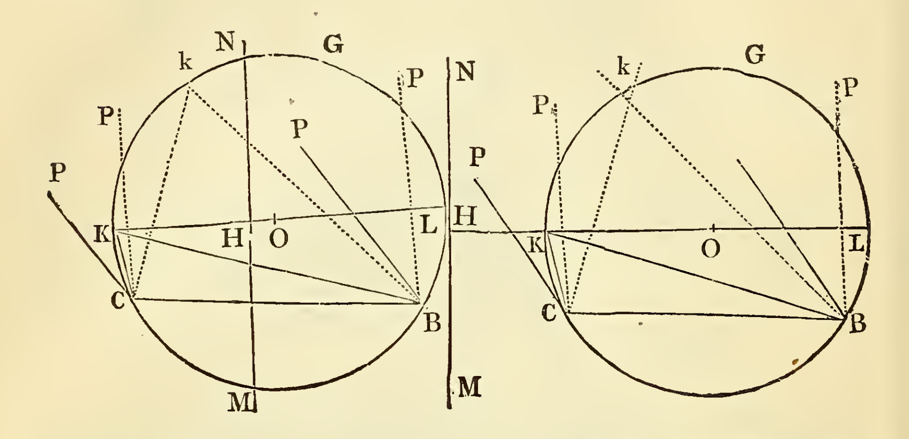


rum mobilium P B N, P C N crura B P, C P, quorum concursu trajectoria describebatur, sint sibi invicem parallela, eumque servantia situm

constr.) B E : B S = B S : B E + A B, et compositè B E : B S = S E : S E + A B, et B E : S E = S E : 2 S E + A B, est igitur A L = S E, et 2 A L seu A C = 2 S E.

Cas. 3. Data sit asymptotus G I, cum asymptotorum angulo et duabus tangentibus F I, G Q se mutuò intersecantibus in L et asymptotum in G et I; ex puncto L agatur ad asymptotum G I recta L H, in angulo asymptotorum dato L H G, producatur G L ad N, ut sit L N ad H I, ut est G L ad G H, capianturque G K æqualis mediæ proportionali inter G L, et L N, et L P æqualis $\frac{1}{2}$ L K, erit P punctum contactûs tangentis G Q. Nam si supponamus P, D esse puncta contactuum, et C Q asymptotum alteram tangenti G Q occurrentem in Q et alteri asymptoto in C, et ex punctis D, P ductæ intelligantur rectæ D M, P R et P S, asymptotis C I et C Q parallelæ ac D M, P R asymptoto C I occurrant in M, R, P S verò tangenti F I in S, erit C R = R G, et C M = M I; et ob similia triangula G L I, P L S, G L : L P = L I : L S, adeóque componendo G P : L P = I S : L S, sed (323.) I S : L S = D I : L D; quare G P : L P = D I : L D, ac proindè G P + L P : G P = L I : D I. Porrò in triangulis similibus I L H, I D M, $LI^2 : HI \times LH = DI^2 : DM \times MI$, et in triangulis similibus G L H, G R P. $GH \times LH : GL^2 = GR \times RP : GP^2 = DM \times MI : GP^2$, ob $MI \times DM = CM \times DM = CR \times RP = GR \times RP$ ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos, quarè per compositionem rationum $LI^2 \times GH \times LH : GL^2 \times HI \times LH = DI^2 : GP^2 = LI^2 \times GH : GL^2 \times HI$. Verùm (per construct.) $GH : HI = GL^2 : GL \times LN$, et $GK^2 = GL$

revolvantur circa polos suos B, C in figurâ illâ. Interea vero describant altera angulorum illorum crura C N, B N, concursu suo K vel k, circulum



B G K C. Sit circuli hujus centrum O. Ab hoc centro ad regulam M N, ad quam altera illa crura C N, B N interea concurrebant, dum trajectoria describebatur, demitte normalem O H circulo occurrentem in K et L. Et ubi crura illa altera C K, B K concurrunt ad punctum illud K quod regulæ propius est, crura prima C P, B P parallela erunt axi majori, et perpendicularia minori; et contrarium eveniet, si crura eadem concurrunt ad punctum remotius L. Unde si detur trajectoriæ centrum, dabuntur axes. ([d]) Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

([e]) Axium vero quadrata sunt ad invicem ut K H ad L H, et inde facile est trajectoriam ([f]) specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituantur poli C, B, tertium dabit angulos mobiles, P C K, P B K; his autem datis describi potest circulus B G K C. Tum ob datam specie trajectoriam, dabitur ratio O H ad O K, ideóque ipsa O H. Centro O et intervallo O H describe alium circulum, et recta, quæ tangit hunc circulum, et transit per concursum crurum C K, B K, ubi crura prima C P, B P concurrunt ad quartum

$\times$ L N, ac proindè G H : H I $=$ G L^2 : G K^2; undè D I^2 : G P^2 $=$ L I^2 $\times$ G L^2 : G L^2 $\times$ G K^2 $=$ L I^2 : G K^2, et D I : G P $=$ L I : G K, atque adeò L I : D I $=$ G K : G P; sed suprà invenimus G P $+$ L P : G P $=$ L I : D I, ergò G K : G P $=$ G P $+$ L P : G P, atquè ità G K $=$ G P $+$ L P, seu G L $+$ L K $=$ G L $+$ 2 L P, ac proindè L K $=$ 2 L P, et L P $= \frac{1}{2}$ L K; invento autem puncto contactûs P, si capiatur P Q $=$ P G, et per punctum Q, agatur Q C, ipsi L H parallela, erit Q C altera asymptotus, et hyperbola describetur (346).

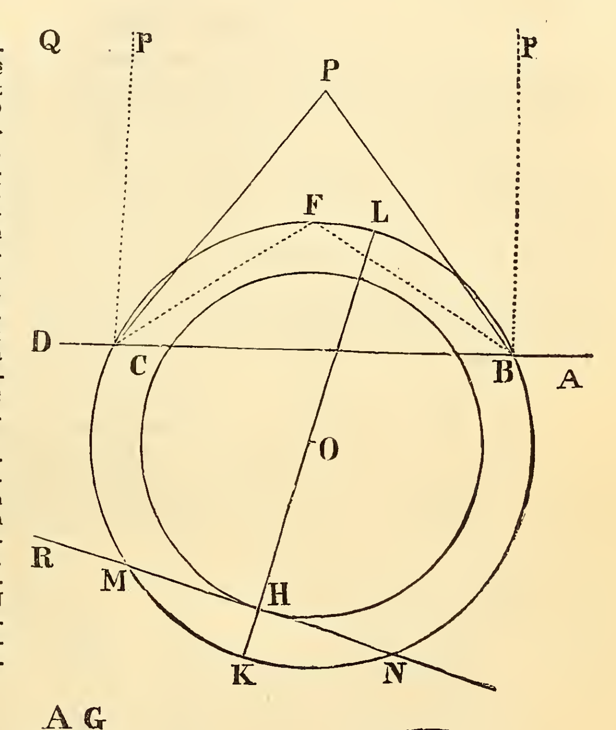
([d]) * Vid. not. 314.

([e]) * Vid. not. 315.

([f]) Sit describenda trajectoria specie data per puncta quatuor C, B, P, Q, duo puncta C, B constituantur poli et junctis C P, B P erunt P C B, P B C anguli mobiles, fac ut angulorum illorum crura B P, C P sint sibi invicem parallela, nempè in positione quâvis B p, C p, et crura alia B C, C B se mutuò intersecent in F; et centro O describe circulum per

datum punctum, erit regula illa M N cujus ope trajectoria describetur. (g) Unde etiam vicissim trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in datâ quâvis sectione conicâ inscribi potest.

Sunt et alia lemmata quorum ope trajectoriæ specie datæ, datis punctis et tangentibus, describi possunt. (h) Ejus generis est quod, si recta



tria puncta C, F, B transeuntem cujusque proindè segmentum C F B capit angulum C F B, centro O radio O H describatur circulus, (punctum verò H, ita determinetur in Diametro K L ut sit K H ad L H ut sunt ad invicem quadrata axium trajectoriæ). Tum crurum B P, C P concursus adducatur ad punctum Q et intereà notetur punctum R ubi concurrunt alia crura C A, B D, et ex puncto R agatur recta R M N tangens circulum radio O H descriptum, *erit N M regula cujus ope trajectoria describetur* (314).

Si describenda foret parabola, ducenda esset ex puncto R recta R N, circulum C K B tangens; nam in parabolâ punctum H, coincidit cum puncto K (313).

Quoniam autem ex puncto R, duæ tangentes ut R N duci possunt, patet duas trajectorias specie datas per data quatuor puncta posse describi.

(g) * Nam si describatur trapezium quodvis specie datum, et huic circumscribatur sectio conica datæ similis Methodo in notâ præcedente expositâ, deindè in sectione conicâ datâ quatuor agantur lineæ in eâ similiter positæ ac quatuor trapezii latera in sectione trapezio circumscriptâ, habebitur trapezium specie datum in datâ sectione conicâ inscriptum.

(h) * Hoc Lemma facilè demonstratur in circulo. Intra vel extra circulum A F D E datum sit punctum P per quod et per centrum circuli C agatur P D; tum diametro P C describatur circulus P K C P, chorda quælibet G H per punctum P ducta, bifariam divisa est in puncto K ubi circulo P K C occurrit; Nam junctâ K C, erit angulus C K P rectus ac proindè chorda H G bisecta in K.

* Idem Lemma pari facilitate in cæteris sectionibus conicis demonstratur. Datum sit punctum P, per hoc et per centrum C

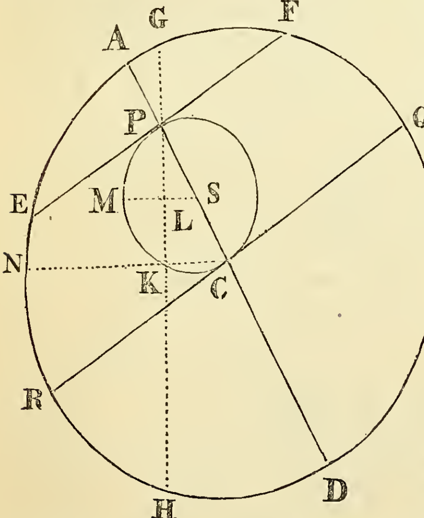
linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam coni sectionem in punctis duobus intersecet, et intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam coni sectionem ejusdem speciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

LEMMA XXVI.

Trianguli specie et magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.

Dantur positione tres rectæ infinitæ A B, A C, B C, et oportet triangulum D E F ita locare, ut angulus ejus D lineam A B, angulus E lineam A C, et angulus F lineam B C tangat. Super D E, D F et E F, describe tria circulorum segmenta D R E, D G F, E M F, quæ capiant an-

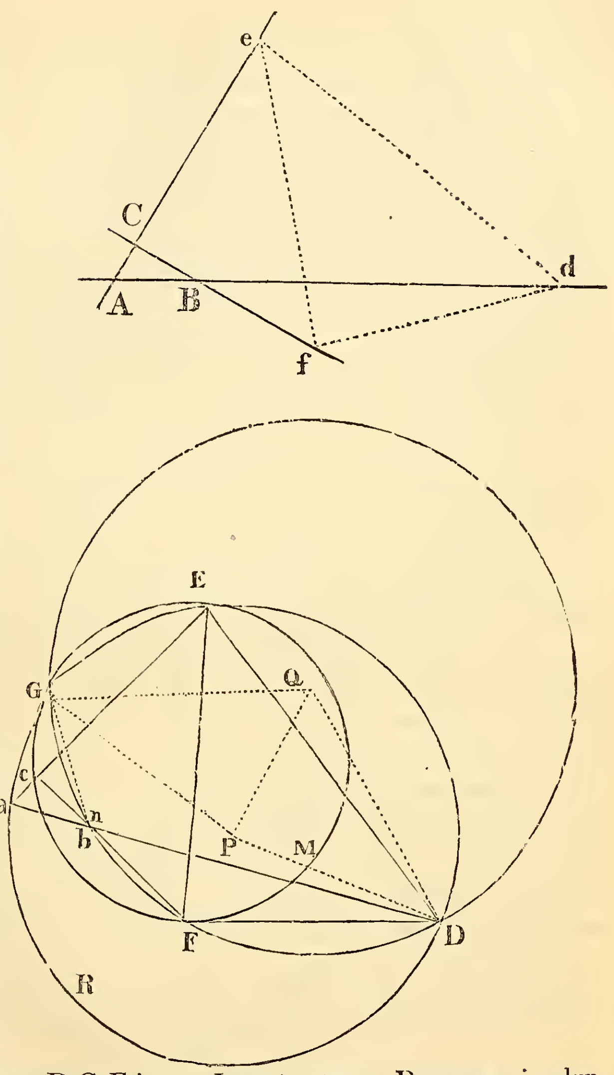
sectionis conicæ A F D E agatur diameter A D, tùm diametro P C, quæ similis sit diametro A D, describatur alia sectio conica P M K C, ejusdem speciei cum datâ, et diameter



conjugata ipsius P C, similis erit et parallela diametro R Q, conjugatæ ipsius A D, et quia in duabus figuris similibus, si duo latera homologa parallela sint, cætera omnia latera similia sunt etiam parallela, ambarum sectionum conicarum similes diametri omnes, adeóque et axes paralleli erunt; agatur nunc per punctum datum P, chorda quævis G P H, sectioni P M C occurrens in K, dico esse KH = KG. Nam jungatur C K, et producatur donec trajectoriæ A H D occurrat in N, et per centrum S trajectoriæ P K C, agatur S M parallela C K, chordæ PK occurrens in L et sectioni in M, erunt S M, N C diametri similes, et earum ordinatæ parallelæ, sed quia in triangulis similibus P S L, P C K est P S = S C erit quoque P L = L K, ac proindè P L K erit ordinata ad diametrum S M, adeóque G K H erit ordinata ad diametrum N C; quare G K = K H *ergo punctum bisectionis K tanget curvam priori similem et axes habentem prioris axibus parallelos.* Eadem est demonstratio, si punctum P extra sectionem sumatur.

354. Adjungemus aliud Lemma maximè universale. Si ex puncto quovis P dato ducatur recta P B, curvæ cuilibet A B C occurrens in B, et recta illa P B ità dividatur in b, ut sit semper P b ad P B in ratione datâ, punctum b, tanget curvam a b c ejusdem speciei et ordinis cum curvâ A B C, atque lineas habentem similibus curvæ A B C lineis parallelas. Nam si fuerit A B C polygonum rectilineum cujus latus unum B C, cum sit (per hyp.) P b : P B = P c : P C, similia erunt triangula P B C, P b c, et latera B C, b c, parallela et in datâ ratione P B, ad P b, ac proindè totum polygonum A B C simile polygono a b c, et eorum latera homologa parallela erunt. Laterum polygoni A B C numerus augeatur in infinitum et ipsorum longitudo in infinitum minuatur et duo polygona A B C, a b c mutabuntur in curvas similes in quibus latera homologa sunt parallela.

gulos angulis BAC, A B C, A C B æquales respectivè. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum D E, D F, E F, ut literæ D R E D eodem ordine cum literis B A C B, literæ D G F D eodem cum literis A B C A, et literæ E M F E eodem cum literis A C B A in orbem redeant; deinde compleantur hæc segmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores se mutuo in G, sintque centra eorum P et Q. Junctis G P, P Q, cape G a ad A B ut est G P ad P Q, et centro G, intervallo G a describe circulum, qui secet circulum primum D G E in a. Jungatur tum a D secans circulum secundum D F G in b, tum a E secans circulum tertium E M F in c. Et jam licet figuram A B C d e f constituere similem et æqualem figuræ a b c D E F. Quo facto perficitur problema.



Agatur enim F c ipsi a D occurrens in n, et jungantur a G, b G, Q G, Q D, P D. Ex constructione est angulus E a D æqualis angulo C A B, et (¹) angulus a c F æqualis angulo A C B, ideoque triangulum a n c tri-

(¹) * *Angulus a c F æqualis angulo A C B*, nam angulus F c E est anguli a c F atque etiam anguli in segmento E M F complementum ad duos rectos, quarè angulus a c F, est æqualis

angulo A B C æquiangulum. Ergo angulus a n c seu F n D angulo A B C, ideoque angulo F b D æqualis est; et propterea punctum n incidit in punctum b. Porro angulus G P Q, (k) qui dimidius est anguli ad centrum G P D, æqualis est angulo ad circumferentiam G a D; et angulus G Q P, qui dimidius est anguli ad centrum G Q D, æqualis est complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam G b D, ideoque æqualis angulo G b a; suntque ideo triangula G P Q, G a b similia; et G a est ad a b ut

angulo quem capit segmentum E M F, hic autem angulus æqualis est angulo A C B (per constr.)

(k) * Angulus G P Q dimidius est anguli ad centrum G P D, recta enim P Q, quæ circulorum D R G D, D G F D centra jungit, perpendicularis est ad rectam G D, quæ puncta intersectionum circulorum jungeret adeóque angulum G P D bisecat.

355. Si trium rectarum G C, A B, C B positione datarum

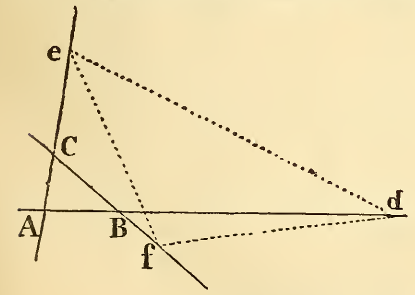
G P ad P Q; id est (ex constructione) ut G a ad A B. Æquantur itaque a b et A B; et propterea triangula a b c, A B C, quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde cum tangant insuper trianguli D E F anguli D, E, F trianguli a b c latera a b, a c, b c respectivè, compleri potest figura A B C d e f figuræ a b c D E F similis et æqualis, atque eam complendo solvetur problema. Q. e. f.

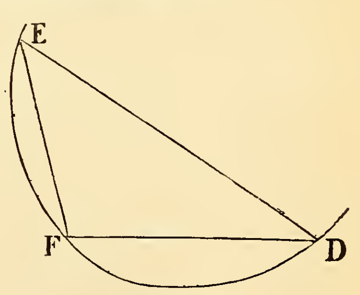
Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe triangulum D E F, puncto D ad latus E F accedente, et lateribus D E, D F in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data D E rectis positione datis A B, A C, et pars data D F rectis positione datis A B, A C, interponi debet; et applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur problema.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

Trajectoriam specie et magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.

Describenda sit trajectoria, quæ sit similis et æqualis lineæ curvæ D E F, quæque a rectis tribus A B, A C, B C positione datis, in partes datis hujus partibus D E et E F similes et æquales secabitur.





Age rectas D E, E F, D F, et trianguli hujus D E F pone angulos D, E, F ad rectas illas positione datas (per Lem. XXVI.) (1) dein circa

duæ G C, A B sint parallelæ et oporteat triangulum datum D E F ità locare ut angulus ejus D lineam A B, angulus E lineam G C, et angulus F lineam B C tangat, centro quovis ε in lineâ G C, ad arbitrium sumpto et radio $\varepsilon\,\delta$, æquali E D, describatur circulus rectæ A B, occurrens in δ; super basi $\varepsilon\,\delta$ construatur triangulum $\varepsilon\,\delta\,\varphi$ simile et æquale triangulo dato E D F, et ex angulo illius φ agatur $\varphi\,\varkappa$ rectæ B C parallela secans G C in $\varkappa$, et A B in b, et compleatur figura C B f d e similis et æqualis figuræ $\varkappa$ b $\varphi\,\delta\,\varepsilon$, patet factum. Si recta E D minor sit parallelarum G C, A B distantiâ, problema impossibile est; si major fuerit circulus radio $\varepsilon\,\delta$, descriptus, rectam A B in duobus punctis secabit, et duæ erunt rectæ $\varepsilon\,\delta$ positiones.

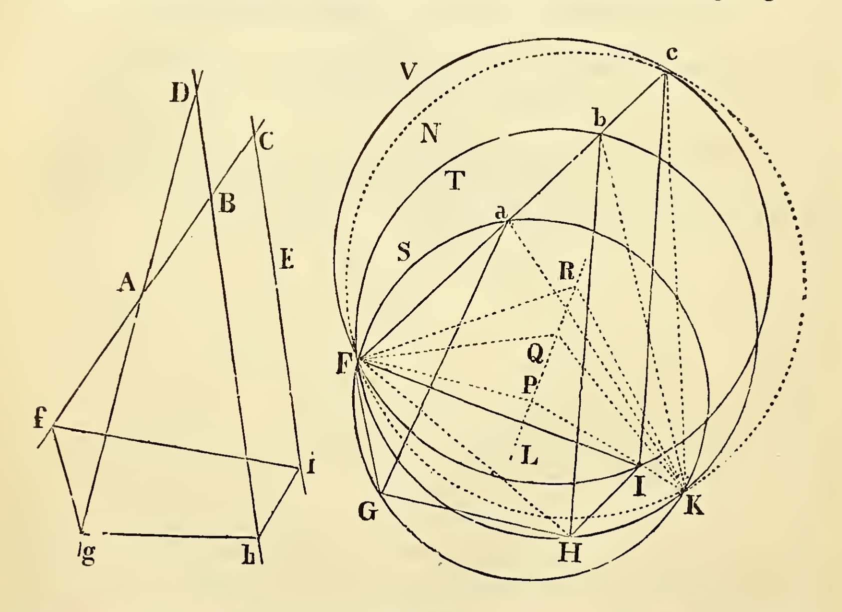
(1) * Si enim data sit curva D E F, triangulo dato E F D circumscripta, dabitur diametrorum et axium ejusdem curvæ positio ad trianguli E F D latera, et hinc habebitur positio diametrorum et axium curvæ similis et æqualis circà triangulum e f d describendæ.

triangulum describe trajectoriam curvæ D E F similem et æqualem. Q. e. f.

LEMMA XXVII.

Trapezium specie datum describere, cujus anguli ad rectas quatuor positione datas, quæ neque omnes parallelæ sunt, neque ad commune punctum convergunt, singuli ad singulas consistent.

Dentur positione rectæ quatuor A B C, A D, B D, C E; quarum prima secet secundam in A, tertiam in B, et quartam in C: et describendum sit trapezium f g h i, quod sit trapezio F G H I simile; et cujus angulus f, angulo dato F æqualis, tangat rectam A B C; cæterique anguli g, h, i,

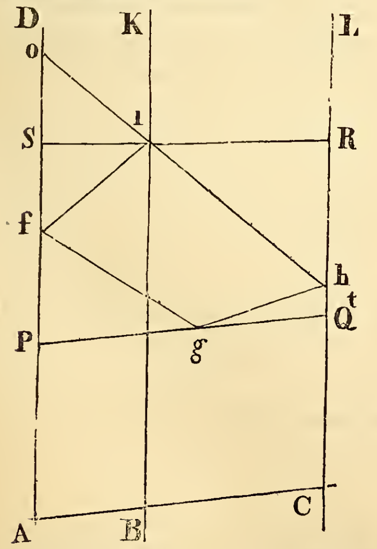


cæteris angulis datis G, H, I æquales, tangant cæteras lineas A D, B D, C E respectivè. Jungatur F H et super F G, F H, F I describantur totidem circulorum segmenta F S G, F T H, F V I; quorum primum F S G capiat angulum æqualem angulo B A D, secundum F T H capiat angulum æqualem angulo C B D, ac tertium F V I capiat angulum æqualem angulo A C E. Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum F G, F H, F I, ut literarum F S G F idem sit ordo circularis qui literarum B A D B, utque literæ F T H F eodem ordine cum literis C B D C, et literæ F V I F eodem cum literis A C E A

in orbem redeant. Compleantur segmenta in circulos integros; sitque P centrum circuli primi F S G, et Q centrum secundi F T H. Jungatur et utrinque producatur P Q, et in eâ capiatur Q R in eâ ratione ad P Q quam habet B C ad A B. Capiatur autem Q R ad eas partes puncti Q ut literarum P, Q, R idem sit ordo atque literarum A, B, C: centroque R et intervallo R F describatur circulus quartus F N c secans circulum tertium F V I in c. Jungatur F c secans circulum primum in a, et secundum in b. Agantur a G, b H, c I, et figuræ a b c F G H I similis constitui potest figura A B C f g h i. Quo facto erit trapezium f g h i illud ipsum, quod constituere oportebat.

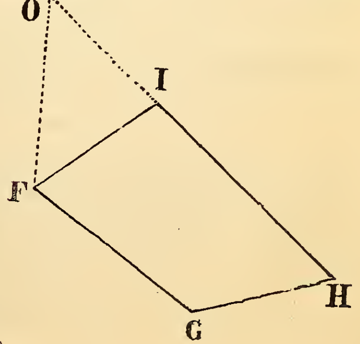
Secent enim circuli duo primi F S G, F T H se mutuo in K. Jungantur P K, Q K, R K, a K, b K, c K, et producatur Q P ad L. Anguli ad circumferentias F a K, F b K, F c K sunt semisses angulorum F P K, F Q K, F R K ad centra, ideoque angulorum illorum dimidiis L P K, L Q K, L R K æquales. (m) Est ergo figura

(m) * Est enim angulus K a b = K P R, angulus K b a = K Q P, ac proindè triangulum a K b, simile triangulo P Q K, et similiter patet triangulum b K c, esse simile triangulo Q K R, adeóque totam figuram a b c K, similem esse figuræ P Q R K.



* Si ex quatuor rectis positione datis duæ vel tres fuerint parallelæ manet eadem constructio. Potest tamen hæc alia adhiberi quæ etiam valet, ubi quatuor sunt parallelæ. Datæ sint tres parallelæ A D, B K, C L quas quarta A C in A, B, C secat et oporteat describere trapezium simile trapezio F I H G et cujus anguli angulis F, I, H, G æquales, rectas A D, B K, C L, A C, tangant, per punctum quodvis i, rectæ B K agatur S i R, parallelis A D, B K, C L normalis, iisque occurrens in S, et R, producatur H I, ad O, ut sit H I ad I O ut est R i ad i S junganturque F O; tum ex puncto i, agatur i f, parallelam A D secans in f, ità ut sit angulus f i B seu i f D, æqualis angulo I F O, et super latere f i, simili F I construatur trapezium f i h g simile trapezio F I H G, ac per angulum g agatur recta P Q ipsi A C parallela, et tandem super rectâ A C, construatur figura similis figuræ P Q h i f g. Dico factum.

Demonstrandum est angulum h esse in parallelâ C L; si punctum h, non est in lineâ C L producatur i h donec rectæ C L occurrant in t, et producatur t i, donec occurrat rectæ A D in o et erit H I : I O = h i : i o = R i : i S, ob figuras o i f h, O I F H, (per constr.) similes; sed ob similia triangula t i R, o i S, t i : i o = R i : i S, ergò h i : i o = t i : i o, atquè adeò h i = t i; quarè punctum t, cum h, coincidit.



P Q R K figuræ a b c K æquiangula et similis, et propterea a b est ad b c ut P Q ad Q R, id est, ut A B ad B C. Angulis insuper F a G, F b H, F c I æquantur f A g, f B h, f C i per constructionem. Ergo figuræ a b c F G H I figura similis A B C f g h i compleri potest. Quo facto trapezium f g h i constituetur simile trapezio F G H I, et angulis suis f, g, h, i tanget rectas A B C, A D, B D, C E. Q. e. f.

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli F G H, G H I usque eo, ut rectæ, F G, G H, H I in directum jaceant, et in hoc casu construendo problema ducetur recta f g h i, cujus partes f g, g h, h i, rectis quatuor positione datis A B et A D, A D et B D, B D et C E interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ F G, G H, H I, eundemque servabunt ordinem inter se. Idem verò sic fit expeditius.

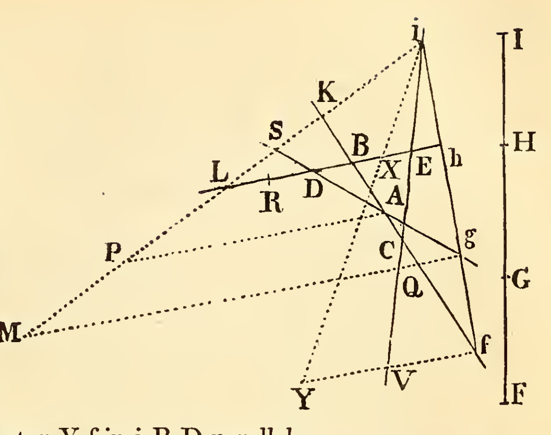
Producantur A B ad K, et B D ad L, ut sit B K ad A B ut H I ad G H; et D L ad B D ut G I ad F G; et jungatur K L occurrens rectæ C E in i. Producatur i L ad M, ut sit L M ad i L ut G H ad H I, et agatur tum M Q ipsi L B parallela, rectæque A D occurrens in g, tum g i secans A B, B D in f, h. Dico factum.

Secet enim M g rectam A B in Q, et A D rectam K L in S, et agatur A P quæ sit ipsi B D parallela et occurrat i L in P, et erunt g M ad L h (g i ad h i, (n) M i ad L i, G I ad H I, A K ad B K) et A P ad B L in eâdem ratione. Secetur D L in R ut sit D L ad R L in eâdem illâ ratione, et ob proportionales g S ad g M, A S ad A P, et D S ad D L; erit, (o) ex æquo, ut g S ad L h ita A S ad B L et D S ad R L; et mixtim, B L — R L ad L h — B L ut A S — D S ad g S — A S. Id est B R ad B h ut A D ad A g, ideoque ut B D ad g Q. Et vicissim B R ad B D ut B h ad g Q, seu f h ad f g. Sed ex constructione linea B L eâdem ratione secta fuit in D et R atque linea F I in G et H: ideoque est B R ad B D ut F H ad F G. Ergo f h est ad f g ut F H ad F G. Cum igitur sit etiam g i ad h i ut M i ad L i, id est, ut G I ad H I, patet lineas F I, f i in g et h, G et H similiter sectas esse. Q. e. f.

(n) * Nam (per constr.) L M : i L = G H : H I = A B : B K, ac proindè componendo consequentes cum antecedentibus M i : L i = G I : H I = A K : B K = A P : B L ob parallelas.

(o) * Quoniam enim
g M : L h = A P : B L = D L : R L
et g S : g M = A S : A P = D S : D L
patet esse g S : L h = A S : B L = D S : R L, et consequenter g S — A S : L h — B L = A S — D S : B L — R L = g S : L h; undè invertendo permutando et alternando B L — R L : L h — B L = A S — D S : g S — A S id est B R : B h = A D : A g = B D : g Q, ob similia triangula A D B A g Q.

In constructione corollarii hujus postquam ducitur L K secans C E in i, producere licet i E ad V, ut sit E V ad E i ut F H ad H I, (p) et agere V f parallelam ipsi B D. (q) Eodem recidit si centro i, intervallo I H, describatur circulus secans B D in X, et producatur i X ad Y, ut sit i Y æqualis I F, et agatur Y f ipsi B D parallela.

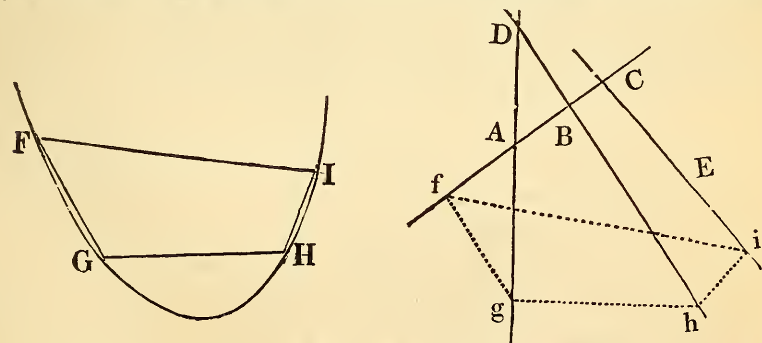


Problematis hujus solutiones alias Wrennus et Wallisius olim excogitarunt.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam specie datam describere, quæ a rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie et proportione datas.

Describenda sit trajectoria, quæ similis sit lineæ curvæ F G H I, et cujus partes, illius partibus F G, G H, H I similes et proportionales,



rectis A B et A D, A D et B D, B D et C E positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis F G, G H, H I, F I describatur (per Lem. XXVII.) Trapezium f g h i, quod sit

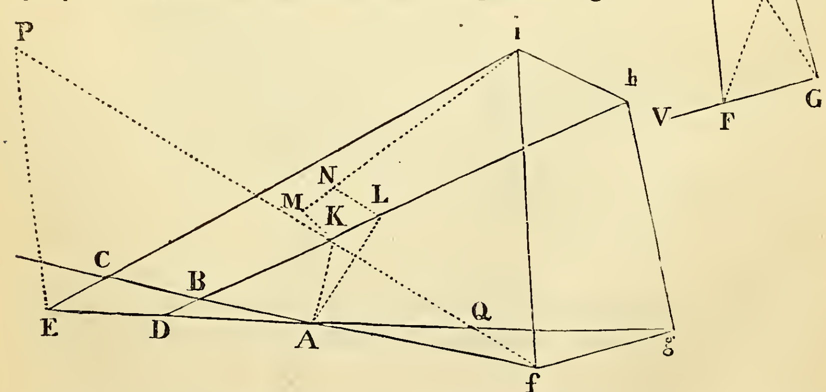
(p) * Si enim ex puncto f, per superiorem constructionem invento agatur f V parallela B D et lineæ i E productæ occurrens in V, erit ob similia triangula i E h, i V f, E V : E i = f h : h i, sed ex suprà demonstratis f h : h i = F H : H I, ergò E V : E i = F H : H I.

(q) * Nam si ex puncto f, ut suprà invento agatur f Y, ipsi B D, parallela et rectæ i X, productæ occurrens in Y, erit ob similia triangula i X h, i Y f, i h : h f = i X : X Y = I H : H F. Undè cum sit i X = I H (ex hyp.) erit X Y = H F.

trapezio F G H I simile, et cujus anguli f, g, h, i tangant rectas illas positione datas A B, A D, B D, C E, singuli singulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium describatur trajectoria curvæ lineæ F G H I consimilis.

Scholium.

Construi etiam potest hoc problema ut sequitur. Junctis F G, G H, H I, F I produc G F ad V, jungeque F H, I G, et angulis F G H, V F H fac angulos C A K, D A L æquales. Concurrant A K, A L cum recta B D in K et L, et inde agantur K M, L N, quarum K M constituat angulùm A K M æqualem angulo G H I, sitque ad A K ut est H I ad G H; et L N constituat angulum A L N æqualem angulo F H I, sitque ad A L ut H I ad F H. Ducantur autem A K, K M, A L, L N ad eas partes linearum A D, A K, A L, ut literæ C A K M C, A L K A, D A L N D, eodem ordine cum literis F G H I F in orbem redeant; et acta M N occurrat rectæ C E in i. Fac angulum i E P æqualem angulo I G F, sitque P E ad E i ut F G ad G I; et per P agatur P Q f, quæ cum rectâ A D E contineat angulum P Q E æqualem angulo F I G, rectæque A B occurrat in f, et jungatur f i. Agantur autem P E et P Q ad eas partes linearum C E, P E, ut literarum P E i P et P E Q P idem sit ordo circularis qui literarum F G H I F: et si super lineâ f i eodem quoque literarum ordine constituatur trapezium f g h i



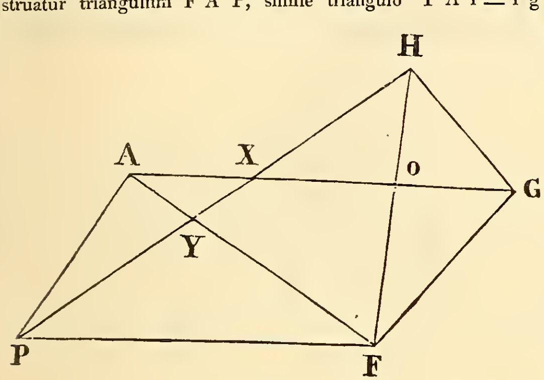
trapezio F G H I simile, et circumscribatur trajectoria specie data, solvetur problema. ([r])

([r]) Hæc nova constructio hoc præmisso Lemmate demonstratur

Lemma. Si ex puncto A extrà triangulum F G H dato agatur ad angulum F recta A F,

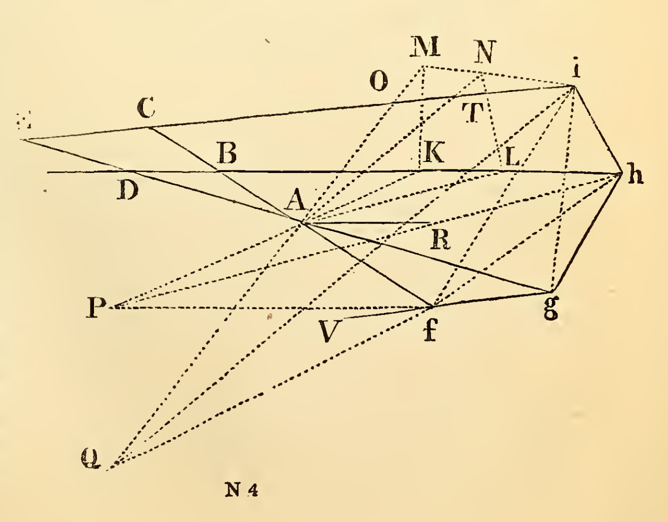
Hactenus de orbibus inveniendis. Superest ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

et ad angulum G recta A G, secans latus oppositum H F in O, et super rectam A F, construatur triangulum F A P, simile triangulo



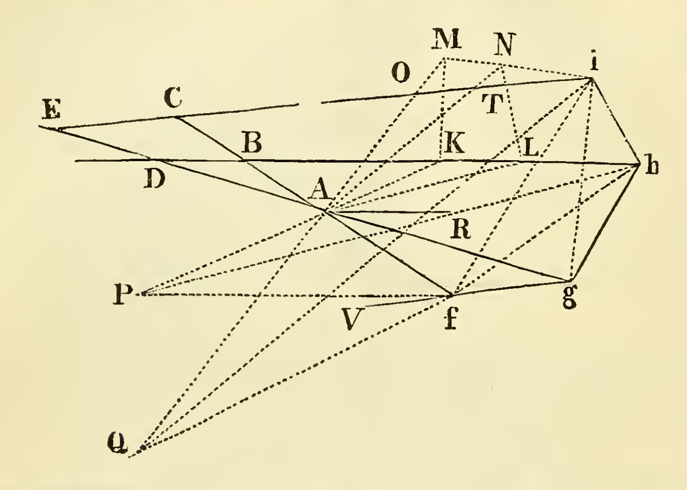
F G H, jungaturque P H secans A G in X, et A F in Y, similia erunt triangula P H F, A G F, et anguli H X G, H F G æquales; quoniam enim anguli A F P, H F G sunt æquales (per hyp.) æquales quoque erunt anguli P F H, A F G; et quoniam duo triangula P F A, H F G, similia sunt (per hyp.) erit $P F : A F = H F : F G$, adeóque triangula A F G, P F H, quorum latera proportionalia æqualem angulum continent sunt similia, et hinc anguli H P F, G A F æquantur; cumque anguli oppositi P Y F, A Y X, sint etiam æquales, liquet angulum A X Y sive H X G, æqualem esse angulo $A F P = H F G$. Q. e. d.

357. Hoc itaque, posito, demonstratur Newtoniana constructio. Trapezii f g h i, anguli quatuor tangant rectas C i, B h, A g, A f. Super rectâ A f, construantur triangula f A P, f A Q, triangulis f g h, f g i, similia; junganturP h, Q i, et latera P A, Q A, producantur, ut rectis B h, C i, occurrant in K, et O; erunt anguli B A K, BAO, æquales angulis datis f g h, f g i; agantur A L, A T, rectis P h, Q i parallelæ, et producto latere g f, ad V, erit angulus D A L, æqualis angulo V f h; angulus



enim $D A L = D A B + B A K + K A L = f A g + P A f + h P A$; sed (per constr.) $P A f = f g h$, et $f P A = f h g$; cumque sit triangulum f P h, simile triangulo f A g, (356.) angulus $f P h = f A g$, adeóque $h P A + f A g = h P A + f P h = f P A = f h g$; quarè $D A L = f g h + f h g = V f h$ (per 32. 1. Elem.) Et similiter ostenditur angulum D A T, esse æqualem angulo V f i, ob triangula f A Q, f Q i, triangulis f g i, f A g, similia. Agantur rectæ K M, L N, quæ cum rectis A K, A L constituant angulos A K M, A L N angulis g h i, f h i æquales, rectisque A O, A T productis occurrant in M et N, et triangula A K M, A L N similia erunt triangulis g h i, f h i, (unde juxtà constructionem Newtoni erit $K M : A K = h i : h g$, et $L N : A L = h i : h f$). Etenim angulus $M A K = P A Q = P A f - Q A f = f g h - f g i = i g h$, (per constr.) quarè cum sit quoque (per constr.) angulus $A K M = g h i$, triangula A K M, g h i sunt similia, angulus verò $N A L = D A L - D A T = V f h - V f i$ (per Dem.) sed $V f h - V f i = i f h$, ergò triangula i f h, N A L similia sunt. jungatur M N, demonstrandum est hanc lineam productam transire per angulum i, quo trapezium tangit lineam E C i, ex puncto A, ad rectam P h, agatur A R rectæ B h, parallela, ob similia triangula f g h, f A P erit ...... $f g : h g = A f : P A$

ob sim. tri. f g i, f A Q . . . . g i : f g = Q A : A f
ob sim. tri. g h i. A K M . . . . h g : g i = A K : A M
ob sim. tri. A K L, P A R . . . A K : A L = P A : P R
ob sim. tri. f Q i, f P h, . . . f h : f i = P h : Q i;
sed ob sim. tri. f h i, A L N,
f h : f i = A L : A N.
ergo A L : A N = P h : Q i
et A L : A N = P h — A L : Q i — A N
et quia A L = R h est A L : A N = P R : Q i — A N



undè per compositionem rationum et ex æquo, A K : A N = Q A × A K : A M × (Q i — A N) quarè A K × A M : A N × A M = Q A × A K : A M × $\overline{Q\,i - A\,N}$, ac proindè A M : A N = Q A : Q i — A N, adeóque A M : A N = Q M seu Q A + A M : Q i seu Q i — A N + A N. Quoniam igitur rectæ A N, Q i, sunt parallelæ (per constr.) patet puncta M, N, i, esse in unâ rectâ, atquè hæc est prima pars constructionis Newtonianæ quæ erat demonstranda.

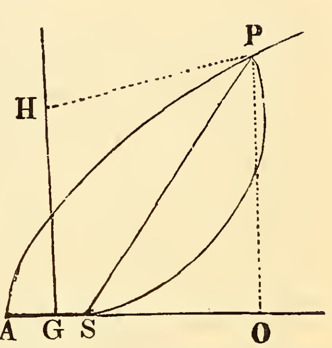
2ª. Illius pars facilè ostenditur. Nam (vid. fig. Newt.) junctâ P i, erit (per constr.) triangulum P i E, super rectâ E i constructum simile triangulo f i g, ad cujus angulos i et g, ductæ sunt ex puncto E, rectæ E i, E g; quarè (356), si per punctum P agatur recta P Q, quæ cum rectâ E g, contineat angulum P Q E æqualem angulo f i g, recta illa P Q, producta tanget angulum f, trianguli f i g, seu trapezii f g h i. Q. e. d.

SECTIO VI.

De inventione motuum in orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in datâ trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus assignatum. (s)



(t) Sit S umbilicus et A vertex principalis parabolæ, sitque 4 A S × M æquale areæ parabolicæ abscindendæ A P S, quæ radio S P, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem describenda est. Innotescit quantitas areæ illius abscindendæ ex tempore ipsi proportionali. Biseca A S in G, erigeque perpendiculum G H æquale 3 M, et circulus centro H, intervallo H S descriptus secabit parabolam in loco quæsito P. Nam, demissâ ad axem perpendiculari P O et ductâ P H, (u) est $AGq + GHq$ (= (x) $HPq = \overline{AO - AG}$: quad. + $\overline{PO - GH}$: quad.) = $AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$. (y) Unde $2GH \times PO$ (= $AOq + POq - 2GAO$) = $AOq + \frac{3}{4}POq$. Pro AOq scribe $AO \times \frac{POq}{4AS}$; et applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductisque in $2AS$, fiet $\frac{4}{3}GH \times AS$ (= $\frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO$ = areæ $\overline{APO - SPO}$) = areæ A P S. Sed G H erat 3 M, et inde $\frac{4}{3}$ G H

(s) 338. Newtonus in hâc totâ sectione supponit corpus in trajectoriâ conicâ datâ ità moveri, ut radiis ad trajectoriæ umbilicum ductis areas seu sectores describat temporibus proportionales; eâ enim lege planetas omnes in orbitis conicis revolvi ex phenomenis lib. 3° ostendit. Prætereà supponit notum esse tempus quo corpus ex puncto trajectoriæ dato v. g. ex vertice illius principali ad aliud ejusdem trajectoriæ punctum datum pervenit, datamque esse aream seu trajectoriæ sectorem huic tempori correspondentem, atque ex his datis quærit locum mobilis in trajectoriâ ad aliud quodvis tempus datum, aut contrà quærit tempus quo mobile datum quodvis trajectoriæ punctum attingit; nam cum sint areæ temporibus proportionales, dato tempore quovis, datur area hoc tempore descripta, et vicissim datâ areâ descriptâ datur tempus quo describitur.

(t) * Sit S umbilicus, et A, vertex principalis parabolæ, datumque sit tempus quo corpus in parabolâ motum, ut modò exposuimus (358.) ex vertice A ad punctum P, aut ex puncto P ad verticem A pervenit, seu datum sit tempus quo sector quilibet A P S describitur.

(u) * Est $AG^2 + GH^2 = HP^2$; nam $AG = GS$, $HP = HS = HA$, et angulus G rectus (per constr.) quarè $HA^2 = HP^2 = AG^2 + GH^2$.

(x) * $HP^2 = (AO - AG)^2 + (PO - GH)^2$. Nam ex puncto H, ad rectam P O demissa intelligatur perpendicularis, hæc erit æqualis ipsi $GO = AO - AG$, et pars rectæ P O inter perpendicularem et punctum P intercepta æqualis erit $PO - GH$.

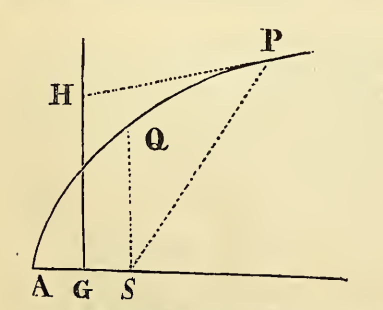
(y) * Undè sublatis utrinque quadratis AG^2

$\times$ A S est 4 A S $\times$ M. Ergo area abscissa A P S æqualis est abscindendæ 4 A S $\times$ M. Q. e. d.

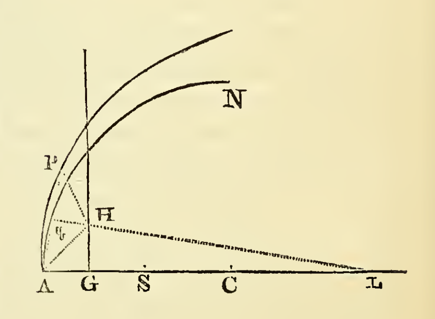
Corol. 1. Hinc G H est ad A S, ut tempus quo corpus descripsit arcum A P ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem A et (a) perpendiculum ad axem ab umbilico S erectum.

Corol. 2. (b) Et circulo A S P per corpus motum P perpetuo transe-

$+ GH^2$, et addito utrinque rectangulo $2 GH \times PO$, est $2 GH \times PO = AO^2 = PO^2 - 2 GAO$; quoniam autem in parabolâ latus rectum $= 4 AS = 8 AG$, est $8 AG \times AO$ sive $8 GAO = PO^2$, et $2 GAO = \frac{1}{4} PO^2$, et $PO^2 - 2 GAO = \frac{3}{4} PO^2$. Cum verò sit $4 AS \times AO = PO^2$, adeóque $4 AS \times AO^2 = AO \times PO^2$, et $AO^2 = \frac{AO \times PO^2}{4 AS}$, erit igitur $2 GH \times PO = \frac{AO \times PO^2}{4 AS} + \frac{3}{4} PO^2$, et dividendo utrinque per 3 P O, fiet $\frac{2}{3} GH = \frac{AO \times PO}{12 AS} + \frac{1}{4} PO$, ductisque omnibus terminis in 2 A S, fiet $\frac{4}{3} GH \times AS = \frac{1}{6} AO \times PO + \frac{1}{2} AS \times PO = \frac{AO + 3 AS}{6} \times PO = \frac{4 AO - 3 SO}{6} \times PO$ ob $AS = AO - SO$ unde est $3 AS = 3 AO - 3 SO$. Verùm $\frac{4 AO \times PO}{6}$ seu $\frac{2}{3} AO \times PO$, est area parabolica A P O A, (Archimed. Prop. 17. quadr. Parab. sup. Theor. IV. de Parab. pag. 133.) et $\frac{3 SO \times PO}{6}$ seu $\frac{1}{2} SO \times PO$, est area trianguli P S O, ergò area sectoris parabolici A P S, æqualis est $\frac{4 AO - 3 SO}{6} \times PO$, quarè $\frac{4}{3} GH \times AS =$ areæ A P S; *sed* $GH = 3 M$, (per constr.) &c.



(a) * Sit perpendiculum illud S Q, erit area A S P, ad aream A S Q, ut $\frac{4}{3} GH \times AS$, ad $\frac{2}{3} AS \times SQ$ (Theor. IV. de Par. p. 133.); sed ex naturâ parabolæ (Vid. Cor. 2. Theor. I. de Par. p. 131.) S Q æqualis dimidio lateri recto $= 2 AS$, ergò area A S P est ad aream A S Q, seu tempus per A P ad tempus per A Q, ut $\frac{4}{3} GH \times AS$ ad $\frac{4}{3} AS^2$, hoc est, ut G H ad A S. Dato igitur tempore quo describitur arcus A Q, et tempore quo describitur A P, per simplicem proportionem invenitur H G, et indè punctum P habetur.



(b) * Jungatur A P, et ad medium ejus punctum q, erigatur perpendiculum q L, axem secans in L, et quoniam (ex Dem.) est semper $HP = HA$, ideoque est A P chorda circuli cujus centrum est H. Itaque (per 1. 3i. Elem.) perpendiculum illud q L, rectæ G H, occurrit in H; et ob similitudinem triangulorum L G H, L q A, est $GH : qA$ seu $\frac{1}{2} AP = LG : Lq$. Sumatur $AC = 2 AS$ dimidio nempè lateris recti parabolæ et centro C, et intervallo C A, describatur circulus A N, hic parabolam osculatur in A (241); coëuntibus verò punctis P et A, H et G, coëunt etiam L et C, fitque $Lq = LA = CA = 2 AS = 4 GS$, et $LG = CG = 3 GS$, atque arcus A P æqualis chordæ A P, (Lem. VII.); undè cum in proportione superiori sit $GH : \frac{1}{2} AP = LG : Lq$ erit in hoc casu $GH : \frac{1}{2} AP = 3 GS : 4 GS$ hoc est, $GH : AP = 3 : 8$. Verùm ob motum æquabilem et æquidiuturnum per nascentes A P, G H, velocitas puncti H in G, est ad velocitatem corporis P in A ut G H ad A P, et quoniam (ex Dem.) est semper $\frac{4}{3} AS \times GH$ æqualis areæ A P S, et $\frac{4}{3} AS$, est quantitas constans, erit semper G H, ut area A P S, hoc est, ut tempus quo punctum H, percurrit G H,

unte, velocitas puncti H est ad velocitatem quam corpus habuit in vertice A ut 3 ad 8; ideoque in eâ etiam ratione est linea G H ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab A ad P, eâ cum velocitate quam habuit in vertice A, describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam vice versâ inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum A P. Junge A P et ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ G H occurrens in H.

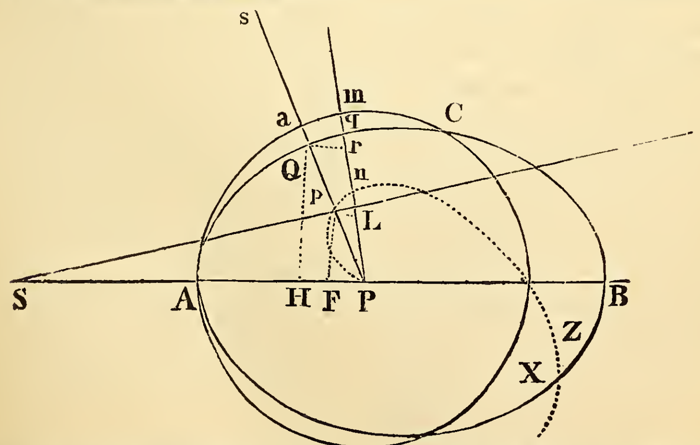
LEMMA XXVIII.

Nulla extat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

(c) Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, et interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatque semper eâ cum velocitate, quæ sit ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud describet spiralem gyris infinitis. Jam si areæ ovalis a rectâ illâ abscissæ portio per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia puncti a polo, (d) quæ huic areæ proportiona-

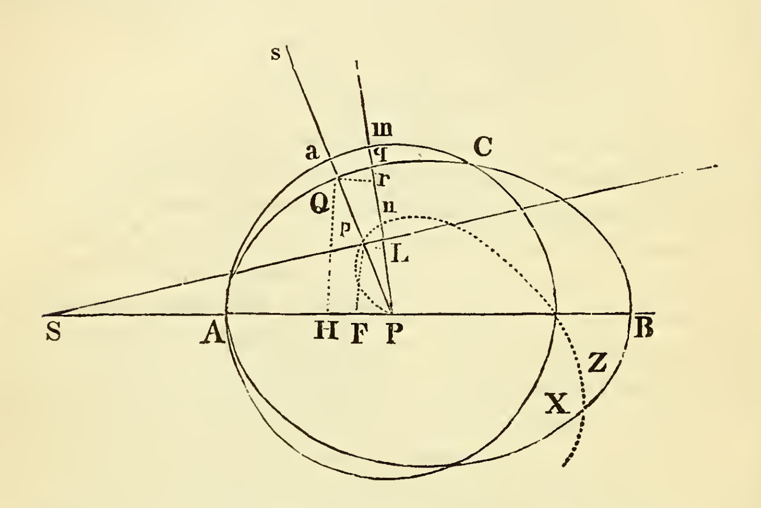
estque proindè motus illius æquabilis et velocitas ubique eadem. Quarè velocitas puncti H, est ubique ad velocitatem quam habet corpus P in A, ut nascens G H, ad nascentem A P, hoc est, ut 3. ad 8. Q. e. d.

(c) 359. Intrà ovalem A C B A detur punctum quodvis P, circà quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta infinita P S, uniformi cum motu, ità ut punctum datum A illius lineæ circuli A a m X arcus æquales æqualibus temporibus describat, et intereà in rectâ illâ P S, exeat punctum mobile p de polo P, pergatque semper in eâdem rectâ P s cum velocitate quæ sit ut rectæ illius intrà ovalem quadratum, hoc est, cum linea P S pervenit ad situm P s, et punctum mobile p ad P, velocitas puncti p sit ut quadratum rectæ P Q inter polum P et ovalem A Q C B contentæ, hoc motu punctum illud p, describet spiralem P p n Z, gyris infinitis.



(d) 360. His suppositis erit semper recta P p ut area P A Q P; nam circulus A a m X divisus intelligatur in arcus innumeros æquales ut a m, et ductis radiis P Q, P q spirali, circulo et ovali occurrentibus in p et n, a et m, Q et q, demissa capiantur ex punctis Q et p, ad P q,

lis est, ideóque omnia spiralis puncta per æquationem finitam inveniri possunt: et propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta spiralem secat in punctis, numero infinitis, et (e) æquatio, quâ

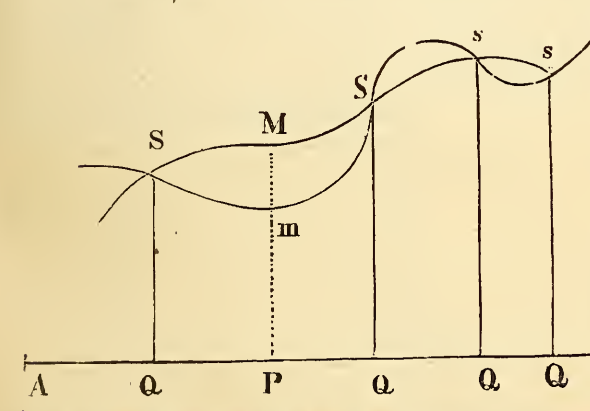


perpendicula Q r, p L, et eodem tempore quo punctum a, percurret arcum a m, punctum p percurret rectam L n; quâpropter nascente arcu a m, erit L n ut velocitas puncti p in rectâ P s, hoc est, (per hyp.) ut quadratum rectæ P Q; porro ob triangula similia P a m, P Q r est $Pa : PQ = am : Qr = \frac{PQ \times am}{Pa}$, ac proindè sectoris nascentis P Q q area $\frac{1}{2} Qr \times PQ = \frac{PQ^2 \times am}{2 Pa}$. Cum igitur a m et 2 P a, sint quantitates constantes (ex hyp.) erit sector P Q q, nascens seu fluxio areæ P A Q ut PQ^2, atque ideò ut nascens L n, seu ut fluxio rectæ P p, et hinc tota area fluens P A Q, erit ut tota recta fluens P p, (Cor. Lem. IV.) Q. e. d.

361. Puncta p et Q referantur ad rectam A B, positione datam demissis ad A B perpendicularibus Q H, p F sitque area P A Q, æqualis quantitati finitæ E ex lineis variabilibus P H, Q H et aliis constantibus quomodolibet compositæ, et quoniam linea P p areæ P A Q seu quantitati finitæ E proportionalis est (360) linea illa exprimi poterit per factum ex quantitate E in quantitatem constantem B, eritque $Pp = E \times B$ æquatio finita. Verùm ob similia triangula P F p, P H Q et angulum ad H rectum, $Pp : pF = PQ$, seu $\sqrt{PH^2 + QH^2} : QH$, et $Pp : PF = PQ$ seu $\sqrt{PH^2 + QH^2}$: P H, et prætereà ex naturâ ovalis A Q C B, datur alia æquatio inter P H et Q H, inveniuntur ergò quatuor æquationes finitæ quæ simul quinque tantum variabiles, nimirum P p, P F, p F, P H, Q H continent, quæque proindè ad unicam æquationem finitam poterunt reduci in quâ duæ tantum variabiles P F, p F reperientur, adeóque per hanc æquationem finitam omnia spiralis puncta inveniri poterunt, et propterea rectæ cujusvis S p positione datæ intersectio p cum spirali inveniri etiam poterit per æquationem finitam; cum enim duæ rectæ S p, S B positione datæ sint, linea S P magnitudine et triangulum S p F specie dantur, et hinc datur ratio lineæ S F seu $SP \mp PF$ ad F p, et nova invenitur æquatio inter P F et F p; per hanc igitur æquationem et per alteram quæ ad spiralem est, determinabuntur P F, et F p, punctumque intersectionis p invenietur per æquationem finitam.

(e) 362. Lineæ duæ S M S, S m s se mutuò intersecantes in punctis S, s ad eandem rectam A Q positione datam referantur, sintque A Q, A P abscissæ communes, et Q S, P M, P m ad eas ordinatæ; quoniam in communibus linearum S M s, S m s, intersectionibus S, S, ordinatæ P M, P m sunt æquales, si in duabus ad lineas S M s, S m s æquationibus, manente abscissâ communi, loco ordinatarum P M, P m, eadem scribatur littera, v. gr. y, et deindè ex illis æqua-

intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, ideoque ascendit ad tot dimensiones quot sunt intersectiones. Quoniam circuli duo se mutuo secant in punctis duobus, intersectio una non invenietur nisi per æquationem duarum dimensionum, quâ intersectio altera etiam inveniatur. (f) Quoniam duarum sectionum conicarum quatuor esse possunt intersectiones, non potest aliqua earum generaliter inveniri nisi per æquationem quatuor dimensionum, quâ omnes simul inveniantur. Nam si intersectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex et conditio, idem erit calculus in casu unoquoque, et propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti et indifferenter exhibere. Unde etiam intersectiones sectionum conicarum et curvarum tertiæ potestatis, eo quod sex esse possunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum, et intersectiones duarum curvarum tertiæ potestatis; quia novem esse possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem. (g) Id nisi necessario



(f) * Exempli causâ. Sint $a p + p x = y y$, et $b x - x x = y y$, æquationes ad parabolam et circulum, et invenietur $x = \frac{y y - a p}{p}$, et $\frac{b y y - b a p}{p} - \frac{y^4 - 2 a p y y + a a p p}{p^2} = y y$, æquatio quatuor dimensionum, quoniam quatuor esse possunt parabolæ et circuli intersectiones. Sint $a p^2 + p^2 x = y^3$, et $b x - x x = y^2$ æquationes ad parabolam 3^{ae}. potestatis et ad circulum, erit $x = \frac{y^3 - a p^2}{p^2}$ et $\frac{b y^3 - b a p^2}{p^2} - \frac{y^6 - 2 a p^2 y^3 + a^2 p^4}{p^2}$ $= y y$ æquatio sex dimensionum quod esse possint intersectiones sex, et ità de cæteris. Generatim verò tot esse possunt curvarum duarum intersectiones quot sunt unitates in facto ex potestatis curvæ unius indice seu exponente in alterius exponentem; index autem potestatis curvæ idem est cum numero dimensionum æquationis ad illam curvam.

(g) * Nam in solidorum problematum constructione duæ adhibentur sectiones conicæ quarum intersectiones, seu ordinatæ duabus coni sectionibus communes, problematis solutionem seu ultimæ æquationis radices suppeditant.

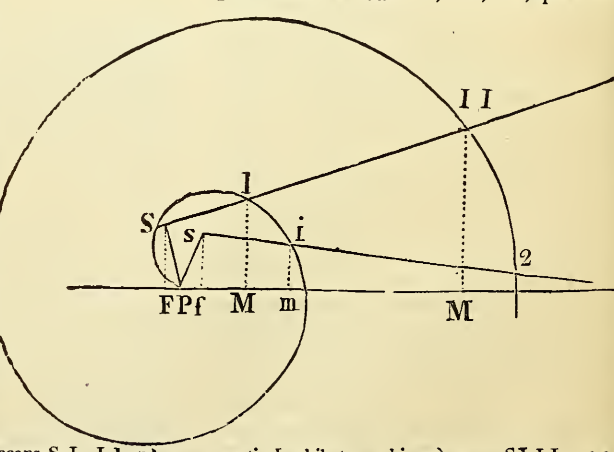
tionibus eliminetur littera quæ abscissam communem exprimit, obtinebitur æquatio ex solâ y, et constantibus composita. Porrò hæc ultima æquatio non magis primam ordinatam communem S Q, seu primam intersectionem S, quam secundam aut tertiam, &c. determinabit, cum sit eadem omnium lex et conditio idemque calculus; hæc igitur æquatio debet omnes communes ordinatas Q S, omnesque intersectiones S, simul complecti et indifferenter exhibere, et ità tot radices seu ipsius y valores reddere quot sunt communes ordinatæ seu intersectiones, æquatio autem tot dimensiones habet quot radices; Si itaque linearum S M s, S m s, intersectiones S, s, sunt numero finitæ, æquatio quoque quæ illas determinat finita est; at si fuerint intersectiones numero infinitæ, erit æquatio numero dimensionum et radicum infinita.

fieret, reducere liceret, problemata omnia solida ad plana, et plusquam solida, ad solida. (h) Loquor hic de curvis potestate irreducibilibus. Nam si æquatio, per quam curva definitur, ad inferiorem potestatem reduci possit: curva non erit unica, sed ex duabus vel pluribus composita, quarum intersectiones per calculos diversos seorsim inveniri possunt. Ad eundem modum intersectiones binæ rectarum et sectionum conicarum prodeunt semper per æquationes duarum dimensionum, ternæ rectarum et curvarum irreducibilium tertiæ potestatis per æquationes trium, quaternæ rectarum et curvarum irreducibilium quartæ potestatis per æquationes dimensionum quatuor, et sic in infinitum. Ergo rectæ et spiralis intersectiones numero infinitæ, cum curva hæc sit simplex et in curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimensionum et radicum infinitas, quibus intersectiones omnes possunt simul exhiberi. Est enim eadem omnium lex et idem calculus. (i) Nam si a polo in rectam illam

Quarè si hujusmodi intersectiones vel ordinatæ communes generaliter possent per æquationem quadraticam inveniri, problemata solida per æquationes duarum dimensionum solvi ac construi possent, atque ità ad plana reducerentur, eâdemque ratione plus quam solida ad solida, indeque ad plana revocarentur.

(h) Nonnunquam proposita ad curvam æquatio ad inferiorem potestatem aut in duas æquationes inferioris potestatis resolvi potest. Sic æquatio $ax^3 - a^2x^2 - bx^2y + axy^2 + abxy - by^3 = 0$ resolvi potest in duas $xx - ax + yy = 0$, et $ax - by = 0$ quarum prior est ad circulum, posterior ad parabolam. Parabolæ autem et circuli cum lineâ quâvis intersectiones per calculos diversos seorsim inveniri possunt.

(i) * Sit polus P, secans S I, I I, ad eam ex polo normalis P s, intersectio prima in I, secunda in I I, &c. circà polum P, revolvatur perpendiculum P S, unà cum secante S I, I I ad illud semper normali, ubi perpendiculum pervenit ad situm P s, et secans S I, I I ad situm s i 2, intersectio prima I, percurso arcu I i, pervenit ad i, et post integram revolutionem cum s i 2, redit ad situm S I, I I, prima intersectio I, seu i, pervenit ad II, et fit secunda, et post duas revolutiones fit tertia et sic deinceps. Ex punctis S, s, ad rectam P M infinitam et positione datam demittantur perpendicula S F, s f; manente secantis S I, I I, positione, constantes sunt rectæ S F, F P, S P, quibus illa positio determinatur, et demissâ ex I ad P M perpendiculari I m datur æquatio aliqua inter P m vel I m et datas S P, F P, S F, quâ intersectio I exhibetur; ubi verò secans S I, I I, pervenit ad situm s i 2, manente secantis s i 2 positione, datur æquatio inter i m vel P m et datas s P, seu S P, Pf, sf, et æquatio hæc a priori diversa non est, nisi ratione quantitatum F P F S, quæ mutatæ sunt in f P, f s, per quas secantis s i 2, positio determinatur, cum utraque æquatio in situ S I, I I, et situ s i 2, ab æquatione ad spiralem quæ eadem semper manet et ab æquatione secantis positionem determinante diducantur. Quoniam igitur lineæ f s, f P post primam revolutionem



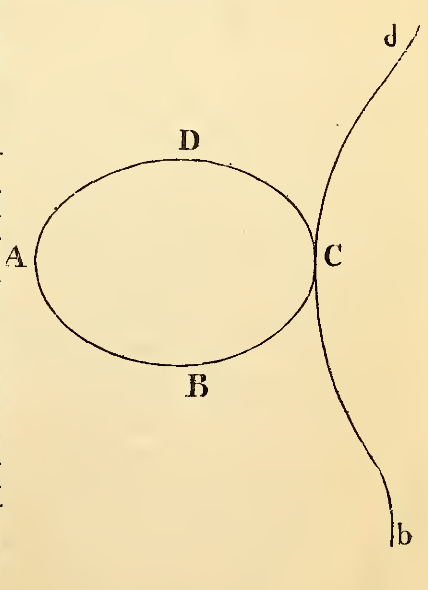
secantem demittatur perpendiculum, et perpendiculum illud unà cum secante revolvatur circa polum, intersectiones spiralis transibunt in se mutuo, quæque prima erat seu proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas tertia, et sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mutatâ magnitudine quantitatum per quas positio secantis determinatur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, ideoque una eademque exhibebit intersectiones omnes, et propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ et spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, et idcirco nulla extat ovalis cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

(k) Eodem argumento, si intervallum poli et puncti, quo spiralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. (l) De ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur a figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

ac proindè post singulas redeunt ad magnitudines primas F S, F P intersectione primâ in secundam transeunte, secundâ in tertiam, et sic deinceps, æquatio inter I I M, vel P M, et datas P F, P S, S F, redibit ad formam primam quam habebat æquatio inter I m, vel P m, et easdem datas quantitates P F, P S, S F, adeóque una eademque æquatio exhibebit intersectiones omnes I, I I, &c. seu valores I m, I I M, &c. propterea radices exhibebit numero infinitas quibus omnes exhiberi possunt.

(k) * Eâ enim ratione spiralis describetur gyris infinitis ad quam proindè æquatio erit numero dimensionum infinita, quæ quidem finita deberet esse, si longitudo perimetri ovalis pro lubitu abscissa seu intervallum puncti spiralem describentis et poli, per finitam æquationem generaliter exhiberi posset.

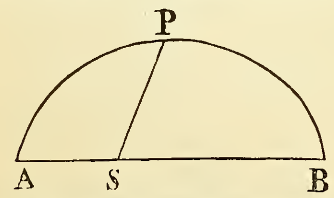
(l) * Ovalem A B C D tangat in C curva conjugata b C d, cujus rami C b, C d in infinitum pergant, pro hujusmodi ovalibus non valet NEWTONI demonstratio. Supponit enim circà punctum datum in ovali perpetuò revolvi lineam rectam uniformi cum motu quæ sit ad peripheriam ovalis terminata, et abscindat areas sibi proportionales; si autem ovalis tangatur a figurâ conjugatâ b C d, cujus rami in infinitum pergunt, evidens est lineâ rectâ intrà ovalem revolvente non percurri totam novæ hujus figuræ aream, nec gyris perpetuis ac infinitis simplicem spiralem describi.



Corollarium.

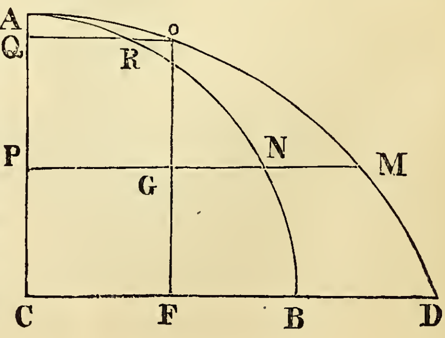
(m) Hinc area ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; et propterea per descriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Curvas geometricè rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasque (ut spirales, quadratrices,

(m) 363. Sit Ellipseos A P B, axis A B, umbilicus S, radius vector S P, dataque sint totius Ellipsis area et tempus periodicum, sitque tempus periodicum ad tempus per arcum A P, ità area totius ellipseos ad aream sectoris A P S, obtinebitur æquatio inter aream A P S, et tempus quo illa describitur. Unde si posteà inveniri posset æquatio finita inter aream indefinitam A P S et radium vectorem S P ac datas quantitates, inveniretur quoque æquatio finita inter tempus per arcum quemvis A P, et radium vectorem S P, qui ità ex dato tempore per æquationem finitam prodiret; Et vice versâ, si ex tempore quo arcus A P describitur, radii vecto-



ris S P longitudo per æquationem finitam posset determinari, ope hujus æquationis et superioris proportionis inter tempora et areas obtineretur æquatio finita inter aream quamlibet A S P et radium vectorem S P ac datas quantitates, quod impossibile esse demonstratum est; et propterea longitudo (ac proindè positio quæ ex longitudine data est) radii vectoris S P, per descriptionem curvarum geometrice rationalium determinari nequit. Sunt autem curvæ geometricè rationales in quibus ordinatarum et abscissarum rectarum relatio æquatione finitâ exprimi potest, quarumque proindè puncta omnia per harum rectarum linearum rationes complicatas determinari possunt. Si in æquatione ad curvam $a x^m + b y^n +$ &c. $= 0$ numerus terminorum finitus sit et exponentes m, n, rationales fuerint, curva erit geometricè rationalis, contrà si numerus terminorum infinitus fuerit, et summari nequeant, aut si exponens aliquis irrationalis fuerit, curva est geometricè irrationalis.

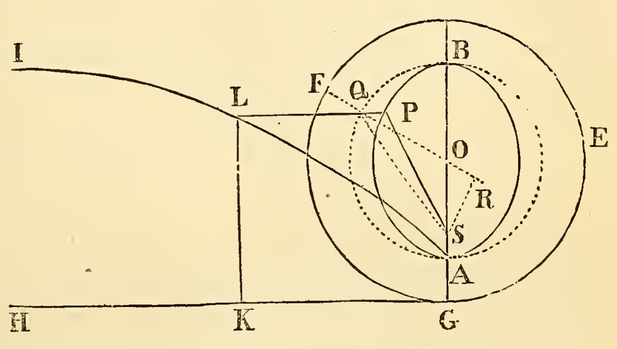
364. Circuli (adeóque et Ellipsis) quadraturam seu rectificationem indefinitam finitâ æquatione exhiberi non posse demonstravit Saurinus in Commentariis Parisiensibus an. 1720. illius demonstrationem ut potè facilem et brevem referemus. Sit quadrans circuli C A B, et ex puncto quovis N arcûs A B demittatur ad radium A C perpendicularis N P, demonstrandum est arcus A N, et rectarum A P, P N relationem nullâ æquatione finitâ posse exprimi. Descripta intelligatur curva A O M D cujus hæc sit natura ut recta M P ex puncto quovis M ad radium A C perpendiculariter demissa, sit æqualis arcui abscisso A N; ope curvæ A M D arcus A N in ratione quâvis datâ rectæ P G ad P M dividi potest in R; nam si per punctum G agatur recta G o, ipsi P M normalis et curvæ A M D occurrens in o, atque ex puncto o, ducatur ad A C perpendicularis o Q arcum A N secans in R, erit A R = Q o, adeóque A R : A N = P G : P M. Verùm demonstravit Clariss. Hospitalius Art. 443. Lib. 10. Sectionum Conicarum, quod si arcus A N sit in partes æquales dividendus quarum una sit A R, æquatio quâ determinatur partis unius Chorda A R, tot dimensiones obtinet quot sunt in arcu A N, partes æquales, atoue adeò si dividendus



trochoides) geometricè irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) sunt arithmeticè rationales vel irrationales. Aream igitur ellipseos tempori proportionalem abscindo per curvam geometricè irrationalem ut sequitur.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus assignatum.



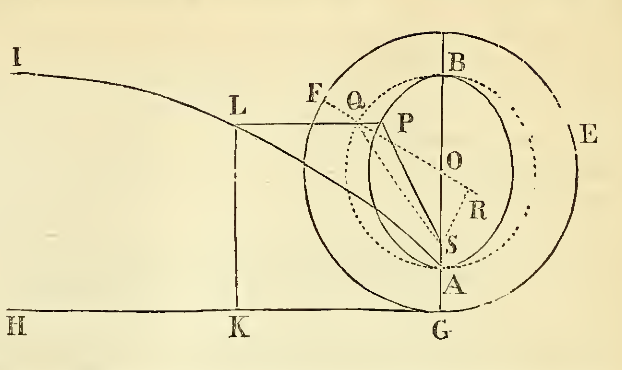
Ellipseos A P B sit A vertex principalis, S umbilicus, et O centrum, sitque P corporis locus inveniendus. Produc O A ad G, ut sit O G ad O A ut O A ad O S. Erige perpendiculum G H, centroque O et intervallo O G describe circulum G E F, et super regula G H, ceu fundo, progrediatur rota G E F revolvendo circa axem suum, et interea puncto suo A describendo trochoidem A L I. Quo facto, cape G K in ratione ad rotæ perimetrum G E F G, ut est tempus, quo corpus progrediendo ab A descripsit arcum A P, ad tempus revolutionis unius in ellipsi. Erigatur perpendiculum K L occurrens trochoidi in L, et acta L P ipsi K G parallela occurret ellipsi in corporis loco quæsito P.

Nam centro O, intervallo O A describatur semicirculus A Q B, et arcui

sit arcus A N in ratione indefinitâ rectæ P G ad P M, æquatio illa finita esse nequit. Ergò curva A M D, quâ arcus quilibet A N in ratione quâvis P G ad P M per eandem semper constructionem dividitur geometricè, rationalis non est; sed si arcus A N et rectarum A P, P N relatio posset æquatione finitâ exprimi, eadem æquatio exhiberet quoque relationem abscissæ A P ad ordinatam P M, ac proindè curva A M D esset geometricè rationalis. Ergò rectificatio arcûs A N, æquatione finitâ generaliter exhiberi non potest. Q. e. d.

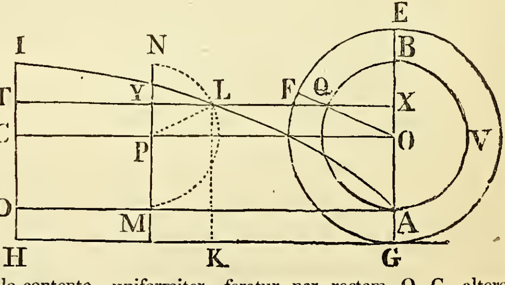
365. Hinc patet curvas omnes quarum descriptio pendet a quadraturâ vel rectificatione circuli et ovalium indefinitâ quales sunt spirales, quadratrices, trochoides esse geometricè irrationales. Ex demonstratis autem minimè sequitur circuli et ovalium quadraturam vel rectificationem determinatam seu quadraturam vel rectificationem totius ovalis aut portionis illius determinatæ impossibilem esse.

A Q occurrat L P si opus est producta in Q, junganturque S Q, O Q. Arcui EFG occurrat O Q in F, et in eandem O Q demittatur perpendiculum S R. ([n])



Area A P S, est ut area A Q S, id est, ut differentia inter sectorem O Q A et triangulum O Q S, sive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2}$ O Q × A Q et $\frac{1}{2}$ O Q × S R, hoc est, ob datam $\frac{1}{2}$ O Q, ut differentia inter arcum A Q et rectam S R, ideoque (cum ([p]) eædem sint datæ rationes S R ad sinum arcus A Q, O S ad O A, O A ad O G, A Q ad G F, et divisim ([q]) A Q — S R ad G F — sinu arcus A Q) ut G K differentia inter arcum G F et sinum arcus A Q. Q. e. d.

([n]) 366. *Area A P S est ut area A Q S* (251) sed area A Q S æqualis est *differentiæ inter sectorem O Q A et triangulum O Q S*, sector verò O Q A = $\frac{1}{2}$ O Q × A Q, et triangulum O Q S = $\frac{1}{2}$ O Q × S R. Ergò ob datam $\frac{1}{2}$ O Q, area A Q S adeóque et area A P S est ut differentia inter arcum A Q et rectam S R ex foco S in radium Q O perpendiculariter demissam.

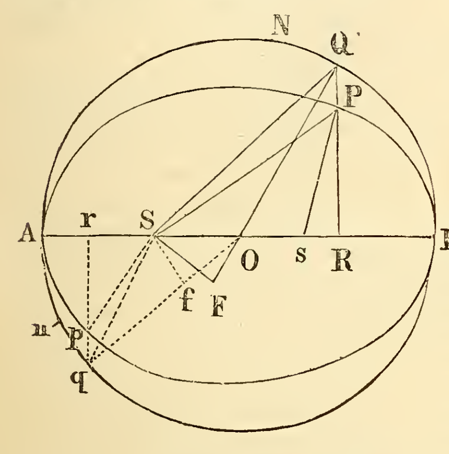


([p]) 367. Si ex puncto Q ad diametrum A B, demittatur perpendiculum seu sinus arcûs A Q, triangulum O S R, simile erit triangulo contento sub radio O Q sinu et cosinu arcûs A Q; unde erit S R ad sinum arcûs A Q, in datâ ratione O S ad O Q seu O A; sed (per constr.) O S : O A = O A : O G, et O A ad O G ut arcus A Q ad arcum G F, et divisim A Q — S R est ad G F — sinu arcûs A Q ut S R ad sinum arcûs A Q, sive in datâ ratione O S ad O A. Est igitur differentia inter arcum A Q, et rectam S R, adeóque et area A P S, ut differentia inter G F, et sinum arcûs A Q.

([q]) Quod autem sit G K æqualis differentiæ inter arcum G F et sinum arcûs A Q facile est demonstrare. Sit enim A L I dimidia trochois semirevolutione rotæ G F E descripta, erit G H, æqualis semiperipheriæ G F E, et H I æqualis et parallela rectæ G B; Per puncta A, O, L agantur rectæ A D, O C, X T parallelæ et æquales rectæ G H, et trochois descripta intelligatur duplici motu circuli A V B Q, altero quidem quo centrum O cum plano circuli uniformiter feratur per rectam O C, altero quo eodem tempore punctum A in circuli peripheriâ uniformiter percurrat semiperipheriam A V B, et centrum O, circuli mobilis A V B sit in P quando punctum A pervenit in L et jam percurrit arcum M L; Quoniam in motu æquabili spatia eodem tempore percursa sunt in datâ ratione, erit recta O C (hoc est semicircumferentia rotæ G F E) quam centrum O percurrit, ad semiperipheriam A V B, quam eodem tempore percurrit punctum A, ut O P ad arcum M L, sed semiperipheria G F E est quoque ad semiperipheriam A V B, ut arcus G F ad arcum A Q seu æqualem M L; est igitur G F = O P = Y X, ac proindè Y X — Q X = Y X — Y L = L X = G K = G F — Q X; est vero Q X sinus arcus A Q, ergo est G K æqualis differentiæ inter G F et sinum arcus A Q. Q. e. d.

Itaque area A P S, est ut G K, adeóque area A P S. est ad aream semiellipsis A P B

(vid. fig. Newt.) ut G K ad G H, et area A P S, est ad aream totius ellipseos ut G K ad 2 G H, seu tempus per arcum A P, est ad tempus unius revolutionis in Ellipsi ut G K ad perimetrum rotæ. Si ergò capiatur G K ad rotæ perimetrum ut est tempus per A P, ad tempus periodicum et cætera fiant ut in Newtonianâ constructione, erit P locus corporis in Ellipsi. Ex demonstratis quædam deducuntur corollaria.



368. *Corol.* 1. Planeta revolvatur in Ellipsi A P B vi tendente ad umbilicum S quem sol occupat, sitque linea apsidum, seu axis major A B, centrum O, ac proindè excentricitas seu distantia centri O a sole S, S O; B aphelion seu punctum in orbitâ a sole remotissimum, A perihelion sive punctum soli proximum, locus planetæ in P; centro O radio O B describatur circulus B Q A qui dicitur circulus excentricus, et per P agatur recta Q R axi A B normalis et circulo occurrens in Q, junganturque S P (quæ dicitur intervallum) et S Q. Ex demonstratis (251) manifestum est aream S Q B esse ad aream totius circuli ut est area S P B ad aream totius ellipseos. Quarè si area circuli B Q A rectâ S Q ex foco S ductâ in datâ ratione divisa fuerit, demisso ex puncto Q, perpendiculo Q R ellipsi occurrente in P, et junctâ S P, erit etiam area ellipseos in eâdem datâ ratione divisa. Ut itaque rectâ ex umbilico S ductâ abscindatur ellipseos area data, seu quæ sit ad aream totius Ellipseos in ratione datâ, sufficit rectam S Q, in circulo ducere quæ aream circuli in illâ datâ ratione secet.

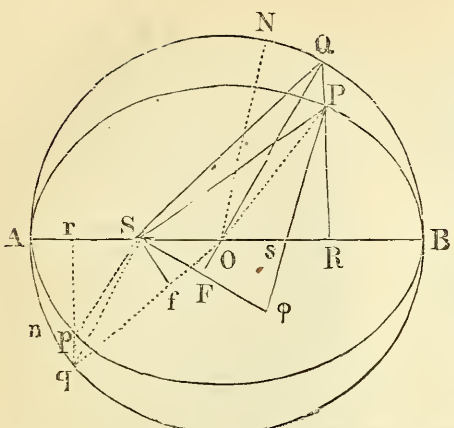
369. *Corol.* 2. In radium Q O si opus fuerit productum, ex umbilico S demittatur perpendiculum S F, et erit, (ex Dem.) area S Q B ut arcus B Q + recta S F si motus fiat ab aphelio B ad perihelium A per arcum B Q A, sed si planeta a perihelio A ad aphelion B feratur per A p B, erit area A S q, ut arcus A q — recta S f; hinc si capiatur arcus B N, vel A n, proportionalis tempori quo planeta percurrit arcum B P, vel A p, erit B Q + S F = B N, vel A q — S f = A n, adeóque S F = Q N, vel S f = q n. Et si datus fuerit arcus B Q vel A q, et priori addatur arcus N Q vel posteriori dematur arcus n q æqualis rectæ S F vel S f erit arcus B N proportionalis tempori quo planeta fertur per arcum B P, arcus A n proportionalis tempori per arcum A p, et arcus B A n proportionalis tempori per arcum B P A p.

370. Arcus B Q dicitur anomalia excentri, angulus B S P sub quo distantia planetæ ab aphelio B P ex sole videtur anomalia vera vel coæquata seu angulus ad Solem dicitur; tempus verò quo planeta ab aphelio B ad orbitæ suæ punctum quodlibet P digreditur, anomalia media sive simplex appellatur. Undè si tempus periodicum totâ circuli peripheriâ seu 360. gradibus exprimatur, erit arcus B N anomaliæ mediæ æqualis, seu anomaliam mediam exhibebit; cum sit B N ad totam peripheriam ut tempus per B P ad tempus periodicum (369.) Differentia inter anomaliam mediam et veram seu differentia inter angulum N O B et angulum P S B æquatio centri seu prostaphæresis vocatur.

371. Ex datâ anomaliâ verâ seu angulo B S P, facilè invenitur ei congrua anomalia media, seu arcus B N, quoniam enim sumpta recta S R pro sinu toto, est P R tangens anguli P S R, et Q R tangens anguli Q S R, atque P R ad Q R ut minor axis ellipseos ad majorem; si fiat ut axis minor ad majorem, ità tangens anguli dati P S B ad 4um., invenietur tangens anguli Q S B sive Q S O, ac proindè angulus Q S O; hinc datis in triangulo S Q O, duobus lateribus S O, O Q cum angulo Q S O, invenietur angulus S O Q, et illius ad duos rectos complementum Q O B seu anomalia excentri B Q dabitur. Fiat ut Q O, ad S O, ità 57°. 29578 (qui arcus est radio æqualis) ad quartum et dabitur arcus æqualis S O in gradibus gradûsque partibus decimalibus, dicatur hic arcus B, et quoniam est S O ad S F, ut O Q ad Q R, seu ut radius ad sinum anguli Q O B sive arcus B Q, fiat ut radius ad sinum arcûs B Q, ità S O sive arcus B, ad 4um., et dabitur in gradibus arcus in peripheriâ B Q A sumendus æqualis rectæ S F; cumque sit recta S F æqualis arcui Q N, (369) dabitur arcus Q N, et proindè B N anomalia media, atque hinc facile est anomaliarum et æquationum centri tabulas construere.

372. In orbitis planetarum non admodùm excentricis, datâ anomaliâ mediâ facile per approximationem duabus methodis sequentibus invenitur anomalia coæquata.

Methodus Wardi. Ad secundum focum s, *(vid. fig. prim. pag. seq.)* fiat angulus B s P, æqualis anomaliæ mediæ, jungatur SP, erit angulus PSB, anomalia vera, quod quidem ipse Wardus assumebat ut verum ex Hypothesi merâ, sed quod etiam ex suppositione areas esse temporibus proportionales deducitur, saltem quam proximè: est enim angulus N O B sive anomalia media, æqualis an-

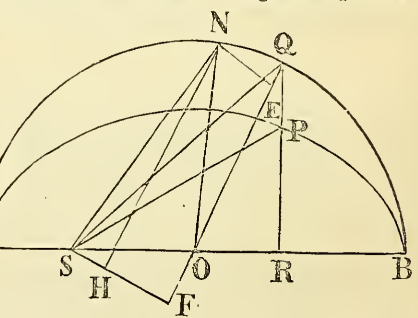


gulis Q O B et N O Q, et Q O B sive anomalia excentri, est æqualis angulis Q S B (sive P S B neglecto Q S P) et S Q O, ergo angulus N O B est æqualis angulis P S B, S Q O, N O Q quibus etiam quam proximè æqualis est angulus P s B, nam coëuntibus focis S et s cum centro O, puncta Q et P etiam coëunt et angulus S P O angulo S Q O est quam proximè æqualis; pariter ut Q O proxime coincidit cum P O fingatur S F esse perpendicularem in ipsam P O, et produci donec cum P s producto in ϕ concurrat, erunt quam proximè O F, s ϕ parallelæ, ideoque ob æquales S O, O s, æquales erunt S F et F ϕ, S P et P ϕ, ut et anguli S P F et F P ϕ sive O P s, sed ob S F æqualem Q N et S Q sive S P prope æqualem O Q est angulus S P F sive O P s propè æqualis angulo N O Q: ergo totus angulus S P s est æqualis angulis S Q O et N O Q simul sumptis, et cum angulus P s B sit æqualis angulis P S B et S P s, æqualis prope erit angulis P S B, S Q O, N O Q sicut angulus N O B, ergo angulus P s B est quam proximè anomalia media cujus anomalia coæquata est P S B.

Dato autem angulo B s P, angulum P S B, ità quærit Wardus. Producatur s P, ad G, ut sit P G = P S, et jungatur S G, erit s G = S P + P s = A B (ex nat. Ellips.) adeóque in triangulo G s S, datis lateribus G s, S s, angulo S s G dantur anguli S G s (= G S P, ob S P = P G) et G S s, undè cognoscetur angulus P S s sive P S B æqualis nempe differentiæ angulorum G S s, G S P, quarè in triangulo S P s, datis angulis duobus P s S, P S s, angulo S P s, qui est summa angulorum G S P, S G P, et latere S s, invenietur latus S P seu intervallum.

Ubi excentricitas paulo major est. Wardi methodum ità corrigit Bulliadus. Per punctum P Wardi methodo determinatum agatur Q R axi A B normalis, et excentrico occurrens in Q, jungaturque s Q, orbitam secans in p, erit p, locus planetæ accuratior.

Methodus Cassini. Omnibus positis (ut suprà num. 369.) jungantur S N, O N et agantur N H rectæ Q F parallela et lineæ S F occurrens in H, et N E parallela S F rectæ Q F occurrens in E, erit N E = H F sinus arcûs N Q; cumque sit S F = N Q (369) erit S H differentia inter arcum N Q et ipsius sinum N E; si excentricitas S O exigua fuerit, erit fere

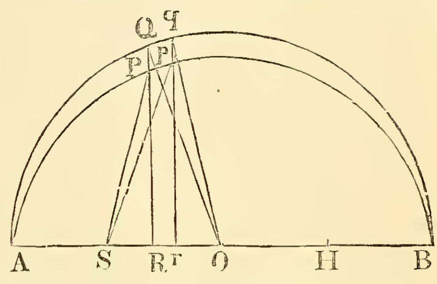


N Q = N E = H F = S F et proindè S N parallela F Q, adeóque angulus S N O, æqualis angulo N O Q; Porrò in triangulo S N O, datis duobus lateribus N O, S O, et angulo intercepto S O N (complemento nempe anomaliæ mediæ datæ ad duos rectos) invenietur angulus S N O seu N O Q, et ipsius mensura nempè arcus N Q; et inde innotescet anomalia excentri B Q; Hinc in triangulo S Q O, datis lateribus S O, O Q et angulo S O Q, invenietur angulus Q S O, et sumptâ S R pro sinu toto, erit Q R ad P R seu axis major ad minorem, ut tangens anguli dati Q S B ad tangentem anguli ad solem P S B, qui ità obtinebitur.

Hæc satis sunt in orbitis planetarum non valde excentricis, sed in orbitis Mercurii et Martis quarum major est excentricitas ità invenitur arcus N Q. Ex datis in triangulo S N O, lateribus SO, NO, et angulo SON, inveniuntur latus S N, et angulus S N O; deindè quæritur in partibus decimalibus radii O N differentia

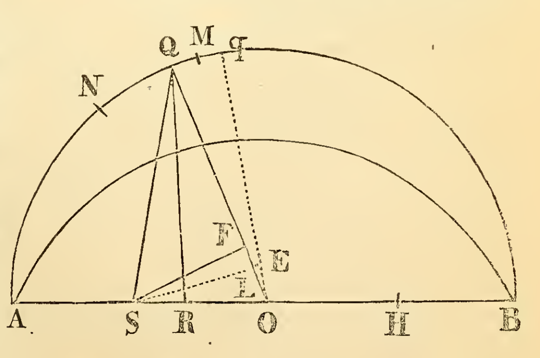
Scholium.

(r) Cæterum, cum difficilis sit hujus curvæ descriptio, præstat solutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui sit ad angulum graduum 57. 29578, quem arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia S H ad ellipseos diametrum A B; tum etiam longitudo quædam L, quæ sit ad radium in eâdem ratione inversè. Quibus semel inventis, problema deinceps confit per sequentem analysin. Per constructionem quamvis, vel utcunque conjecturam faciendo, cognoscatur corporis locus P prox-

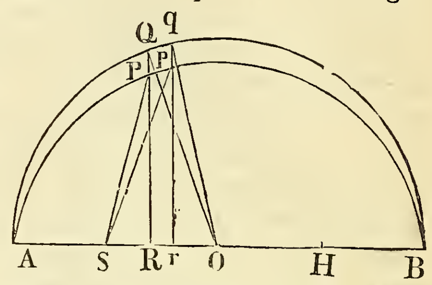


inter arcum qui metitur angulum S N O, et ejus sinum quæ citrà errorem sensibilem supponi potest æqualis rectæ S H, seu differentiæ inter arcum N Q anguli N O Q mensuram et ejus sinum N E. Sitque ille decimalium numerus A. Invenietur numerus decimalium radii S N quem eadem linea S H continet dicendo ut S N ad N O sic A ad numerum quæsitum B, et quoniam in triangulo rectangulo S H N est S N ad sinum totum ut S H sive B ad sinum anguli S N H invenietur ergò angulus S N H, ex angulo invento S N O subducendus, ut relinquatur angulus H N O, seu æqualis N O Q, sive arcus N Q.

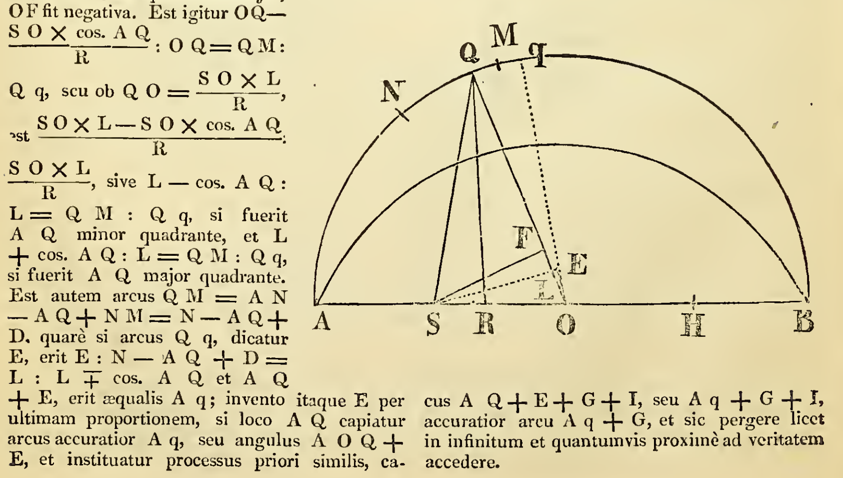
(r) 573. Sit axis major ellipseos A B, centrum O, umbilici S et H, et feratur planeta a perihelio A ad aphelium B radio A O describatur circulus excentricus A Q B; quoniam radius circuli æqualis est arcui graduum 57.29578, si fiat A B ad S H seu Q O ad S O, ut arcus vel angulus 57.29578, ad arcum B, erit B arcus æqualis rectæ S O. Cognoscitur arcus A N tempori proportionalis, et dicatur N; deindè per methodum Wardi aut Cassini vel aliâ ratione inveniatur arcus A Q, proximè æqualis anomaliæ excentri a perihelio A sumptæ, erit arcus N Q æqualis rectæ S F ex umbilico S in radium Q O perpendiculariter demissæ (569): fiat ut S H ad A B sive ut S O ad Q O, ità radius R ad longitudinem quandam L, et erit $Q O = \frac{S O \times L}{R}$, et quoniam triangulum S O F, simile est triangulo Q O R erit Q O : Q R = S O : S F, hoc est, radius ad sinum anguli Q O A, ut arcus B ad alium arcum D qui erit æqualis rectæ S F: Si itaque arcus A Q rectè assumptus fuisset foret arcus D æqualis arcui N Q (569): Si verò arcus A Q accuratus non est, capiatur N M = D, punctum M cadet suprà vel infra punctum Q. Sit anomalia excentri accurata (quæ est incognita) A q, et in radium q O cadat perpendiculum S E erit æquale N q (569) undè S E — S F, hoc est ferè L E = N q — N M = M q = Q q — Q M. Quoniam verò angulus Q O q, parvus est, erit O E : O q sive O Q = L E : Q q = Q q — Q M : Q q. Undè O Q — O E : O Q = Q M : Q q. Sed O E, est ferè æqualis O F, ergò O Q — O F : O Q = Q M : Q q. Porrò O Q, est ad R O, seu radius ad cosinum anguli A O Q, ut S O, ad O F



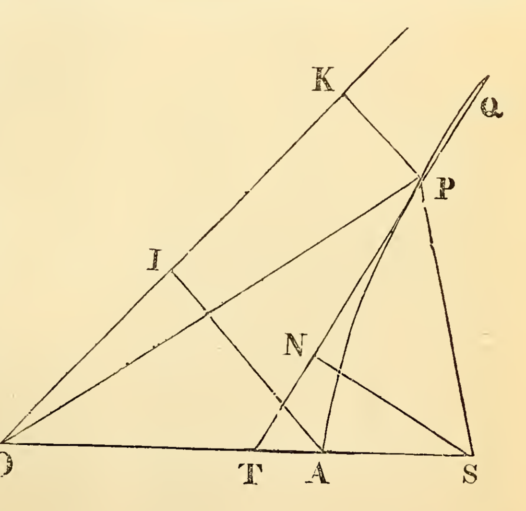
imus vero ejus loco p. Demissâque ad axem ellipseos ordinatim applicatâ P R, ex proportione diametrorum ellipseos, dabitur circuli circumscripti A Q B ordinatim applicata R Q, quæ sinus est anguli A O Q existente A O radio, quæque ellipsin secat in P. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoscatur etiam angulus tempori proportionalis, id est, qui sit ad quatuor rectos, ut est tempus, quo corpus descripsit arcum A p, ad tempus revolutionis unius in ellipsi. Sit angulus iste N. Tum capiatur et angulus D ad angulum B, ut est sinus iste anguli A O Q ad radium, et angulus E ad angulum N — A O Q + D, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli A O Q diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut est sinus anguli



adeóque O F $= \frac{S O \times \cos. A Q}{R}$. Crescentibus A N, A Q, Q R, decrescit R O, et evanescit ubi A Q est circuli quadrans, ac tandem fit negativa ubi A Q quadrante major est. Quarè cum sit + O Q : + S O = R O : O F, O F idem signum + vel — habere debet cum R O, adeóque si angulus A O Q, seu arcus A Q est quadrante minor, O F est quantitas affirmativa; si A Q quadrans est, O F evanescit; si A Q est quadrante major, O F fit negativa. Est igitur O Q — $\frac{S O \times \cos. A Q}{R}$: O Q = Q M : Q q, seu ob Q O $= \frac{S O \times L}{R}$, est $\frac{S O \times L - S O \times \cos. A Q}{R}$: $\frac{S O \times L}{R}$, sive L — cos. A Q : L = Q M : Q q, si fuerit A Q minor quadrante, et L + cos. A Q : L = Q M : Q q, si fuerit A Q major quadrante. Est autem arcus Q M = A N — A Q + N M = N — A Q + D. quarè si arcus Q q, dicatur E, erit E : N — A Q + D = L : L ∓ cos. A Q et A Q + E, erit æqualis A q; invento itaque E per ultimam proportionem, si loco A Q capiatur arcus accuratior A q, seu angulus A O Q + E, et instituatur processus priori similis, capiendo arcum F, ad arcum B, ut est sinus arcûs A Q + E seu A q ad radium, et arcum G ad arcum N — A q + F, seu, N — A Q — E + F, ut est longitudo L, ad longitudinem eandem cosinu anguli A O q seu A O·Q + E diminutam ubi angulus A O q recto minor est, auctam ubi major, erit A Q + E + G, seu A q + G, arcus magis verus, et similiter si loco arcûs A q, usurpetur arcus A q + G et idem repetatur processus, invenietur novus arcus A Q + E + G + I, seu A q + G + I, accuratior arcu A q + G, et sic pergere licet in infinitum et quantumvis proximè ad veritatem accedere.



A O Q + E ad radium, tum angulus G ad angulum N — A O Q — E + F ut est longitudo L ad longitudinem eandem cosinu anguli A O Q + E diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertiâ vice capiatur angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli A O Q + E + G ad radium; et angulus I ad angulum N — A O Q — E — G + H, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli A O Q + E + G diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus A O q æqualis angulo A O Q + E + G + I + &c. Et (s) ex cosinu ejus O r et ordinata p r, quæ est ad sinum ejus q r ut ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus p. (t) Si quando angulus N — A O Q + D negativus est, debet signum + ipsius E ubique mutari in —, et signum — in +. Idem intelligendum est de signis ipsorum G et I, ubi anguli N — A O Q — E + F, et N — A O Q — E — G + H negativi prodeunt. Convergit autem series infinita A O Q + E + G + I + &c. quam celerrimè, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum E. Et fundatur calculus in hoc theoremate, quod area A P S sit ut differentia inter arcum A Q et rectam ab umbilico S in radium O Q perpendiculariter demissam.



Non dissimili calculo conficitur problema in hyperbolâ. Sit ejus centrum O, vertex A, umbilicus S et asymptotos O K. Cognoscatur quantitas areæ abscindendæ tempori proportionalis. Sit ea A, et fiat conjectura de positione rectæ S P, quæ aream A P S

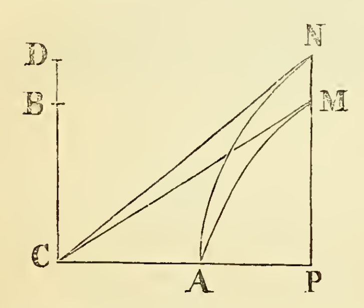
(s) * *Ex cosinu O r.* Est enim radius ad cosinum anguli inventi A O q, ut q O ad O r, invenientur ergò punctum r, et ordinata q r. Deinde si fiat ut axis major ad minorem, ità q r ad p r, habebitur locus corporis p.

(t) * Si quandò angulus N — A Q + D, seu arcus Q M, (vid. fig. Not.) negativus est, seu si punctum M, cadit infrà punctum Q, debet signum ipsius + E, ubique mutari in —, et signum — in +. Quoniam enim suprà invenimus E : N — A Q + D = L : L ∓ cos. A Q, si fuerit arcus N — A Q + D, negativus, debet quoque arcus E esse negativus, et arcus A q erit A Q — E. Idem intelligendum est de signis ipsorum G et I, &c. ob eandem rationem.

abscindat veræ proximam. Jungatur O P, et ab A et P ad asymptoton agantur A I, P K asymptoto alteri parallelæ, et ([a]) per tabulam loga-

([a]) 374. Diximus superius (Theor. IV. de Hyp. p. 94.) aream inter asymptotum, Hyperbolam, ordinatam in vertice erectam et aliam ordinatam comprehensam, esse Logarithmum abscissæ, idem verò, more veterum demonstrare et ad hanc Propositionem propius accommodare hic non pigebit.

Lemma. Sint duæ hyperbolæ A M, A N quarum centrum C, semidiameter communis A C, semidiametri conjugatæ C B, C D, per punctum quodvis P agatur P M N ordinatim ad diametrum C P applicata, hyperbolis occurrens in punctis M et N, junganturque C M, C N spatia hyperbolica A M P, A N P et sectores A M C, A N C sunt ad invicem in ratione semidiametrorum conjugatarum C B, C D, vel etiam ordinatarum P M, P N. Nam ex naturâ hyperbolæ (Theor. II. de Hyp.) $PM^2 : CB^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$, et $PN^2 : CD^2 = CP - CA^2 : CA^2$, undè $PM^2 :$



$CB^2 = PN^2 : CD^2$, et $PM^2 : PN^2 = CB^2 : CD^2$, ac $PM : PN = CB : CD$, cùmque idem semper eveniat quâcumque in parte cadat ordinata P M N, liquet spatia hyperbolica A M P, A N P esse inter se ut C B ad C D, vel P M ad P N, sed triangula C P M, C P N sunt ad invicem ut P M ad P N vel C B ad C D; ergò $CPM - AMP : CNP - ANP = AMC : ANC = PM : PN = CB : CD$. Q. e. d.

375. *Corol.* Si duæ semidiametri conjugatæ C A, C D fuerint æquales, hyperbola A N erit æquilatera; quarè inventâ quadraturâ spatiorum hyperbolicorum A N P vel A N C in hyperbolis æquilateris, habebitur etiam quadratura spatiorum hyperbolicorum A M P vel A M C in aliis quibusvis hyperbolis.

376. *Lemma.* Si super hyperbolæ E B D F asymptoto C N sumantur quatuor partes C G, C H, C K, C L, ut sit C G : C H = C K : C L; ducantur autem rectæ G F, H D, K B, L E alteri asymptoto C P parallelæ, et hyperbolæ occurrentes in punctis F, D, B, E, junganturque semidiametri C F, C D, C B, C E, sectores hyperbolici C B E, C D F erunt æquales. Agantur enim rectæ B D, E F asymptotis occurrentes in punctis M, O, N, P, et ob parallelas K B, H D, C O erit M B : M K = D O : C H, et ob parallelas L E, G F, C P erit etiam N E : N L = F P : C G; sed, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos (Lem. I. de Conic. pag. 87.) M B = D O, et N E = F P, undè M K = C H et N L = C G; Porrò C G : C H = C K : C L (per hyp.) hoc est, N L : M K = C K : C L = L E : K B, ex naturâ hyperbolæ intrà asymptotos (Theor. IV. de Hyp. p. 94.) rectæ igitur N E, M B, hoc est, E F, B D erunt parallelæ, ac proindè, linea per earum medium X, Z ducta erit Diameter, transibitque per centrum C; (Lem. IV. de Conic. p. 90.) unde facile deducitur trapezia M X Z N, O X Z P fore æqualia ut et areæ mixtilineæ B X Z E, D X Z F, unde singulis ex correspondenti trapezio substractis relinquentur areæ M B E N et O D F P æquales, quibus addantur Triangula M B C, O D C, æqualia ob bases æquales M B, O D in eâdem linea positas, et ob vertices ad idem punctum C concurrentes, erunt æquales areæ C M N E B C, C O P F D C, ex quibus denique substractis Triangulis N E C, P F C quæ æqualia sunt ob bases æquales N E, P F in eâdem lineâ positas, et ob vertices ad idem punctum C concurrentes, supererunt sectores hyperbolici C B E, C D F inter se æquales. Q. e. d

377. *Lemma.* Si per puncta quævis asymptoti C L, agantur duæ rectæ G F, H D alteri asymptoto C P parallelæ, et hyperbolæ occurrentes in F et D, junganturque semidiametri C F, C D, trapezium hyperbolicum G F D H æquatur sectori C F D. Nam, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos, triangula C H D, C G F, æquantur ob æquales angulos G et H et latera reciproca (per Theor. IV. de Hyp. p. 94.) adeóque sublato communi triangulo C G A, residua spatia G A D H, C A F erunt æqualia, quibus si addatur idem spatium hyperbolicum D A F, summæ G F D H, C F D erunt æquales. Q. e. d.

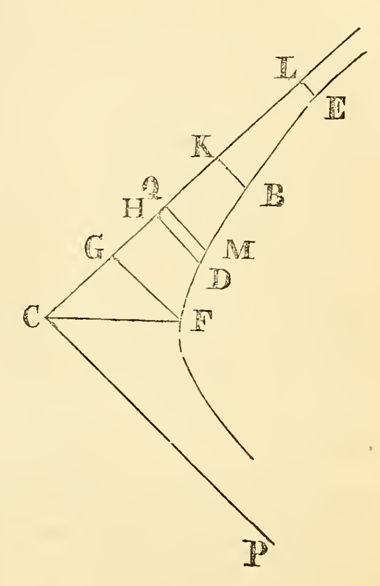
378. *Corol.* 1. Hinc iisdem positis quæ (num. 376.) trapezia hyperbolica G F D H, K B E L sunt æqualia.

379. *Corol.* 2. Si asymptoti partes C G, C H, C K fuerint continuè proportionales, duo sectores C F D, C D B et duo trapezia hyperbolica G F D H, H D B K, æquantur. Eâdem enim ratione quâ num. 376. ostendetur rectam B F tangenti per punctum D ductæ esse parallelam. Undè si super asymptoto C L sumantur partes quotcumque C G, C H, C K, C L, &c. in continuâ progressione geometricâ, et ex punctis G, H, K, L, &c. agantur rectæ G F, H D, K B, L E, &c. alteri asymptoto parallelæ, trapezia hyperbolica G F D H, H D B K, K B E L erunt æqualia; et vicissim si trapezia illa æquantur, erunt rectæ C G, C H, C K, C L, &c. in continuâ progressione geometricâ.

380. *Corol.* 3. Sit hyperbola F D B E æquilatera, cujus centrum C, asymptotus C L, semiaxis transversus C F, capiantur in asymptoto partes C G, C H, C K, C L, &c. in continuâ progressione geometricâ, aganturque G F, H D, K B, L E, &c., alteri asymptoto C P parallelæ, trapezia hyperbolica G F D H, H D B K, K B E L, &c. erunt æqualia; quarè eorum summæ, scilicet o, G F D H, G F B K, G F E L, &c. erunt in continuâ progressione arithmeticâ. Si itaque C G sit unitas, C H, C K, C L, &c. numeri, erunt o, G F D H, G F B K, G F E L, illorum numerorum logarithmi.

381. *Corol.* 4. Itaque per logarithmorum hyperbolicorum tabulas, inveniri possunt trapeziorum quorumvis G F D H, B G F K, &c. areæ; Sumptâ enim C G pro unitate, quærantur in numeris valores rectarum C H, C K, &c. et horum numerorum logarithmi exhibebunt trapezia hyperbolica G F D H, G F B K, &c.

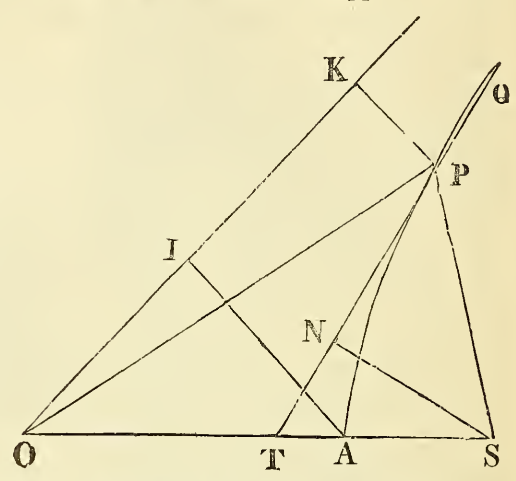
382. *Corol.* 5. Sit C G $=1$, G H $=$ x, C H $=$ $1+x$, H D $=$ y, et erit, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos $\overline{1+x}\times y=1$, adeóque $y=\frac{1}{1+x}$, et trapezii G F D H elementum D H Q M seu $y\,dx=\frac{dx}{1+x}$; si igitur L. $\overline{1+x}$, denotet logarithmum numeri $1+x$, erit L.$(1+x)=$ G F D H, et elementum logarithmi seu d. L. $\overline{1+x}=y\,dx=\frac{dx}{1+x}$. Et similiter elementum logarithmi numeri cujusvis z seu d. L. $z=\frac{dz}{z}$.



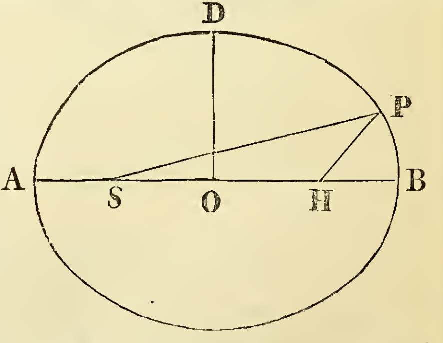
383. *Corol.* 6. Cum sit $y=\frac{1}{1+x}$, si peragatur divisio, erit $y=1-x+x^2-x^3+x^4$, &c. in infinitum, ac proindè $y\,dx=dx-x\,dx+x^2\,dx-x^3\,dx$, &c. in infinitum, et sumptis utrinque fluentibus S. y d x $=$ G F H D $=$ L.$\overline{1+x}=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5$, &c. in infinitum. Si autem numerus propositus sit unitate minor, seu $1-x$, eodem modo invenietur ipsius logarithmus S. $-y\,dx=$ L.$\overline{1-x}=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}\times x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5$, &c.

384. *Scholium.* Observandum est logarithmos hyperbolicos. Neperi a logarithmis Briggii quibus vulgò utimur differre; verùm cum hyperbolici sint semper ad Briggianos seu vulgares in eâdem constanti ratione, nimirum logarithmus hyperbolicus numeri denarii 2. 302585 est ad logarithmum Briggianum numeri denarii 1. 000000, ut quilibet logarithmus hyperbolicus ad ejusdem numeri logarithmum Briggianum, facile est hyperbolicos ad Briggianos, et contrà Briggianos ad hyperbolicos reducere, adeóque hyperbolarum quadraturam per logarithmos etiam vulgares invenire. Si dividatur 1. 000000, per 2. 302585, &c., quotiens 0. 4342948, &c. per logarithmum quemvis hyperbolicum multiplicatus, dabit logarithmum vulgarem, et vice-

rithmorum dabitur area A I K P, (b) eique æqualis area OPA, quæ subducta de triangulo O P S relinquet aream abscissam A P S. Applicando areæ abscindendæ A et abscissæ A P S differentiam duplam 2 A P S — 2 A vel 2 A — 2 A P S ad lineam S N, quæ ab umbilico S in tangentem T P perpendicularis est, (c) orietur longitudo chordæ P Q. Inscribatur autem chorda illa P Q inter A et P, si area abscissa APS major sit areâ abscindendâ A, secus ad puncti P contrarias partes; et punctum Q erit locus corporis accuratior. Et computatione repetitâ invenietur idem accuratior in perpetuum.



Atque his calculis problema generaliter confit analyticè. Verùm usibus astronomicis accommodatior est calculus particularis qui sequitur. Existentibus A O, O B, O D semiaxibus ellipseos, et L ipsius latere recto, ac D differentia inter semiaxem minorem O D et lateris recti semissem $\frac{1}{2}$ L; quære tum angulum Y, cujus sinus sit ad radium ut est rectangulum sub differentia illa D, et semisumma axium A O + O D ad quadratum axis majoris A B; tum angulum Z, cujus sinus sit ad radium ut est duplum rectangulum sub umbilicorum distantiâ S H et differentiâ illâ D ad triplum quadratum semiaxis majoris A O. His angulis semel inventis, locus corporis sic dein-



versâ, si logarithmus quilibet vulgaris per 0. 43429481 et dividatur, quotiens erit logarithmus hyperbolicus.

* *Et per tabulam.* (381. 384).

* (b) *Eique æqualis area O P A* (377).

* (c) *Orietur longitudo.* Nam cum arcus P Q exiguus sit, accipi potest pro chordâ P Q seu parte P Q tangentis T P productæ; undè triangulum rectilineum S Q P, quam proximè æquatur differentiæ spatiorum hyperbolicorum A P S, A S Q seu A; sed triangulum rectilineum $SQP = \frac{PQ \times SN}{2}$, ergò $\frac{PQ \times SN}{2} = A - APS$, vel $= APS - A$, ac proindè $PQ = \frac{2A - 2APS}{SN}$ vel $= \frac{2APS - 2A}{SN}$, prout area A major vel minor est areâ A P S.

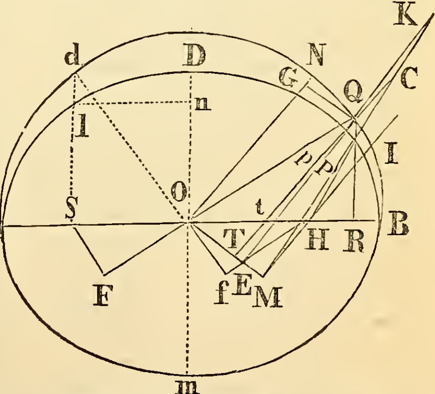
ceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus B P descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; et angulum V, primam medii motus æquationem, ad angulum Y, æquationem maximam primam, ut est sinus dupli anguli T ad radium; atque angulum X, æquationem secundam, ad angulum Z, æquationem maximam secundam, ut est cubus sinus anguli T ad cubum radii. Angulorum T, V, X vel summæ T + X + V, si angulus T recto minor est, vel differentiæ T + X — V, si is recto major est rectisque duobus minor, æqualem cape angulum B H P, motum medium æquatum; et si H P occurrat ellipsi in P, actâ S P abscindet aream B S P tempori proportionalem quam proximè. Hæc praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V et X, in minutis secundis, si placet, positorum, figuras duas tresve primas invenire sufficit. Sed et satis accurata est ad theoriam planetarum. Nam in orbe vel Martis ipsius, cujus æquatio centri maxima est graduum decem, error vix superabit minutum unum secundum. Invento autem angulo motus medii æquati B H P, angulus veri motus B S P et distantia S P in promptu sunt per methodum notissimam. ([d])

Hactenus de motu corporum in lineis curvis. Fieri autem potest ut mobile rectâ descendat vel rectâ ascendat, et quæ ad istiusmodi motus spectant, pergo jam exponere.

([d]) 385. Ellipseos quam planeta describit sit centrum O, umbilici S, H, et semiaxes O B, O D; Sole in S posito umbilicus alter H erit ferè centrum medii motûs planetæ, (372) id est, si ex umbilico H agatur linea H I, quæ cum lineâ apsidum O B, constituat angulum I H B anomaliæ mediæ æqualem, recta illa H I, ferè transibit per locum planetæ in orbitâ elliptica parum excentricâ revolventis, transeat autem H P, per locum verum planetæ P et erit angulus P H I, anomaliæ mediæ I H B, addendus (vel detrahendus) ut motus medius æquatus B H P habeatur, et angulus P H I aut ipsi æquipollens dicetur æquatio tota medii motus, quam in duas partes dividit Newtonus, quarum unam primam æquationem et alteram secundam æquationem vocat; determinat singulas in iis punctis ubi maximæ sunt, et rationem maximæ æquationis ad alium in dato quovis puncto adhibendam indicat.

Præcedentes methodos illustrarunt demonstrationibus et exemplis Keillius et Gregorius, hanc non minus ingeniosam intactam reliquerunt, vestigiis Newtoni insistere conabimur, et aperire quibus fundamentis nitatur hæc approximatio.

386. Producatur I H in M donec occurrat perpendiculo O M, a centro O in ipsam I H demisso jungaturque M P, erit angulus P H I æqualis angulis P M H et M P H; quorum sinus erunt inter se sicut P H ad M H; sed cum M H sit semper minor O H distantia centri a foco, sitque P H distantia foci H ad punctum P ellipseos, exigua erit M H respectu H P, ideóque minimus est angulus M P H respectu anguli

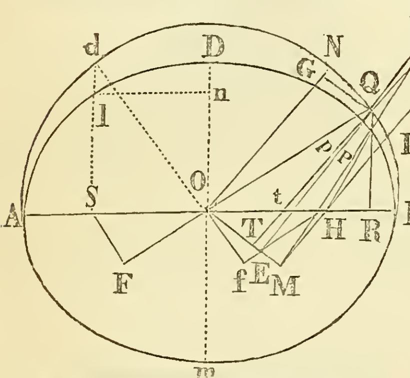


P M H, illum itaque negligit, et hunc solum P M H ut æquationem totam considerat Newtonus.

Ducto verò ut superius expositum est circulo B Q N A super magnum axem ellipseos A B, et ex P loco planetæ ductâ P R perpendiculari in eum magnum axem eâque P R productâ donec secet circulum B Q N A in Q; ducatur T Q perpendicularis in O M (ideóque pa-

rallela lineæ I M) et producatur ita ut secet in C lineam M P etiam productam, erit (per 29. 1. El.) angulus T C M æqualis angulo C M H sive P M H, eritque T C M æquatio totalis motus medii: ducatur pariter Q O quæ producatur in F donec secetur a perpendiculo S F a foco S in quo Sol versatur ducto, sumaturque arcus Q N æqualis S F et ducatur N O, erit N O B anomalia media (369) et erit N O parallela lineis I M, T Q; sit Q G perpendicularis ducta ex Q in O N, erit Q G sinus arcus Q N, et erit O T illi sinui æqualis.

Ducatur denique in O, O f, perpendicularis in lineam O Q, ideóque parallela lineæ S F, et ex H in illam ducatur perpendiculum H f, triangulum O f H æquale erit triangulo S O F, ob lineas æquales S O, O H, angulos rectos



in F et f, et angulos æquales in S et O ob parallelas S F, O f; erit ergo O f = S F = Q N; concurrant lineæ f H, O M in E, et ex E ducatur per Q linea E Q secans M C (productam si necesse sit) in K, angulus T C M erit æqualis angulis E K M et K Q C sive T Q E (per 32. 1. Elem.) sic ergo Newtonus dividit æquationem totam T C M in angulos E K M, T Q E, quos separatim determinat.

Prima ergo æquatio determinatur, ductâ H M ex foco quæ faciat cum axi angulum anomaliæ mediæ æqualem, et ductâ ex centro lineâ O M in illam perpendiculari, tum etiam ductâ ex foco lineâ H f quæ faciat cum axi angulum anomaliæ excentri æqualem, secetque lineam O M (productam si necesse sit) in E; ex M ducatur linea per locum planetæ P et ex E ducatur linea per Q punctum correspondens in circulo, et concurrant illæ lineæ in K, et angulus E K M est prima æquatio; et si sit K M radius, M E est sinus illius æquationis.

Ut ergo determinetur M E, observandum angulum M H E esse æqualem angulo N O Q, cum sit N O parallela M H et Q O parallela E H per constructionem, sumpto verò M H pro radio erit M E tangens ejus anguli M H E quæ in exiguo angulo pro arcu ipso sumi potest, ideóque radius O N sive O B erit ad arcum N Q ut M H ad lineam M E; dicatur autem angulus anomaliæ mediæ T erit (per construct. H O M ejus complementum ad duos rectos, fiatque ut radius (qui in toto hoc calculo sumitur æqualis O B) ad Cos. T sic O H ad M H = $\frac{OH \times \text{Cos. } T}{OB}$; præterea arcus N Q = S F, et est O Q (sive O B) ad Q R ut est O S (sive O H) ad S F ideóque S F sive N Q = $\frac{OH \times QR}{OB}$ unde proportio superius inventa O B : N Q = M H : M E in hanc vertitur O B : $\frac{OH \times QR}{OB} = \frac{OH \times \text{Cos. } T}{OB}$: M E = $\frac{OH^2 \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^3}$ sive quia (per nat. Ellips.) $OH^2 = OB^2 - OD^2 = \overline{OB + OD} \times \overline{OB - OD}$ (per 6. II. Elem.) est M E $= \frac{\overline{OB+OD} \times \overline{OB-OD} \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^3}$

Radius verò K M hac ratione determinatur: ducatur ex P linea P p, perpendicularis in T Q ac proinde parallela lineæ M E, ejus portio terminata in linea E K est quidem ita proximè æqualis ipsi P p, ut P p pro illa sumi possit, est verò ob parallelas M E : P p = K M : K P.

Facile autem determinatur ratio M E ad P p, nam angulus T Q R est complementum anomaliæ mediæ Q t R, unde est, radius O B, ad Cos. T sicut Q P ad P p = $\frac{\text{Cos. } T}{OB} \times QP$, est autem Q P differentia inter Q R et P R, est verò Q R ad P R ut semiaxis major O B ad minorem O D, est ergo P R = $\frac{OD \times QR}{OB}$ et Q P = Q R — $\frac{OD \times QR}{OB} = \frac{QR}{OB} \times \overline{OB - OD}$, itaque Pp = $\frac{\text{Cos. } T \times QR}{OB^2} \times \overline{OB - OD}$, ideóque M E ad Pp sicut $\frac{\overline{OB + OD} \times \overline{OB - OD} \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^3}$ ad $\frac{\overline{OB - OD} \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^2}$ utroque autem termino multiplicato per $\frac{OB^3}{\overline{OB - OD} \times QR \times \text{Cos. } T}$ superest ratio O B + O D ad O B, æqualis rationi M E ad P p sive K M ad K P, unde convertendo est O D : O B + O D = K M — K P (M P) : K M; sive quia O B + O D est ferè 2 O B, est O D : 2 O B = M P : K M.

Erit autem M P proximè æqualis lineæ T p, hæc verò lineæ Q t, cum enim parva sit excentricitas, Q p compensat ferè partem neglectam T t, est verò Q t parallela N O, ideóque est Q t R æqualis anomaliæ mediæ, ergo est sinus anomaliæ mediæ ad radium ut Q R ad Q t, sive sin. T : O B = Q R : Q t = $\frac{OB \times QR}{\text{sin. } T}$ = M P unde cum sit O D ad 2 O B sicut M P sive $\frac{OB \times QR}{\text{sin. } T}$ ad K M erit K M $= \frac{2\,OB^2 \times QR}{OD \times \text{sin. } T}$, sed inventa erat M E

$= \frac{\overline{OB+OD} \times \overline{OB-OD} \times QR \times \text{Cos. } T}{OB^3}$ multiplica ergo valores K M et M E per $\frac{2 \text{ sin. } T \times OD}{QR}$ eritque K M ad M E sive radius ad sinum anguli K ut 4 O B² (sive A B²) ad $\frac{2OD \times \overline{OB+OD} \times \overline{OB-OD} \times \text{sin. } T \times \text{Cos. } T}{OB^3}$

et cum sit semi latus rectum $\frac{1}{2} L = \frac{OD^2}{OB}$, erit $OD - \frac{1}{2}L = OD - \frac{OD^2}{OB} = \frac{OD}{OB} \times \overline{OB-OD}$, vocetur D ea differentia semiaxis minoris et semilateris recti, et substituto D loco $\frac{OD}{OB} \times \overline{OB-OD}$ erit Radius ad sinum anguli K ut A B² ad $D \times \overline{OB+OD} \times \frac{2 \text{ Cos. } T \times \text{sin. } T}{OB^2}$.

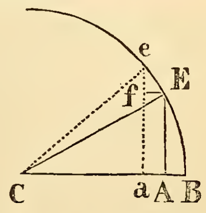
587. Ergo in quovis gradu anomaliæ mediæ erit, est semper Radius ad A B² ut sinus anguli K, ad $D \times \frac{OB+OD}{OB} \times \frac{2 \text{ Cos. } T \times \text{sin. } T}{OB}$ cum verò ratio Radii ad A B² sit constans, hæc altera etiam erit constans, ideoque in omni casu sinus anguli K ubi anomalia media est T, erit ad ejus sinum ubi anomalia media erit t, ut $D \times \overline{OB+OD} \times \frac{2 \text{ Cos. } T \text{ sin. } T}{OB^2}$ ad $D \times \overline{OB+OD} \times \frac{2 \text{ Cos. } t \times \text{sin. } t}{OB^2}$ sive multiplicando utrumque terminum per constantes $\frac{OB}{D \times \overline{OB+OD}}$ ut $\frac{2 \text{ Cos. } T \times \text{sin. } T}{OB}$ ad $\frac{2 \text{ Cos. } t \text{ sin. } t}{OB}$ sed constat ex Trigonometricis, quod duplum facti sinus anguli dati cujusvis per ejus Cosinum, divisum per radium, est æquale sinui Anguli qui est duplus ejus anguli dati, ergo sinus angulorum K in diversis anomaliæ mediæ gradibus sunt inter se ut sinus dupli anguli anomaliæ. Unde sequitur, quod cum duplum anomaliæ mediæ 45. graduum sit 90. ejusque sinus sit æqualis Radio seu sinui totali, angulus K erit maximus in 45° gradu, sive est illic anomaliæ mediæ æquatio prima maxima, et si ea data sit, invenientur in aliis gradibus æquationes adhibendæ, dicendo ut Radius ad sinum dupli anomaliæ mediæ ita sinus æquationis maximæ primæ ad sinum æquationis quæsitæ, sive (quia hic de minimis angulis agitur qui sunt inter se ut sui sinus) ita ipsa æquatio maxima ad æquationem quæsitam: Invenietur autem facile maxima illa æquatio, cum enim sit Radius ad A B² ut sinus K ad $D \times \frac{\overline{OB+OD} \times \text{sin. } 2T}{OB}$ si T sit 45°, sin. 2 T est ipse Radius O B; Est ergo Radius ad A B² ut sinus K ad $D \times \frac{OB+OD}{OB} \times OB$ sive, ut statuit Newtonus, est Radius ad sinum æquationis primæ maximæ ut A B² ad $D \times \overline{OB+OD}$. Quod erat 1°. Dem.

588. Secunda æquatio T Q E continetur lineis ductis a puncto Q circuli B Q N A ad puncta T et E lineæ O M quæ perpendiculariter in O N lineam motus medii ducitur, est vero O T æqualis sinui arcus Q N = S F = O f, et si ex f ducatur ad focum linea f H, intersectio ejus lineæ f H (productæ si necesse sit) cum linea O M dat alterum punctum E. In hâc ergo æquationis parte est Q E radius, T E sinus, eorumque ratio est investiganda, est verò Q E paulo major quam Q T et Q T est æqualis O G, quâ paulò major est O N sive O B unde Q E pro O B commodè assumi potest, quamvis eâ sit paulo minor; Ut autem valor lineæ T E assignetur, notandum est quod cum sit O M in O N perpendicularis, et O f in O Q, est angulus f O M æqualis angulo N O Q.

Cognoscetur ergo arcus mensurans angulum f O M sive f O E, assumpto O f pro radio, dicendo radius O N sive O B ad arcum N Q ut O f (sive N Q) ad arcum mensurantem angulum f O E qui ideo erit $\frac{NQ^2}{OB}$, secans illius arcus est O E, cum verò T O sit sinus arcus N Q (æqualis O f) feratur longitudo O f secundum lineam O M, cadet tantùm ultra T quantum arcus N Q suum sinum excedit, et tantùm citra E quantùm radius ille O f a secante anguli cujus arcus est $\frac{NQ^2}{OB}$ deficit: Dato ergo arcu N Q, inveniatur ejus excessus super ejus sinum, et dato arcu $\frac{NQ^2}{OB}$ inveniatur excessus ejus secantis super radium N Q sive O f et inventis his duobus habebitur linea T E quæsita.

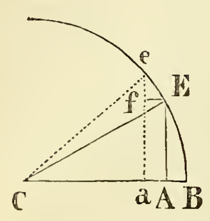
Lemma I. *Dato arcu invenire ejus sinum.* Sit radius C B, r, sinus quæsitus E A, x, ejus Cosinus C A, $\sqrt{rr - xx}$, arcus datus B E, v, ejus fluxio E e sit d v.

Ducto radio C E, et radio proximo C e et sinu arcus B e, ductoque ex E in F perpendiculo, erit e f fluxio sinus quæsiti sive d x. Triangula verò E C A, e f E, pro similibus sunt habenda, nam angulus f E A est rectus ut et



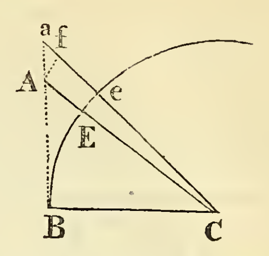
angulus C E e quia circulus est perpendicularis in radium, et dempto communi C E f remanent C E A et f E e æquales, et ob rectos in f et A, angulus tertius f e E æqualis erit tertio E C A unde habetur hæc proportio, C A ad C E ut

e f ad e E, sive $\sqrt{rr - xx} : r = dx : dv$ unde est $dv = \frac{r\,dx}{\sqrt{rr - xx}}$ et $dv^2 = \frac{rr\,dx^2}{rr - xx}$ sive $rr - xx = \frac{rr\,dx^2}{dv^2}$.



Jam verò supponatur valorem x hac serie exprimi, $x = Av + Bv^3 + Cv^5$, &c. erit $dx = A\,dv + 3Bv^2\,dv + 5Cv^4\,dv$, &c. et $dx^2 = A^2dv^2 + 6ABv^2dv^2 + 9BBv^4dv^2 + 10ACv^4dv^2$, &c.
et $xx = A^2v^2 + 2ABv^4 + BBv^6 + 2ACv^6$, &c.
unde $rr - xx = rr - A^2v^2 - 2ABv^4$, &c.
et $\frac{rr\,dx^2}{dv^2} = rrA^2 + 6rrABv^2 + 9rrBBv^4 + 10r^2ACv^4$, &c.
undè hæ duæ series æquales sunt, et terminorum A, B, C, &c. valor ex comparatione terminorum correspondentium harum serierum eruitur, erit ergo
$rr - A^2v^2 - 2ABv^4$, &c.
$= rrAA + 6rrABv^2 + 9rrBBv^4 + 10rrACv^4$, &c.
undè erit $rr = rrAA$, ideoque $A = 1$.
$-A^2v^2 = 6rrABv^2$, undè $-1 = 6rrB$ et $B = \frac{-1}{6rr}$
$-2ABv^4 = 9rrBBv^4 + 10rrACv^4$, sive substitutione facta et terminis per v^4 divisis $+\frac{2}{6rr} = \frac{9}{36rr} + 10rrAC$, sive $10rrAC = \frac{3}{36rr}$
et $C = \frac{3}{10 \times 36r^4} = \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5r^4}$, &c. undè series $Av + Bv^3 + Cv^5$, &c. $= x$, ad hanc redit $x = v - \frac{v^3}{2 \times 3r^2} + \frac{v^5}{2 \times 3 \times 4 \times 5r^4}$ &c. quæ series facile continuatur, et arcu existente parvo citissimè convergit.

Lemma II. *Dato arcu invenire secantem.* Sit ut prius radius C B, r, secans quæsita C A, y, Tangens B A, $\sqrt{yy - rr}$, Arcus datus B E, v, ejus fluxio E e, d v; Ducatur ex centro secans C a, proxima propositæ, et radio C A centro C, describatur arcus a f erit f a fluxio secantis quæsitæ sive d y, erunt autem arcus E e et A f ut eorum radii C E, C A ideoque



est $r : y = dv : Af = \frac{y\,dv}{r}$; præterea Triangula A C B, a A f, sunt similia, nam ob angulum rectum f A C angulus f A a est complementum anguli C A B sive est æqualis angulo A C B, anguli verò B et f sunt ambo æquales ut pote recti, est ergo $CB : BA = Af : fa$, sive $r : \sqrt{yy - rr} = \frac{y\,dv}{r} : dy$ et quadrando, $rr : yy - rr = \frac{yy\,dv^2}{rr} : dy^2$ sive $r^4\frac{dy^2}{dv^2} = y^4 - rry^2$, Fingatur ergo esse $y = A + Bv^2 + Cv^3 + Dv^4$, &c.
est $dy = 2Bv\,dv + 4Cv^3dv + 6Dv^5dv$, &c.
et $dy^2 = 4B^2v^2dv^2 + 16BCv^4dv^2 + 16C^2v^6dv^2 + 24DBv^6dv^2$, &c.
et $y^2 = A^2 + 2ABv^2 + 2ACv^4 + BBv^4$, &c.
et $y^4 = A^4 + 4A^3Bv^2 + 6A^2B^2v^4 + 4A^3Cv^4$, &c.
est ergo $\frac{r^4dy^2}{dv^2}$
$= 4r^4B^2v^2 + 16r^4BCv^4 + 16r^4C^2v^6 + 24r^4DBv^6$, &c.
et $y^4 - rry^2$
$= A^4 + 4A^3Bv^2 + 6A^2B^2v^4 - r^2A^2 - 2r^2ABv^2 + 4A^3Cv^4 - 2r^2ACv^4 - r^2B^2v^4$, &c.

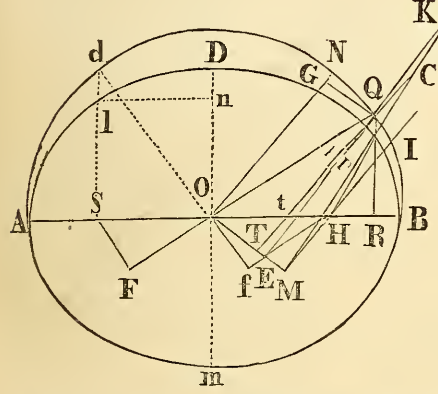
Unde collatis terminis correspondentibus harum serierum est $A^4 - r^2A^2 = 0$, ideoque $A^2 = r^2$, et $A = r$; est $4r^4B^2v^2 = 4A^3Bv^2 - 2r^2ABv^2$; sive divisis omnibus terminis per Bv^2 et posito r loco A; $4r^4B = 4r^3 - 2r^3$ ideoque est $B = \frac{1}{2r}$,
est $16r^4BCv^4 = 6A^2B^2v^4 + 4A^3 \times Cv^4 - 2r^2ACv^4 - r^2BBv^4$, quæ divisa per v^4 substitutisque valoribus A et B dant
$8r^3C = \frac{6}{4} + 4r^3C - 2r^3C - \frac{1}{4}$ unde est $6r^3C = \frac{5}{4}$ et $C = \frac{5}{2 \times 3 \times 4r^3}$, &c.

Series ergo ad secantis valorem exprimendum $A + Bv^2 + Cv^3$, &c. in hanc vertitur $r + \frac{v^2}{2r} + \frac{5v^3}{2 \times 3 \times 4r^3}$, &c. Quæ satis prompte

convergit si modo arcus v sit exiguus, ut isto in casu.

His positis, invenientur commodè partes lineæ T E, sive sinus secundæ æquationis, ea enim constat ex differentia inter arcum N Q et ejus sinum (dato radio O B) et ex differentia inter eum ipsum arcum N Q sumptum ut radium in angulo f O E et illius anguli secantem.

Primum ergo differentia inter arcum N Q et ejus sinum, ex primâ serie invenitur, sit enim $v = NQ$ et $r = OB$, sinus arcus N Q per eam seriem invenitur $NQ - \frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$, &c. et omissis reliquis terminis seriei, hic admodum exiguis, liquet differentiam inter arcum N Q et ejus sinum esse terminum $\frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ qui erat in eâ serie ex arcu N Q tollendus ut obtineretur sinus.



Secundo, ut differentia inter radium et secantem anguli f O E obtineatur, loco radii r in serie superius inventâ valor radii O f sive N Q est substituendus, et loco arcus v, valor arcus qui mensurat eum angulum et qui inventus fuit $= \frac{NQ^2}{OB}$, ergo series quæ secantem exprimit in hanc abit $NQ + \frac{NQ^4}{2 OB^2 \times NQ}$, &c. reliquis terminis ut pote minimis omissis, excessus secantis super radium est $\frac{NQ^3}{2 OB^2}$, qui junctus cum excessu arcus super sinum superius invento $\frac{NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ efficit summam $\frac{4 NQ^3}{2 \times 3 OB^2}$ sive $\frac{2 NQ^3}{3 OB^2}$ pro valore sinus æquationis secundæ; sed est (369) ut Radius O B ad Q R ita S H sive O H ad S F sive N Q, ergo $NQ = \frac{OH}{OB} \times QR$ et $\frac{2 NQ^3}{3 OB^2} = TE = \frac{2 OH^3}{3 OB^5} \times QR^3$; Itaque cum in hâc secundâ æquatione radius Q E sit in omni anomaliæ gradu idem aut prope idem, et anguli sint minimi erunt inter se quam proximè ut eorum sinus T E, cumque in valore T E quantitas $\frac{2 OH^3}{3 OB^5}$ sit constans, sinus illi sunt inter se ut QR^3, sed Q R est sinus anomaliæ excentri, et in eâdem prope sunt ratione sinus anomaliæ mediæ, hinc istæ æquationes secundæ in variis anomaliæ mediæ gradibus adhibendæ, sunt inter se ut cubi sinuum anomaliæ mediæ. Si itaque sumatur anomalia media 90. graduum ejus sinus est ipse Radius, eritque illic maxima æquatio, quæ erit ad aliam quamvis, ut cubus Radii ad cubum sinus anomaliæ mediæ ipsi convenientis ut statuit Newtonus.

Ut verò determinetur hæc æquatio ubi est maxima, notandum quod si in foco S erigatur usque ad Ellipsim ordinata S l ea erit æqualis semi-lateri recto, et si ducatur, l n ordinata in minorem axem erit $l n = OS$ sive O H, et D n erit differentia semi-lateris recti et minoris axis quam Newtonus vocat D, et ex natura Ellipseos erit AO^2 sive $OB^2 : ln^2 (OH^2) = OD^2 : Dn \times nm$ (sive $D \times nm$) sed n m est ferè axi minori 2 O D æqualis, ergo erit $OB^2 : OH^2 = OD^2 : D \times 2 OD$ et $OH^2 = \frac{2 D \times OB^2}{OD}$, quo posito valor $TE = \frac{2 OH^3}{3 OB^5} QR^3$ est æqualis $\frac{2 OH \times 2 D}{3 OB^3 \times OD} \times QR^3$ vel quia $2 OH = SH$ est $TE = \frac{2 D \times SH}{3 OB^3 \times OD} QR^3$.

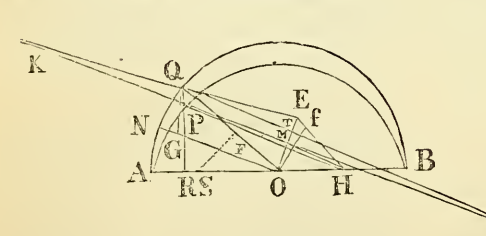
In nonagesimo verò gradu anomaliæ mediæ linea O M sive O E in axem O B cadit et Q T cui ferè æqualis est Q E coincidit cum Q R, unde Q E pro Q R sumi potest, et præthereà Q R nonnihil excedit lineam S d sive axem minorem, D O, cum non nihil citra focum cadat, minor tamen est radio O B, unde QR^2 pro $OB \times OD$ satis accuratè sumi potest, sicque valor $TE = \frac{2 D \times SH}{3 OB^3 \times OD} QR^3$ in hanc abit $TE = \frac{2 D \times SH}{3 OB^2} QE$, sed Radius est ad sinum æquationis maximæ secundæ ut Q E ad T E (sive $\frac{2 D \times SH}{3 OB^2} \times QE$) et Q E ad $\frac{2 D \times SH}{3 OB^2}$ Q E sicut $3 OB^2$, ad $2 D \times SH$, ergo æquatio secunda maxima invenietur dicendo ut triplum Quadrati semi-axis majoris ad duplum rectangulum sub umbilicorum distantiâ S H et differentia D semi-axis minoris et semi-lateris recti, ita radius ad sinum secundæ æquationis ubi est maxima, et ea data reliquæ invenientur dicendo ut cubus radii ad cubum sinus anomaliæ mediæ propositæ ita hæc maxima æquatio, ad quæsitam. Q. e. d.

589. Annihilatur prima æquatio in 90. gradu

anomaliæ mediæ et in primo, negativa fit in secundo quadrante, positiva in tertio, negativa iterum in quarto.

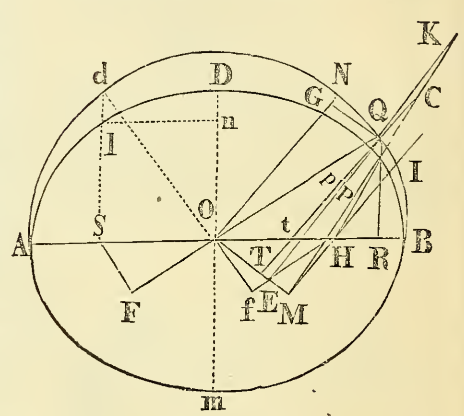
Etenim in 90. gradu anomaliæ mediæ O M coincidit cum O H ex constructione, sicque linea f H, non amplius secat lineam O M in E, evanescit itaque M E sinus primæ Æquationis.

Excedat verò anomalia media 90. fiatque alia figura secundum constructionem a nobis indicatam, sit locus verus planetæ P, describatur circulus B Q N A, in magnum axem B A, sitque P R perpendicularis a loco planetæ in axem ducta, quæ producta secet circulum B Q N A in Q, ducatur Q O, in quam ex sole S, ducatur perpendiculum S F, cui æqualis sumatur arcus Q N, erit N O B anomalia media, ducatur in lineam O N perpendicularis O M quæ terminetur in M per perpendiculum a foco altero H ductum, erit ergo M H parallela O N et M H B æqualis anomaliæ mediæ, ex H ducatur ad Planetam linea H P, erit ergo angulus M H P angulus anomaliæ mediæ addendus ut prodeat motus medius æquatus P H B, fiat etiam super O H triangulum O f H simile et æquale triangulo S F O, et producatur H f donec secet in E lineam O M productam; Ducatur ex Q ad T linea Q T, parallela lineæ N O



ideoque etiam parallela lineæ M H, et erit O T æqualis Q G sinui arcus Q N. Ducatur etiam linea P M quæ producta secabit in C lineam Q T productam et angulus C erit æqualis angulo H M C, qui erit æqualis angulis M H P et M P H (per 32. I^mi. Elem.) sed ob exiguitatem lineæ M H respectu M P, omittitur angulus M P H, et angulus H M C, sive angulus C, pro angulo M H P æquatione motus medii assumitur; Denique ex E per Q ducatur linea E Q K quæ lineam P M C secabit in K erit angulus E Q T æqualis angulis K et C: (per 32. I. Elem.) ergo si ex angulo E Q T subtrahatur angulus K remanebit angulus C, sive æquatio quæsita, est vero angulus E Q T secunda æquatio et angulus K sive E K M prima, ut liquet ex constructione, ergo in secundo quadrante prima æquationis pars substrahi debet sive negative sumi, secunda verò positiva remanet.

In tertio quadrante hæc eadem figura deorsum convertatur sub axe A B, liquebitque angulum M H B seu anomaliam mediam, quæ hic 180° gradus superat, angulo M H P sive angulo C esse minuendam ut habeatur anomalia æquata P H B, ideoque cum sit C = E Q T — K secunda æquatio E Q T substractivè sumi debebit, et prima K additivè.



In ultimo denique quadrante invertatur figura prima, liquebit ex anomaliâ mediâ I H B; seu H M P, detrahendum esse angulum I H P, seu H M P, sive angulum C ipsi æqualem, ut prodeat motus medius æquatus, sed angulus C est summa utriusque partis æquationis, nempe anguli K, et anguli K Q C sive T Q E, ergo in ultimo quadrante utraque æquatio negativè assumitur.

390. Exemplum sit in orbe Martis A D B, qui omnium, si orbem Mercurii excipias, est maximè excentricus. Excentricitas S O, sit partium 141. et semiaxis major = 1523. 69. erit semiaxis minor O D = 1516. 93. semilatus rectum seu $\frac{1}{2}$ L = 1510. 184. differentia inter semiaxem minorem et semilatus rectum $\frac{1}{2}$ L, = 6. 746. = D. Differentia inter logarithmum radii et logarithmum quadrati axis A B, per tabulas,

erit = 3. 032136''. 62.
Log. A O + O D = 3. 5097621. 36.
Log. D = 0. 7580391. 75.
Summa = 7. 0999380. 73.

æqualis logarithmo sinûs anguli Y, per primam proportionem Newtoni, atque hinc in tabulis invenietur angulus Y, minutorum primorum 4', secundorum 21. 14''

Differentia inter logarithmum radii et logarithmum facti 3 A O ²,

erit = 3. 1570755. 62.
Log. facti 2 S H × D = 3. 5093282. 75.
Summa = 6. 6664038. 37.

æqualis logarithmo sinûs anguli Z, qui per tabulas invenitur esse minutorum secundorum 100. 39″. Inventis jam æquationibus maximis Y + Z, anguli V, et X, pro quolibet anomaliæ mediæ gradu facilè reperiuntur v. gr. pro 45°.

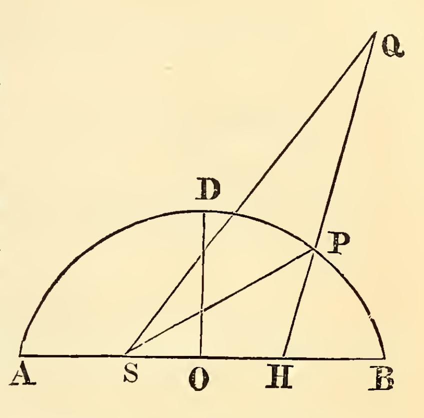
Est enim Log. anguli Z = 2. 0016853. 46.
Log. cubi sinûs 45°. = 29. 5484550.
horum summa = 31. 5501403. 46.

Ex hâc summa detrahe logarithmum cubi radii 30. 0000000; residuum 1. 5501403. 46. erit logarithmus sinûs anguli X, qui per tabulas invenietur esse minutorum secundorum 35. 41″. Quarè cum in 45°. anomaliæ gradu angulus V, æqualis sit angulo Y, erit motus medius æquatus, seu angulus P H B, = 45°, 4′, 56. 55″.

Jam verò ut inveniatur anomalia vera, seu angulus P S B, dato angulo P H B, producatur H P ad Q ut sit P Q = S P, et erit H Q = A B, ex natura ellipseos, atque angulus P H B, æqualis summæ angulorum Q S H, S Q H; quarè semisumma laterum S H, H Q, est ad eorum semidifferentiam, hoc est, A O + S O, ad A O — S O, ut tangens dimidii anguli P H B, ad tangentem semidifferentiæ angulorum Q S H, S Q H.

Log. tang. $\frac{1}{2}$ P H B = 9. 6181066. 717.
Log. $\overline{\text{A O} - \text{S O}}$ = 3. 1407247. 98.
horum summa = 12. 7588314. 698.
Log. $\overline{\text{A O} + \text{S O}}$ = 3. 2212068. 41.
Differentia = 9 5376246. 246.

= Log. tang. Ang. $\overline{\frac{1}{2}\text{ Q S H} - \frac{1}{2}\text{ S Q H}}$. Undè invenietur $\frac{1}{2}$ Q S H — $\frac{1}{2}$ S Q H = 19°. 1′, 35. 5″; et hinc anomalia vera = Q S H — S Q H (sive — Q S P) = 38°. 3′ 11″, quam



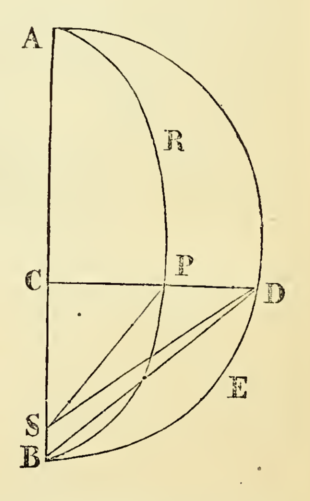
proximè; Nam si ex datâ hâc anomaliâ verâ, quæratur (371) anomalia media, invenietur esse 45°, graduum quam proximè.

SECTIO VII.

De corporum ascensu et descensu rectilineo.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

Posito quodvis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, spatia definire quæ corpus rectâ cadendo datis temporibus describit.



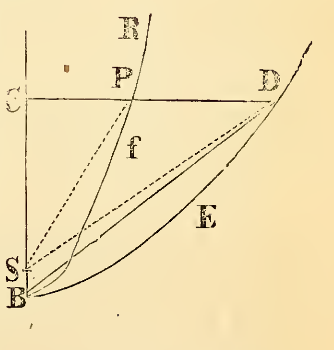
Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter, describet id (per Corol. 1. Prop. XIII.) sectionem aliquam conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit sectio illa conica A R P B et umbilicus ejus S. Et primo si figura ellipsis est; super hujus axe majore A B describatur semicirculus A D B, et per corpus decidens transeat recta D P C perpendicularis ad axem; actisque D S, P S erit area A S D areæ A S P, atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe A B minuatur perpetuo latitudo ellipseos, et semper manebit area A S D tempori proportionalis. (e) Minuatur latitudo illa in infinitum: et orbe A P B jam coincidente cum axe A B et umbilico S cum axis termino B, descendet corpus in rectâ A C, et area A B D evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque spatium A C, quod corpus de

(e) 591. *Lemma.* Si sectionis conicæ latus rectum ad axem transversum pertinens perpetuò minuatur, et tandem evanescat, manente sectionis axe transverso, omnes ad axem ordinatæ perpetuò minuuntur et tandem evanescunt, ac perimeter sectionis cum axe et umbilici cum axis verticibus coincidunt. Est enim, (ex conic.) ordinatæ cujusvis quadratum ad rectangulum abscissarum in ratione datâ lateris recti ad axem transversum; quarè si manente axe transverso; adeóq. et abscissarum rectangulo, latus rectum perpetuò minuatur ac tandem evanescat, ordinatæ quadratum adeóque et ordinata ipsa perpetuò minuitur et tandem evanescit, et perimeter sectionis conicæ cum axe coincidit. Porrò ordinata per umbilicum æqualis est dimidio lateri recto (Vid. sup. in Conicis, Theor. III. de Hyperbola et de Ellipsi et Cor. I. Theor. I. de Parab.) adeóque quadratum dimidii lateris recti est ad rectangulum ex distantiis umbilici a verticibus, ut latus rectum ad axem transversum, undè rectangulum sub quartâ parte lateris recti et axe transverso æquatur rectangulo ex distantiis umbilici a verticibus; quarè evanescente latere recto et manente axe transverso, rectangulum sub distantiis umbilici a verticibus nullum fit, et umbilicus cum proximo vertice coincidit.

loco A perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempori proportionalis capiatur area A B D, et a puncto D ad rectam A B demittatur perpendicularis D C (f). Q. e. i.

Cas. 2. Si figura illa R P B hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem A B hyperbola rectangula B E D: et (g) quoniam areæ C S P, C B f P, S P f B sunt ad areas C S D, C B E D, S D E B, singulæ ad singulas, in datâ ratione altitudinum C P, C D; et area S P f B proportionalis est tempori quo corpus P movebitur per arcum P f B; erit etiam area S D E B eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ R P B in infinitum manente latere transverso, et coibit arcus P B cum rectâ C B et umbilicus S cum vertice B et recta S D cum rectâ B D. Proinde area B D E B proportionalis erit tempori quo corpus C recto descensu describit lineam C B. Q. e. i.

Cas. 3. (h) Et simili argumento si figura R P B parabola est, et eodem vertice principali B describatur alia parabola B E D, quæ semper maneat data, interea dum parabola prior, in cujus perimetro corpus P movetur, diminuto et in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum lineâ C B; fiet segmentum parabolicum B D E B proportionale tempori quo corpus illud P vel C descendet ad centrum S vel B. Q. e. i.



(f) 392. *Perpendicularis D C.* Quoniam area A B D, semper proportionalis est tempori quo corpus ex puncto A per rectam A C cadit, erit totius semicirculi area A D E B, proportionalis tempori quo corpus idem cadendo percurrit lineam A B, et divisim area segmenti B D E B, proportionalis tempori quo corpus ex A, cadendo percurrit lineam C B.

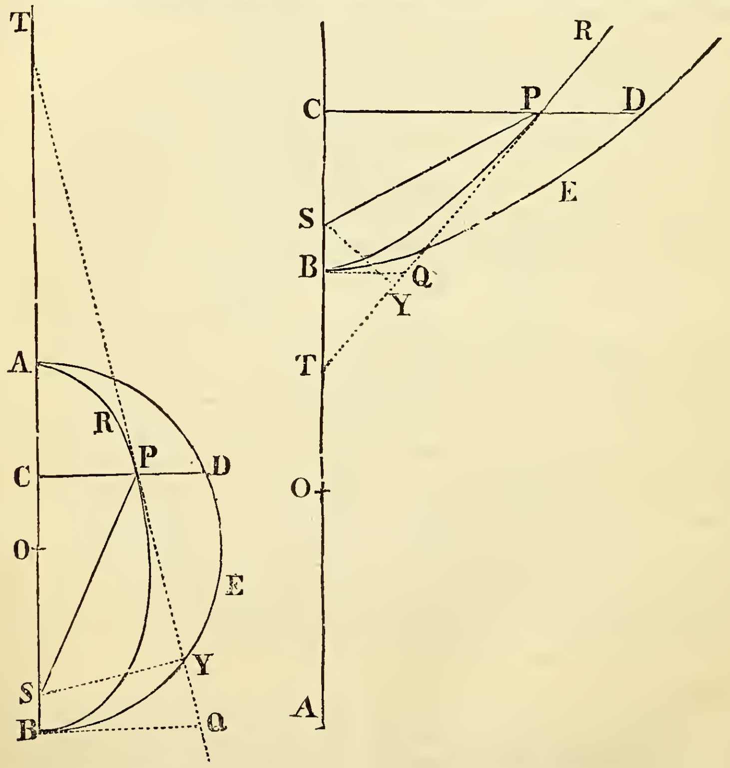
(g) 393. *Quoniam areæ.* Nam 1°. triangula C S P, C S D quorum est basis communis C S, sunt ut altitudines C P, C D. 2°. areæ hyperbolicæ C B f P, C B E D sunt ut eædem altitudines C P, C D (374) undè 3°. divisim C B f P — C S P ad C B E D — C S D. hoc est, sector S P f B ad sectorem S D E B ut C P ad C D.

(h) 394. *Simili argumento.* In Parabolâ 1°. C S P : C S D = C P : C D. 2°. sit latus rectum Parabolæ B f P = l, latus rectum Parabolæ B E D = L, erit, ex naturâ Parabolæ $CP^2 = l \times CB$ et $CD^2 = L \times CB$, adeóque $CP : CD = \sqrt{l} : \sqrt{L}$, hoc est, in ratione datâ, ergò area C B f P est ad aream C B E D, in eâdem ratione datâ C P ad

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C *est ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* B C *circulum describentis, in subduplicatâ ratione quam* A C *distantia corporis a circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad figuræ semidiametrum principalem* $\frac{1}{2}$ A B.

Bisecetur A B, communis utriusque figuræ R P B, D E B diameter, in O; et agatur recta P T, quæ tangat figuram R P B in P, atque etiam



secet communem illam diametrum A B (si opus est productam) in T; sitque S Y ad hanc rectam, et B Q ad hanc diametrum perpendicularis,

C D; Quarè 3°. divisim S P f B : S D E B = C P : C D. Cætera se habent ut in demonstratione casûs secundi.

395. *Scholium.* Corporis per rectam C S, ad centrum S, cadentis velocitas in loco quovis C, est ad velocitatem corporis alterius ad eandem a centro distantiam circulum describentis, vel in ratione minore quam $\sqrt{2}$, ad 1, vel in ratione majore aut in eâ ipsâ ratione. In 1°. casu recta S C, usurpanda est pro ellipsi latitudinis evanescentis; in 2°. casu, recta S C, est hyperbola cujus latus rectum evanescit; in 3°. casu, recta

atque figuræ R P B latus rectum ponatur L. Constat per Corol. IX. Prop. XVI. quod corporis in lineâ R P B circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P sit ad velocitatem corporis intervallo S P circa idem centrum circulum describentis in subduplicatâ ratione rectanguli $\frac{1}{2}$ L × S P ad S Y quadratum. Est autem ex conicis A C B ad C P q ut 2 A O ad L, ideoque $\frac{2\,C\,Pq \times A\,O}{A\,C\,B}$ æquale L. Ergo velocitates illæ sunt ad invicem in subduplicatâ ratione $\frac{C\,P\,q \times A\,O \times S\,P}{A\,C\,B}$ ad S Y quad. ([i]) Porro ex conicis est C O ad B O ut B O ad T O, et compositè vel divisim ut C B ad B T. Unde vel dividendo vel componendo fit B O — vel + C O ad B O ut C T ad B T, id est, A C ad A O ut C P ad B Q; indeque $\frac{C\,P\,q \times A\,O \times S\,P}{A\,C\,B}$ æquale est, $\frac{B\,Q\,q \times A\,C \times S\,P}{A\,O \times B\,C}$. Minuatur jam in infinitum figuræ R P B latitudo C P, sic ut punctum P coëat cum puncto C, punctumque S cum puncto B, et linea S P cum linea B C, lineaque S Y cum lineâ B Q; et corporis jam rectâ descendentis in lineâ C B velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo B C circulum describentis; in subduplicatâ ratione ipsius $\frac{B\,Q\,q \times A\,C \times S\,P}{A\,O \times B\,C}$ ad S Y q, hoc est (neglectis æqualitatis rationibus S P ad B C et B Q q ad S Y q) in subduplicatâ ratione A C ad A O sive $\frac{1}{2}$ A B. Q. e. d.

Corol. 1. Punctis B et S coëuntibus, fit T C ad T S ut A C ad A O.

Corol. 2. ([k]) Corpus ad datam a centro distantiam in circulo quovis revolvens, motu suo sursum verso ascendet ad duplam suam a centro distantiam.

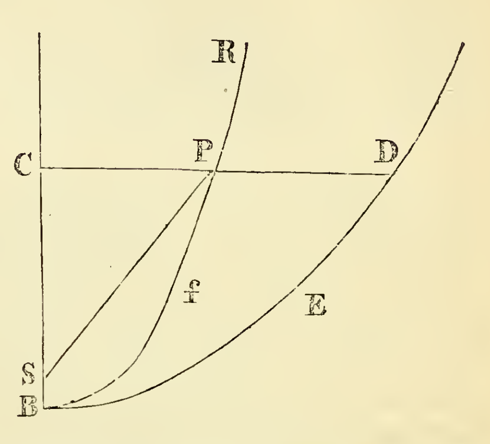
S C, est parabola lateris recti evanescentis. Hæc omnia patent ex Coroll. 7°. Prop. XVI.

([i]) 396. *Porrò ex conicis.* (Vid. Lem. V. de Conicis, Cor. 2.) est T O : A O = A O : C O et quia A O = B O, invertendo et permutando est C O : B O = B O : T O et in Ellipsi compositè C O : B O = C B (seu C O + B O) : B T (seu B O + T O); et in hyperbolâ divisim, C O : B O = C B (seu C O — B O) : B T (seu B O — T O); Quarè in utraque sectione, C O : B O = C B : B T. Undè in ellipsi dividendo fit A C, seu B O — C O, aut A O — C O : B O = C T, seu B T — C B : B T, et in hyperbolâ, componendo A C seu C O + B O : B O = C T seu C B + B T : B T; adeóque in utrâque sectione A C : B O seu A O = C T : B T. Sed propter similitudinem triangulorum T C P, T B Q, C T : B T = C P : B Q, ergò A C : A O = C P : B Q, et C P = $\frac{B\,Q \times A\,C}{A\,O}$, ac C P ^{2} = $\frac{B\,Q^2 \times A\,C^2}{A\,O^2}$, indèque $\frac{C\,P^2 \times A\,O \times S\,P}{A\,C \times C\,B} = \frac{B\,Q^2 \times A\,C \times S\,P}{A\,O \times C\,B}$.

([k]) 397. *Corpus ad datam.* Si fuerit B E D circulus, et punctum C coincidat cum puncto O, erit A C = A O = $\frac{1}{2}$ A B, adeóque velocitas per radium A O cádendo acquisita est æqualis velocitati corporis centro B intervallo B O = A O circulum describentis. Undè si corpus illud, ad datam a centro distantiam B O in circulo revolvens, sursum per O A, projiciatur cum eâ velocitate quâ circulum describit, seu quam per A O cadendo acquisivit, ascendet ad punctum A, per spatium O A (25) seu ad duplam suam a centro B distantiam B A = 2 B O.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X

Si figura B E D *parabola est, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis est velocitati quâ corpus centro* B *dimidio intervalli sui* B C *circulum uniformiter describere potest.*



Nam corporis parabolam R P B circa centrum S describentis velocitas in loco quovis P (per Corol. VII. Prop. XVI.) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli S P circulum circa idem centrum S uniformiter describentis. Minuatur parabolæ latitudo C P in infinitum eo, ut arcus parabolicus P f B cum rectâ C B, centrum S cum vertice B, et intervallum S P cum intervallo B C coincidat, et constabit propositio. Q. e. d.

PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

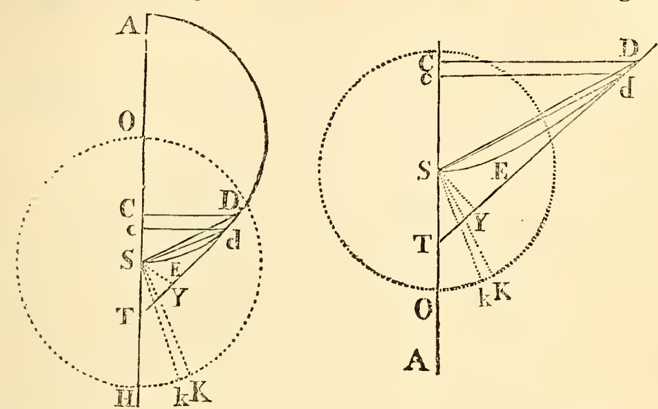
Iisdem positis, dico quod area figuræ D E S, *radio indefinito* S D *descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* D E S *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.*

Nam concipe corpus C quam minimâ temporis particulâ lineolam C c

398. *Corol.* 1. Velocitas in puncto quovis C, est ad velocitatem in alio puncto c, in ratione subduplicatâ rectanguli A C × B C, ad rectangulum A c × B c. Nam velocitas in C, est ad velocitatem corporis intervallo B C circulum describentis ut $\sqrt{}$ A C ad $\sqrt{\frac{1}{2} \text{A B}}$, (per hancce Prop.); velocitas corporis intervallo B C circulum describentis est ad velocitatem corporis intervallo B c circulum describentis, (per Cor. 6. Prop. IV.) reciprocè in ratione subduplicatâ radiorum, hoc est, ut $\sqrt{\text{B c}}$ ad $\sqrt{}$ B C; denique velocitas corporis intervallo B c circulum describentis est ad velocitatem in c corporis ex A cadentis ut $\sqrt{} \frac{1}{2}$ A B ad $\sqrt{}$ A c (per hanc Propositionem); ergo (per compositionem rationum) est velocitas in C ad velocitatem in c, in ratione compositâ ex ratione $\sqrt{}$ A C ad $\sqrt{\frac{1}{2} \text{A B}}$, ratione $\sqrt{}$ B c ad $\sqrt{}$ B C, et ratione $\sqrt{\frac{1}{2} \text{A B}}$ ad $\sqrt{}$ A c. sive ut $\sqrt{}$ A C × $\sqrt{}$ B c ad $\sqrt{}$ A c × $\sqrt{}$ B C, hoc est, in ratione subduplicatâ rectanguli A C × B c ad rectangulum A c × B C. Q. e. d.

399. *Corol.* 2. Si fuerit B f P parabola, corporis in ea moti velocitas in loco quovis P, erit ad velocitatem corporis ad distantiam S P, circulum describentis in ratione $\sqrt{}$ 2, ad 1; si fit ellipsis in minori ratione, in majori verò si fuerit hyperbola (per Cor. 7. Prop. XVI.) et latitudine orbis imminuta in infinitum ut coincidat B f P cum axe B C, erit corporis cadentis velocitas in loco quovis C ad velocitatem corporis ad distantiam B C circulum describentis ut $\sqrt{}$ 2 ad 1. adeóque A C : $\frac{1}{2}$ A B = 2 : 1 in 2°. casu ratio A C, ad $\frac{1}{2}$ A B, minor erit quam ratio 2 ad 1; in 3°. casu major, et contrà.

cadendo describere, et interea corpus aliud K, uniformiter in circulo O K k circa centrum S gyrando, arcum K k describere. Erigantur per-



pendicula C D, c d occurrentia figuræ D E S in D, d. Jungantur S D, S d, S K, S k et ducatur D d axi A S occurrens in T, et ad eam demittatur perpendiculum S Y.

Cas. 1. Jam si figura D E S circulus est vel hyperbola rectangula, bisecetur ejus transversa diameter A S in O, et erit S O dimidium lateris recti. ([l]) Et quoniam est T C ad T D ut C c ad D d, et ([m]) T D ad T S ut C D ad S Y, erit ex æquo T C ad T S ut C D × C c ad S Y × D d. Sed (per Corol. 1. Prop. XXXIII.) ([n]) est T C ad T S ut A C ad A O, puta si in coitu punctorum D, d capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo A C est ad A O seu S K ut C D × C c ad S Y × D d. Porro corporis descendentis velocitas in C est ad velocitatem corporis circulum intervallo S C circa centrum S describentis in subduplicatâ ratione A C ad A O vel S K (per Prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis describentis circulum O K k in subduplicatâ ratione S K ad S C (per Corol. VI. Prop. IV.) et ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola C c ad arcum K k in subduplicatâ ratione A C ad S C, ([o]) id est in ratione A C ad C D. Quare est C D × C c æquale A C × K k, et ([p]) propterea A C ad S K ut A C × K k ad S Y ×

([l]) * *Et quoniam est T C ad T D ut C c ad D d.* Quia in Triangulo T C D, est c d parallela basi C D, ideoque T C : T D ut partes correspondentes C c, D d.

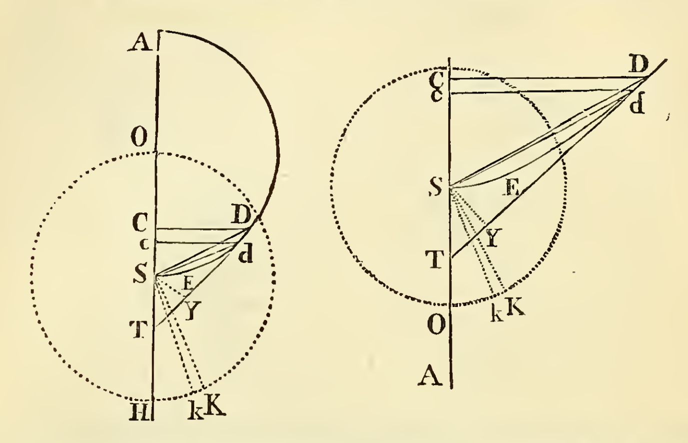
([m]) * *Et T D ad T S ut C D ad S Y.* Sunt enim propter angulos Y, et C, rectos et angulum T, communem, triangula T C D, T S Y, similia.

([n]) * *Est T C : T S.* Nam punctis D, d, coëuntibus, fit T D, tangens; adeóque (396.) T C : T S = A C : A O.

([o]) * *In ratione A C ad S C, id est in ratione A C ad C D.* Est enim S E D, circulus, vel hyperbola æquilatera cujus vertices S et A, sed in circulo et hyperbolâ æquilaterâ ob axium æqualitatem est $C D^2 = A C \times S C$, et proindè A C : C D = C D : S C, et hinc A C ad C D, in ratione subduplicatâ A C ad S C.

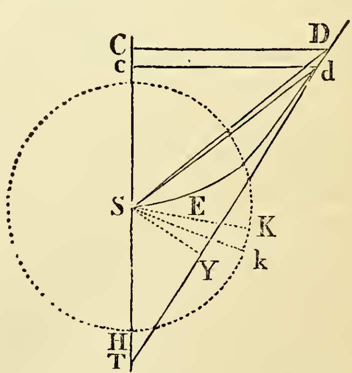
([p]) * *Et propterea.* Nam ex superius demonstratis A C : S K = C D × C c : S Y × D d.

D d, indeque S K × K k æquale S Y × D d, et $\frac{1}{2}$ S K × K k æquale $\frac{1}{2}$ S Y × D d, id est area K S k æqualis areæ S D d. Singulis igitur



temporis particulis generantur arearum duarum particulæ K S k, et S D d, quæ, si magnitudo earum minuatur et numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, et propterea (per Corollarium Lemmatis IV.) areæ totæ simul genitæ sunt semper æquales. Q. e. d.

Cas. 2. Quod si figura D E S parabola sit, invenietur esse ut supra C D × C c ad S Y × D d ut T C ad T S, hoc (q) est ut 2 ad 1, ideoque $\frac{1}{4}$ C D × C c æquale esse $\frac{1}{2}$ S Y × D d. Sed corporis cadentis velocitas in C æqualis est velocitati quâ circulus intervallo $\frac{1}{2}$ S C uniformiter describi possit (per Prop. XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem quâ circulus radio S K describi possit, hoc est, lineola C c ad arcum K k (per Corol. VI. Prop. IV.) est in subduplicatâ ratione S K ad $\frac{1}{2}$ S C, id (r) est, in ratione S K ad $\frac{1}{2}$ C D. Quare est $\frac{1}{2}$ S K × K k æquale $\frac{1}{4}$ C D × C c, ideoque æquale $\frac{1}{2}$ S Y × D d, hoc est, area K S k æqualis areæ S D d, ut supra. Q. e. d.

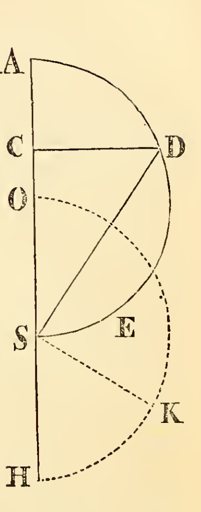


(q) * *Hoc est ut 2 ad* 1. Cum enim sit T D tangens, C D ordinata, S C abscissa, est ex naturâ Parabolæ T S = S C, adeóque T C : T S = 2 : 1.

(r) * *Id est in ratione S K, ad $\frac{1}{2}$ C D.* Nam (ex hyp.) S K, æqualis est dimidio lateri recto, quarè ex naturâ parabolæ 2 S K × S C = C D²; et $\frac{1}{2}$ S C × S K = $\frac{1}{4}$ C D². Undè S K : $\frac{1}{2}$ C D = $\frac{1}{2}$ C D : $\frac{1}{2}$ S C, et hinc S K, ad $\frac{1}{2}$ C D in ratione subduplicatâ S K ad $\frac{1}{2}$ S C.

400. *Corol.* 1. Si fuerit S E D circulus cujus diameter S A, corpus ex loco A demissum et solâ vi centripetâ sollicitatum cadendo percurret totam diametrum A S, eodem tempore, quo corpus aliud ad dimidiam distantiam S O, describet semicirculum O K H; sunt

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.



Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora descensus.

Super diametro A S distantiâ corporis a centro sub initio, describe semicirculum A D S, ut et huic æqualem semicirculum O K H circa centrum S. De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam C D. Junge S D, et areæ A S D æqualem constitue sectorem O S K. (s) Patet per Prop. XXXV. quod corpus cadendo describet spatium A C eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum S gyrando, describere potest arcum O K. Q. e. f.

enim areæ semicirculorum O K H et S E A æquales, tempus verò quo corpus ex A demissum cadendo percurrit spatium quodvis A C est ad tempus quo percurret A S, ut area A S D ad semicirculum A D E S, sive ut sector O S K ad sectorem quem describit corpus in circulo O K H revolvens æqualem semicirculo A D E S, qui sector erit ipse semicirculus O K H.

401. *Corol.* 2. Si corpus ad distantiam S A, circulum describens omni motu revolutionis privaretur, et ad centrum virium S, solâ vi centripetâ urgeretur, tempus quo ex A usque ad S cadendo perveniret, esset ad tempus unius revolutionis in circulo ut 1, ad $4\sqrt{2}$: est enim tempus periodicum corporis ad distantiam S O circulum describentis (hoc est, duplum ejus temporis quo corpus ex A, cadendo percurrit A S, (400)) ad tempus periodicum corporis ad distantiam A S (= 2 S O) in circulo revolventis ut Radices quadratæ cuborum distantiarum 1 et 2, sive ut 1, ad $\sqrt{8}$ (191), hoc est, ut 1 ad $2\sqrt{2}$; ergo tempus quo corpus cadendo percurrit A S, est ad tempus periodicum corporis ad distantiam A S in circulo revolventis ut $\frac{1}{2}$ ad $2\sqrt{2}$, hoc est, ut 1 ad $4\sqrt{2}$.

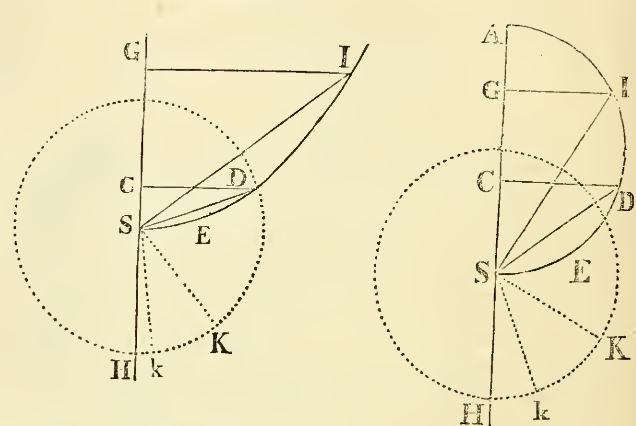
402. *Scholium.* Si planetarum orbitas circulares esse suponamus, vimque centripetam quâ in suis orbitis retinentur, in duplicatâ ratione distantiarum a centro decrescere, ex datis temporibus periodicis, facile erit tempora definire quibus usque ad centrum sui motus cadendo pervenirent. Exempli causâ, cum tempus periodicum lunæ circâ terram revolventis sit dierum 27. hor. 7. minutorum primorum 43, hoc est, minutorum primorum 39343, erit $4\sqrt{2}$, ad 1, hoc est, quam proximè 565685, 100000, ut 39343, ad 6955. 5, seu dies 4, hor. 19, min. prim. 55, et secund. 30, tempus quo luna cadendo ad centrum telluris perveniret.

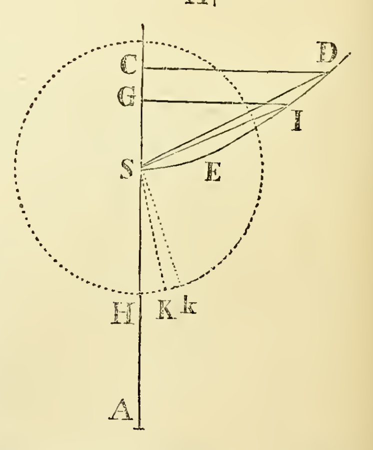
(s) * *Patet per Prop. XXXV.* Cum enim semicirculorum A D S, O K H, et sectorum O S K, A S D, areæ æquales sint respectivè, erit quoque sector H S K æqualis segmento S E D, adeóque (401.) tempus quo corpus ex A cadendo percurrit C S, æquatur tempori, quo corpus aliud in circulo O K H revolvens describit arcum K H, et quoniam tempus per A S cadendo æquatur tempori quo corpus revolvens totum semicirculum O K H, describit (401), erit tempus per A C, æquale tempori per arcum O K.

403. *Corol.* Arcus O K, æqualis est summæ arcus A D et lineæ C D. Est enim sector A S D, æqualis sectori A O D, + triangulo D O S, sive $\frac{1}{2}$ A O × A D + $\frac{1}{2}$ A O × C D: sector verò O S K, = $\frac{1}{2}$ S O × O K = $\frac{1}{2}$ A O × O K, sed est sector O S K = A S D. Quarè $\frac{1}{2}$ A O × O K = $\frac{1}{2}$ A O × A D + $\frac{1}{2}$ A O × C D, atquè adeò O K = A D + C D. Si itaque fiat ut radius ad arcum grad. 57. 29578, qui radio æqualis est, ita C D, ad 4um. B, erit B arcus rectæ C D æqualis, et obtinebitur O K = A D + B. Hinc dato tempore quo corpus datam A S ex puncto A cadendo percurrit, invenitur tempus quo datam rectæ A S partem A C describit, si fiat ut semicirculus O K H, seu grad. 180., ad arcum A D + B, seu O K, itâ tempus quo corpus ex A cadendo percurrit A S, ad tempus quo percurrit A C.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora ascensus vel descensus.





Exeat corpus de loco dato G secundum lineam G S cum velocitate quâcumque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, quâ corpus ad intervallum datum S G circa centrum S revolvi posset, cape G A ad $\frac{1}{2}$ A S. Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum A infinite distat, quo casu parabola vertice S, axe S G, latere quovis recto describenda est. Patet hoc per Prop. XXXIV. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu circulus, posteriore hyperbola rectangula super diametro S A describi debet. (t) Patet per Prop. XXXIII. Tum centro S, intervallo æquante dimidium lateris recti, describatur circulus H k K, et ad corporis descendentis vel ascendentis locum G, et locum alium quemvis C, erigantur perpendicula G I, C D occurrentia conicæ sectioni vel circulo in I ac

(t) * *Patet per Prop. XXXIII.* Scilicet, fingatur sectio conica latitudinis quam minimæ, ut proximè coincidat cum axe A B, et in ea fingatur esse punctum G ex quo corpus movetur cum datâ velocitate, primo quæritur species illius sectionis, et ex proportione velocitatis datæ ad velocitatem quâcum corpus ad intervallum datum S G circa Centrum S revolveretur, agnoscetur, ex Cor. 7. Prop. XVI. et, si sit Ellipsis vel Hyperbola ejus axis major ex velocitate in G datâ etiam innotescet, per Prop. XXXIII. quia velocitas corporis cadentis in puncto G, est ad velocitatem corporis in distantia S G revolventis in subduplicatâ ratione distantiæ puncti G a vertice ulteriore Ellipsis vel Hyperbolæ ad ejus semi-Axem, unde si fiat G A ad $\frac{1}{2}$ S A in duplicatâ ratione velocitatis in G ad velocitatem corporis in distantiâ S G revolventis, erit A vertex ulterior Ellipsis vel Hyperbolæ, et $\frac{1}{2}$ S A semi-axis quæsitus.

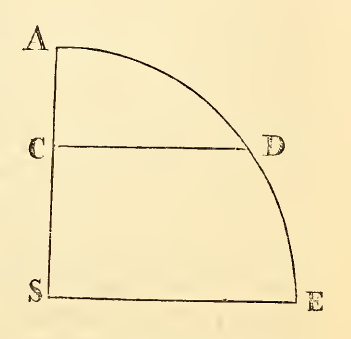
Fiat ergo in vertice S Parabola quævis, si curva evanescens in quâ G est, sit Parabola, vel fiat Circulus, vertice S Diametro S A, si sit Ellipsis; vel Hyperbola æquilatera eâdem

D. Dein junctis S I, S D, fiant segmentis S E I S, S E D S sectores H S K, H S k æquales, et per Prop. XXXV. corpus G describet spatium G C eodem tempore quo corpus K describere potest arcum K k. Q. e. f.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantiæ locorum a centro, dico quod cadentium tempora, velocitates et spatia descripta sunt arcubus, arcuumque sinibus rectis et sinibus versis respectivè proportionalia.

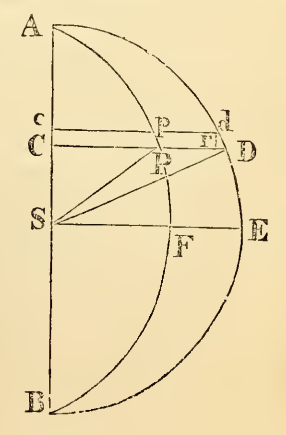
Cadat corpus de loco quovis A secundum rectam A S; et centro virium S, intervallo A S, describatur circuli quadrans A E, sitque C D sinus rectus arcus cujusvis A D; et corpus A, tempore A D, cadendo describit spatium A C, inque loco C acquiret velocitatem C D.



(u) Demonstratur eodem modo ex Propositione X, quo Propositio XXXII. ex Propositione XI. demonstrata fuit.

Diametro si ea curva sit Hyperbola, et si Corpus ex G perveniat in C, erectis usque ad curvas descriptas perpendicularibus G I, C D, erunt segmenta S E I, S E D proportionalia temporibus quibus corpus propositum ex G ad S, et ex C ad S movebitur per Prop. XXXII. : *Sed per Prop XXXV.*, corpus G spatia G S, C S, iisdem temporibus cadendo percurrit, quibus corpus K, describit arcus K H, k H; eodem igitur tempore percurritur G C, quo K k.

(u) * 404. *Demonstratur eodem modo.* Nam si corpus non cadit perpendiculariter, describet id (per Cor. 1. Prop. X.) ellipsim aliquam A P F B, cujus centrum congruit cum centro virium S; Super hujus ellipseos axe majore A B, describatur semicirculus A D B, et per corpus decidens transeat recta D P C perpendicularis ad axem, actisque D S, P S, erit area A S D, areæ A S P, atquè adeò etiam tempori proportionalis. Manente axe A B, minuatur perpetuò latitudo Ellipseos, et semper manebit area A S D, tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum, et orbe A P B jam coincidente cum axe A B, puncto P cum C, et F cum S, descendet corpus in rectâ A C, et area A S D, seu huic proportionalis arcus A D, evadet tempori proportionalis. In rectâ A C capiatur linea quam minima C c, agaturque c d, parallela C D, et circulum secans in puncto d, ex quo ad C D, demittatur perpendiculum d r, et arcus D d proportionalis erit tempori quo percurritur C c, (ex demonstr.) atquè adeò coëuntibus punctis C c, et d D, erit velocitas in C, ut $\frac{C\,c}{D\,d}$ (5, 145), sed ob triangula D r d, S C D, similia C c, seu d r : d D = C D : S D, id est, $\frac{C\,c}{d\,D} = \frac{C\,D}{S\,D}$. Quarè velocitas in loco C, est ut $\frac{C\,D}{S\,D}$, hoc est, ob constantem S D, ut C D. Q. e. d.



Corol. 1. (x) Hinc æqualia sunt tempora, quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad centrum S, et corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem A D E.

Corol. 2. Proinde æqualia sunt tempora omnia quibus corpora de locis quibusvis ad (y) usque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. III. Prop. IV.) æquantur.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

Positâ cujuscumque generis vi centripetâ, et concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ ascendentis vel descendentis tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis A in rectâ A D E C cadat corpus E, (z) deque loco ejus E erigatur semper perpendicularis E G, vi centripetæ in loco illo ad centrum C tendenti proportionalis: Sitque B F G linea curva quam punctum G perpetuo tangit. Coincidat autem E G ipso motus initio cum perpendiculari A B, et erit corporis velocitas in loco quovis E (a) ut recta, quæ potest aream curvilineam A B G E. Q. e. i.

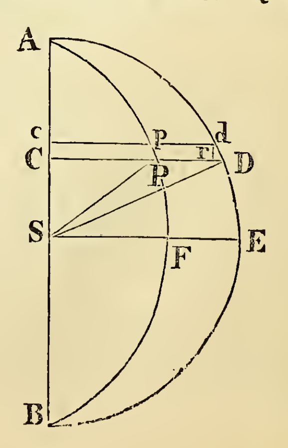
In E G capiatur E M rectæ, quæ potest aream A B G E, reciprocè proportionalis, et sit V L M linea curva, quam punctum M perpetuo tangit, et cujus asymptotos est recta A B producta; et erit tempus, quo corpus cadendo describit lineam A E, ut area curvilinea A B T V M E. Q. e. i.

(x) * *Corol.* 1. *Hinc æqualia.* Nam per Cor. 2. Prop. X. tempora revolutionum in ellipsibus quibusvis A P F, A D B, adeóque et tempora per ellipseon quadrantes A P F seu A S, A D E, sunt æqualia.

(y) * *Ad usque centrum.* Ex quiete cadunt.

405. Æqualia sunt tempora quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad locum C, et corpus aliud revolvendo describit arcum circuli A D; Cum enim corpus in circulo uniformiter revolvatur, erit tempus per A D ad tempus per A E seu ad tempus per A S, ut arcus A D, ad quadrantem A E, sed est etiam tempus per A C, ad tempus per A S, ut arcus A D, ad quadrantem A E, ergò tempus per A C, æquatur tempori per A D.

(z) * *Deque loco ejus E.* Id est, per omnia lineæ A C puncta erigantur perpendicula ut E G, vi centripetæ in singulis illis punctis



Etenim in rectâ A E capiatur linea quam minima D E datæ longitudinis, sitque D L F locus lineæ E M G, ubi corpus versabatur in D et si ea sit vis centripeta, ut recta, quæ potest aream A B G E, sit ut descendentis velocitas: erit area ipsa in duplicatâ ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in D et E, scribantur V et V + I, erit area A B F D ut V V, et area A B G E ut V V + 2 V I + I I, et divisim area D F G E ut 2 V I + I I, ideoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2VI + II}{DE}$, id [b] est si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo D F ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Est autem tempus, quo corpus cadendo describit lineolam D E, ut lineola illa directè et velocitas V inversè, estque vis ut velocitatis incrementum I directè et tempus inversè, ideoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est, ut longitudo D F. Ergo vis ipsi D F vel E G proportionalis facit ut corpus eâ cum velocitate descendat, quæ sit ut recta quæ potest aream A B G E. Q. e. d.

[c] Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola D E describatur, sit ut velocitas inversè, ideoque inversè ut linea recta quæ potest aream A B F D; [d] sitque D L, atque ideo area nascens D L M E, ut eadem linea recta inversè: erit tempus ut area D L M E,

proportionalia, sitque B F G curva ad quam omnia illa perpendicula terminentur. Possunt autem perpendicula illa ad arbitrium assumi, dummodò singula vi centripetæ in singulis locis proportionalia sint.

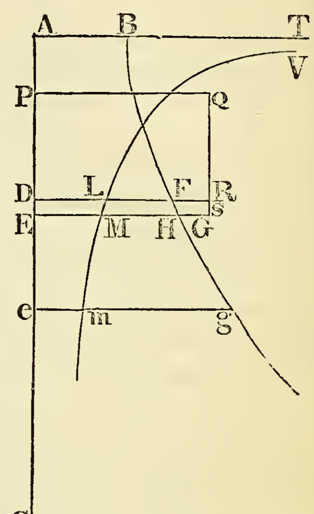
[a] *Ut recta, quæ potest aream curvilineam A B G E.* In prioribus Editionibus erat, *ut areæ curvilineæ A B G E latus quadratum;* hæ scilicet phrases synonymæ sunt; phrasis quæ hic juxta Editionem Londinensem adhibetur, veteribus Geometris est familiaris: Ea autem linea quæ potest figuram datam, est linea cujus quadratum est æquale illi figuræ datæ.

[b] 406. * *Id est, si primæ quantitatum nascentium,* &c. Seu coëuntibus punctis, D et E, F et G, fit area D F G E, æqualis rectangulo D F × D E (107) et velocitatis finitæ V, incrementem nascens I, evanescit respectu V, (107) ac proindè cum sit I : V = II : VI, quadratum II, evanescit respectu rectanguli V I, aut 2 V I; Quarè in hoc casu $\frac{DFGE}{DE}$, $= \frac{DF \times DE}{DE} = DF$, et $\frac{2VI + II}{DE} = \frac{2VI}{DE}$; Est igitur longitudo D F, ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideóque etiam, ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$: Quoniam autem velocitas per spatium evanescens D E, est uniformis (145), si tempus quo D E percurritur, dicatur T, erit $T = \frac{DE}{V}$, (5). Est autem vis ut $\frac{I}{T}$ (13) adeóque si loco T ponatur $\frac{DE}{V}$, erit vis ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est, ut longitudo D F, *ergò vis ipsi D F, vel E G,* &c.

[c] * *Porrò cum tempus.* Tempus enim est ut spatium uniformiter percursum directè et velocitas inversè (5), quarè si spatium constans fuerit, tempus est ut velocitas inversè.

[d] * *Sitque D L.* Est enim D L, ut D L in constantem D E ducta, hoc est, ut area nascens D L M E, sed D L est ut latus quadratum areæ A B F D inversè (per constr.) ergò area nascens D L M E, est ut idem latus quadratum inversè, hoc est, ut velocitas inversè, sive, ut tempus per D E. *Quarè summa omnium temporum est ut summa omnium arearum nascentium. Hoc est,* &c.

et summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per Corol. Lem. IV.) tempus totum quo linea A E describitur ut area tota A T V M E. Q. e. d.



Corol. 1. Si P sit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ (qualis vulgo supponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quâcunque cadens acquisivit eodem loco D, et in perpendiculari D F capiatur D R, quæ sit ad D F ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D, et compleatur rectangulum P D R Q, eique æqualis abscindatur area A B F D; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo D R S E, (e) cum sit area A B F D ad aream D F G E ut V V ad 2 V I, ideoque ut $\frac{1}{2}$ V ad I, id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; (f) et similiter area P Q R D ad aream D R S E ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ D F, D R, ideoque ut areæ nascentes D F G E, D R S E; erunt ex æquo areæ totæ A B F D, P Q R D ad invicem ut semisses totarum velocitatum, et propterea, ob æqualitatem velocitatum, æquantur.

Corol. (g) 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque D datâ

(e) * *Cum* (coëuntibus punctis D, E) *sit area A B F D ad aream D F G E, ut V V, ad 2 V × I;* Si enim A sit locus ex quo corpus cadere debet vi quâcumque ut eamdem in D velocitatem V acquisiverit ac si ex P vi gravitatis decidisset erit area A B F D, ut V V, et area D F G E, ut 2 V I + I I, hoc est, (406) ut 2 V I. Quarè A B F D : D F G E = V V : 2 V I = $\frac{1}{2}$ V : I.

(f) * *Et similiter area P Q R D ad aream D R S E,* hoc est, linea P D ad lineam D E (propter altitudinem communem D R = S E) *ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis,* scilicet cum velocitas in D sit V, ejus incrementum in E sit X, ex naturâ gravitatis altitudines ex quibus corpus cadit sunt ut quadrata velocitatum in fine lapsus acquisitarum, ergo erit P D ad P E ut V V ad V V + 2 V X + X², et dividendo P D : D E = V V : 2 V X + X² = (et omisso X² ut pote infinite parvo) V V : 2 V X = $\frac{1}{2}$ V : X; unde P Q R D : D R S E = $\frac{1}{2}$ V : X, sive invertendo D R S E : P Q R D = X : $\frac{1}{2}$ V; sunt verò incrementa illa I et X (13) ut vires generatrices id est ut D F ad D R, sive ut D F G E ad D R S E. Est ergo per hanc demonstrationem.

A B F D : D F G E = $\frac{1}{2}$ V : I
D F G E : D R S E = D F : D R = I : X
D R S E : P Q R D = X : $\frac{1}{2}$ V

Unde ex compositione rationum A B F D : P Q R D = $\frac{1}{2}$ V × I × X : I × X × $\frac{1}{2}$ V sive in ratione æqualitatis.

(g) * *Corol.* 2. *demonstratur.* Sit A punctum ex quo corpus cadere debet ut acquirat in loco D velocitatem cum quâ sursum vel deorsum

cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, et detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco e, erigendo ordinatam e g, et capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut est recta, quæ potest rectangulum P Q R D areâ curvilineâ D F g e vel auctum, si locus e est loco D inferior, vel diminutum, si is superior est, ad rectam quæ potest rectangulum solum P Q R D.

Corol. 3. Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam e m reciproce proportionalem lateri quadrato ex P Q R D + vel — D F g e, et capiendo tempus quo corpus descripsit lineam D e ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a P et cadendo pervenit ad D, ut area curvilinea D L m e ad rectangulum 2 P D × D L. Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam P D est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam P E in (h) subduplicatâ ratione P D ad P E, id est (lineola D E jamjam nascente) in ratione P D ad P D + $\frac{1}{2}$ D E seu 2 P D ad 2 P D + D E, et (i) divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam D E ut 2 P D ad D E, ideoque ut rectangulum 2 P D × D L ad aream D L M E; estque tempus quo corpus utrumque descripsit lineolam D E ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam D e, ut area D L M E ad aream D L m e, et ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum 2 P D × D L ad aream D L m e.

projicitur, erit, (ex Dem.) area A B g e proportionalis quadrato velocitatis corporis in loco e; Est autem (ex Dem.) area A B F D, æqualis rectangulo P Q R D, adeóque area A B g e = P Q R D + D F g e si locus e loco D inferior fuerit, et A B g e = P Q R D — D F g e, si locus e loco D superior, hoc est, si corpus sursum projectum sit; ergò velocitas corporis in loco e, est ut $\sqrt{PQRD \mp DFge}$; cumque sit velocitas in D, ut $\sqrt{ABFD}$, sive ut huic æqualis $\sqrt{PQRD}$ (ex Dem.) erit velocitas in e. ad velocitatem in D, ut $\sqrt{PQRD \mp DFge}$, ad $\sqrt{PQRD}$.

(h) * *In subduplicatâ ratione P D, ad P E* (27), *id est, lineola D E, jamjam nascente in ratione P D, ad P D* + $\frac{1}{2}$ *D E*; quadratis enim his ultimis terminis fiet P D² : P D² + P D × D E + $\frac{1}{4}$ D E²; et cum sit P D quantitas finita; et D E nascens, evanescit (107) $\frac{1}{4}$ D E² respectu P D × D E; adeóque P D × D E ∓ $\frac{1}{4}$ D E² = P D × D E. Undè est P D² : P D² + P D × D E + $\frac{1}{4}$ D E² = P D² : P D² + P D × D E = P D : P D + D E, seu P E; est igitur P D : P E in ratione duplicatâ P D ad P D + $\frac{1}{2}$ D E, atque adeò P D ad P D + $\frac{1}{2}$ E D, in ratione subduplicatâ P D, ad P E.

(i) * *Et divisim.* Tempus per P D, vi uniformi descriptum est ad tempus per D E, ut 2 P D, ad D E, adeóque ut rectangulum 2 P D × D L, ad rectangulum D E × D L, seu ad aream D L M E; tempus per rectam P D, vi uniformi descriptam sit T, tempus per D E, sit θ, et tempus per D e, sit t, erit (ex Dem.) T : θ = 2 P D × D L : D L M E, estque idem tempus θ, quo utrumque corpus describit lineam D E, siquidem utriusque eadem est velocitas in D: sed (ex constructione) tempus quo corpus inæquabili motu describit lineam D E est ad tempus quo describit lineam D e, ut area D L M E, ad aream D L M e, ergo θ : t = D L M E : D L m e; undè ex æquo T : t = 2 P D × D L : D L m e.

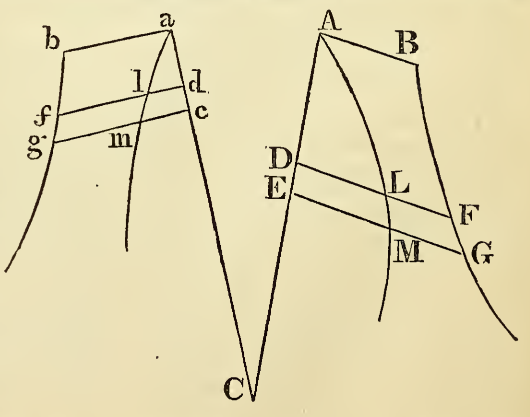
407. Sit spatium a corpore cadente descriptum A E = x, velocitas in E acquisita = v, tempus quo A E, percurritur = t, vis centripeta in E, hoc est, E G = y, erunt d x, d v, d t, quantitatum x, v, t, fluxiones seu incrementa nascentia vel evanescentia (146. 158), cumque velocitas per spatium nascens D E, sit uniformis (145) erit $v = \frac{dx}{dt}$ (5), ac proindè velocitatis incrementum $dv = \frac{ddx}{dt}$, si sumatur d t, con-

stans (164) sed est (13) $y = \frac{dv}{dt}$, adeóque si loco dv, substituatur $\frac{ddx}{dt}$, invenietur $y = \frac{ddx}{dt^2}$. Hæ sunt formulæ quas tradidit Varignonius in Comm. Paris. an. 1700. Harum formularum ope, datâ inter duas ex variabilibus quatuor y, x, v, t, æquatione quâvis, obtinebuntur tres æquationes quæ simul quatuor duntaxat variabiles complectentur, ex quibus proindè æquationibus per calculum fluxionum et solitas reductiones inveniri poterit æquatio inter duas quaslibet ex quatuor variabilibus y, x, v, t, ut demonstravit Varignonius in Comm. Paris. an. 1700, qui in iisdem Commentariis an. 1707. 1720. præclara de ascensu et descensu corporum perpendiculari theoremata edidit.

408. *Corol.* Cum sit juxtà superiores formulas $dt = \frac{dx}{v}$, et $dt = \frac{dv}{y}$, ac proindè $\frac{dx}{v} = \frac{dv}{y}$, vel $y\,dx = v\,dv$, erit $S.\,y\,dx = \frac{1}{2}v^2$. Sed $y\,dx = EG \times DE$, seu fluxioni areæ A B G E; ergò (147) $S.\,y\,dx =$ areæ A B G E, $= \frac{1}{2}v^2$, et $v = \sqrt{2ABGE}$. Est igitur ob constantem 2, velocitas in loco E, ut recta quæ potest aream curvilineam A B G E. Hinc est 1[us]. casus Prop. XXXIX. Newt. Quoniam verò $dt = \frac{dx}{v}$ et $v = \sqrt{2ABGE}$, erit $dt = \frac{dx}{\sqrt{2ABGE}}$; quarè si capitur $EM = \frac{1}{\sqrt{2ABGE}}$, erit $dt = EM \times dx = EM \times DE$, et sumptis utrinque fluentibus $t =$ area A L M E. Hic est casus 2[us]. Prop. XXXIX. Newt.

409. Superior expressio vis centripetæ $y = \frac{dv}{dt}$ si vis centripeta consideretur ut gravitas in centrum, supponit massam corporum aut eandem esse aut ponderibus proportionalem. Verùm si pondera non sint massis proportionalia, diversæque inter se massæ conferantur, tum habenda est massarum ratio ut determinetur tota corporis gravitas, seu vis tota quâ centrum versus urgetur. Sit vis illa $= y$, et massa $= m$, erit quidem semper $v = \frac{dx}{dt}$ (5), at fiet $y = \frac{m\,dv}{dt}$. Etenim vis centripeta considerari potest ut potentia motrix, quæ corpori indesinenter applicata, motum in eo suâ actione producit, quæque tempusculo evanescente eadem constanter permanet, et uniformiter agit (117). Porrò factum ex potentiâ motrice uniformiter agente et tempore actionis æquivalet quantitati actionis; crescit enim actionis quantitas cum potentiâ motrice et tempore actionis proportionaliter, et factum ex massâ corporis et celeritate, seu quantitas motûs producti est id quod actione illâ effectum est, seu quantitati actionis æquipollet, cum necessarius sit nexus inter quantitatem actionis et quantitatem effectûs et alter alteri æquivaleat. Quare $y\,dt = m\,dv$, et $y = \frac{m\,dv}{dt}$.

410. Si itaque pondera non supponantur massis proportionalia, et corpora duo A, a, quorum massæ M, m ad idem vel diversa virium centra C, perpendiculariter cadant, earumque vires centripetæ in singulis locis E, e, sint $Y = EG$, $y = eg$, velocitates V, v, spatia descripta $X = AE$, $x = ae$, tempora quibus descripta sunt T, t, invenietur (409) $v = \frac{dx}{dt}$, $V = \frac{dX}{dT}$, et $y\,dt = m\,dv$, $Y\,dT = M\,dV$, adeóque (408), $S.\,y\,dx = abge = \frac{1}{2}mvv$; et similiter $S.\,Y\,dX = ABGE = \frac{1}{2}MVV$, ob constantes M, m; undè $v = \sqrt{\frac{2abge}{m}}$, $V = \sqrt{\frac{2ABGE}{M}}$: proindeque $v : V = \sqrt{\frac{2abge}{m}} : \sqrt{\frac{2ABGE}{M}}$. Quarè $dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx\sqrt{m}}{\sqrt{2abge}}$, et $dT = \frac{dX\sqrt{M}}{\sqrt{2ABGE}}$; undè si ponatur $em = \frac{1}{\sqrt{2abge}}$ et $EM = \frac{1}{\sqrt{2ABGE}}$, erit $dt = de \times em \times \sqrt{m}$, et $dT = DE \times EM \times \sqrt{M}$, ac consequenter $t = alme \times \sqrt{m}$: et $T = ALME \times \sqrt{M}$. Unde $t : T = alme \times \sqrt{m} : ALME \times \sqrt{M}$.



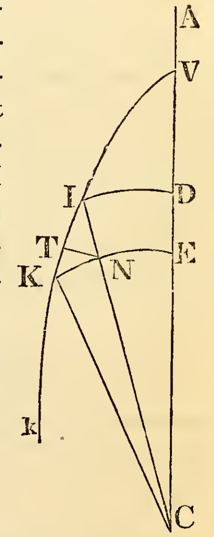
SECTIO VIII.

De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

Si corpus, cogente vi quâcunque centripetâ, moveatur utcunque, et corpus aliud rectà ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab A per D, E, ad centrum C, et moveatur corpus aliud a V in lineâ curvâ V I K k. Centro C intervallis quibusvis describantur circuli concentrici D I, E K rectæ A C in D et E, curvæque V I K in I et K occurrentes. Jungatur I C occurrens ipsi K E in N; et in I K demittatur perpendiculum N T; sitque circumferentiarum circulorum intervallum D E vel I N quam minimum, et habeant corpora in D et I velocitates æquales. Quoniam distantiæ C D, C I æquantur, erunt vires centripetæ in D et I æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas D E, I N: et si vis una I N (per legum Corol. 2.) resolvatur in duas N T et I T, vis N T, agendo secundum lineam N T corporis cursui I T K perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus a cursu rectilineo, facietque ipsum de orbis tangente perpetuo deflectere, inque viâ curvilineâ I T K k progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera I T, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit sibi ipsi proportionalem. ([k]) Proindè corporum in D et I accelerationes æqualibus



([k]) * *Proindè corporum in D et I accelerationes æqualibus temporibus factæ sunt ut lineæ D E, I T.* Sunt enim vires acceleratrices ut accelerationes nascentes, seu celeritatum incrementa nascentia directè et tempora inversè (13), undè temporibus æqualibus accelerationes nascentes sunt ut vires acceleratrices, temporibus autem inæqualibus ut vires acceleratrices et tempora conjunctim; sed lineæ D E, I T, sunt ut vires acceleratrices in directionibus D E, I T; ergò corporum in D et I accelerationes æqualibus temporibus factæ sunt ut lineæ D E, I T; temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ et tempora conjunctim.

temporibus factæ (si sumantur linearum nascentium D E, I N, I K, I T, N T rationes primæ) sunt ut lineæ D E, I T: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ et tempora conjunctim. Tempora autem quibus D E et I K describuntur, ob æqualitatem velocitatum sunt ut viæ descriptæ D E et I K, ideoque accelerationes, in cursu corporum per lineas D E et I K, sunt ut D E et I T, D E et I K conjunctim, id est ut D E quad. et I T × I K rectangulum. ([l]) Sed rectangulum I T × I K æquale est I N quadrato, hoc est, æquale D E quad. et propterea accelerationes in transitu corporum a D et I ad E et K æquales generantur. Æquales igitur sunt corporum velocitates in E et K: et eodem argumento semper reperientur æquales in subsequentibus æqualibus distantiis. Q. e. d.

Sed et ([m]) eodem argumento corpora æquivelocia et æqualiter a centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si corpus vel oscilletur pendens a filo, vel impedimento quovis politissimo et perfectè lubrico cogatur in lineâ curvâ moveri, et corpus aliud rectâ ascendat vel descendat, sintque velocitates eorum in eâdem quâcunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque corporis penduli filo vel ([n]) impedimento vasis absolutè lubrici idem præstatur quod vi transversâ N T. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.

Corol. 2. Hinc etiam si quantitas P sit maxima a centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in trajectoriâ quâcunque revolvens, deque quovis trajectoriæ puncto, eâ quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitque quantitas A distantia corporis a centro in alio quovis orbitæ puncto, et vis centripeta semper sit ut ipsius A dignitas

([l]) * *Sed rectangulum I T × I K æquale est I N quadrato*, cum sit K N I angulus rectus, et linea N T ab basim I K normalis, adeóque crus I N medium proportionale inter hypothenusam I K et illius abscissam I T.

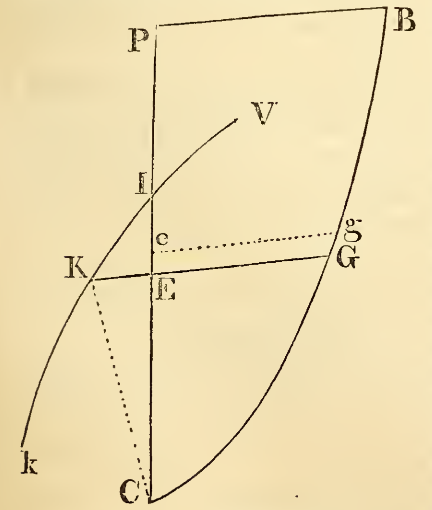
([m]) 411. *Et eodem argumento.* Vis enim acceleratrix motum corporis ascendentis eodem modo retardat, quo motum descendentis accelerat in iisdem locis (25); undè vera est propositio sive corpus utrumque descendat aut ascendat, sive descendente uno, alterum ascendat.

412. Si centrum C in infinitum abeat, rectæ A C, I C fiunt parallelæ et arcus D I, E K in rectas, lineis A C, I C perpendiculares, mutantur. Valet igitur propositio etiam ubi vis centripetæ directio A C, I C sibi perpetuò parallela est, dummodò puncta D, I æque alta sint, hoc est, in eâdem rectâ ad directionem vis centripetæ perpendiculari sumantur.

([n]) * *Impedimento vasis.* (Vid. not. 83. 86. 89. 90 91.)

quælibet A^{n-1}, cujus index n — 1 est numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque ideo datur. (°) Namque velocitas rectâ ascendentis ac descendentis (per Prop. XXXIX.) est in hâc ipsâ ratione.

(°) 413. *Namque velocitas rectâ ascendentis ac descendentis (per Prop. XXXIX.) est in hâc ipsâ ratione* $\sqrt{P^n - A^n}$; Sit enim centrum virium C, distantia C P ex quâ corpus incipit cadere dicatur P, visque centripeta sit semper ut abscissarum C E (quæ dicuntur A in hoc Corollario) dignitas n—1, erigantur in omnibus punctis E perpendiculares E G vi centripetæ CE^{n-1} proportionales, perpendicularis P B in puncto P erecta dicatur b, et per omnium perpendicularium vertices ducatur curva, dicantur x abscissæ C E, dicantur y ordinatæ E G, erit $b : y = P^{n-1} : x^{n-1}$, ideoque $y = \frac{b x^{n-1}}{P^{n-1}}$. Unde liquet curvam hanc esse generis parabolici et ejus quadraturam facilè obtineri, sit enim E e = d x fluxio abscissæ C E, erit E e g G = y d x fluxio areæ C E G, et loco y posito ejus valore $\frac{b x^{n-1}}{P^{n-1}}$ erit $y\,d\,x = \frac{b x^{n-1}}{P^{n-1}} d\,x$, cujus fluens est (165) $\frac{b x^n}{n P^{n-1}}$, quæ exprimit aream quæ respondet abscissæ x, sive A, itaque deletis constantibus, erunt semper areæ C E G sicut x^n sive A^n.



Jam verò per Prop. XXXIX., velocitas corporis cadentis in puncto E, est ut linea quæ potest aream P B G E, sive quæ potest differentiam arearum C P B, C E G, est autem semper C P B ad C E G ut P^n ad A^n, earum ergo differentiæ erunt semper ut $P^n - A^n$, ideoque velocitas corporis cadentis in E erit semper ut $\sqrt{P^n - A^n}$.

His positis si corpus vel oscillans vel in trajectoriâ quâcumque V I K k revolvens in puncto I velocitatem eam habeat quâ (lineâ C I in P productâ) ex I in P ascendere potuisset, vel quod idem est quam acquireret (25) ex P ad I decidendo, in omni aliâ altitudine C K sive A eamdem habebit celeritatem quam corpus acquiret rectâ descendendo ex distantiâ P a centro usque ad altitudinem æqualem C K, per Prop. præsentem, sed celeritates corporis ex P rectâ descendentis erunt semper ut $\sqrt{P^n - A^n}$. Ergo etiam velocitates corporis in trajectoriâ revolventis erunt semper in quâvis distantiâ A a centro ut $\sqrt{P^n - A^n}$. Q. e. d.

414. *Scholium.* Vera est Propositio XL. si corporum duorum (quorum unum in rectâ alterum in curvâ lineâ fertur) massæ sint æquales et pondera in locis æquè altis æqualia aut pondera massis inæqualibus proportionalia in locis æquè altis. Illud idem theorema ad majorem universalitatem admodum eleganter reduxit Varignonius in Comm. Paris. an. 1719. Nos quoque principiis suprà positis insistentes, universalius Newtoni propositionem demonstrabimus.

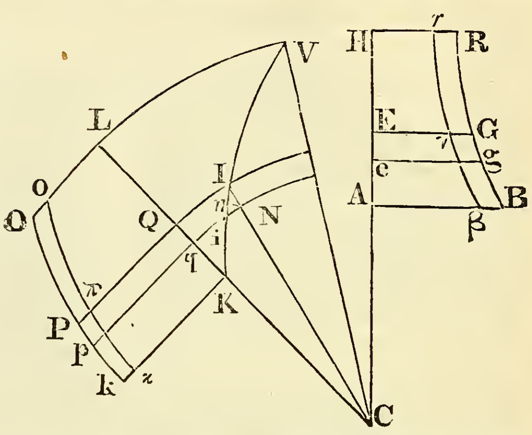
Corpora duo quorum Massæ M, m *(vid. fig. in sub. pag.)* ad idem vel diversa virium centra C ex locis quibuslibet datis H, V descendant, alterum quidem M, perpendiculariter per rectam H C; alterum verò m per rectam vel curvam quamvis V I K.

Primùm. De loco quovis E lineæ H C erigatur semper perpendicularis E G vi centripetæ in loco illo ad centrum tendenti proportionalis, sitque R G B linea curva quam punctum G perpetuò tangit: perpendiculares in punctis datis H et A sint H R et A B, perpendicularis in puncto variabili E sit E G cui proxima ducatur linea e g; velocitates in punctis datis H et A sint b et a, velocitas in puncto variabili E sit V, et vis centripeta in eo puncto dicatur F, cui E G est proportionalis, sit abscissa H E, s, ejus fluxio E e erit d s, et tempusculum quo describitur E e lapsu corporis M sit d T; erit (15 et 409) vis centripeta F sive $E G = \frac{M \times d V}{d T}$, et (5) d s = V d T. Unde erit E G × d s sive fluxio areæ H R G E = M V d V, cujus fluens erit $\frac{1}{2}$ M V V (165) junctâ aut detractâ quâdam constanti quantitate; coëuntibus enim H et E est in H, V = b ideoque fit $\frac{1}{2}$ M V V

$= \frac{1}{2}$ M b b dum area H R G E evanescit, itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2}$ M V V detrahenda est quantitas constans $\frac{1}{2}$ M b b ut areæ H R G E sit æqualis: coëuntibus verò E et A, cum in puncto A sit V = a erit in eo casu H R G E sive H R B A $= \frac{1}{2}$ M a a $- \frac{1}{2}$ M b b, et sumpto quovis puncto E erit H R B A — H R E G sive E G B A $= \frac{1}{2}$ M a a $- \frac{1}{2}$ M b b $- \frac{1}{2}$ M V V $+ \frac{1}{2}$ M b b $= \frac{1}{2}$ M a a $- \frac{1}{2}$ M V V, Unde sic tandem incidimus in duas æquationes
H R G E $= \frac{1}{2}$ M V V $- \frac{1}{2}$ M b b et
E G B A $= \frac{1}{2}$ M a a $- \frac{1}{2}$ M V V
quibus comparatis cum iis quas respectu corporis m in curvâ V I K moti simili modo deducemus, velocitates corporum in quibusvis æqualibus vel inæqualibus altitudinibus, in quâvis virium centripetarum hypothesi et in quâlibet ponderum et massarum proportione conferri poterunt.

Secundò itaque, per locum K datum in curva V I K agatur recta C K L æqualis C V et centro C per punctum quodvis I lineæ V I K describatur arcus circularis I Q rectæ C L occurrens in Q per punctum Q erigatur semper perpendiculum P Q proportionale vi centripetæ quâ corpus in distantiâ C Q versus C urgetur: sitque O 1 k curva quam punctum P perpetuò tangit, et perpendiculares in punctis datis L et K sint L O et K k. Dicatur arcus V I, x, et linea L Q, y; sit linea I i fluxio arcus V I, et radio C i describatur arcus lineæ C L occurrens in q, et lineæ C I in N, erit Q q = I N, ex q erigatur perpendicularis q p usque ad curvam O P k, et ex N ducatur N n perpendicularis in arcum I i.

Velocitates corporis m in punctis datis L et K dicantur e et c velocitas in puncto variabili Q sit u: Vis totalis centripeta in Q semper exprimatur per Q P, eadem vis Q P aget in I (propter æquales C Q, C I,) secundùm directionem I N, resolvatur ergo illa vis in vires duas quarum una agit in corpus m secundum directionem I n, altera secundum directionem N n, erit I N ad I n ut vis tota Q P ad vim quâ corpus urgetur secundum curvam, sed ob triangula I N n, I N i similia est I N ad I n sicut I i ad I N sive Q q, ideoque I i ad Q q ut vis Q P ad vim agentem secundum curvam quæ itaque erit $\frac{QP \times Qq}{Ii}$; sit d t, tempusculum quo describetur I i per eam vim, eritque (13 et 409) ea vis $\frac{QP \times Qq}{Ii} = \frac{m\,d\,u}{d\,t}$; unde erit $QP \times Qq = \frac{m\,d\,u}{d\,t} \times Ii$ sed (5) est I i spatiolum percursum tempore d t velocitate u est ergo æquale u d t ideoque $QP \times Qq, \frac{m\,d\,u}{d\,t} \times u\,d\,t = m\,u\,d\,u$, sed $QP \times Qq = m\,u\,d\,u$ est fluxio areæ L O Q P, hujus fluens est



$\frac{1}{2}$ m u u (165) additâ aut detractâ quâdam constanti quantitate, coëuntibus enim Q et L, fit in L, u = e ideoque fit $\frac{1}{2}$ m u u $= \frac{1}{2}$ m e e dum area L O Q P evanescit, itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2}$ m u u detrahenda est quantitas constans $\frac{1}{2}$ m e e, eritque L O Q P $= \frac{1}{2}$ m u u $- \frac{1}{2}$ m e e, et coëuntibus Q et K sit u = c et L O K k $= \frac{1}{2}$ m c c $- \frac{1}{2}$ m e e et L O K k — L O Q P sive Q P K k $= \frac{1}{2}$ m c c $- \frac{1}{2}$ m u u, sicque tandem incidimus in has duas æquationes
L O Q P $= \frac{1}{2}$ m u u $- \frac{1}{2}$ m e e et
Q P K k $= \frac{1}{2}$ m c c $- \frac{1}{2}$ m u u eâdem methodo quâ in primo calculo sumus usi.

415. *Corol.* 1. Ex primâ æquatione primi calculi est $V = \frac{\sqrt{2\,HRGE + Mbb}}{\sqrt{M}}$, ex primâ æquatione secundi calculi est $u = \frac{\sqrt{2\,LOQP + mee}}{\sqrt{m}}$, unde invenitur $V : u = \frac{\sqrt{2\,HRGE + Mbb}}{\sqrt{M}} : \frac{\sqrt{2\,LOQP + mee}}{\sqrt{m}}$.

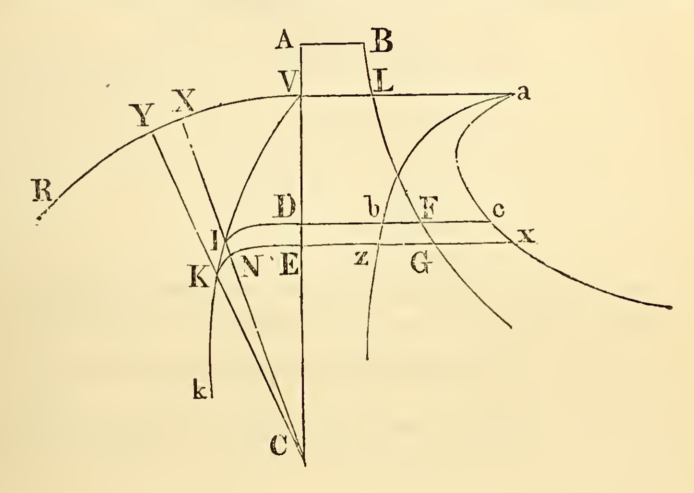
Ex secundâ verò æquatione primi calculi est $V = \frac{\sqrt{Maa - 2\,EGBA}}{\sqrt{M}}$ et ex secunda æquatione 2[di]. calculi $u = \frac{\sqrt{mcc - 2\,QPKk}}{\sqrt{m}}$, et hinc est $V : u = \frac{\sqrt{Maa - 2\,EGBA}}{\sqrt{M}}, \frac{\sqrt{mcc - 2\,QPKk}}{\sqrt{m}}$.

416. *Corol.* 2. Si in perpendiculo Q P, itâ capiatur Q π, ut factum π Q × m, sit ubique

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

Positâ cujuscunque generis vi centripetâ et concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum C et invenienda sit trajectoria V I K k. Detur circulus V R centro C intervallo quovis C V descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli I D, K E trajectoriam secantes in

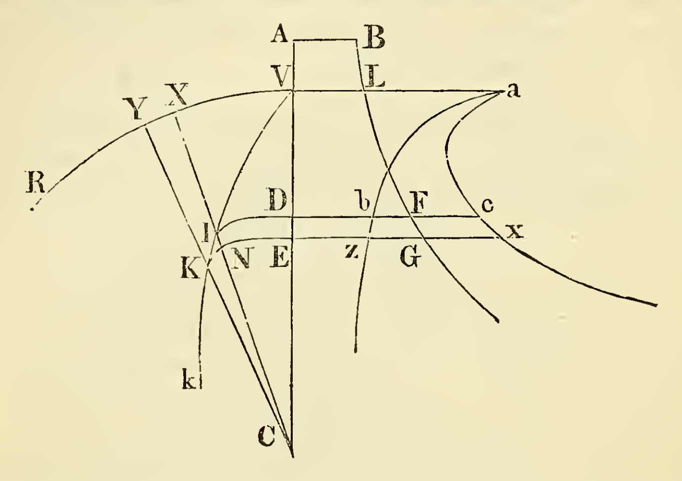


I et K rectamque C V in D et E. Age tum rectam C N I X secantem circulos K E, V R in N et X, tum rectam C K Y occurrentem circulo V R in Y. Sint autem puncta I et K sibi invicem vicinissima, et pergat corpus ab V per I et K ad k; sitque punctum A locus ille de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco D velocitatem acquirat æqualem velocitati

gravitati corporis in I proportionale, seu rectæ Q P æquale, erit $2\,L\,o\,\pi\,Q \times m = 2\,L\,O\,Q\,P$, adeóque $u = \frac{\sqrt{2\,L\,O\,Q\,P + m\,e\,e}}{\sqrt{m}} = \sqrt{2\,L\,o\,\pi\,Q + e\,e}$ et $u = \sqrt{c\,c - 2\,Q\,\pi\,z\,K}$. Et similiter si ponatur $E\,\gamma \times M = E\,G$, erit $V = \sqrt{2\,H\,r\,\gamma\,E + b\,b}$ et $V = \sqrt{a\,a - 2\,E\,\gamma\,\beta\,A}$.

417. *Corol.* 3. Si puncta H et V, E et I, fuerint æquè alta, et in illis lineæ E G, Q P vi centripetæ proportionales, sint semper æquales, erit $H\,R\,G\,E = L\,O\,P\,Q$. Quarè si prætereà massæ M, m, et velocitates b, e, in punctis H, V, æquentur, erit $\frac{2\,H\,R\,G\,E + M\,b\,b}{M} = \frac{2\,L\,O\,Q\,P + m\,e\,e}{m}$, adeóque $V = u$, in omnibus punctis æquè altis E et I. Si in punctis æquè altis H et V, E et I, vires centripetæ massarum M et m rationem semper habeant, erit $H\,R\,G\,E : L\,O\,Q\,P = M : m$, proindéque $\frac{2\,H\,R\,G\,E}{M} = \frac{2\,L\,O\,Q\,P}{m}$. Undè si prætereà ponatur $b\,b = e\,e$, erit $V = u$, quæ est Propositio XL. Newtoni. Patet etiam in 4. superioribus formulis (415), Massas M et m exterminari, si fuerint ponderibus proportionales.

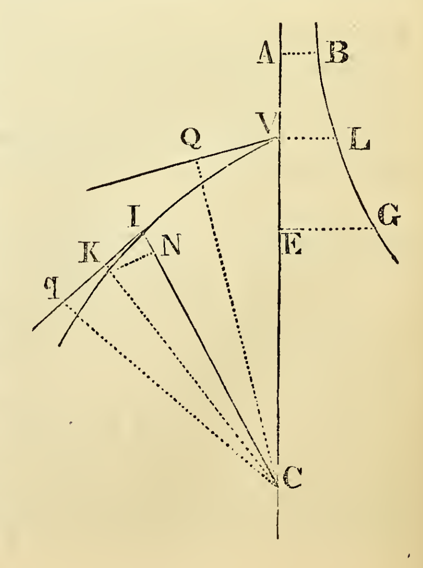
corporis prioris in I. Et stantibus quæ in Propositione XXXIX. lineola I K, dato tempore quam minimo descripta, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ potest aream A B F D, et (p) triangulum I C K tempori



proportionale dabitur, ideoque K N erit reciprocè ut altitudo I C, id est, si detur quantitas aliqua Q, et altitudo I C nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, et ponamus eam esse magnitudinem ipsius Q ut sit in aliquo casu $\surd$ A B F D ad Z ut est I K ad K N, et (q) erit in omni casu $\surd$ A B F D ad Z ut I K ad K N, et A B F D

(p) * *Triangulum I C K tempori quo describitur proportionale* (per Prop. I.) dato tempore *dabitur;* Est autem trianguli I C K area $= \frac{1}{2}$ K N $\times$ I C. Quarè erit rectangulum K N $\times$ I C quantitati constanti æquale, et hinc lineola K N æqualis quantitati constanti ad I C applicatæ, hoc est, K N reciprocè ut I C.

(q) * *Erit in omni casu.* Quoniam I K est semper ut $\surd$ A B F D, hoc est I K ad $\surd$ A B F D in datâ ratione, et similiter Z ad K N in datâ ratione, si in aliquo casu sit $\surd$ A B F D ad Z ut I K ad K N adeóque $\surd$ A B F D ad I K ut Z ad K N, erit in omni casu $\surd$ A B F D ad I K ut Z ad K N, ac proindè $\surd$ A B F D ad Z ut I K ad K N.



418. Ducatur V L parallela E G quæ curvæ B F G occurrat in L, et ex centro C ad Q V tangentem in V, ac ad q I, tangentem in I, demissis perpendiculis C Q, C q, erit C Q $\times$ $\surd$ A B L V quantitas constans et æqualis C q $\times$ $\surd$ A B F D. Nam (per Corol. 1. Prop. I.) velocitas in V (adeóque $\surd$ A B L V) est ut C Q reciprocè, id est, ut $\frac{1}{C\,Q}$ directè et proindè C Q $\times$ $\surd$ A B L V ut quantitas constans

ad Z Z ut I K q ad K N q, et divisim A B F D — Z Z ad Z Z ut I N (r) quad. ad K N quad. ideoque $\sqrt{\overline{ABFD - ZZ}}$ ad Z seu $\frac{Q}{A}$ ut I N ad K N, et propterea A × K N æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. (s) Unde cum Y X × X C sit ad A × K N ut C X q ad A A, erit rectangulum X Y × X C æquale $\frac{Q \times IN \times CX \text{ quad.}}{AA \sqrt{ABFD - ZZ}}$. Igitur si in perpendiculo D F capiantur semper D b, D c ipsis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$, $\frac{Q \times CX \text{ quad.}}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$ æquales respectivè, et describantur curvæ lineæ a b, a c, quas puncta b, c perpetuo tangunt; deque puncto V ad lineam A C erigatur perpendiculum V a abscindens areas curvilineas V D b a, V D c a, et erigantur etiam ordinatæ E z, E x: quoniam rectangulum D b × I N seu D b z E æquale est dimidio rectanguli A × K N seu triangulo I C K; et rectangulum D c × I N seu D c x E æquale est dimidio rectanguli Y X × X C seu triangulo X C Y; hoc est, quoniam arearum V D b a, V I C æquales semper sunt nascentes particulæ D b z E, I C K, et arearum V D c a, V C X æquales semper sunt nascentes particulæ D c x E, X C Y, erit area genita V D b a æqualis areæ genitæ V I C, ideoque tempori proportionalis, et area genita V D c a æqualis sectori genito V C X. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco V, (†) dabitur area ipsi proportionalis V D b a, et inde dabitur corporis altitudo C D vel C I; et area V D c a, eique æqualis sector V C X unà cum ejus angulo V C I. Datis autem angulo V C I et altitudine C I datur locus I, in quo corpus completo illo tempore reperietur. Q. e. i.

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est, ap-

1, et pariter velocitas in I (adeóque $\sqrt{ABFD}$) est ut C q reciprocè, id est, ut $\frac{1}{Cq}$ directè, et proindè $Cq \times \sqrt{ABFD}$, ut quantitas constans 1, adeóque $Cq \times \sqrt{ABFD} = CQ \times \sqrt{ABLV}$.

Si itaque capiatur $Q = CQ \times \sqrt{ABLV} = Cq \times \sqrt{ABFD}$, et $Z = \frac{Q}{IC}$ (unde est $Q = Z \times IC$) erit semper $\sqrt{ABFD} : Z = IC : Cq = IK : KN$. Nam propter triangula I K N, I C q similia, est I K ad K N ut I C ad C q, sed quia $Z \times IC$ (= Q) $= Cq \times \sqrt{ABFD}$ est $IC : Cq = \sqrt{ABFD} : Z$ ergo $IK : KN = IC : Cq = \sqrt{ABFD} : Z$.

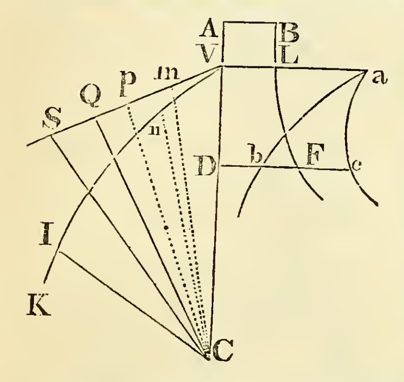
(r) × *Ut* IN^2, *ad* KN^2. Est enim ob angulum I N K rectum, $IK^2 - KN^2 = IN^2$.

(s) * *Undè cum* $YX \times XC : A \times KN = CX^2 : AA$. Sunt enim triangula nascentia C K N, C Y X similia et eorum proindè areæ duplæ $YX \times XC$, $IC \times KN$, seu $A \times KN$, in ratione duplicatâ homologorum laterum C X, C I, sive A.

(†) 419. *Dabitur area ipsi proportionalis.* Datâ corporis velocitate et directione seu tan-

sides trajectoriarum expeditè inveniri possunt. Sunt enim apsides puncta illa in quibus recta I C per centrum ducta incidit perpendiculariter in

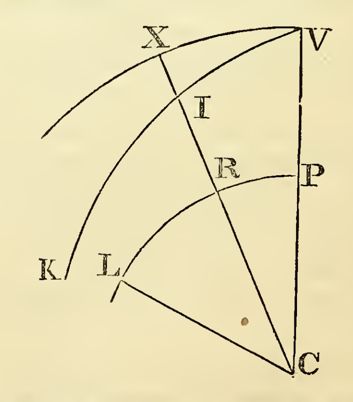
gente in V, datur spatium V S quod corpus in illâ tangente dato tempore quo describitur area V I C uniformi motu describeret. Porrò junctâ



C S, area trianguli C S V æqualis erit areæ V I C, quam corpus in curvâ V I K motum describit eodem tempore quo uniformiter percurreretur V S. Nam tempusculo nascente velocitate æquabili spatium V m describatur in tangente V S, et eodem tempusculo arcus V n describatur in curvâ V I K, erit (per Prop. I.) area V C m = V C n, et ob velocitatem uniformem in tangente singulo tempusculo lineolæ æquales V m, m p, &c. percurrentur ideoque æquabuntur triangula V C M, m C p, &c., sed pariter omnes areæ æqualibus tempusculis descriptæ in curva V I K æquantur areæ V C n sive V C m, undè patet summam arearum V C m + m C p +, &c. æqualem esse summæ arearum quæ eodem tempore in curvâ describuntur, hoc est, totas areas V C S, V I C, eodem tempore descriptas esse æquales. Cum igitur data sit tangens V S et perpendiculum C Q in eam ductum, ex tempore dato dabitur area trianguli V C S, et area V I C ei æqualis; Hincque concessis figurarum quadraturis, invenietur area V D b a = V C S = V I C, et indè dabitur V D, atque C D = C V — V D; dabitur quoque constans Q = Q C × $\sqrt{\text{A B L V}}$ (418).

420. Si ponatur variabilis I C = C D = x, data V C = a, erit V D = a — x et Z = $\frac{\text{Q}}{\text{x}}$, concessisque figurarum curvilinearum quadraturis area A B F D exprimi poterit per datas A V, V C et variabilem x, ac proindè iisdem quantitatibus exprimi poterunt $\frac{\text{Q}}{2\sqrt{\text{ABFD}-\text{ZZ}}}$ et $\frac{\text{Q} \times \text{C X}^2}{2\,\text{A A}\sqrt{\text{A B F D}-\text{Z Z}}}$, seu ordinatim applicatæ D b, D c; et hinc obtinebuntur æquationes ad curvas a b, a c, ex constantibus et solis variabilibus C D, D b, vel D c, compositæ, curvæque illæ poterunt describi. Quoniam porrò est (per constr.) sector V C X, æqualis areæ V D c a, erit arcus V X = $\frac{2\ \text{V D c a}}{\text{C V}}$; quarè invenitur angulus V C X, et indè punctum I, in trajectoriâ V I K.

421. *Scholium.* Datâ vi centripetâ in singulis locis trajectoriæ V I K, et concessis figurarum curvilinearum quadraturis, trajectoria V I K describi potest, ut in Probl. XXVIII. licet gravitates massis non supponantur proportionales, nec vis centripeta æqualis in æqualibus a centro distantis. Nam factum M × E G, ex corporis massa M in perpendiculum E G, ejusdem corporis gravitatem in loco quovis I exhibeat, sitque B L F G curva quam punctum G perpetuò tangit, velocitas in loco V dicatur C, linea A B ita abscindatur ut sit area A B L V = $\frac{1}{2}$ C C; erit velocitas in I = $\sqrt{2\,\text{V L F D} + 2\ \text{A B L V}}$ (416), id est = $\sqrt{2\ \text{A B F D}}$, adeóque ut $\sqrt{\text{A B F D}}$, undè *lineola I K dato tempore quam minimo descripta erit ut* $\sqrt{A\ B\ F\ D}$, *et triangulum I C K*, &c. Cætera quæ in Probl. XXVIII. solutione sequuntur ratiocinia et constructiones manent eadem.

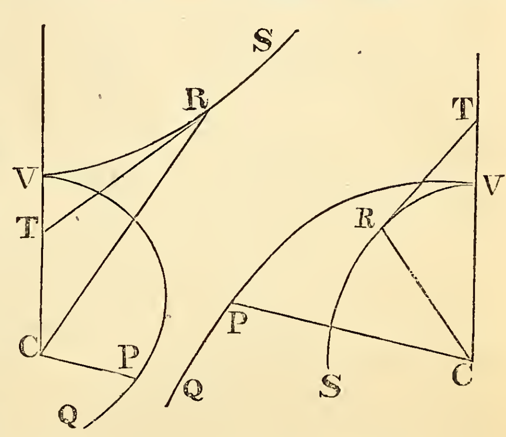


422. Trajectoria V I K, geometricè rationalis est ubi per æquationes finitas inveniri potest sector circuli æqualis areæ V D c a: et hujus sectoris radius est ad C X radium, circuli V X Y, ut n n ad 1 estque n n numerus rationalis positivus integer vel fractus. Sit enim sector circuli L P C = areæ V D c a, id est, æqualis sectori V C X, sitque radius C P ad radium C V, ut n, ad 1, erit C P × P L = C V × V X, et C P : C V = n : 1 = V X : P L, (per hyp.) et C P : C V = n : 1 = P R : V X (ex naturâ circuli). Quare per

trajectoriam V I K, id [t] quod fit ubi rectæ I K et N K æquantur, ideoque ubi area A B F D æqualis est Z Z.

[u] *Corol.* 2. Sed et angulus K I N, in quo trajectoria alicubi secat lineam illam I C, ex datâ corporis altitudine I C expeditè invenitur; nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut K N ad I K, id est, ut Z ad latus quadratum areæ A B F D.

[x] *Corol.* 3. Si centro C et vertice principali V describatur sectio quælibet conica V R S, et a quovis ejus puncto R agatur tangens R T occurrens axi infinitè producto C V in puncto T; dein junctâ C R ducatur recta C P, quæ æqualis sit abscissæ C T, angulumque V C P sectori V C R proportionalem constituat; tendat autem ad centrum C vis centripeta cubo distantiæ locorum a centro reciprocè proportionalis, et exeat corpus de loco V justâ cum velocitate secundum lineam rectæ C V perpendicularem: progredietur corpus illud in trajectoriâ V P Q quam punctum P perpetuò tangit; ideoque si conica sectio V R S hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea ellipsis sit, ascendet illud perpetuò et abibit in infinitum. Et contra, si corpus quâ-



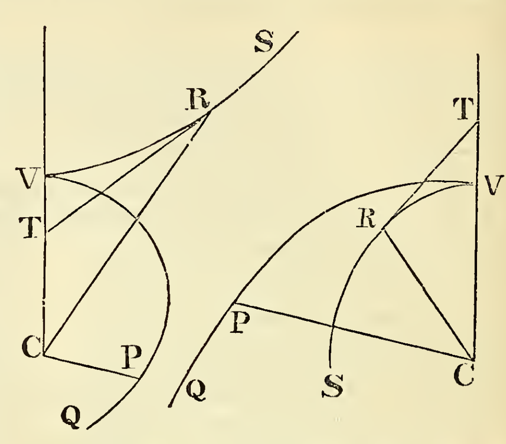
compositionem rationum et ex æquo n n : 1 = R P : P L. Si ergò fuerit n n, ad 1, ut numerus ad numerum, dato arcu P L, inveniri poterit arcus R P per æquationem finitam, cum possit semper arcus datus in datâ ratione numeri ad numerum per æquationem finitam dividi. Quoniam igitur assumptæ C I positio et punctum I, in curvâ V I K per finitas æquationes determinantur, erit V K curva algebraica seu geometricè rationalis. Hermannus Prop. XXV. Lib. I. Phoron. hoc elegans et difficile problema solvit: invenire canonem generalem determinandæ gravitatis variabilis pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, quantitatibus finitis expressum.

[t] * *Id quod fit ubi rectæ I K et K N æquantur.* Tunc enim punctum N coincidit cum puncto I, ob angulum K I N rectum, adeóque ob proportionem $\surd$ A B F D : Z = I K : K N, fit A B D F = Z Z = $\frac{Q\,Q}{I\,C^2}$, et $I\,C^2 \times$ A B F D = Q Q quantitati datæ. Hinc cum concessis curvarum quadraturis data sit area A B F D in quantitatibus constantibus et variabili I C seu C D, invenietur valor I C, hoc est, maximæ et minimæ altitudines corporis trajectoriam V K describentis.

[u] * *Corol.* 2. Ob angulum K N I rectum in triangulo nascente K I N, sinus anguli K I N est ad sinum totum, ut K N ad I K, id est, ut Z (seu $\frac{Q}{I\,C}$) ad $\surd$ A B F D. Verum datâ I C datur area A B F D, et indè ob quantitatem Q datam datur ratio $\frac{Q}{I\,C}$ ad $\surd$ A B F D, hoc est, ratio sinûs anguli K I N, ad radium. Invenietur ergò sinus anguli K I N, et hinc angulus ipse cognoscetur.

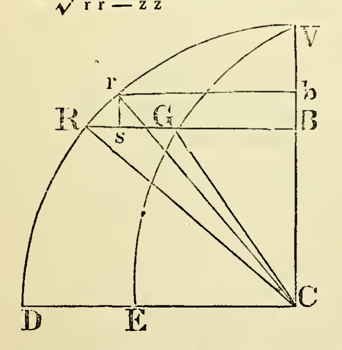
[x] 423. *Lemma.* Si fuerit D V C, circuli quadrans cujus radius C V = r abscissa C B = z, ordinatæ infinitè propinquæ B R, b r,

cunque cum velocitate exeat de loco V, et perinde ut incœperit vel obliquè descendere ad centrum, vel ab eo obliquè ascendere, figura V R S vel hyperbola sit vel ellipsis, inveniri potest trajectoria augendo vel minuendo angulum V C P in datâ aliquâ ratione. Sed et, vi centripetâ in centrifugam versâ, ascendet corpus obliquè in trajectoriâ V P Q, quæ invenitur capiendo angulum V C P sectori elliptico V R C proportionalem, et longitudinem C P longitudini C T æqua-



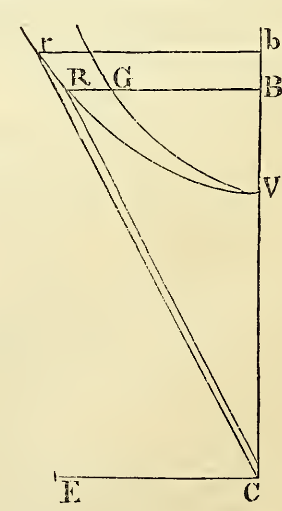
fluxio arcûs D R erit $\frac{r\,d\,z}{\sqrt{r\,r - z\,z}}$, et fluxio sectoris C D R $= \frac{\frac{1}{2}r\,r\,d\,z}{\sqrt{r\,r - z\,z}}$.

Est enim B R $= \sqrt{r\,r - z\,z}$, et demissâ ex puncto r in R B, perpendiculari r s, triangula similia R C B, r R s, dant R B $(\sqrt{r\,r - z\,z})$: R C (r) = r s (d z) : R r $= \frac{r\,d\,z}{\sqrt{r\,r - z\,z}}$. Q. e. 1. Porrò sector nascens C R r $= \frac{1}{2}$ C R $\times$ R r $= \frac{\frac{1}{2}r\,r\,d\,z}{\sqrt{r\,r - z\,z}}$. Q. e. 2.



424. *Corol.* Si fuerit E G V C, quadrans ellipseos cujus centrum C, semiaxis unus C V = r, alter semiaxis C E = c, abscissa C B = z, et B G ordinatim applicata ad axem C V, sectoris C E G fluxio erit $= \frac{\frac{1}{2}r\,c\,d\,z}{\sqrt{r\,r - z\,z}}$.

Sunt enim sectores C D R, C E G, adeóque et eorum fluxiones in datâ ratione r ad c, (251).



425. *Lemma.* Si fuerit V R r, hyperbola æquilatera cujus centrum C, semiaxis transversus C V = r, abscissa C B = z, R B ad axem ordinatim applicata, sectoris hyperbolici C R V fluxio erit $\frac{\frac{1}{2}r\,r\,d\,z}{\sqrt{z\,z - r\,r}}$. Agatur enim r b ordinata, priori R B infinitè propinqua, sitque R B = y, erit (ex naturâ hyperbolæ æquilateræ) $y\,y = z\,z - r\,r$, et $y = \sqrt{z\,z - r\,r}$.

lem ut supra. Consequuntur hæc omnia ex propositione præcedente, per curvæ cujusdam quadraturam, cujus inventionem, ut satis facilem, brevitatis gratiâ missam facio.

Undè $2ydy = 2zdz$, et $dy = \frac{zdz}{\sqrt{zz-rr}}$. Porrò triangulum C R B $= \frac{1}{2} zy$, et illius fluxio $= \frac{1}{2} zdy + \frac{1}{2} ydz$ = trapezio B b r R + triang. C r R; sed trapezium nascens B b r R $= ydz$, ergò sector nascens C r R $= \frac{1}{2} zdy - \frac{1}{2} ydz = \frac{\frac{1}{2}zzdz}{\sqrt{zz-rr}} - \frac{1}{2}dz \times \sqrt{(zz-rr)} = \frac{\frac{1}{2}zzdz - \frac{1}{2}zzdz + \frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}} = \frac{\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}}$. Q. e. d.

426. *Corol.* 1. Quoniam (ex demonstratis) $dy = \frac{zdz}{\sqrt{zz-rr}}$, et $yy = zz - rr$, erit $\frac{dz}{\sqrt{zz-rr}} = \frac{dy}{z}$, et $z = \sqrt{yy+rr}$, adeóque C r R $= \frac{\frac{1}{2}rrdz}{\sqrt{zz-rr}} = \frac{\frac{1}{2}rrdy}{\sqrt{yy+rr}}$.

427. *Corol.* 2. Si descripta fuerit altera hyperbola G V, cujus idem centrum C, idem semiaxis transversus C V = r. semiaxis conjugatus C E = c; sectoris C G V fluxio erit $= \frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{zz-rr}} = \frac{\frac{1}{2}rcdy}{\sqrt{yy+rr}}$. Est enim sector C R V ad sectorem C G V, adeóque prioris fluxio ad fluxionem posterioris in datâ ratione r ad c. (374.) ad c. (374).

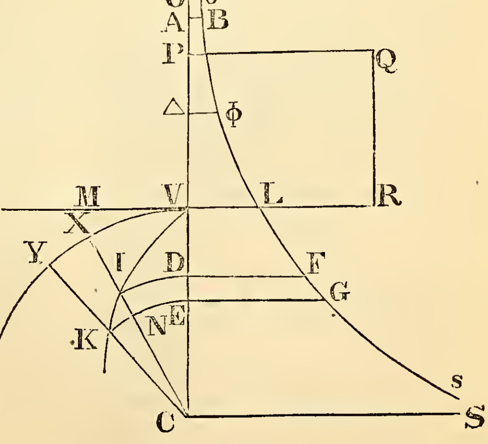
428. *Lemma.* Iisdem positis quæ in superioribus Newtoni propositionibus, sit C V = r, C A = a, C D vel C Δ = x, D F vel Δ Φ = y; et si fuerit vis centripeta in loco quovis D ut $\frac{1}{CD^3}$, sitque $2f^4$ quantitas data, erit $y = \frac{2f^4}{x^3}$, æquatio ad curvam B F G, et quoniam in æquatione y infinita evadit si x ponatur = o, et similiter x infinita fit si y = o, liquet rectas sibi mutuò perpendiculares C O, C S esse curvæ B F G asymptotos. Area D F G E $= ydx = \frac{2f^4dx}{x^3}$, undè sumptis fluentibus additâque constanti Q, erit area in infinitum versùs S protensa C D F s S C $= Q - \frac{f^4}{xx}$; Ponatur x infinita, et erit $\frac{f^4}{xx} = o$, et area C D F s S, mutabitur in aream utrinque infinitè protensam C O o s S C; quarè C O o s S C = Q; et hinc C O o s S C − C D F s S C = O D F o $= Q - Q + \frac{f^4}{xx} = \frac{f^4}{xx}$, id est, area O D F o, vel O Δ Φ o versus O in infinitum extensa, æqualis est quantitati finitæ $\frac{f^4}{xx}$.

429. *Corol.* 1. Area infinitè protensa O V L o $= \frac{f^4}{rr}$; area O A B o $= \frac{f^4}{aa}$ et proindè $\sqrt{OVLo} = \frac{ff}{r}$, $\sqrt{OABo} = \frac{ff}{a}$.

430. *Corol.* 2. Area A B L V = O V L o − O A B o $= \frac{f^4 \times aa - rr}{rraa} = \frac{f^4cc}{rraa}$, ponendo $aa - rr = cc$ (429) undè $\sqrt{ABLV} = \frac{f^2c}{ra}$.

431. *Corol.* 3. Similiter si punctum D sit inter puncta data C, V, et punctum Δ inter puncta data V, A; erit area A B Φ Δ, vel A B F D $= \frac{f^4 \times \overline{aa - xx}}{aaxx}$, area V L F D $= \frac{f^4 \times \overline{rr - xx}}{rrxx}$, Δ Φ L V $= \frac{f^4 \times \overline{xx - rr}}{rrxx}$. (428. 429. 430.)

432. Iisdem manentibus quæ in Lemmate superiori (428) si corpus de loco V, cum velo-



citate quâlibet secundùm directionem V M ad C V perpendicularem projiciatur ut curvam V I K describat, erit V M hujus curvæ tangens in puncto V, C V ad tangentem V M normalis,

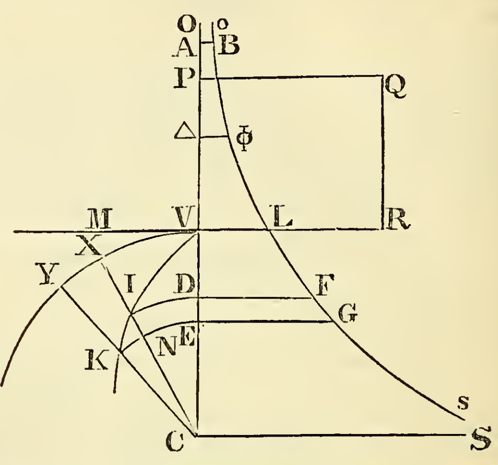
et velocitas projectionis æqualis erit velocitati quam corpus ex distantiâ infinitâ O V, cadendo acquireret in loco V, vel eâ minor, vel major.

433. *Primus casus.* Velocitas projectionis æqualis sit velocitati per spatium infinitum O V cadendo acquisitæ in loco V, erit (418) quantitas data $Q = CV \surd OVLo = ff$ (429) et $Z = \frac{Q}{IC} = \frac{ff}{x}$. Sed (per Prop. 41.) $\surd ODFo : Z = IK : KN$, hoc est, (428) $\frac{ff}{x} : \frac{ff}{x} = IK : KN$, ergò $IK = KN$, proindèque angulus K I N rectus est (Cor. 2. Prop. 41.) In hoc igitur casu trajectoria V I K est circulus V X Y radio C V descriptus.

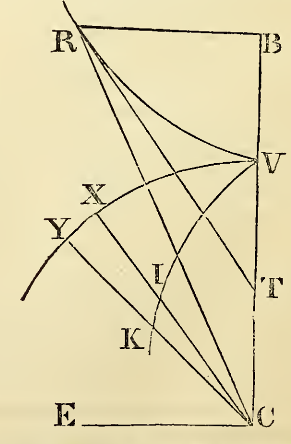
434. Hinc si velocitas projectionis minor fuerit velocitate quæ ex infinitâ distantiâ cadendo acquiritur in loco V, corpus in trajectoriâ V K motum ad centrum virium C perpetuò accedet, velocitas illius perpetuò crescet, et punctum D semper erit inter data puncta V et C situm. Si verò projectionis velocitas major sit velocitate per infinitum spatium cadendo acquisitâ, corpus in trajectoriâ V I K, a centro semper recedet, illius velocitas continuò decrescet et punctum Δ puncto I correspondens, puncto dato V superius erit.

435. Si manente casûs primi hypothesi, directio V M ad C V perpendicularis non sit, et perpendiculum e centro C in projectionis directionem demissum dicatur p, erit $Q = \frac{pff}{r}$, $Z = \frac{pff}{rx}$, et $\surd ODFo \left(\frac{f^2}{x}\right) : Z \left(\frac{pff}{rx}\right) = r : p = IK : KN$. Hoc est, (per Corol. 2. Prop. 41.), sinus totus ad sinum anguli K I N, in datâ ratione adeóque angulus K I N datus, et trajectoria V K spiralis logarithmica.

436. *Casus secundus.* Velocitas projectionis æqualis sit velocitati quam corpus de loco aliquo dato A, cadendo haberet in V, erit $Q = CV \times \surd ABLV = \frac{ffc}{a}$ (430) $Z = \frac{ffc}{ax}$, $ZZ = \frac{f^4 cc}{aaxx}$, $ABFD = \frac{f^4 \times \overline{aa - xx}}{aaxx}$ (431.), undè $ABFD - ZZ = \frac{f^4 \times \overline{aa - cc - xx}}{a^2 x^2} = \frac{f^4 \times \overline{rr - xx}}{a^2 x^2}$, ob $a^2 - cc = rr$ (430) et $\surd (ABFD - ZZ) = \frac{ff \surd \overline{rr - xx}}{ax}$. Cum igitur (in Prop. 41.) sit $A = IC = CD = x$, $DE = IN = dx$, $CX = CV = r$, erit $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA} = \frac{\frac{1}{2} ffrrcdx}{axx}$ et $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA \surd ABFD - ZZ} = \frac{\frac{1}{2} rrcdx}{x \surd rr - xx}$ = sectori C X Y. Quoniam autem crescente I C seu x, decrescit sector Y X C (434) scribendum est $CXY =$



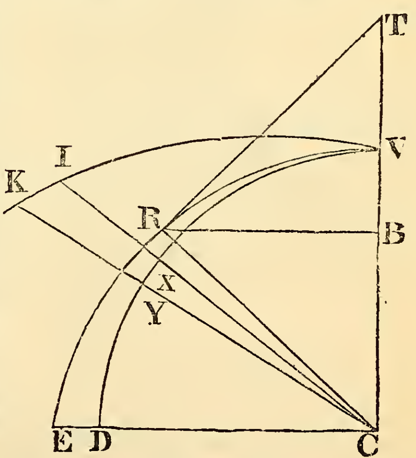
$- \frac{\frac{1}{2} rrcdx}{x \surd rr - xx}$ (159). Ponatur $x = \frac{rr}{z}$, erit $xx = \frac{r^4}{zz}$, $rr - xx = \frac{rrzz - r^4}{zz}$, $\surd (rr - xx) = \frac{r \surd \overline{zz - rr}}{z}$, et $zx = rr$, sumptisque fluxionibus $zdx + xdz = 0$, et proindè $-\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$, hisque valoribus substitutis invenitur $-\frac{\frac{1}{2} rrcdx}{x \surd rr - xx} = \frac{\frac{1}{2} rcdz}{\surd zz - rr} = CXY$.



Centro C, semiaxe transverso $CV = r$ semiaxe conjugato $CE = c$, describatur hyper-

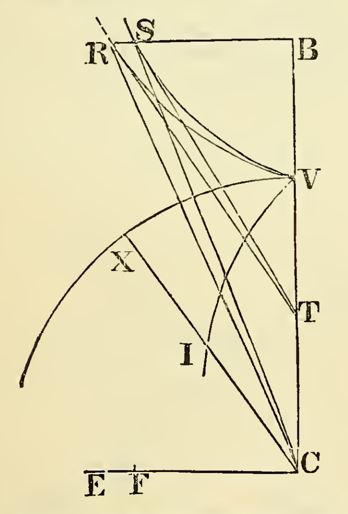
bola V R, ex cujus puncto quovis R, demittatur ad axem perpendiculum R B, et tangens R T, axi occurrens in T, et C B, dicatur $= z$, erit (427) $\frac{\frac{1}{2} r c d z}{\sqrt{zz - rr}}$, fluxio sectoris hyperbolici C R V, et (ex conicis) C B (z) : C V (r) $=$ C V (r) : C T $= \frac{rr}{z} = x =$ C I. Itaque cum sit C X Y $= \frac{\frac{1}{2} r c d z}{\sqrt{zz - rr}}$, si sumantur utrinque fluentes additâ constanti Q erit sector circuli C X V, æqualis sectori hyperbolico C R V + Q, invenitur autem Q $=$ o. Nam positâ C T seu $x = r$, sit quoque $z = r$, ob $\frac{rr}{z} = x$, et puncta B et V coëunt, evanescitque sector C R V, et quoniam positâ $x = r$ corpus projectum est in V, punctum X coincidet quoque in hoc casu cum puncto V, et fit C X V $=$ o, undè æquatio C X V $=$ C R V + Q, mutatur in hanc o $=$ o + Q. Nulla igitur est quantitas constans addenda vel subducenda, sed est semper C X V $=$ C R V. Quare invenitur punctum I in trajectoriâ V I K, capiendo sectorem C X V $=$ C R V, et in lineâ C X sumendo C I $=$ C T.

437. *Casus* 3[us]. Projectionis velocitas major sit velocitate per spatium infinitum cadendo acquisitâ. Sit P locus de quo corpus cadere debet ut urgente gravitate uniformi velocitatem acquirat in loco V æqualem velocitati projectionis. In perpendiculo V L, capiatur V R ad V L in ratione vis gravitatis uniformis ad vim centripetam variabilem in loco V, et compleatur rectangulum P V R Q cujus latus quadratum dicatur e; et velocitas projectionis erit ut e, (per Cor. 1. Prop. XXXIX.) Quarè (430) Q $=$ r e, Z Z $= \frac{rree}{xx}$; et quoniam velocitas corporis trajectoriam V I K describentis continuò decrescit atquè corpus a centro C perpetuò recedit (434), loco areæ A B F D, (Prop. XLI.) capienda est quantitas e e $-$ Δ Φ L V $=$ e e $-$ $\frac{f^4 \times \overline{xx - rr}}{rrxx}$ (431) $= \frac{rreexx - f^4 xx + f^4 rr}{rrxx}$, et quantitas A B F D $-$ Z Z, (Prop. XLI.) erit hic $= \frac{r^2 e^2 xx - f^4 xx + f^4 rr - r^4 ee}{rrxx}$. Est autem area rectanguli P V R Q major areâ infinitè protensâ O V L o, hoc est, quantitas e e major quam $\frac{f^4}{rr}$, et proindè r r e e $-$ f[4], quantitas positiva, fiat igitur r r e e $-$ f[4] $=$ b b r r, et quantitas A B F D $-$ Z Z, (Prop. XLI.) evadet $= \frac{bbrrxx - bbr^4}{rrxx}$, et $\sqrt{\text{ABFD} - \text{ZZ}} = \frac{b\sqrt{xx - rr}}{x}$; hinc factis debitis substitutionibus, formula (Prop. XLI.) $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{\text{ABFD} - \text{ZZ}}}$, in hanc mutabitur $\frac{r^3 e d x}{2xx} \times \frac{x}{b\sqrt{xx - rr}} = \frac{\frac{1}{2} r^3 e d x}{bx\sqrt{xx - rr}}$ $= \frac{\frac{1}{2} r^2 c d x}{x\sqrt{xx - rr}}$ ponendo $\frac{re}{b} = c$. Quarè sector circuli C X Y $= \frac{\frac{1}{2} r^2 c d x}{x\sqrt{xx - rr}}$. Fiat $x = \frac{rr}{z}$ et erit $\frac{dx}{x} = \frac{-dz}{z}$, ac $\sqrt{xx - rr} = \frac{r\sqrt{rr - zz}}{z}$ atquè $\frac{\frac{1}{2} r^2 c d x}{x\sqrt{xx - rr}} = - \frac{\frac{1}{2} r c d z}{\sqrt{rr - zz}} =$ C X Y. Centro C, semiaxe C V $=$ r, et altero semiaxe C E $=$ c, describatur ellipseos quadrans V E, ex cujus puncto quovis R agatur ad axem C V perpendiculum R B, et tangens R T axi producto occurrens in T, et C B dicatur $=$ z, erit (ex conicis) C B (z) : C V (r) $=$ C V (r) : C T $= \frac{rr}{z} = x =$ C I; et (424) $\frac{\frac{1}{2} r c d z}{\sqrt{rr - zz}}$, fluxio sectoris elliptici C R E; quarè cum sit C X Y $= - \frac{\frac{1}{2} r c d z}{\sqrt{rr - zz}}$, si sumantur utrinque fluentes additâ constanti Q, erit sector circuli C X V $=$ Q $-$ C R E. Ut inveniatur valor quantitatis constantis Q, ponatur C X V $=$ o, et erit Q $=$ C R E; sed ubi C X V $=$ o puncta X et I



cum puncto V coëunt, et fit C T seu C I $=$ C V, adeóque punctum R coincidit etiam cum puncto V, et sector C E R, æqualis fit quadranti C E V; ergò Q $=$ C E V. Est igitur semper C X V $=$ C E V $-$ C R E $=$ C R V. Itaque ut inveniatur trajectoriæ V I K punctum I, capiatur sector circuli C X V, æqualis sectori elliptico C R V, et in lineâ C X, productâ capiatur C I $=$ C T, erit I punctum in trajectoriâ quæsitâ.

438. Datâ velocitate projectionis et magnitudine vis centripetæ variabilis, hoc est, ipsius ratione ad aliquam vim centripetam uniformem notam in loco dato V, (fig. not. 430) describi potest trajectoria V I K. Iis enim datis, dabitur locus P ex quo corpus urgente vi centripetâ constante cadere debet ut in loco V datam projectionis velocitatem habeat; et sumptâ V R ad V L in datâ ratione vis centripetæ constantis ad vim centripetam variabilem in loco V, dabitur rectangulum P Q R V. Porrò si rectangulum illud æquale fuerit areæ infinitè protensæ O V L o, corpus circulum describet (per cas. 1. not. 433); si rectangulum minus est areâ O V L o, inveniri poterit punctum A, ex quo ducta perpendicularis A B, abscindat aream A B L V æqualem rectangulo P Q R V; et trajectoria V I K, describetur (per constr. cas. 2ⁱ.) (436). Si rectangulum P Q R V areâ O V L o majus est, adhibenda erit constructio casûs 3ⁱ. (437). Observandum autem est sectores circulares esse angulis suis ad centrum proportionales; undè in superioribus constructionibus loco sectorum circuli, uti possumus angulis qui ad sectores hyperbolicos vel ellipticos datam habeant rationem.



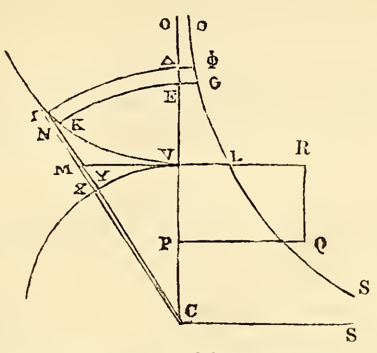
439. *Casus* 2us. et 3us. construi possunt per hyperbolam vel ellipsim, cujus sit semiaxis C V = r, et alter semiaxis quilibet. Nam iisdem positis quæ in constructione casûs 2ⁱ., semiaxe transverso C V = r, et semiaxe quovis conjugato C F, describatur hyperbola altera S V, quam in S secat perpendiculum R B; tangentes R T, S T per puncta R, S ductæ axi occurrunt in eodem puncto T, (257) et sector C R V est ad sectorem C S V in datâ ratione C E ad C F (374). Quarè cum (per constr. cas. 2ⁱ.) sector circuli C X V æqualis sit sectori C R V, erit etiam ad sectorem C S V in datâ ratione C E ad C F, atquè ità punctum trajectoriæ I invenietur capiendo sectorem C X V ad sectorem C S V, in datâ ratione C E ad C F, et in radio C X, capiendo C I = C T. Idem eodem modo demonstratur in casu 3°.

440. Hinc si (juxtà constructionem Corol. 3. Prop. 41.) describatur curva V I capiendo angulum V C I sectori conico V C R proportionalem, vel quod in idem recidit, capiendo sectorem circuli C X V ad sectorem conicum V C R in datâ ratione, et C I = C T, inveniri poterit velocitas quâ corpus de loco V, secundùm lineam ipsi C V perpendicularem projici debet ut in trajectoriâ descriptâ V I progrediatur. Nam sit V S hyperbola quævis, centro C, semiaxe transverso C V = r, semiaxe conjugato C F descripta, data erit ratio sectoris circuli C X V, ad sectorem hyperbolicum C S V, (ex hyp.) seu (439) ratio C E ad datam C F; ergò dabitur C E, seu c; est autem in cas. 2°. (430, 436) $cc = aa - rr$ adeóque $aa = rr + cc$; et hinc datis r et c, dabitur a, seu A C, (fig. not. 428.) Dato autem puncto A, et vi centripetâ, datur rectangulum P Q R V, æquale areæ A B L V, et indè velocitas projectionis habetur, (438). Si trajectoria V I, per sectores ellipseos descripta fuerit, similiter invenietur c; est autem in casu 3°. (437) $c = \frac{re}{b}$, et $rree - f^4 = bbrr$, adeóque $b = \frac{re}{c}$, $bb = \frac{rree}{cc}$, et $bb = \frac{rree - f^4}{rr} = \frac{rree}{cc}$; quarè $ccrree - r^4ee = f^4cc$, et $ee = \frac{f^4cc}{ccrr - r^4} = \frac{f^4}{rr} \times \frac{cc}{cc - rr}$, cum igitur datæ sint c, et r, ac $\frac{f^4}{rr}$ = areæ datæ O V L o (429); dabitur e e, seu rectangulum P Q R V (437) et hinc velocitas projectionis in V, habetur (438). Patet autem in hoc casu c majorem esse debere radio r, seu C V, alioquin problema esset impossibile, cum sit $e = \frac{ff}{r} \times \frac{c}{\sqrt{cc - rr}}$.

441. Vis centripeta in centrifugam vertatur, seu directionem in contrariam mutet, et corpus per rectam V M ad C V perpendicularem cum quâvis velocitate projiciatur, ut trajectoriam V K I describat. Sit ut in casu 3°. (437) P V spatium per quod vi centrifugâ constante urgeri debet corpus ut velocitatem acquirat in V velocitati projectionis æqualem, et R V ad L V ut vis centrifuga constans ad variabilem in V, et rectangulum P R Q V, dicatur e e; velocitas projectionis in V, erit ut e, (per Cor. 1. Prop. 39.) et quoniam velocitas in recessu a centro semper crescit, erit velocitas in I vel Δ, ut

$\sqrt{ee + \Delta\Phi LV}$, quæ (in formulâ Prop. 41.) substitui debet loco $\sqrt{ABFD}$. Invenietur etiam (430) $Q = re$, $ZZ = \frac{rree}{xx}$, $ee + \Delta\Phi LV = ee + \frac{f^4 \times xx - rr^2}{rrxx}$ (431) $= \frac{rreexx + f^4 xx - f^4 rr}{rrxx}$. Hinc quantitas $ABFD - ZZ$ (Prop. 41.) fiet hic $= \frac{rreexx + f^4 xx - f^4 rr - r^4 ee}{rrxx} = \frac{bbrrxx - bbr^4}{rrxx}$, ponendo $rree + f^4 = bbrr$. Quare $\sqrt{ABFD - ZZ} = \frac{b\sqrt{xx - rr}}{x}$. Factis igitur debitis substitutionibus, formula Prop. XLI. $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$, in hanc mutatur $\frac{\frac{1}{2} r^3 e dx}{bx\sqrt{xx - rr}} = \frac{\frac{1}{2} r^2 c dx}{x\sqrt{xx - rr}}$, ponendo $\frac{re}{b} = c$. Quarè sector circuli $CXY = \frac{\frac{1}{2} r^2 c dx}{bx\sqrt{xx - rr}}$, ut in cas. 3°. (437). Igitur trajectoria V I construetur per sectores ellipticos prorsus ut in hoc 3°. casu.

442. *Schol.* Keillius ad calcem Introductionis ad Veram Astronomiam, inversum Problema virium centripetarum in ratione triplicatâ distantiæ a centro decrescentium generatim ac perspicuè

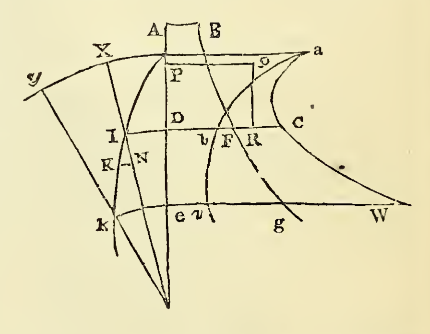


solvit, et trajectoriarum quæ in hâc hypothesi describuntur plures proprietates demonstravit, inter alias istam, earum omnium, si circulum exceperis, areas esse perfectè quadrabiles, quæ quidem de omnibus trajectoriis per Constr. Corol. 3. Prop. 41. descriptis facilè demonstratur. Nam (per Prop. 41.) arearum illarum fluxio $CIK = \frac{Q \times IN}{2\sqrt{ABFD - ZZ}} = \frac{-\frac{1}{2} c x dx}{\sqrt{rr - xx}}$ in cas. 2°. et $CIK = \frac{Q \times IN}{2\sqrt{ABFD - ZZ}} = \frac{\frac{1}{2} c x dx}{\sqrt{xx - rr}}$ in casu 3°. (437. 441.) Ponatur 1°. $\sqrt{rr - xx} = z$; et erit $rr - xx = zz$, $-xdx = zdz$, et $-\frac{\frac{1}{2} c x dx}{\sqrt{rr - xx}} = CIK = \frac{1}{2} c dz$, et sumptis fluentibus, sector $CIV = \frac{1}{2} cz = \frac{1}{2} c\sqrt{rr - xx}$, nulla enim est addenda quantitas constans. Ponatur 2°. $\sqrt{xx - rr} = y$, et proindè $xx - rr = yy$, $xdx = ydy$, erit $CIK = \frac{\frac{1}{2} c x dx}{\sqrt{xx - rr}} = \frac{1}{2} c dy$, et sector fluens $CIV = \frac{1}{2} cy = \frac{1}{2} c\sqrt{xx - rr}$.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum datam rectam egressi.

Stantibus quæ in tribus propositionibus præcedentibus: exeat corpus de loco I secundum lineolam I K, eâ cum velocitate quam corpus aliud, vi aliquâ uniformi centripetâ, de loco P cadendo acquirere posset in D: sitque hæc vis uniformis ad vim, quâ corpus primum urgetur in I, ut D R ad D F. Pergat autem corpus versus k; centroque C et intervallo C k describatur circulus k e occurrens rectæ P D in e, et erigantur curvarum B F g, a b v, a c w ordinatim applicatæ e g, e v, e w. (y) Ex dato rectangulo P D R Q, datâque lege vis centripetæ quâ corpus primum agitatur, datur curva linea B F g, per constructionem Problematis XXVII. et ejus Corol. 1. (z) Deinde ex dato angulo C I K datur proportio nascentium I K, K N, et inde, per constructionem Prob. XXVIII. datur quantitas Q, unà cum curvis lineis a b v, a c w: ideoque, completo tempore quovis D b v e, datur tum corporis altitudo C e vel C k, tum area D c w e, eique æqualis sector X C y, angulusque I C k, et locus k in quo corpus tunc versabitur. Q. e. i.



(y) * *Ex dato rectangulo P D R Q*, &c. Ex datâ vis centripetæ lege, datur curva linea B F G, (per constr. 1æ. partis Prop. 39.) Dato rectangulo P D R Q, datur locus A, de quo corpus urgente vi centripetâ variabili cadere debet, ut velocitatem acquirat in loco D, æqualem velocitati quam corpus aliud urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ ex loco P cadens acquisivit eodem loco D, (per Cor. 1. Prop. 39.) dato autem loco A, et descriptâ curvâ B F g, describi poterit altera curva V L M, (per constr. et fig. 2æ. partis Prop. 39.)

(z) * *Deinde*. Cùm sit I K ad K N, ut sinus totus ad sinum anguli dati N I K, (per Corol. 2. Prop. 41.) dabitur quantitas constans Q, unà cum curvis lineis a b u, a c w, est enim $IK : KN = \sqrt{ABFD}$ (sive $\sqrt{PDRQ}$) : Z; est ergo data Z (per constr. Probl. 28. et not. 418.) et $Z = \frac{Q}{A}$ sive $A \times Z = Q$ unde habetur Q, ex quibus habentur quantitates $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ et $\frac{Q \times CA^2}{2A^2 \times \sqrt{ABFD - ZZ}}$ quæ sunt ordinatæ curvarum a b v, a c w.

Supponimus autem in his propositionibus vim centripetam in recessu quidem a centro variari secundum legem quamcunque, quam quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantiis esse undique eandem. Atque hactenus motum corporum in orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adjiciamus pauca.

SECTIO IX.

De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

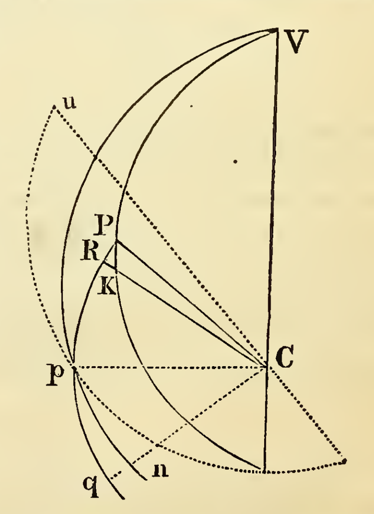
([a]) *Efficiendum est ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quiescente.*

In orbe V P K positione dato revolvatur corpus P pergendo a V versus K. A centro C agatur semper C p, quæ sit ipsi C P æqualis, angulumque V C p angulo V C P proportionalem constituat; et ([b]) area,

([a]) * *Efficiendum est.* Sit V P K quælibet immota trajectoria quam corpus P ad centrum virium C tendens describat pergendo ab V versùs K, invenienda est lex vis centripetæ ad C tendentis, quâ urgente corpus aliud p feratur in perimetro figuræ u p, priori similis et æqualis, intereadum hæc ipsa figura u p, circà C revolvitur in uno eodemque plano, ità ut dum corpus P, arcum quemlibet ut V P, percurrit in orbe quiescente V P, aliud corpus p, similem et æqualem arcum u p, percurrat in orbe revolvente u p.

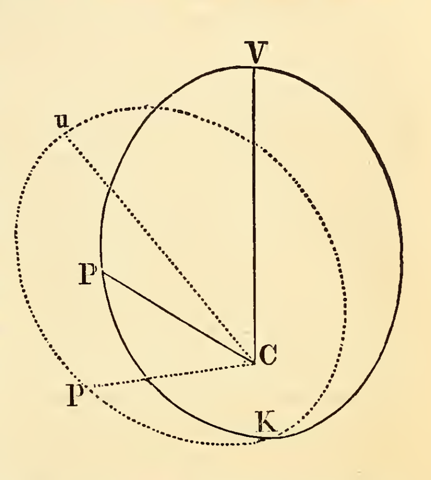
443. Si fuerit C V ad trajectoriam V P K in puncto V perpendicularis, hoc est, si fit C V linea apsidum in orbe quiescente, et correspondens C u linea apsidum in orbe revolvente, motus angularis lineæ C u dicitur apsidum motus, qui in consequentia fit, ubi linea C u, in eandem partem fertur cum corpore P, vel p. In antecedentia verò ubi linea C u, et corpus P, vel p, in plagas contrarias tendunt.

([b]) * *Et area quam linea C p, describit.* Sit V p n curva quam corpus p in orbe mobili u p revolvens describit, centro C, intervallo C P, vel C p, describatur circuli arcus P p q, agatur radius C R orbem quiescentem V P K secans in K, et radius C q, trajectoriam V p n, secans in n, sintque K, n, loca in quibus eodem tempore reperiuntur corpora P, p, id est, arcus P K, p n, sint eodem tempore descripti. Nascentibus arcubus P R, p q, sectores P C K, p C n, æquales sunt factis $\frac{1}{2}$ P C $\times$ P R, $\frac{1}{2}$ p C $\times$ p q; adeóque ob p C = P C sectores illi sunt inter se ut arcus P R, p q, seu ut anguli P C K, p C n; sed quoniam angulus V C K, est ad angulum V C n, in datâ ratione anguli V C P, ad angulum V C p (per hyp.) erit dividendo angulus V C K — V C P, ad angulum V C n — V C p, hoc est, angulus P C K, ad angulum p C n, in datâ ratione anguli V C P ad V C p, atquè adeò sector P C K, ad sectorem p C n, in eâdem ratione datâ. Undè (per



Cor. Lem. 4.) totus sector V p C, est ad totum sectorem V P C, eodem tempore descriptum in datâ ratione, sive sector V p C, est ut sector V P C, proindéque (per Prop. 1.) ut tempus quo sector uterque describitur. Quarè manifestum est (per Prop. 2.) quod corpus p, cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvi possit in curvâ lineâ V p n, quam punctum p perpetuò tangit. Porrò dato orbe V P K, et virium centro C, datur longitudo et positio lineæ C P, per (superiorem Newt. constr.) ideoque et lineæ C p, et hinc datur punctum quodlibet p, in trajectoriâ

quam linea C p describit, erit ad aream V C P, quam linea C P simul describit, ut velocitas lineæ describentis C p ad velocitatem lineæ describentis C P, hoc est, ut angulus V C p ad angulum V C P, ideoque in datâ ratione, et propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis sit quam linea C p in plano immobili describit, manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvi possit unà cum puncto p in curvâ illâ lineâ quam punctum idem p ratione jam expositâ describit in plano immobili. Fiat angulus V C u angulo P C p, et linea C u lineæ C V, atque figura u C p figuræ V C P æqualis, et corpus in p semper existens movebitur in perimetro figuræ revolventis u C p, eodemque tempore describet arcum ejus u p quo corpus aliud P arcum ipsi similem et æqualem V P in figurâ quiescente V P K describere potest. Quæratur igitur, per Corollarium quintum Propositionis VI., vis centripeta quâ corpus revolvi possit in curvâ illâ lineâ quam punctum p describit in plano immobili, et solvetur problema. Q. e. f.



PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

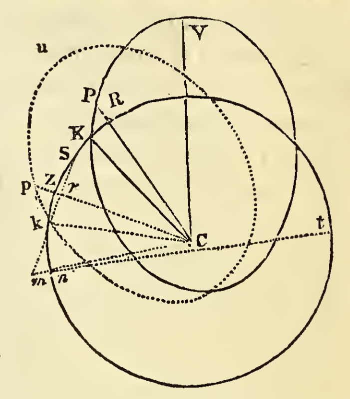
Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, et corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicatâ ratione communis altitudinis inverse.

Partibus orbis quiescentis V P, P K sunto similes et æquales orbis re-

V p n, adeóque et ipsa trajectoria datur. Inveniri igitur potest (per Cor. 5. Prop. 6.) lex vis centripetæ quâ corpus p, in trajectoriâ illâ V p n revolvi potest.

Quoniam autem angulus V C P æqualis est angulo v C p (per constr.) erit quoque angulus V C v æqualis angulo P C p, adeóque datâ C p, magnitudine et positione, facilè invenitur positio lineæ apsidum C v in orbe mobili V p: Fiat enim angulus V C v angulo P C p, et linea C v lineæ C V, atque figura u C p, figuræ V C P similis et æqualis, et corpus unà cum puncto p, semper latum et figuram immotam V p n describens, describit etiam perimetrum u p, figuræ revolventis u C p, eodemque tempore describit arcum ejus v p, quo corpus aliud P arcum ipsi similem et æqualem V P, in figurâ quiescente V P K, describere potest. Vide Varignonium Legem vis centripetæ in trajectoriâ V p n determinantem, in Comm. Paris. 1705

volventis partes u p, p k; et punctorum P, K distantia intelligatur esse quam minima. A puncto k in rectam p C demitte perpendiculum k r, idemque produc ad m, ut sit m r ad k r ut angulus V C p ad angulum V C P. Quoniam corporum altitudines P C et p C, K C et k C, semper æquantur, manifestum est quod linearum P C et p C incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis P et p existentium distinguantur motus singuli (per legum Corol. 2.) in binos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas P C, p C determinentur, et alteri prioribus transversi sint, et secundum lineas ipsis P C, p C perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, et motus transversus corporis p erit ad motum transversum corporis P, ut motus angularis lineæ p C ad motum angularem lineæ P C, id est, ut angulus V C p ad angulum V C P. Igitur eodem tempore quo corpus P motu suo utroque pervenit ad punctum K, corpus p æquali in centrum motu æqualiter movebitur a p versus C, ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in lineâ m k r, quæ per punctum k in lineam p C perpendicularis est; et motu transverso acquiret distantiam a lineâ p C, quæ sit ad distantiam quam corpus alterum P acquirit a lineâ P C, ut est motus transversus corporis p ad motum transversum corporis alterius P. Quare cum k r æqualis sit distantiæ quam corpus P acquirit a lineâ P C, sitque m r ad k r ut angulus V C p ad angulum V C P, hoc est, ut motus transversus corporis p ad motum transversum corporis P, (c) manifestum est quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m. Hæc ita se habebunt ubi corpora p et P æqualiter secundum lineas p C et P C moventur, ideoque æqualibus viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus p C n ad angulum p C k ut est an-



(c) * *Manifestum est quod corpus p*, &c. Ex puncto K in rectam P C, demissum intelligatur perpendiculum K R, et erit P R = p r. Fingamus corpus P de loco P ità projici ut vi secundum directionem P C, urgente percurrat spatium P R, eodem tempore quo vi alterâ secundum rectam ipsi R K, parallelam impellente, percurrit spatium æquale rectæ R K, adeò ut eo tempore viribus conjunctis describat diagonalem P K. Fingamus similiter corpus p, de loco p ità projici, ut vi secundùm directionem p C urgente percurrat p r = P R, eodem tempore quo corpus P percurrit P R aut R K vel P K, et vi alterâ secundum directionem rectæ r m, parallelam impellente, corpus p, eodem tempore describat spatium æquale rectæ r m, quæ est ad R K, in ratione velocitatis transversæ corporis p, ad velocitatem transversam corporis alterius P. His positis manifestum est corpora P et p, de locis P, et p, simul egressa, eodem temporis puncto reperiri in locis K, et m.

gulus V C p ad angulum V C P, sitque n C æqualis k C, et corpus p completo illo tempore ([d]) reverâ reperietur in n; ([e]) ideoque vi majore urgetur quam corpus P, si modò angulus n C p angulo k C p major est, id est si orbis u p k vel movetur in consequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus quâ linea C P in consequentia fertur; et vi minore si orbis tardius movetur in antecedentia. Estque

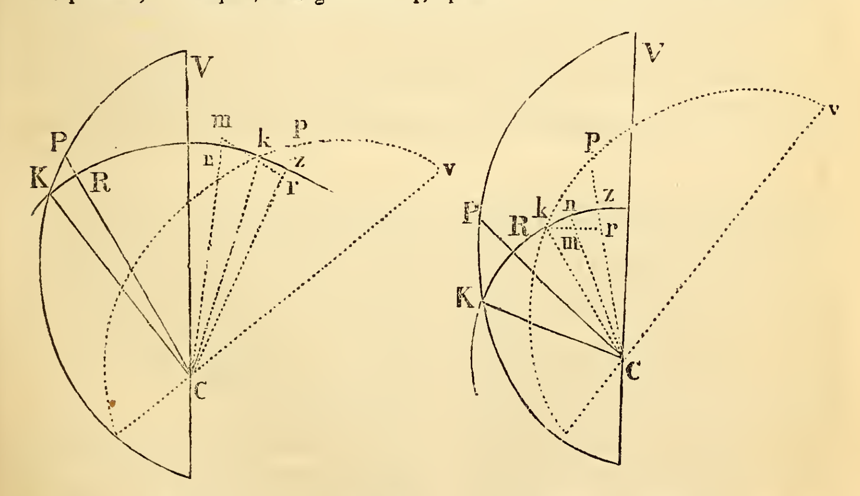
([d]) * *Reverâ reperietur in puncto n.* Est enim angulus p C k = P C K (per hyp.) et si fuerit n locus corporis p, erit (per Prop. 43.) angulus p C n, ad angulum p C k, ut angulus V C p, ad angulum V C P. et puncta C, n, m, jacent in unâ rectâ. Nascentibus enim angulis p C n, P C K, perpendicula r m, R K, sunt ut arcus circulares nascentes radiis æqualibus C R, C r descripti, seu ut anguli m C r, K C R, (per Lem. 7.) Est ergò angulus m C p, ad angulum K C P, seu k C p, ut m r, ad K R, seu k r, hoc est, ut angulus V C p, ad angulum V C P, sive, ut angulus p C n, ad angulum k C p, (per constr.) quarè angulus m C p = p C n, et hinc puncta C, n, m, jacent in unâ rectâ.

([e]) 444. *Ideoque vi majore urgetur quam corpus P, si modò angulus* n C p, *angulo* k C p *major; vi minore,* si angulus m C p, angulo k C p minor; et vi æquali, si angulus m C p, angulo k C p æqualis. Nam in 1°. casu linea C m, major est quam C n, et punctum m extrà peripheriam circuli radio C k, vel C n, descripti cadit, adeóque præter vim quâ corpus utrumque ad centrum urgetur, requiritur vis altera quâ corpus p, adhuc describat m n. In 2°. casu C m, minor est quam C n, puncto m, cadente inter puncta k, et r, in lineâ k r. In 3°. casu C m = C n, coincidentibus punctis m, n, k.

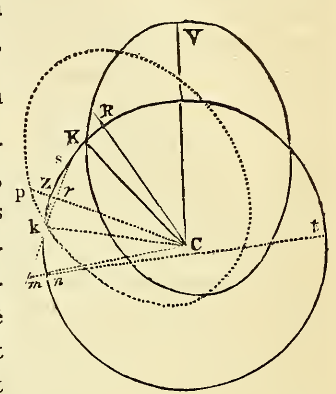
445. Porrò angulus m C p, angulo k C p seu K C P major est, si orbis v p k, vel movetur in consequentia (ut patet) vel movetur in antecedentia majore celeritate quàm sit dupla ejus quâ linea C P in consequentia fertur. Nam in hoc casu angulus v C V, est plusquam duplo major angulo V C P, seu v C p, adeóque angulus V C p, major angulo V C P, seu v C p, et hinc angulus p C m, major angulo p C k, cum sit angulus p C m, ad angulum p C k, ut V C p, ad V C P.

446. Si orbis v p k, movetur in antecedentia cum celeritate duplâ ejus quâ linea C P, in consequentia fertur, erit angulus V C p = V C P cumque sit etiam C p = C P, corpus p describet orbem immotum V p, similem et æqualem orbi V P K. In hoc casu corpus p, non fertur ab V, versùs P, sed in partem oppositam ut patet.

447. Si orbis v p k movetur in antecedentia minori celeritate quam sit dupla ejus quâ linea C P in consequentia fertur, erit angulus m C p, angulo k C p minor. In hoc enim casu angulus V C v minor est duplo angulo V C P, vel v C p, adeóque angulus V C p, minor angulo V C P, vel v C p et hinc angulus m C p, minor angulo k C p (per constr.)



virium differentia ut locorum intervallum m n, per quod corpus illud p ipsius actione, dato illo temporis spatio, transferri debet. Centro C intervallo C n vel C k describi intelligatur circulus secans lineas m r, m n productas in s et t, et (f) erit rectangulum m n × m t æquale rectangulo m k × m s, ideoque m n æquale $\frac{m\,k \times m\,s}{m\,t}$. (g) Cùm autem triangula p C k, p C n dato tempore dentur magnitudine, sunt k r et m r, earumque differentia m k et summa m s reciprocè ut altitudo p C, ideoque rectangulum m k × m s est reciprocè ut quadratum altitudinis p C. Est et m t directè ut $\frac{1}{2}$ m t, id est, ut altitudo p C. Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; et hinc fit $\frac{m\,k \times m\,s}{m\,t}$, id est lineola nascens m n, eique proportionalis virium differentia reciprocè ut cubus altitudinis p C. Q. e. d.



Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P et p, vel K et k, est ad vim quâ corpus motu circulari revolvi possit ab R ad K eodem tempore quo corpus P in orbe immobili describit arcum P K, ut lineola nascens m n ad (h) sinum versum arcus nascentis R K, id est ut $\frac{m\,k \times m\,s}{m\,t}$ ad

(f) * *Erit rectangulum m n × m t = rectangulo m k × m s.* Per Prop. 35. vel. 36. Lib. 3. Elem.

(g) *Cùm autem triangula p C k,* sive P C K, et *p C n, dato tempore describantur* (per hyp.) *dantur magnitudine* (per Prop. 1.) Porrò triangulum P C K = $\frac{1}{2}$ P C × K R, et triangulum p C n = $\frac{1}{2}$ p C × m r. Junctis enim p n, p m, erit triangulum nascens p n C æquale nascenti p m C, ob m n evanescentem respectu lineæ finitæ C n, et triangulum p m C = $\frac{1}{2}$ p C × m r. Sunt ergò facta p C × k r, et p C × m r, constantia seu data et hinc k r, et m r, sunt reciprocè ut altitudo p C, et propterea dividendo et componendo, earum differentia; m k, et summa m s, sunt reciprocè ut eadem altitudo p C. Quod ut clariùs intelligatur, supponamus esse k r = $\frac{F}{p\,C}$, m r = $\frac{G}{p\,C}$, et F et G esse quantitates datas, erit m r — k r = m k = $\frac{G - F}{p\,C}$, m r + k r = m s = $\frac{G + F}{p\,C}$, hoc est, ob quantitates F, G, G — F, G + F, datas, erunt k r, m r, m k, m s, ut $\frac{1}{p\,C}$. Hinc rectangulum m k × m s, = $\frac{G\,G - F\,F}{p\,C^2}$, est reciprocè ut quadratum altitudinis P C; est et m t, directè ut $\frac{1}{2}$ m t = C n = C k = p C, quarè m n = $\frac{m\,k \times m\,s}{m\,t} = \frac{G\,G - F\,F}{2\,p\,C^3}$, et ideò m n est reciprocè ut cubus altitudinis p C ob datam quantitatem $\frac{G\,G - F\,F}{2}$.

(h) * *Ad sinum versum arcûs nascentis R K* seu Z k, hoc est, ad Z r, nam Z r et m n, sunt spatia nascentia eodem tempusculo viribus illis descripta, et iisdem proindè viribus proportionalia. Est autem m n = $\frac{m\,k \times m\,s}{m\,t}$ (ex Dem.) et Z r = $\frac{k\,r^2}{2\,k\,C}$. Nam, ex naturâ circuli Z r : k r = k r : K C + r C, hoc est, quia r C usurpari potest pro Z C, et quia Z C = k C, Z r : k r = k r : 2 k C, et Z r = $\frac{k\,r^2}{2\,k\,C}$; undè

$\frac{r\,k\,q}{2\,k\,C}$, vel ut m k $\times$ m s ad r k quadratum; hoc est, si capiantur datæ quantitates F, G in eâ ratione ad invicem quam habet angulus V C P ad angulum V C p, ut G G — F F ad F F. Et (i) propterea, si centro C intervallo quovis C P vel C p describatur sector circularis æqualis areæ toti V P C, quam corpus P tempore quovis in orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus P in orbe immobili et corpus p in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, quâ corpus aliquod, radio ad centrum ducto, sectorem illum eodem tempore, quo descripta sit area V P C uniformiter describere potuisset, ut G G — F F ad F F. Namque sector ille et area p C k sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

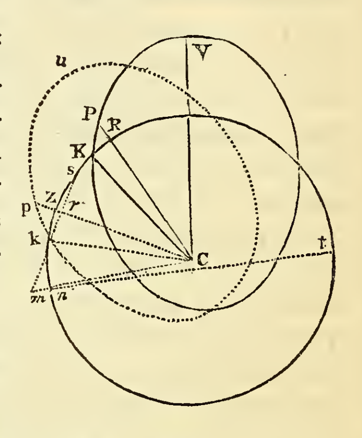
Corol. 2. Si orbis V P K ellipsis sit umbilicum habens C et apsidem summam V; eique similis et æqualis ponatur ellipsis u p k, ita ut sit semper p C æqualis P C et angulus V C p sit ad angulum V C P in datâ ratione G ad F; pro altitudine autem P C vel p C scribatur A, et pro ellipseos latere recto ponatur 2 R: erit vis, quâ corpus in ellipsi mobili revolvi potest, ut $\frac{F\,F}{A\,A} + \frac{R\,G\,G - R\,F\,F}{A \text{ cub.}}$ et contra. Exponatur enim vis quâ corpus revolvatur in immotâ ellipsi per quantitatem $\frac{F\,F}{A\,A}$, et vis in V erit $\frac{F\,F}{C\,V \text{ quad.}}$. (k) Vis autem quâ corpus in circulo ad distantiam

m n : Z r = m k $\times$ m s : k r², ob m t = 2 k C. Si verò capiantur duæ quantitates G, F, in eâ ratione ad invicem quam habet angulus V C p, ad angulum V C P, seu quam habet m r, ad k r, erit m k $\times$ m s : k r² = G G — F F : F F; ut ex suprà demonstratis liquet, ergò m n : Z r = G G — F F : F F.

(i) * *Et propterea si centro C.* Corpus P, in orbitâ V P K revolvens dato tempore datum sectorem P C K, radio ad centrum C ducto describit (per Prop. I.) et corpus in circulo radio C K descripto uniformiter revolvens, et arcum R K, seu sectorem C R K = C P K, describens eodem tempore quo corpus P describit arcum P K, seu sectorem C P K, dato tempore datum quoque sectorem describit. Quarè corpus P, in orbitâ V P K, et corpus in circulo prædicto revolventia, radiis ad centrum C ductis, sectores æquales temporibus æqualibus describunt. *Et propterea si centro C, intervallo C P, vel C p, describatur*, &c.

(k) * *Vis autem quâ corpus in circulo*, &c. Demonstratio Newtoniana ita procedit: Vis quâ corpus in ellipsi circa ejus focum revolvitur, est semper æqualis cuidam quantitati constanti divisæ per quadratum distantiæ a foco (per Prop. XI.) Sumatur ergo pro illâ quantitate constanti, quadratum F F cujus latus F est primâ ex illis indeterminatis (sed constantibus) quæ exprimunt rationem anguli V C P ad angulum V C p, erit vis in V = $\frac{F\,F}{V\,C^2}$. Sit corpus circà centrum quodvis in circulo revolvens, ad distantiam C V, eâdem velocitate quâ corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside V, sumantur in circulo et in ellipsi arcus quamminimi eodem tempore descripti, illi arcus erunt inter se æquales, ob æquales velocitates (ex hypoth.) et eorum sagittæ erunt inter se ut vires centrales (per Corol. 4. Prop. I.): in ellipsibus autem omnibus in quibus vis centripeta ad focum tendit (et iis annumeratur circulus) latera recta sunt inversè ut arcuum quamminimo tempore descriptorum sagittæ et directè ut quadrata perpendiculi ducti ab extremitate eorum arcuum in lineam ad centrum virium tendentem (per Corol. 2. Prop. XIII.) sed in apside ellipseos et circuli, illa perpendicula sunt ipsius arcûs, ideoque sunt æqualia; ergo latera recta hujus ellipsis et hujus circuli erunt inversè ut sagittæ

C V eâ cum velocitate revolvi posset quam corpus in ellipsi revolvens habet in V, est ad vim quâ corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside V, ut dimidium lateris recti ellipseos ad circuli semidiametrum C V, ideoque valet $\frac{\text{R F F}}{\text{C V cub.}}$: et vis, quæ sit ad hanc ut G G – F F ad F F, valet $\frac{\text{R G G} - \text{R F F}}{\text{C V cub.}}$: estque hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium in V quibus corpus P in ellipsi immotâ V P K, et corpus p in ellipsi mobili u p k revolvuntur. Unde cùm (per hanc Prop.) differentia illa in aliâ quâvis altitudine A sit ad seipsam in altitudine C V ut $\frac{1}{\text{A cub.}}$ ad $\frac{1}{\text{C V cub.}}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{\text{R G G} - \text{R F F}}{\text{A cub.}}$. Igitur ad vim $\frac{\text{F F}}{\text{A A}}$, quâ corpus revolvi potest in ellipsi immobili V P K, addatur excessus $\frac{\text{R G G} - \text{R F F}}{\text{A cub.}}$; et componetur vis tota $\frac{\text{F F}}{\text{A A}} + \frac{\text{R G G} - \text{R F F}}{\text{A cub.}}$ quâ corpus in ellipsi mobili u p k iisdem temporibus revolvi possit.



Corol. 3. ([1]) Ad eundem modum colligetur quòd, si orbis immobilis

arcuum sive inversè ut vires centrales; latus rectum circuli est ipsa diameter, ergo sumendo dimidium utriusque lateris recti est *vis quâ corpus in ellipsi revolvens urgetur*, &c. Reliqua demonstratio est plana.

([1]) *Ad eundem modum*, &c. Si corpus revolvatur in ellipsi vi centripetâ tendente ad centrum ellipseos. vis centralis est directè ut distantia a centro, ideoque erit æqualis quantitati constanti multiplicatæ per distantiam (per Prop. X.), posito 2 T pro axe transverso et 2 R pro latere recto, sit ea quantitas constans $\frac{\text{F F}}{\text{T}^3}$, vis in V erit $\frac{\text{F F} \times \text{C V}}{\text{T}^3}$ vel quoniam C V = T, erit $\frac{\text{F F}}{\text{T T}}$ in aliis verò omnibus punctis erit $\frac{\text{F F} \times \text{A}}{\text{T}^3}$.

Sit corpus in circulo revolvens circa centrum C ad distantiam C V, quâlibet vi centripetâ, sed tali ut eâdem velocitate feratur quâ corpus in ellipsi latum urgetur in extremitate axis transversi, sumantur in eo circulo et in extremitate axis transversi ellipseos arcus quamminimi eodem tempore descripti illi arcus erunt æquales, ob æquales velocitates, et eorum sagittæ erunt ut vires centrales quibus corpora in circulo et ellipsi retinentur (per Cor. 4. Prop. I.); in ellipsibus autem diversis (et iis annumeratur circulus) in quibus vis centripeta ad centrum tendit, in distantiis æqualibus a centro, dupla quadrata facti axium sunt inversè ut sagittæ quam minimo tempore descriptæ, et directè ut quadrata arearum dato tempore descriptarum (per constr. Prop. X.), cùm ergo hic sumantur arcus æquales et perpendiculares in lineam ad centrum ductam, et distantiæ a centro sint æquales, illæ areæ utrinque sunt æquales, ergo sagittæ arcuum in ellipsi et in circulo sunt inversè ut ipsa quadrata facti axium, seu quia axis transversus ellipseos et circuli diameter idem sunt, sagittæ arcuum in ellipsi et circulo sunt inversè ut quadratum axis conjugati ad quadratum transversi, sivè inversè ut latus rectum ad axem transversum, ergo 2 T : 2 R (sive T : R) = $\frac{\text{F F}}{\text{T T}}$; ad vim in circulo quæ itaque erit $\frac{\text{R} \times \text{F F}}{\text{T}^3}$ sed hæc vis est ad differentiam virium in orbe mobili et immobili, ut F F ad G G —

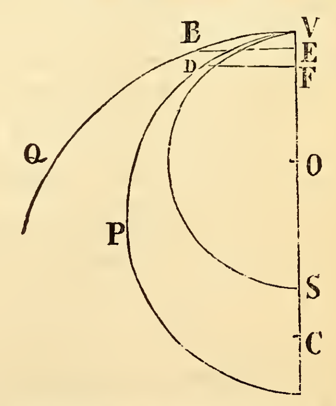
V P K ellipsis sit centrum habens in virium centro C; eique similis, æqualis et concentrica ponatur ellipsis mobilis u p k; sitque 2 R ellipseos hujus latus rectum principale, et 2 T latus transversum sive axis major, atque angulus V C p semper sit ad angulum V C P ut G ad F; vires, quibus corpora in ellipsi immobili et mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\ cub.}$ et $\frac{FFA}{T\ cub.} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ respectivè.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima C V nominetur T, et radius curvaturæ quam orbis V P K habet in V, id est radius circuli æqualiter curvi, nominetur R, et vis centripeta, quâ corpus in trajectoriâ quâcunque immobili V P K revolvi potest in loco V dicatur $\frac{VFF}{TT}$, atque aliis in locis P indefinitè dicatur X, altitudine C P nominatâ A, et capiatur G ad F in datâ ratione anguli V C p ad angulum V C P: erit (m) vis centripeta, quâ corpus idem eosdem motus in eâdem trajectoriâ u p k circulariter motâ temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium $X + \frac{VRGG - VRFF}{A\ cub.}$.

F F, ergo illa differentia est $\frac{RGG - RFF}{T^3}$, hæc autem differentia in V, est ad differentiam in alio quovis loco inversè ut cubi altitudinum ergo $A^3 : CV^3$ (sive T^3) $= \frac{RGG - RFF}{T^3} : \frac{RGG - RFF}{A^3}$, cum ergo vis in orbe immobili sit ut $\frac{FFA}{T^3}$ in orbe mobili erit $\frac{FFA}{T^3} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$. Q. e. d.

(m) * *Erit vis centripeta.* Ut hæc commodè demonstrentur adhibendum Lemma sequens.

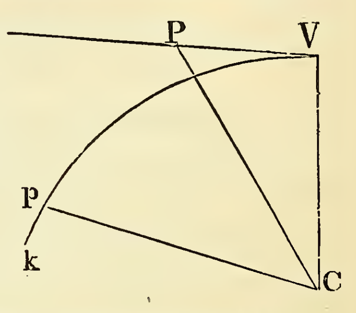
448 *Lemma.* Si corpus ad centrum virium C tendens describat trajectoriam immotam V P, vis centripeta quâ in apside V urgetur est ad vim centripetam corporis alterius in circulo V B Q, ad eandem distantiam C V, eâdem cum velocitate revolventis, ut distantia C V ad V O radium circuli V D S, trajectoriam V P osculantis in V. Capiantur in circulo V B Q et in trajectoriâ V P arcus quam minimi et æquales V B, V D, et ex punctis B et D ad rectam C V demissa intelligantur perpendicula B E, D F; arcus evanescentes V B, V D eodem tempore a corporibus duobus percurrentur, ob utriusque corporis velocitatem æqualem, eruntque perpendicula B E, D F æqualia (per Lem. VII.) Quoniam autem arcus evanescens V D usurpari potest pro arcu circuli curvam V P osculantis in V, erit ex naturâ circuli V F : D F = D F : V O + F O, seu 2 V O, adeoque $DF^2 = 2VO \times VF$, et similiter $BE^2 = 2VC \times VE = 2VO \times VF$; undè V F : V E = V C : V O; sed vis centripeta corporis arcum



V D describentis, est ad vim centripetam alterius corporis arcum V B describentis ut V F ad V E, quæ sunt spatia viribus illis urgentibus eodem tempusculo descripta, quarè vis centripeta quâ corpus in apside V urgetur, est ad vim centripetam alterius corporis in circulo ad eandem distantiam eâdem cum velocitate revolventis, ut distantia illa C V ad radium V O circuli osculatoris in V. Q. e. d.

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in orbe quocunque immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione datâ, et inde inveniri novi orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

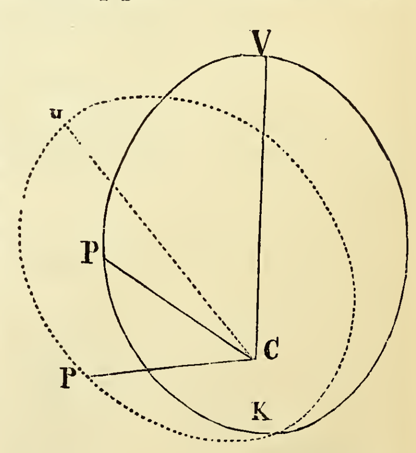
Corol. 6. Igitur si ad rectam C V positione datam erigatur perpendiculum V P longitudinis indeterminatæ, jungaturque C P, et ipsi æqualis agatur C p, constituens angulum V C p, qui sit ad angulum V C P in datâ ratione; vis quâ corpus gyrari potest in curva illa V p k quam punctum p perpetuò tangit, erit reciprocè ut cubus altitudinis C p. Nam (n) corpus P per vim inertiæ, nullâ aliâ vi urgente, uniformiter progredi potest in rectâ V P. Addatur vis in centrum C, cubo altitudinis C P vel



449. *Corol.* 1. Si radius V O circuli trajectoriam V P osculantis in apside V dicatur R, distantia C V, T, distantia C P, A, vis centripeta in V, $\frac{VFF}{TT}$, hæc erit ad vim centripetam in circulo V Q, ad eandem distantiam C V eâdem cum velocitate descripto ut T ad R, (448) hæc ergo erit $\frac{VRFF}{T^3}$, quæ erit ad differentiam virium centripetarum in apsidibus V et u, orbis immobilis V P, et orbis mobilis u p, ut F F ad G G — F F (per Cor. 1. Newt.) ideoque differentia illa erit $\frac{VRGG - VRFF}{T^3}$ quæ erit ad differentiam in aliis locis P ut A^3 ad T^3, ideoque in quibusvis locis erit differentia virium in orbe mobili et immobili $\frac{VRGG - VRFF}{A^3}$. Quod aliâ ratione demonstravit Hermannus Prop. 25. Lib. 1. Phoronomiæ.

450. *Corol.* 2. Hinc si vis centripeta in quovis puncto P, orbitæ immobilis V P, dicatur X, vis in puncto æquè alto p, orbitæ mobilis u p erit $= X + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$. Q. e. d.

451. *Corol.* 3. Si orbitæ V P et u p sint ellipses quarum umbilicus communis C, erit (240) radius osculi R æqualis dimidio lateri recto ellipseos V P, vel u p: et (per Prop. XI.) X : $\frac{VFF}{TT}$ = T T : A A, adeoque $X = \frac{VFF}{AA}$, Ergo (450) vis in orbitâ mobili erit $\frac{VFF}{AA} + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$, et divisis omnibus terminis per V ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$; et si vis centralis ad centrum ellipseos dirigatur erit X : $\frac{VFF}{TT}$ = A : T et $X = \frac{VFF \times A}{T^3}$



et vis in orbita mobili erit $\frac{VFF \times A}{T^3} + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$ et divisis terminis per V erit $\frac{FF \times A}{T^3} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$; sicut in Cor. 3. et 4. Newt. inventum fuerat.

(n) * *Nam corpus P.* Linea V P considerari potest tanquam trajectoria immota, in quâ vis centripeta X in loco quovis P nulla est, et radius osculi R infinitus; erit igitur in hoc casu (per Cor. 4.) vis centripeta in loco p, trajectoriæ

C p, reciprocè proportionalis, et (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam V p k. Est (°) autem hæc curva V p k eadem cum curvâ illâ V P Q in Corol. 3. Prop. XLI. inventâ, in quâ ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta obliquè ascendere.

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

(p) *Orbium qui sunt circulis maxime finitimi requiruntur motus apsidum.*

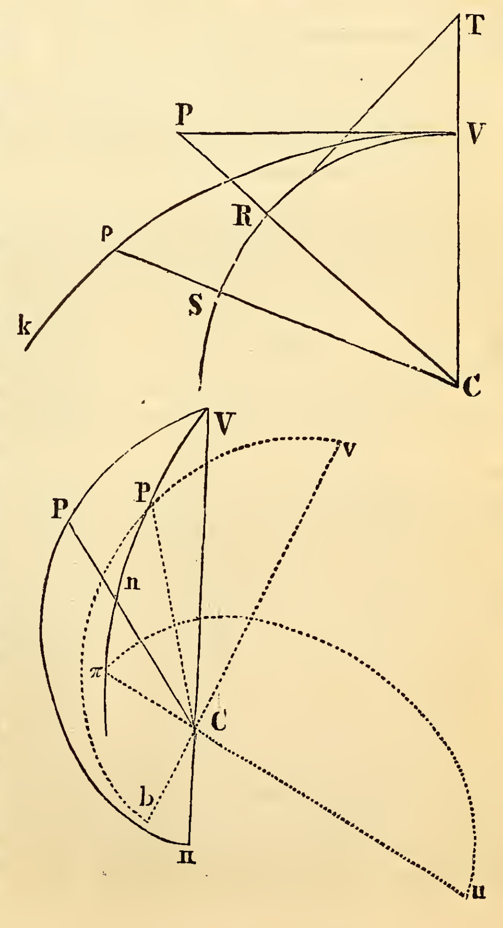
(q) Problema solvitur arithmeticè faciendo ut orbis, quem corpus in

mobilis, æqualis $\frac{\text{V R G G} - \text{V R F F}}{\text{A}^3}$, adeóque ob datam quantitatem V R G G — V R F F, erit X, seu vis in p, ut $\frac{1}{\text{A}^3}$.

(°) * *Est autem hæc curva V p k eadem,* &c. Nam si centro C intervallo C V describatur circulus V R S quem recta C P secat in R, recta C p, in S, sitque angulus S C V ad angulum R C V in datâ ratione, erit quoque sector S V C ad sectorem R V C in datâ illâ ratione, et ductâ per punctum R tangente R T, quæ radio C V producto occurrat in T, ejusdem anguli R C V secantes C P, C T erunt æquales, atquè adeò curva V p k, eadem cum curvâ V P Q, in Corol. 3°. Prop. 41. inventâ, in quâ *recta C p est semper æqualis abscissæ C T, et angulus V C p est semper sectori V C R proportionalis.*

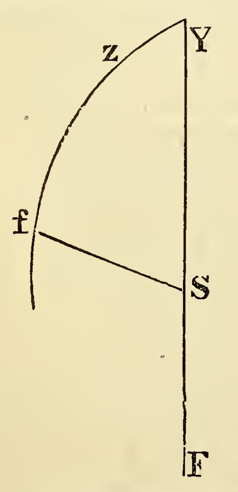
(p) * *Orbium qui sunt,* &c. Iisdem positis quæ in Propositione 44. et ejus Corollariis 1. et 2. sit V p n ϖ orbis quem corpus p in ellipsi mobili u p b revolvens describit in plano immobili, et V Π, v b, ellipseon immobilis et mobilis axes transversi, manifestum est punctum V esse apsidem summam tam in ellipsi immotâ V P Π, quàm in orbe V p n ϖ, et esse ϖ apsidem imam in orbe V p n ϖ si fuerit C ϖ = C b = C Π, in quâ hypothesi corpus p pervenit ad locum ϖ, ubi corpus P, in ellipsi immotâ pervenit ad apsidem imam Π et in ellipsi revolvente corpus p pervenit ad b, ac in orbe V p n ϖ, puncta p, b, ϖ, coincidunt. Jam verò datâ vi centripetâ in orbe V p n ϖ, quæritur motus apsidum, hoc est, motus axis u C b, seu quod idem est, quæritur ratio F, ad G, vel anguli V C P ad angulum V C p, aut anguli V C Π, 180°. ad angulum V C ϖ; quod si ellipsis V P Π, sit circulo maximè finitima, orbis V p n ϖ ad circuli formam quam proximè accedet, nam si ellipsis V P Π, in circulum perfectum mutetur, orbis V p n ϖ fit quoque circulus.

(q) * *Problema solvitur arithmeticè.* Revol-



ellipsi mobili (ut in Propositionis superioris Corol. 2. vel. 3.) revolvens describit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apsides requiruntur, et quærendo apsides orbis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem acquirent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum V apsis summa, et scribantur T pro altitudine maximâ C V, A pro altitudine quâvis aliâ C P vel C p, et X pro altitudinum differentiâ C V — C P; et vis, quâ corpus in ellipsi circa umbilicum suum C (ut in Corol. 2.) revolvente movetur, quæque in Corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$, id est ut $\frac{FFA + RGG - RFF}{A\ cub.}$, substituendo T — X pro A, erit ut $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A\ cub.}$. Reducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit A cub. et numeratores, factâ homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res exemplis patebit.

vatur corpus Y in orbe immoto Y Z f vi centripetâ datâ tendente ad centrum S, sitque punctum Y apsis summa, f apsis ima in illo orbe.



Umbilico S, et axe transverso Y S F = Y S + S f, descriptæ intelligantur ellipses immobilis et mobilis, efficiendum est ut corpus Y orbem Y Z f describens, simul revolvatur in hâc ellipsi mobili, dum corpus aliud ellipsim immotam describit eâ ratione quam exposuimus Prop. 43. et inveniendus est apsidum motus. Id autem absolvitur faciendo ut orbis V p n ϖ (fig. superiori) qui omnes orbes ut Y Z f quæcumque sit in illis vis centripetæ lex generaliter exhibet accedat ad formam orbis Y Z f, sive ei similis et æqualis fiat, ac quærendo apsides V ϖ, vel rationem angulorum V C P, V C p, in orbe illo V p n ϖ. Porrò si supponamus orbem V p n ϖ, similem et æqualem factum esse orbi Y Z f, erit vis centripeta in ellipsi immotâ cujus umbilicus S vel C ut $\frac{FF}{AA}$, et vis centripeta in loco quovis Z orbis Y Z f, vel in loco P, orbis V p n ϖ, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A^3} = \frac{FFA+RGG-RFF}{A^3} = \frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A^3} = \frac{P}{A^3}$, substituendo T — X pro A in numeratore, et P pro numeratore toto. Undè si quantitas $\frac{Q}{A^3}$ vim centripetam in loco quovis Z orbis Y Z f exponat, eaque sit data, erit $\frac{P}{A^3}$ ad $\frac{Q}{A^3}$ in datâ ratione. Sit illa ratio 1 ad B, et erit $\frac{PB}{A^3} = \frac{Q}{A^3}$, et P B — Q = o. Loco A, in quantitate Q, substituatur T — X, et æqualitatis P B — Q = o. termini omnes analogi se mutuo destruere debent, hoc est, termini omnes dati seu in quibus

(r) *Exempl.* 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, ideoque ut $\frac{\text{A cub.}}{\text{A cub.}}$, sive (scribendo T — X pro A in numeratore) ut $\frac{\text{T cub.} - 3\text{ T T X} + 3\text{ T X X} - \text{X cub.}}{\text{A cub.}}$; et collatis numeratorum terminis correspondentibus; nimirum datis cum datis, et non datis cum non datis, fiet R G G — R F F + T F F ad T cub. ut — F F X ad — 3 T T X + 3 T X X — X cub. sive ut — F F ad — 3 T T + 3 T X — X X. Jam cùm orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, coëat orbis cum circulo; et ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt R G G ad T cub. ut — F F ad 3 T T, seu G G ad T T ut F F ad 3 T T, et vicissim G G ad F F ut T T ad 3 T T, id est, ut 1 ad 3; ideoque G ad F, hoc est angulus V C p ad angulum V C P, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in ellipsi immobili, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiat angulum V C P (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipsi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiet angulum V C p graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id ideo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripetâ describit, et orbis illius quem corpus in ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi orbes, non universaliter sed tunc cum ad formam circularem quam maximè appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripetâ in orbe propemodum circulari revolvens, inter apsidem summam et apsidem

non reperitur quantitas variabilis X erunt simul nihilo æquales, et termini non dati, seu in quibus variabilis X invenitur, erunt etiam simul nihilo æquales, atquè indè determinabitur ratio G ad F seu anguli V C P ad angulum V C p, faciendo ut sint termini dati in quantitate P ad terminos non datos ejusdem quantitatis, ita termini dati in quantitate Q, ad terminos non datos ejusdem quantitatis. Quod exemplis patebit.

(r) * *Exemplum* 1um. *Ponamus vim centripetam* in orbe Y Z f *uniformem* seu constantem *esse, ideóque ut* 1, seu ut $\frac{A^3}{A^3}$, erit $Q = A^3 = T^3 - 3TTX + 3TXX - X^3$, et $PB = BRGG - BRFF + BTFF - BFFX$ atque adeò $BRGG - BRFF + BTFF - BFFX - T^3 + 3TTX - 3TXX + X^3 = o$, et termini dati $BRGG - BRFF + BTFF - T^3 = o$, seu $BRGG - BRFF + BTFF = T^3$, et termini non dati $- BFFX + 3TTX - 3TXX + X^3 = o$, seu $BFF = 3TT - 3TX + X^2$, undè hæc proportio deducitur $BRGG - BRFF + BTFF : BFF = T^3 : 3TT - 3TX + X^2 = RGG - RFF + TFF : FF$. Jam cum orbis Y Z f, ponatur circulo quam maximè finitimus, coëat orbis cum circulo et ob factas R et T æquales, atquè $X = o$, erit $X^2 = o$, $3TX = o$, $RFF = TFF$, et hinc $T^3 : 3TT = RGG : FF := TGG : FF$, et $T^2 : 3T^2 = 1 : 3 = GG : FF$, adeóque $G : F = 1 : \sqrt{3}$, hoc est, angulus V C p, est ad angulum V C P, ut 1, ad $\sqrt{3}$. Ergò cum corpus in ellipsi immobili V P Π, ab apside summâ V ad apsidem imam Π descendendo, conficiat angulum V C Π grad. 180. corpus aliud in ellipsi mobili u p b, atque adeò in orbe immobili V p u ϖ, seu Y Z f, ab apside summâ V vel Y, ad apsidem imam ϖ vel f, descendendo conficiet angulum V C ϖ, vel Y S f grad. $\frac{180}{\sqrt{3}}$.

imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu 103 gr. 55 m. 23 sec. ad centrum; perveniens ab apside summâ ad apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, et inde ad apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; et sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ et n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $\overline{T-X}|^n$ in seriem indeterminatam per (s) methodum nostram serierum convergentium reductus, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$, &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius $RGG - RFF + TFF - FFX$, fit $RGG - RFF + TFF$ ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$, &c. Et sumendo rationes ultimas ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$, seu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1}, et vicissim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id est ut 1 ad n; ideoque G ad F, id est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam in ellipsi confectus, sit graduum 180; conficietur angulus VCp, in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam, in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centripetâ dignitati A^{n-3} proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; et hoc angulo repetito angulus redibit ab apside imâ ad apsidem summam, et sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis a centro, id est, ut A seu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 et $\sqrt{n}$ æqualis 2; ideoque angulus inter apsidem summam et apsidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ gr. seu 90 gr. Com-

(s) * *Per methodum nostram.* Vide fragmentum Epistolæ Newtoni ad Oldenburgium, et theorematis ibi propositi demonstrationem requiras ex Elementis Algebræ clarissimorum Virorum Wolfii, Abbatis de Molieres, vel ex Analysi demonstratâ Patris Reyneau, aut ex aliis passim authoribus. Interim cùm hic satis sit duos priores terminos dignitatis $(T-X)^n$ reperire ob evanescentes terminos in quibus reperitur ipsius X dignitas primâ altior, facilè demonstratur ex dignitatum per continuam radicis multiplicationem formatione duos illos priores terminos esse $T^n - n \times XT^{n-1}$. Ut si fuerit $n = 2$, duo priores termini dignitatis $(T-X)^2$, erunt $T^2 - 2 \times TX$; si $n = 3$, erunt $T^3 - 3 \times XT^2$, et ità porrò; atque hinc patet

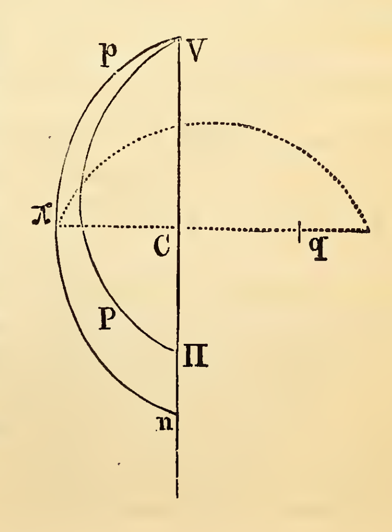
pletâ igitur quartâ parte revolutionis unius corpus perveniet ad apsidem imam, et completâ aliâ quartâ parte ad apsidem summam, et sic deinceps per vices in infinitum. Id (t) quod etiam ex Propositione X. manifestum est. Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvetur in ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciprocè ut distantia, id est directè ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2, ideoque inter apsidem summam et imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127 gr. 16 m. 45 sec. et propterea corpus tali vi revolvens, perpetuâ anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab apside summâ ad imam et ab imâ ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciprocè ut latus quadratoquadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciprocè ut $A^{\frac{11}{4}}$, (u) ideoque directè ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ seu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit n æqualis $\frac{1}{4}$, et $\frac{180}{\sqrt{n}}$ gr. æqualis 360 gr. et propterea corpus de apside summâ discedens et subinde perpetuò descendens, perveniet ad apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apsidem summam: et sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m et n pro quibusvis indicibus dignitatum altitudinis, et b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam

quàm compendiosa sit Newtoniana methodus motum apsidum determinandi, nam præterquam quod sufficit duos dignitatum terminos invenire, possunt quoque termini æquales R F F, T F F, in formulâ R G G — R F F + T F F — F F X, deleri; undè tantummodò conferendus terminus datus R G G cum aliis terminis datis, et terminus non datus — F F X cum aliis non datis.

(t) * *Id quod etiam ex Prop.* X., &c. Nam corpus urgente hâc vi centripetâ revolvetur in ellipsi immobili V p π n, cujus centrum est in centro virium C, axis transversus V n, axis conjugatus π q, apsides summæ duæ V, n, imæ π, q; ellipseos autem mobilis V P Π, umbilicus erit C, axis transversus V Π = V C + C Π.

(u) * *Ideoque directè ut* $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$, *seu ut* $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$, cum sit $A^3 = A^{\frac{12}{4}}$, et proindè est $\frac{A^3}{A^{\frac{11}{4}}} = A^{\frac{1}{4}}$, atquè ità $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}} = \frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$.



esse ut $\frac{b A^m + c A^n}{A \text{ cub.}}$, id est, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T - X}|^m + c \text{ in } \overline{T - X}|^n}{A \text{ cub.}}$

seu (x) (per eandem methodum nostram serierum convergentium) ut

$$\frac{b T^m + c T^n - m b X T^{m-1} - n c X T^{n-1} + \frac{mm-m}{2} b X X T^{m-2}}{A \text{ cub.}}$$

$+ \frac{\frac{nn-n}{2} c X X T^{n-2}, \&c.}{A \text{ cub.}}$ et collatis numeratorum terminis, fiet $R G G - R F F + T F F$ ad $b T^m + c T^n$, ut $- F F$ ad $- m b T^{m-1} - n c T^{n-1} + \frac{mm-m}{2} b X T^{m-2} + \frac{nn-n}{2} c X T^{n-2}$, &c. Et sumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit $G G$ ad $b T^{m-1} + c T^{n-1}$, ut $F F$ ad $m b T^{m-1} + n c T^{n-1}$, et vicissim $G G$ ad $F F$ ut $b T^{m-1} + c T^{n-1}$ ad $m b T^{m-1} + n c T^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam $C V$ seu T arithmeticè per unitatem, fit $G G$ ad $F F$ ut $b + c$ ad $m b + n c$, ideoque ut 1 ad $\frac{m b + n c}{b + c}$. Unde est G ad F, id est angulus $V C p$ ad angulum $V C P$, ut 1 ad $\sqrt{\frac{m b + n c}{b + c}}$. Et propterea cum angulus $V C P$ inter apsidem summam et apsidem imam in ellipsi immobili sit 180 gr. erit angulus $V C p$ inter easdem apsides, in orbe quem corpus vi centripetâ quantitati $\frac{b A^m + c A^n}{A \text{ cub.}}$ proportionali describit, æqualis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{b + c}{m b + n c}}$. Et (y) eodem argumento si vis centripeta sit ut $\frac{b A^m - c A^n}{A \text{ cub.}}$, angulus inter apsides invenietur graduum $180 \sqrt{\frac{b - c}{m b - n c}}$. Nec secus resolvetur

(x) * *Seu per eandem methodum.* Etenim dignitas $\overline{T - X}|^m$ evoluta, est $T^m - m X T^{m-1}$, &c. adeóque $b \times \overline{T - X}|^m = b T^m - m b X T^{m-1}$, &c. et similiter $c \times \overline{T - X}|^n = c T^n - n c X T^{n-1}$, &c. undè $b \times \overline{T - X}|^m + c \times \overline{T - X}|^n = b T^m + c T^n - m b X T^{m-1} - n c X T^{n-1}$, &c.

(y) * *Et eodem argumento.* Si vis centripeta sit ut $\frac{b A^m - c A^n}{A^3}$, id est ut $b \times \overline{T - X}|^m - c \times \overline{T - X}|^n$, seu ut $\frac{b T^m - c T^n - m b X T^{m-1} + n c X T^{n-1}}{A^3}$, &c. collatis terminis fiet $R G G$, hoc est $T G G$ ad $b T^m - c T^n$, ut $- F F$ ad $- m b T^{m-1} + n c T^{n-1}$, adeóque $G G$ ad $b T^{m-1} - c T^{n-1}$, ut $F F$ ad $m b T^{m-1} - n c T^{n-1}$, et ponendo $T = 1$, erit $G G : F F = b - c : m b - n c = 1 : \frac{m b - n c}{b - c}$, et $G : F = 1 : \sqrt{\frac{m b - n c}{b - c}}$.

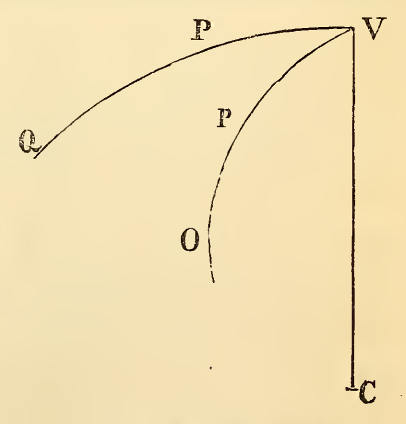
problema in casibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in series convergentes denominatorem habentes A cub. Dein pars data numeratoris qui ex illâ operatione provenit ad ipsius partem alteram non datam, et pars data numeratoris hujus R G G — R F F + T F F — F F X ad ipsius partem alteram non datam in eâdem ratione ponendæ sunt: Et quantitates superfluas delendo, scribendoque unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu apsidum; et contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, et altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$, cujus index est $\frac{nn}{mm} - 3$. Id [z] quod per exempla secunda manifestum est. [a] Unde liquet vim illam in majore quàm triplicatâ altitudinis ratione, in recessu a centro, decrescere non posse: [b] Corpus tali

(z) 452. * *Id quod per exempla secunda manifestum est.* Si in exemplo secundo loco indicis n, ad confusionem tollendam scribatur p, erit vis centripeta, ut $A^{p - 3}$, et angulus confectus in descensu ab apside summâ ad apsidem imam æqualis angulo $\frac{180^\circ}{\sqrt{p}}$, adeóque duplus ille angulus seu motus totus angularis quo corpus ab apside summâ redit ad eandem erit $\frac{360}{\sqrt{p}}$ in exemplo secundo. Est autem in casu corollarii hujus, motus totus angularis quo corpus redit ad apsidem eandem æqualis angulo $\frac{360\ m}{n}$, ergò $\frac{360}{\sqrt{p}} = \frac{360\ m}{n}$, et $\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{m}{n}$, et $\frac{1}{p} = \frac{mm}{nn}$, et $\frac{nn}{mm} = p$; quare $A^{p - 3} = A^{\frac{nn}{mm} - 3}$.

(a) 453. *Undè liquet vim illam.* Nam si vis esset ut $\frac{1}{A^{3+q}}$, seu ut A^{-3-q}, sitque $+ q$ quantitas positiva, esset $\frac{nn}{mm} - 3 = -3 - q$, et $\frac{nn}{mm} = -q$, hoc est, quadratum quantitatis $\frac{n}{m}$ negativum quod absurdum est: non potest igitur vis in majore quam in triplicatâ altitudinis ratione seu in ratione $\frac{1}{A^{3+q}}$, in recessu a centro decrescere.

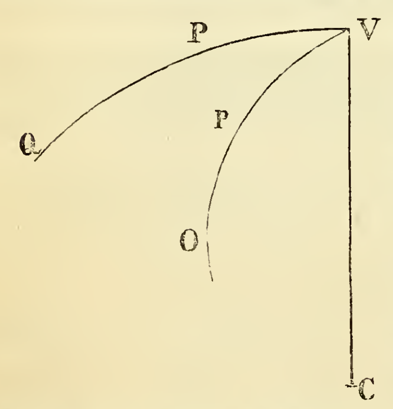
(b) * *Corpus tali vi revolvens;* hoc est, vi quæ in recessu a centro decrescat in ratione altitudinis triplicatâ deque apside discedens, &c. Sint enim ut in Corol. 3°. Prop. 41. duæ curvæ



V p O, V P Q, quas corpora duo de loco V, secundum directionem ad C V perpendicularem egressa, vi centripetâ ad C tendente, et in triplicatâ altitudinis ratione decrescente in recessu a centro describunt, et corpus in curva V p O latum ad centrum semper accedat, corpus verò in curvâ V P Q, motum a centro semper recedat ut in eodem Cor. 3°. Prop. 41. manifestum est punctum V esse apsidem summam in curvâ V p O, et esse apsidem imam in curvâ V P Q;

vi revolvens deque apside discedens, si cœperit descendere nunquam perveniet ad apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usque ad centrum, describens curvam illam lineam de quâ egimus in Corol. 3. Prop. XLI. Sin cœperit illud, de apside discedens, vel minimum ascendere; ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apsidem summam. Describet enim curvam illam lineam de quâ actum est in eodem Corol. et in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic (c) et ubi vis, in recessu a centro, decrescit in majore quam triplicatâ ratione altitudinis, corpus de apside discedens, perinde ut cœperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum usque vel ascendet in infinitum. At (d) si vis, in recessu a centro, vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quâcunque; corpus nunquam descendet ad

Quarè cum in curva V p O, corpus ad centrum semper accedat, nunquam pervenire potest ad apsidem imam, seu altitudinem minimam quæ nulla est, sed gyris infinitis descendit usque ad



centrum; in curvâ verò V P Q de apside imâ discedens corpus ascendit in infinitum, nequè unquam pervenit ad apsidem summam quæ nulla est. Hæc demonstrari etiam possunt hâc ratione; Si fuerit vis ut $\frac{1}{A^3}$, seu ut A^{-3}, erit $\frac{nn}{mm} - 3 = -3$, et $\frac{nn}{mm} = o = p$ (452) et motus totus angularis ab apside ad eandem apsidem erit $\frac{360^\circ}{\sqrt{p}} = \frac{360}{o}$; motus verò angularis ab apside summâ ad imam, vel ab imâ ad summam erit $\frac{180^\circ}{o}$ quæ est quantitas infinita, undè liquet in nostrâ hypothesi corpus ab apside imâ ad summam aut a summâ ad imam nunquam pervenire posse.

(c) * *Sic et ubi vis in recessu a centro.* Si vis fuerit ut $\frac{1}{A^{3+q}}$, et q, quantitas positiva, erit (453) $\frac{nn}{mm} = -q = p$, et (452) motus totus angularis ab apside ad apsidem eandem erit $\frac{360^\circ}{\sqrt{-q}}$, et ab apside unâ ad alteram erit $\frac{180^\circ}{\sqrt{-q}}$: quarè ob imaginariam quantitatem $\sqrt{-q}$, impossibile est ut corpus de apside summâ discedens, adeóque ad centrum accedens, ad apsidem imam unquam perveniat, et ut de apside imâ discedens ac proindè a centro recedens unquam perveniat ad apsidem summam.

(d) * *At si vis in recessu a centro.* Sit vis ut $\frac{1}{A^{3-q}}$, et q, quantitas positiva erit $\frac{nn}{mm} - 3 = -3 + q$, et $\frac{nn}{mm} = q = p$ (452). Undè motus totus angularis ab apside ad eandem erit $\frac{360^\circ}{\sqrt{p}} = \frac{360\,m}{n}$, motus angularis ab apside unâ ad alteram $= \frac{180}{\sqrt{p}} = \frac{180\,m}{n}$, quæ sunt quantitates reales et positivæ, quarè in hâc hypothesi corpus ab apside ad apsidem eandem redire et ab apside summâ ad imam atque ab imâ ad summam pervenire poterit. Est autem $\frac{1}{A^{3-q}}$, altitudinis A dignitas, si fuerit q major quam 3, è contrà $\frac{1}{A^{3-q}}$ est dignitas quantitatis $\frac{1}{A}$, si fuerit q minor quam 3. Liquet igitur, si vis in recessu a centro vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, (quod fit ubi q minor quam 3) vel crescat in altitudinis ratione quâcumque (quod fit ubi q, major quam 3) corpus nunquam descendere ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquandò pervenire.

centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando perveniet: et (e) contra, si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens et ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet: et quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illâ triplicatâ. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de apside summâ ad apsidem summam alterno descensu et ascensu redierit; hoc est, si fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm} - 3$ valeat $\frac{1}{64} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{16} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{4} - 3}$ vel $A^{\frac{4}{9} - 3}$, id est, reciprocè ut $A^{3 - \frac{1}{64}}$ vel $A^{3 - \frac{1}{16}}$ vel $A^{3 - \frac{1}{4}}$ vel $A^{3 - \frac{4}{9}}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad apsidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis A^{-2} seu $\frac{1}{AA}$; et propterea decrementum virium in ratione duplicatâ altitudinis, ut (f) in præcedentibus demonstratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel unâ tertiâ, vel unâ quartâ, ad apsidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9} - 3}$ vel $A^{\frac{9}{4} - 3}$ vel $A^{9 - 3}$ vel $A^{16 - 3}$; et (g) propterea vis aut reciprocè ut $A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directè ut A^6 vel A^{13}. Denique si corpus pergendo ab apside summâ ad apsidem summam confecerit revolutionem integram, et præterea gradus tres, ideoque apsis illa singulis

(e) * *Et contra si corpus de apside ad apsidem, &c.* Nam si vis in recessu a centro non augeatur, nec etiam minuatur in minore quàm triplicatâ altitudinis ratione, necessariò decrescet vel in triplicatâ vel in majore quàm triplicatâ altitudinis ratione, sed supra demonstratum est in his duobus casibus corpus non posse ab apside ad apsidem alternis vicibus descendere et ascendere, ergò si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens et ascendens nunquam appellat ad centrum, vis in recessu a centro augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet, et quo citiùs corpus de apside ad apsidem redierit, eò longiùs ratio virium recedet a ratione illâ triplicatâ. Quo enim citiùs corpus de apside ad apsidem redierit, eò minor erit quantitas $\frac{360\ m}{n}$, aut quantitas $\frac{m}{n}$, adeoque eò major erit quantitas $\frac{n}{m}$, ejusque quadratum $\frac{nn}{mm} = p = q$, et hinc eò longiùs quantitas $\frac{1}{A^{3 - q}}$ a quantitate $\frac{1}{A^3}$ recedet.

(f) * *Ut in præcedentibus demonstratum est.* In hoc enim casu corpus describit ellipsim immotam circulo finitimam (per Cor. 1. Prop. XIII.) intereadum æqualiter movetur in ellipsi simili et æquali circa umbilicum revolvente cum celeritate duplâ ejus quâ corpus idem in eâdem ellipsi mobili fertur (446).

(g) * *Et propterea vis aut reciprocè. Ut $A^{\frac{11}{9}}$, vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directè ut A^6, vel A^{13}.* Est enim $A^{\frac{16}{9} - 3} = A^{-\frac{11}{9}} = \frac{1}{A^{\frac{11}{9}}}$, et $A^{\frac{9}{4} - 3} = \frac{1}{A^{\frac{3}{4}}}$ et $A^{9 - 3} = A^6$ et $A^{16 - 3} = A^{13}$.

corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 gr. ad 360 gr. sive ut 121 ad 120, (h) ideoque $A^{\frac{n n}{m m} - 3}$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; et propterea vis centripeta reciprocè ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ seu reciprocè ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proximè. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripetâ quæ sit reciprocè ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipsi umbilicum habente in centro virium, et huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per exempla tertia) motus apsidum qui ex vi illâ extraneâ orietur: et contra. Ut si vis quâ corpus revolvitur in ellipsi sit ut $\frac{1}{A A}$, et vis extranea ablata ut c A, ideoque vis reliqua ut $\frac{A - c A^4}{A \text{ cub.}}$; erit (in exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, et n æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apsides æqualis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{1 - c}{1 - 4 c}}$. (i) Po-

(h) * *Ideòque* $A^{\frac{n n}{m m} - 3}$ *erit æquale* $A^{-\frac{29523}{14641}}$. Erit enim in hâc hypothesi $\frac{n n}{m m} = \frac{14400}{14641}$, et $\frac{n n}{m m} - 3 = \frac{14400}{14641} - 3 = -\frac{29523}{14641}$. Est autem $\frac{29523}{14641} = 2 + \frac{241}{14641} = 2 + \frac{4}{243}$, proximè; nam $241 \times 243 = 58563$, et $4 \times 14641 = 58564$; decrescit igitur vis centripeta in ratione paulò majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$, propiùs ad duplicatam quam ad triplicatam accedit, differentia enim inter 2, et $2 + \frac{4}{243}$, est $\frac{4}{243}$, differentia verò inter 3 et $2 + \frac{4}{243}$ est $1 - \frac{4}{243} = \frac{239}{243}$. Porrò $\frac{239}{243}$ est ad $\frac{4}{243}$ seu 239 ad 4 ut $59\frac{3}{4}$ ad 1.

(i) * *Ponamus esse* $c \times A$ ad $\frac{1}{A A}$, hoc est, ponendo A vel T = 1, c ad 1, ut 100 ad 35745, id est, ut 1 ad 357, 45, et erit $c = \frac{100}{35745}$, $1 - c = \frac{35645}{35745}$, $1 - 4 c = \frac{35345}{35745}$; undè $\frac{1 - c}{1 - 4 c} = \frac{35645}{35345}$, et hinc $180 \times \sqrt{\frac{1 - c}{1 - 4 c}} = 180 \times \sqrt{\frac{35645}{35345}}$, &c.

454. *Scholium.* Hermannus in scholio ad Prop. 25. Lib. 1. Phoronomiæ formulam invenit quâ ex datâ vi centripetâ motus apsidum determinatur, et contrà; hanc ipsam ex priùs ostensis hic demonstrabimus. Iisdem igitur positis quæ in not. 449, sit vis centripeta in ellipseos mobilis loco quovis p, seu (451) vis $\frac{V F F A + V R G G - V R F F}{A^3} = \frac{y}{A^3} = \frac{y}{z^3}$, ponendo altitudinem A = z, et erit (450) $y = V F F z + V R G G - V R F F$; capiantur utrinque fluxiones et invenietur $d y = V F F d z$, et faciendo $Q d z = d y$, erit $Q = V F F$. Loco V F F, ipsius valor Q substituatur in superiori æquatione, et erit $y = Q z + \frac{Q R G G - Q R F F}{F F} = Q z - Q R + \frac{Q R G G}{F F}$. Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, erit z = R = T, et proindè $y = \frac{Q T G G}{F F}$ et hinc $G G : F F = y : Q T$, ac $G : F = \sqrt{y} : \sqrt{Q T}$ quæ est formula generalis quæsita. Nam sit exempli causâ, vis centripeta ut $\frac{b z^m + c z^n}{z^3}$ hoc est $y = b z^m + c z^n$, erit $d y = Q d z = m b z^{m-1} d z + n c z^{n-1} d z$; unde $Q = m b z^{m-1} + n c z^{n-1}$, atque ità per formulam inventam $G G : F F = b z^m +$

namus vim illam extraneam esse 357.45 partibus minorem quam vis altera quâ corpus revolvitur in ellipsi, id est c esse $\frac{100}{35745}$, existente A vel T æquali 1, et $180 \sqrt{\frac{1 - c}{1 - 4c}}$ evadet $180 \sqrt{\frac{35645}{35345}}$, seu 180.7623, id est, 180 gr. 45 m. 44 s. Igitur corpus de apside summâ discedens, motu angulari 180 gr. 45 m. 44 s. perveniet ad apsidem imam, et hoc motu duplicato ad apsidem summam redibit: ideoque apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 gr. 31 m. 28 sec. Apsis lunæ est duplo velocior circiter.

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium transeunt. Superest ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam scriptores qui motum gravium tractant, considerare solent ascensus et descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares: et pari jure motus corporum viribus quibuscunque centra petentium, et planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima et absolutè lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur et orbitas movendo describunt. Et eâdem lege motus corporum in superficiebus curvis peractos subinde determinamus.

$c z^n : T m b z^{m-1} + T n c z^{n-1}$, et ponendo $z = T = 1$, $G G : F F = b + c : m b + n c$, ut in exemplis tertiis Newtonus invenit. Sit nunc data ratio G ad F, nempe m ad n, et vis centripeta sit ut dignitas aliqua non data altitudinis z, illius dignitatis index dicatur p, sitque adeò vis centripeta ut z^p, et erit $\frac{y}{z^3} = z^p$, ac $y = z^{p+3}$, $d y = Q d z = (p + 3) \times z^{p+2} d z$, $Q = (p + 3) \times z^{p+2}$. Hinc $G^2 : F^2 = m^2 : n^2 = z^{p+3} : (p + 3) \times T z^{p+2}$, hoc est, ponendo $z = T = 1$, $m m : n n = 1 : p + 3$, atquè itâ $\frac{n n}{m m} = p + 3$, et $\frac{n n}{m m} - 3 = p$, ut in Cor. 1. repertum est.

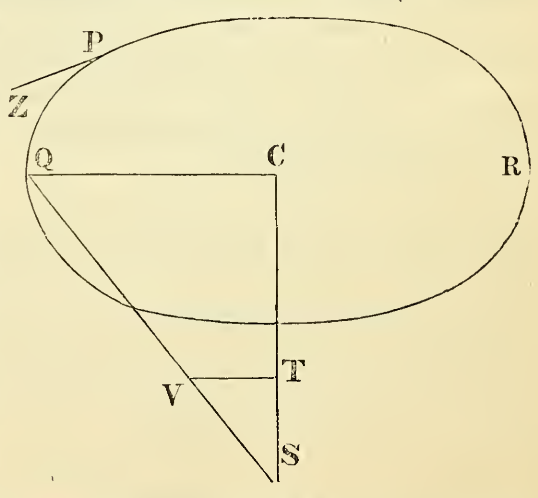
SECTIO X.

De motu corporum in superficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, et concessis figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum rectam in plano illo datam egressi.

Sit S centrum virium, S C distantia minima centri hujus a plano dato, P corpus de loco P secundum rectam P Z egrediens, Q corpus idem in trajectoriâ suâ revolvens, et P Q R trajectoria illa, in plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur C Q, Q S, et si in Q S capiatur S V proportionalis vi centripetæ quâ corpus trahitur versus centrum S, et agatur V T quæ sit parallela C Q, et occurrat S C in T: Vis S V resolvetur (per legum Corol. 2.) in vires S T, T V; quarum S T trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera T V, agendo secundum positionem plani, trahit corpus directè versus punctum C in plano datum, ideoque efficit, ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac si vis S T tolleretur, et corpus vi solâ T V revolveretur circa (k) centrum C in spa-



(k) * 455. *Circà centrum C in spatio libero.* Vis centripeta S V, ad S tendens in loco quovis Q, dicatur Q, et crit ob triangula S V T, S Q C similia. S Q : Q C = S V seu Q : V T = $\frac{Q \times QC}{SQ}$. Sed ob angulum Q C S rectum

tio libero. Datâ autem vi centripetâ T V quâ corpus Q in spatio libero circa centrum datum C revolvitur, datur (per Prop. XLII.) tum trajectoria P Q R, quam corpus describit, tum locus Q, in quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo Q; et contra. Q. e. i.

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantiæ corporis a centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolventia describent ellipses, et revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citròque discurrendo, singulas eundi et redeundi periodos iisdem temporibus absolvent.

Nam, stantibus quæ in superiore propositione, vis S V, quâ corpus Q in plano quovis P Q R revolvens trahitur versus centrum S, est ut distantia S Q; atque ideo ob proportionales S V et S Q, T V et C Q, vis T V, quâ corpus trahitur versus punctum C in orbis plano datum, est ut distantia C Q. Vires igitur, quibus corpora in plano P Q R versantia trahuntur versus punctum C, sunt (1) pro ratione distantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur versus centrum S; et propterea corpora movebuntur iisdem temporibus, in iisdem figuris, in plano quovis P Q R circa punctum C, atque in spatiis liberis circa centrum S; ideoque (per Corol. 2. Prop. X. et Corol. 2. Prop. XXXVIII.) temporibus semper æqualibus, vel describent ellipses in plano illo circa centrum C, vel pe-

$SQ^2 = QC^2 + SC^2$, ergò V T, seu vis ad C tendens in loco Q, sive $\frac{Q \times QC}{SQ}$ erit æqualis $\frac{Q \times QC}{\sqrt{QC^2 + SC^2}}$. Cum igitur data sit S C distantia minima centri S a plano Q P C positione dato, si loco S Q in quantitate Q, scribatur $\sqrt{QC^2 + SC^2}$, obtinebitur valor vis ad C tendentis in loco Q ex solâ distantiâ Q C et quantitatibus datis compositus. Exempli causâ, si vis S V, ad S tendens in loco Q sit ut distantia S Q, erit V T, seu vis ad C tendens in eodem loco Q, ut $\frac{SQ \times QC}{SQ}$ hoc est, ut Q C. Si vis S V fuerit ut $\frac{1}{SQ^2}$, erit V T, ut $\frac{QC}{SQ^3}$, hoc est, ut $\frac{QC}{\overline{QC^2 + SC^2} \times \sqrt{QC^2 + SC^2}}$, et ità de cæteris suppositionibus.

(1) * *Sunt pro ratione distantiarum*, &c. Hoc est *vires absolutæ ad S et C tendentes sunt æquales, ita ut si alicubi* fuerit P C = Q S, vis in loco P ad C tendens æqualis erit vi in loco Q ad S tendenti. Nam vis quâ corpus in loco Q ad C trahitur, est ad vim quâ versùs S urgetur, ut Q C ad Q S, et vis in loco Q ad C tendens est etiam ad vim in loco P ad idem centrum C urgentem ut Q C ad P C seu Q S; quarè vis in loco Q ad S tendens æqualis est vi ad C tendenti in loco P; Corpora verò quæ moventur viribus centripetis quæ sunt ut distantiæ, temporibus semper æqualibus ellipses quasvis, utut inæquales, describent circà sua centra (per Prop. X.) Si autem ellipseos P Q R quam corpus in plano describit, latitudo in infinitum minuatur, describet corpus rectam aliquam Q C R, motu accelerato ad centrum C accedens, et motu retardato ab ipso recedens usque ad R, deindè rursùs ex loco R, ad centrum C recidens, et ità circà centrum C, ultrò citroque oscillabitur.

riodos movendi ultrò citròque in lineis rectis per centrum C in plano illo ductis, complebunt. Q. e. d.

Scholium.

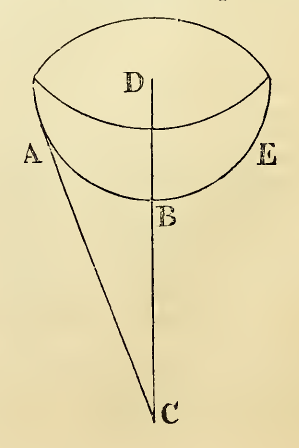
His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficiebus curvis. (m) Concipe lineas curvas in plano describi, dein circum axes quosvis datos per centrum virium transeuntes revolvi, et eâ revolutione superficies curvas describere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his superficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa obliquè ascendendo et descendendo currant ultrò citròque; peragentur eorum motus in planis per axem transeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Istis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

Si rota globo extrinsecus ad angulos (n) rectos insistat, et more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque cycloidem vel epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut summa diametrorum globi et rotæ ad semidiametrum globi.

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat et revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum

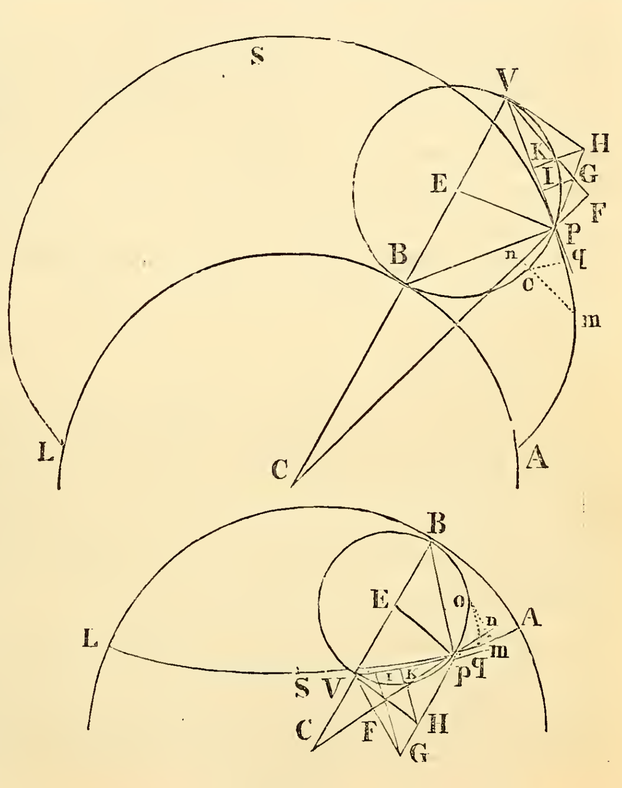


(m) * *Concipe lineam curvam* A B in plano A C E D descriptam circà axem datum D B C per centrum virium C transeuntem revolvi et eâ revolutione superficiem curvam A B E describi, tùm corpus aliquod A ità moveri, ut illius centrum in hâc superficie perpetuò reperiatur. Si corpus illud obliquè descendendo et ascendendo per A B E, E B A currat ultrò citròque peragetur illius motus in plano A C E D per axem C D transeunte, atque adeò in lineâ curvâ A B E, cum (ex hyp.) nulla adsit vis quæ corpus a plano illo cogat deflectere; superficies A B E perfectè tersa ac polita supponitur.

(n) * *Ad angulos rectos*, id est, ità ut planum rotæ productum per centrum globi transeat, illudque proindè in duo hæmispheria dividat ac circulum maximum in ejus superficie signet.

quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi et rotæ ad semidiametrum globi.

Sit A B L globus, C centrum ejus, B P V rota ei insistens, E centrum rotæ, B punctum contactus, et P punctum datum in perimetro rotæ.

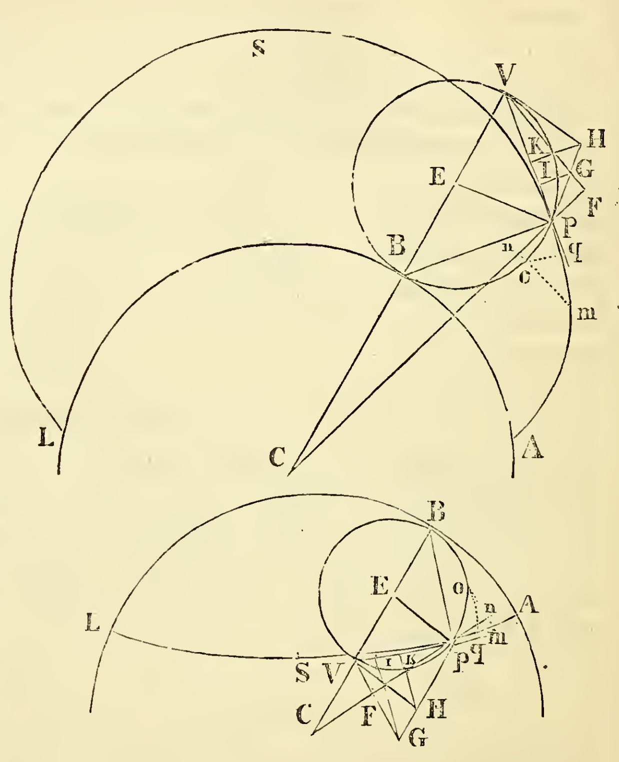


Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo A B L ab A per B versus L, et inter eundum ita revolvi ut arcus A B, P B sibi invicem semper æquentur, atque punctum illud P in perimetro rotæ datum interea describere viam curvilineam A P. Sit autem A P via tota curvilinea descripta ex quo rota globum tetigit in A, et erit viæ hujus longitudo A P ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}$ P B, ut 2 C E (°) ad C B. Nam recta C E (si opus est producta) occurrat rotæ in V, junganturque C P, B P, E P, V P, et in C P productam demittatur normalis V F. Tangant P H, V H circulum in P et V concurrentes in H, secetque P H, ipsam V F in G, et ad V P demittantur normales G I, H K. Centro item C et intervallo quovis describatur circulus n o m secans rectam C P in n, rotæ perimetrum B P in o, et viam curvilineam A P in m·

(°) * *Ut 2 C E ad C B.* Hoc est, ob 2 C E = 2 C B + 2 B E, vel 2 C E = 2 C B — 2 B E, ut summa vel differentia diametrorum globi et rotæ ad semidiametrum globi.

centroque V et intervallo V o describatur circulus secans V P productam in q.

Quoniam rota eundo semper revolvitur circa punctum contactus B, (p) manifestum est quod recta B P perpendicularis est ad lineam illam curvam A P quam rotæ punctum P describit, atque ideo quod recta V P tanget hanc curvam in puncto P. Circuli n o m radius sensim auctus vel diminutus æquetur tandem distantiæ C P; et, ob (q) similitudinem figuræ evanescentis P n o m q et figuræ P F G V I,



ratio ultima lineolarum evanescentium P m, P n, P o, P q, id (r) est, ratio mutationum momentanearum curvæ A P, rectæ C P, arcus circularis B P, ac rectæ V P, eadem erit quæ linearum P V, P F, P G, P I respectivè. Cum autem V F ad C F et V H ad C V perpendiculares sint,

(p) * *Manifestum est quod recta B P*, &c. Nam evidens est in circuli B P V revolutione, centro B radio B P singulis tempusculis describi arcum circuli seu incrementum nascens curvæ A P, ad quod proindè radius B P perpendicularis est, sed ob angulum V P B in semicirculo rectum, linea V P in eum radium B P est perpendicularis, ergo linea V P est tangens ejus arcus nascentis seu incrementi curvæ A P, ideoque ipsius curvæ A P.

(q) * *Et ob similitudinem figuræ evanescentis.* Hâc figurâ evanescente arcus P o, P q, considerari possunt tanquam lineæ rectæ, seu partes tangentium H P, V P productarum, et arcus m n, o q, tanquam rectæ lineis P n. P q. perpendiculares; Hinc verò anguli ad verticem oppositi n P o et G P F, o P m et G P I, erunt æquales, atquè adeò ob angulos o n P et G F P, o q P et G I P, rectos, proindèque æquales, figura evanescens P n o m q, similis erit figuræ P F G V I.

(r) * *Id est ratio mutationum momentanearum*, seu incrementorum vel decrementorum nascentium *curvæ A P*, quæ ex A m fit A P, *rectæ C P*, quæ ex C m fit C P *arcus circularis B P*, qui ex B o fit B P, *ac rectæ V P*, quæ ex V q, fit V P.

angulique (s) H V G, V C F propterea æquales; et (t) angulus V H G (ob angulos quadrilateri H V E P ad V et P rectos) angulo C E P æqualis est, similia erunt triangula V H G, C E P; et inde fiet ut E P ad C E ita H G ad H V (u) seu H P et ita (x) K I ad K P, et (y) compositè vel divisim ut C B ad C E ita P I ad P K, et duplicatis consequentibus ut C B ad 2 C E ita (z) P I ad P V, atque ita P q ad P m. Est (a) igitur decrementum lineæ V P, id est, incrementum lineæ B V — V P ad incrementum lineæ curvæ A P in datâ ratione C B ad 2 C E, et propterea (per Corol. Lem. IV.) longitudines B V — V P et A P, incrementis (b) illis genitæ, sunt in eâdem ratione. Sed, (c) existente B V radio, est V P cosinus anguli B V P seu $\frac{1}{2}$ B E P, ideoque B V — V P sinus versus est ejusdem anguli; et propterea in hâc rotâ, cujus radius est $\frac{1}{2}$ B V, erit B V — V P duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2}$ B P. Ergo A P est ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}$ B P ut 2 C E ad C B. Q. e. d.

Lineam autem A P in propositione priore cycloidem extra globum, alteram in posteriore cycloidem intra globum distinctionis gratiâ nominabimus.

(s) * *Angulique H V G, V C F, propterea æquales.* Ob angulum V F C rectum, summa angulorum F C V, C V F æqualis est angulo recto C V H, quarè detracto communi angulo C V F, fit angulus F C V = F V H sive H V G.

(t) * *Et angulus V H G,* &c. Tangentes H V, H P cum radiis E V, E P angulos rectos constituunt, adeóque quadrilateri H V E P, anguli duo reliqui V H P sive V H G et V E P, sunt simul æquales duobus rectis, quarè cùm sint quoque anguli V E P, C E P simul duobus rectis æquales, liquet angulum C E P, æqualem esse angulo V H G, et in secunda figura cum anguli quadrilateri V H P E in V et P sint recti, reliqui anguli V H P, V E P æquales sunt duobus rectis, sed etiam V H P et V H G sunt æquales duobus rectis, ergo detracto communi V H P, V E P sive C E P est æqualis V H G.

(u) * *Ad H V. seu H P.* Nam circuli tangentes H V, H P sunt æquales.

(x) * *Et ità K I ad K P.* Etenim ob parallelas H K, G I, est H G : H P = K I : K P.

(y) * *Et compositè vel divisim.* Cum sit E P, seu B E : C E = K I : K P, si rota globo intrinsecus insistat, erit compositè B E + C E, seu C B : C E = K I + K P; seu P I : P K. Si verò rota globo extrinsecus insistat, erit divisim C E — B E, seu C B : C E = K P — K I, seu P I : P K.

(z) * *Ità P I ad P V.* Nam in triangulo P H V isoscele, est P K = K V, adeóque 2 P K = P V.

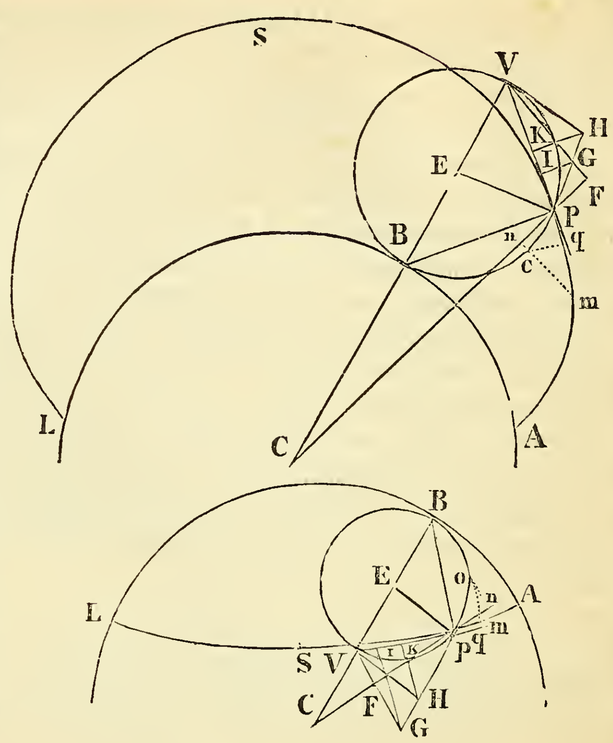
(a) * *Est igitur decrementum lineæ V P,* &c. Dum arcus A m crescit fitque A P, recta V q decrescit et fit V P; quarè est P m incrementum curvæ A m seu A P, et P q decrementum rectæ V P. Cum autem sit B V circuli diameter constans, quantùm decrescit V P, tantùm crescit differentia B V — V P, undè decrementum lineæ V P, æquale est incremento lineæ B V — V P. *Est igitur incrementum lineæ B V — V P, ad incrementum lineæ curvæ A P,* &c.

(b) * *Incrementis illis genitæ,* &c. Cum punctum P est in A, punctum B est etiam in A, fitque V P = V B, adeòque B V — V P = o. Simul ergò crescere incipiunt lineæ B V — V P et A P; et quoniam in datâ ratione crescunt, erit semper B V — V P ad A P in datâ illâ ratione C B ad 2 C E.

(c) 456. *Sed existente B V radio,* &c. Ob angulum B P V rectum, est B V ad V P ut sinus totus ad sinum anguli V B P qui complementum est anguli B V P ad rectum. Quarè existente B V radio, est V P cosinus anguli B V P æqualis dimidio angulo ad centrum B E P. Est autem cujusvis anguli sinus versus æqualis differentiæ inter radium et cosinum ejusdem anguli, ergò existente B V radio, erit B V — V P sinus versus anguli $\frac{1}{2}$ B E P; et quoniam in diversis circulis æqualium angulorum sinus omnes sunt ut circulorum radii, in hâc rotâ cujus radius est $\frac{1}{2}$ B V, erit B V — V P, duplus sinus versus arcûs $\frac{1}{2}$ B P.

Corol. 1. Hinc si (d) describatur cyclois integra A S L et bisecetur ea in S, erit longitudo partis P S ad longitudinem V P (quæ duplus est sinus anguli V B P, existente E B radio) ut 2 C E ad C B, atque ideo in ratione datâ.

Corol. 2. Et (e) longitudo semiperimetri cycloidis A S æquabitur lineæ rectæ, quæ est ad rotæ diametrum B V ut 2 C E ad C B.



(d) 457. *Hinc si describatur*, &c. Ubi punctum P pervenit ad S, arcus B P semicirculo, arcus $\frac{1}{2}$ B P quadranti, et sinus versus arcûs $\frac{1}{2}$ B P radio, æquales fiunt. Quarè in hoc casu curva A S, est ad diametrum B V, ut 2 C E, ad C B; cumque in loco quovis P, sit etiam curva A P, ad duplum sinum versum $\frac{1}{2}$ B P, seu ad B V — V P (456) ut 2 C E ad C B, erit A S : B V = A P : B V — V P, et hinc A S — A P, seu P S : B V — B V + V P, seu V P = A S : B V = 2 C E : C B.

(e) * *Et longitudo semiperimetri.* Patet per notam superiorem.

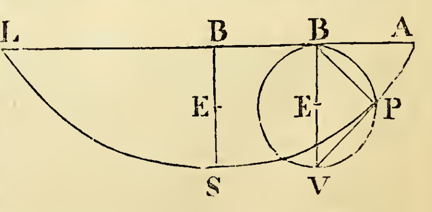
458. *Corol.* 3. Recta C S cycloidi perpendicularis est, et recta C A eam tangit in A. Est enim B P ad cycloidem perpendicularis, et V P tangens ejus in P, at ubi punctum P pervenit in S, B P fit B S, seu B V, et ubi punctum B est in A, V P coincidit cum V B.

459. *Corol.* 4. Si per punctum quodvis P agatur P V cycloidem tangens in P, et ad eam erigatur perpendiculum P B globo occurrens in B, jungaturque C B tangentem secans in V, erit B V rotæ diameter.

460. *Corol.* 5. Ex genesi cycloidis liquet arcum globi A B, æqualem esse arcui rotæ B P.

461. *Corol.* 6. Si rotæ diameter V B æqualis constituatur semidiametro globi C B, cyclois intrà globum evadet linea recta per centrum globi C transiens. Nam in hoc casu C S = o, et 2 C E = C B; undè punctum cycloidis medium S, cum centro coincidit, et quia (457) A S : B V = 2 C E : C B, erit A S = B V = C B atquè adeò est A S linea recta per centrum C transiens, nam si curva esset, major foret semidiametro C B.

462. *Corol.* 7. Si globi diameter augeatur in infinitum, mutabitur ejus superficies sphærica in

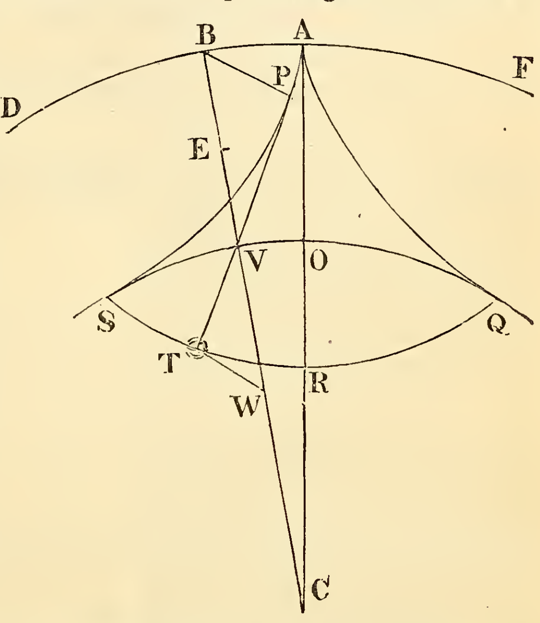


planum, fietque A B L linea recta, et B E finitâ manente seu nullâ respectu infinitæ lineæ C B, erit C E = C B, adeóque cyclois tam intrà quam extrà globum abibit in cycloidem

PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

Facere ut corpus pendulum oscilletur in cycloide datâ.

Intra globum Q V S, centro C descriptum, detur cyclois Q R S bisecta in R et punctis suis extremis Q et S superficiei globi hinc inde occurrens. Agatur C R bisecans arcum Q S in O, et producatur ea ad A, ut sit C A ad C O ut C O ad C R. Centro C intervallo C A describatur globus exterior D A F, et intra hunc globum a rotâ, cujus diameter sit A O, describantur duæ semicycloides A Q, A S, quæ (f) globum interiorem tangant in Q et S et globo exteriori occurrant in A. A puncto illo A, filo A P T longitudinem AR æquante,



pendeat corpus T, et ita intra semicycloides A Q, A S oscillletur, ut quoties pendulum digreditur a perpendiculo A R, filum parte sui superiore

vulgarem, quæ describitur revolutione rotæ in lineâ rectâ progredientis, cumque sit semper (457) A P : B V — V P = 2 C E : C B = 2 : 1, erit A P = 2 × (B V — V P), sed B V — V P, est duplus sinus versus arcûs ½ B P, existente B E radio (456). Ergò in cycloide vulgari A P æquatur quadruplicato sinui verso dimidii arcûs B P, inter planum A B L et punctum describens P intercepti; Hinc etiam erit A S = 4 B E = 2 B S = 2 B V; Est enim B E sinus versus quadrantis.

(f) * *Quæ globum interiorem tangant in Q et S, et globo exteriori occurrant in A.* Probandum semicycloides descriptas per motum rotæ (cujus diameter est A O) ex A proficiscentis terminari ad superficiem globi interioris in punctis extremis Q et S cycloidis Q R S datæ. Producantur itaque lineæ C Q, C S ad F et D, eritque F Q = D S = A O, et super diametros F Q, D S intelligantur descriptæ rotæ quarum motu fiunt semicycloides, dicaturque P punctum rotæ semicycloides describens; Liquet arcus O Q et A F, O S et A D esse proportionales radiis C O, C A sive (per const.) radiis C R, C O et divisim rotarum diametris O R, A O, ideoque (per nat. circuli) semicircumferentiis rotarum super has diametros descriptarum; Sed cum Q et S sint puncta extrema cycloidis datæ Q R S et C O arcum Q S bisecet; erunt arcus O Q et O S æquales semicircumferentiæ rotæ super diametrum O R descriptæ (460) ergo etiam arcus A F et A D æquales erunt semicircumferentiæ rotæ super diametrum A O descriptæ, sed arcus F P aut D P est semper æqualis arcui A F aut A D (460); erunt ergo arcus F P et D P semicirculi, et P cadet in extremitatibus Q et S diametrorum F Q, D S, sed ubi P semicircumferentiam rotæ percurrit semicyclois

A P applicetur ad semicycloidem illam A P S versus quam peragitur motus, et circum eam ceu obstaculum flectatur, parteque reliquâ P T cui semicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; et pondus T oscillabitur in cycloide datâ Q R S. Q. e. f.

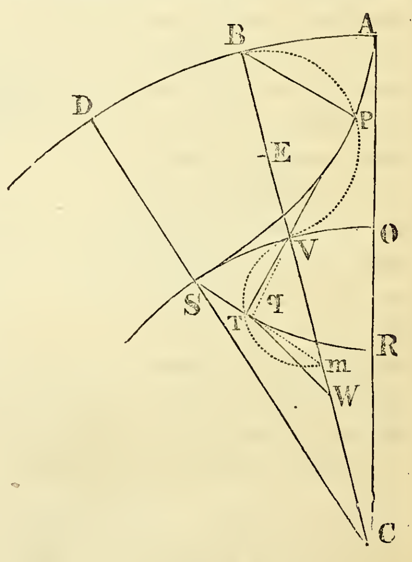
Occurrat enim filum P T tum cycloidi Q R S in T, tum circulo Q O S in V, agaturque C V; et ad fili partem rectam P T, e punctis extremis P ac T, erigantur perpendicula B P, T W, occurrentia rectæ C V in B et W. Patet, (g) ex constructione et genesi similium figurarum A S, S R, (h) perpendicula illa P B, T W abscindere de C V longitudines

est descripta, ergo semicycloides descriptæ per motum rotæ ex A proficiscentis terminantur in Q et S. Q. e. d.

(g) 463. *Patet ex constructione et genesi similium figurarum A S, S R;* Figuræ illæ dicuntur similes quia A O diameter rotæ quâ describuntur semicycloides A S, A Q est ad globi D A F radium A C ut diameter O R rotæ quâ describitur cyclois Q R S ad globi Q O S radium O C, (per constr.) unde manifestum quod cycloides A S, A Q, Q R, quæ eodem modo describuntur ac determinantur sunt inter se similes.

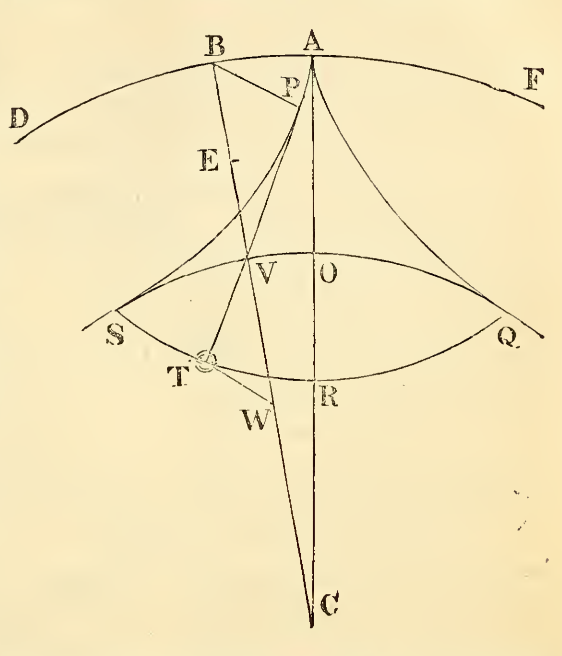
(h) * *Perpendicula illa*, &c. 1°. Probandum quod *perpendiculum P B abscindat de C V longitudinem V B rotæ diametro O A æqualem.* Fingatur rotam ita positam ut ejus punctum cycloidem describens sit in P, liquet, ex constructione, eam hujus rotæ diametrum quæ in hoc casu globo est perpendicularis et quæ, si producatur, transire debet per centrum C, utrinque terminari debere in superficie globorum; Jam verò (per Demonstr. Prop. XLVIII. XLIX.) Tangens cycloidis transit semper per unam extremitatem ejus diametri rotæ quæ globo est perpendicularis et perpendiculum in tangentem e puncto contactûs erectum transit per alteram ejusdem diametri extremitatem, ergo, cum sit (ex const.) filum P T tangens cycloidis in puncto P, et P B perpendiculum in illud, intersectiones V et B linearum P T et P B cum globis Q O S et D A F erunt extremitates ejus diametri rotæ quæ si producatur transit per centrum C, ergo ducta C V, *perpendiculum P B abscindet de C V longitudinem V B rotæ diametro O A æqualem.* Q. e. 1°. d.

2°. *Perpendiculum T W abscindit de C V longitudinem V W rotæ diametro O R æqualem.* Fingatur rota cycloidem S R Q describens ita posita, ut ejus diameter globo S O Q insistens sit in lineâ C V globumque tangat in V, dicatur m altera extremitas ejus diametri, et dicatur q punctum illius rotæ cycloidem describens: Arcus V S erit æqualis arcui V q (460) utque totus arcus S O est æqualis arcui V m, erit V O = q m, et q m est mensura dupli anguli C V q: Sit verò rota describens cycloidem A P S posita sicut in priore casu, hoc est, ejus diameter globo D A F insistens sit in productione lineæ C V, erit arcus B A æqualis arcui B P (460) et est B P mensura dupli anguli B V P; Est autem



arcus V O sive q m ad B A sive B P, ut C O ad C A ideoque ut diametri rotarum O R ad A O (ex const.), arcus verò diversorum circulorum qui sunt inter se ut suorum circulorum diametri, sunt similes ideoque ejusdem numeri graduum; ergo angulus C V q est æqualis angulo B V P quoniam arcus qui sunt mensura eorum dupli, sunt ejusdem numeri graduum, ideoque illi anguli C V q, B V P sunt per verticem oppositi et P V q est linea recta; itaque, filum P V productum ad T transit tàm per extremitatem V diametri rotæ globo insistentis quàm per ejus rotæ punctum q cycloidem describens; Ergo (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) filum P T est perpendiculare in tangentem cycloidis in puncto illo q sive T, ideoque ex constructione linea T W erit ea ipsa tangens,

V B, V W rotarum diametris O A, O R æquales. Est ([1]) igitur T P ad V P (duplum sinum anguli V B P existente $\frac{1}{2}$ B V radio) ut B W ad B V, seu A O + O R ad A O, id est (cum sint C A ad C O, C O ad C R et divisim A O ad O R proportionales) ut C A + C O ad C A, vel, si bisecetur B V in E, ut 2 C E ad C B. Proinde (per Corol. 1. Prop. XLIX.) longitudo partis rectæ fili P T æquatur semper cycloidis arcui P S, et filum totum A P T æquatur semper cycloidis arcui dimidio A P S, hoc est (per Corol. 2. Prop. XLIX.) longitudini A R. Et propterea vicissim si filum manet semper æquale longitudini A R movebitur punctum T in cycloide datâ Q R S. Q. e. d.



Corol. Filum A R æquatur semicycloidi A S, ideoque ad globi exterioris semidiametrum A C eandem habet rationem quam similis illi semicyclois S R habet ad globi interioris semidiametrum C O.

et (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) transibit per extremitatem m diametri rotæ quæ globo insistit, hoc est diametri jacentis in linea C V, *ergo T W abscindit de C V longitudinem rotæ diametro O R æqualem.* Q. e. 2°. d.

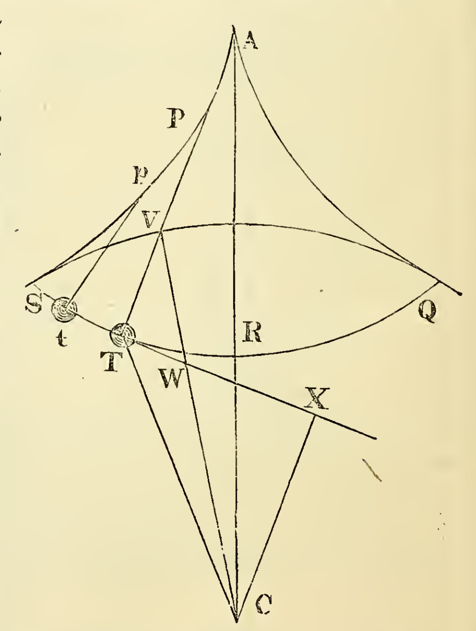
* *Idem aliter.* Ex puncto V ducatur ad semicycloidem S R perpendicularis V q, et q m tangens in q radio C V occurrens in m, erit (459) V m = O R. Descriptis rotis B P V, V q m, erit angulus B V P, æqualis arcui B P, ad diametrum B V applicato, seu $= \frac{B P}{B V}$, hoc est, ob arcum B A = B P (460) et B V = A O, angulus B V P $= \frac{B A}{A O}$. Simili ratione, cum sit arcus V q æqualis arcui S V, et semirota V q m æqualis arcui S O, erit arcus q m = V O, adeóque angulus q V m $= \frac{V O}{O R}$. Quarè angulus B V P : q V m $= \frac{B A}{A O} : \frac{V O}{O R}$ = O R × B A : A O × V O; sed B A : V O = C A : C O = A O : O R (per constr.) adeóque O R × B A = A O × V O, Ergò angulus B V P = q V m. Cùm igitur anguli B V P, T V W ad verticem oppositi sint etiam æquales, perpendicularis V q coincidit cum V T, tangens q m cum T W, et V m cum V W, undè tandem est V m = V W = O R.

([1]) * *Est igitur,* &c. Ob triangula V P B, V T W similia T V : V P = V W : V B, et componendo T P : V P = B W : B V.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum C *sit in locis singulis ut distantia loci cujusque a centro, et hâc solâ vi agente corpus* T *oscilletur (modo jam descripto) in perimetro cycloidis* Q R S: *dico quod oscillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.*

Nam in cycloidis tangentem T W infinitè productam cadat perpendiculum C X et jungatur C T. Quoniam vis centripeta quâ corpus T impellitur versus C est ut distantia C T, atque hæc (per legum Corol. 2.) resolvitur in partes C X, T X, quarum C X impellendo corpus directè a P distendit filum P T et per ejus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera T X, urgendo corpus transversim seu versus X directè accelerat motum ejus in cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo T X, id (l) est, ob datas C V, W V iisque proportionales T X, T W, ut longitudo T W, hoc est (per Corol. 1. Prop. XLIX.) ut longitudo arcus cycloidis T R. Pendulis igitur duobus A P T, A p t de perpendiculo A R inæqualiter deductis et simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi T R, t R. Sunt (m) autem partes sub



(l) * *Id est, ob datas.* Ob triangula W X C, W T V similia, est C W : W V = W X : T W, et componendo C V : W V = T X : T W ; quarè ob datas C V, W V, data est ratio T X ad T W, id est T X est ut T W.

(m) 464. *Sunt autem* arcuum t R, T R partes sub initio eodem tempusculo descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut toti arcus t R, T R sub initio describendi et propterea divisim, partes arcuum t R, T R quæ manent describendæ et accelerationes subsequentes his partibus proportionales sunt etiam ut toti arcus t R, T R, et sic deinceps. Quoniam autem velocitates dato tempore genitæ sunt ut accelerationum summæ, quæ ob datam accelerationum rationem sunt in eâdem ratione datâ arcuum t R, T R, liquet accelerationes atque ideò velocitates genitas et partes his velocitatibus descriptas, partesque describendas semper esse ut sunt toti arcus t R, T R, et propterea si pars arcûs T R describenda

initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, et propterea partes quæ manent describendæ et accelerationes subsequentes, his partibus proportionales, sunt etiam ut totæ; et sic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ et partes his velocitatibus descriptæ partesque describendæ, semper ut totæ; et propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendiculum A R. Cumque vicissim ascensus perpendiculorum de loco infimo R, per eosdem arcus cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis a viribus iisdem a quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atque ideo temporibus æqualibus fieri; et propterea, cum cycloidis partes duæ R S et R Q ad utrumque perpendiculi latus jacentes sint similes et æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent. Q. e. d.

Corol. Vis ([n]) quâ corpus T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad totum corporis ejusdem pondus in loco altissimo S vel Q, ut cycloidis arcus T R ad ejusdem arcum S R vel Q R.

evanescat, quod fit dum corpus pendulum T pervenit ad R, pars arcûs t R, simul evanescet, ob datam harum partium rationem. Undè corpora duo oscillantia t et T ex punctis t et T simul demissa, simul pervenient in R.

([n]) * *Vis quâ corpus T* in loco quovis T acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad vim quâ in loco altissimo S, vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, ut arcus T R, ad arcum S R, (ex demonstr. Prop. 51.) sed vis quâ corpus in loco S vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, est vis tota quâ ad centrum C, perpendiculariter urgetur; radius enim C S cycloidem S R tangit in S, (458), adeóque directio vis in loco S in cycloide coincidit cum directione vis rectâ trahentis ad centrum C.

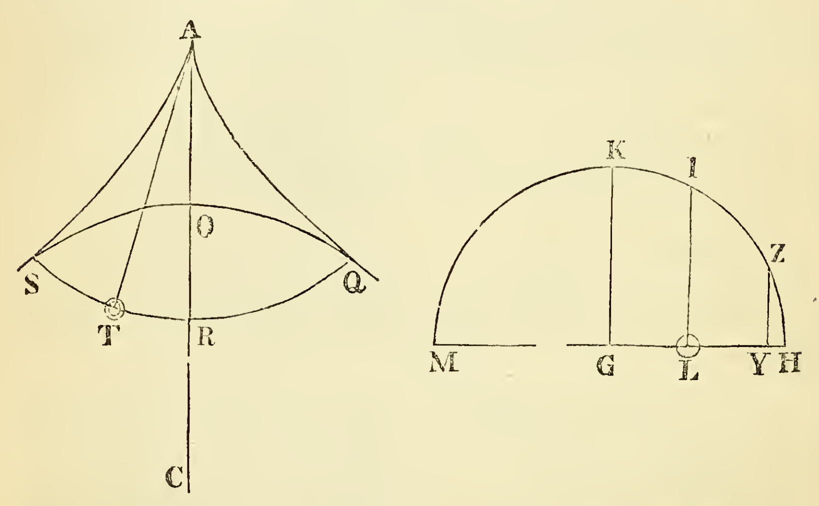
465. *Corol.* 1. Si centro A radio A R *circulus describatur*, cycloidis S R Q arcus nascens in loco infimo R cum circuli illius arcu nascente coincidit. Quarè si longitudo penduli A R magna sit, eodem propè modo in exiguis circuli arcubus oscillabitur corpus quo in cycloide, et quò major est longitudo penduli minorque circuli arcus in quem excurrit, eò major erit motuum in circulo et in cycloide consonantia, atque hinc, non abludente experientiâ, oscillationes in exiguis circuli arcubus sunt ad sensum isochronæ.

466. *Corol.* 2. Ex his deducitur quænam sit æquatio ad hanc cycloidem intrà globum descriptam pertinens, sive, invenietur æquatio exprimens rationem distantiæ cujusvis puncti T a centro ad perpendiculum in tangentem ex eo puncto ductam demissum: Dicatur enim globi radius C V, a, diameter rotæ V W, a — c, erit distantia C R sive C W, c; Ducatur ex puncto quovis T linea T C ad centrum quæ dicatur x, ducatur tangens T X ex eo puncto T et ex centro demittatur in eam tangentem perpendiculum C X, sit T X = z et C X = p. Erit ubique $pp = \frac{aacc - ccxx}{aa - cc}$; Nam ob similia triangula V T W, W C X est C W (c) : V W (a — c) = C X (p) : T V $= \frac{p}{c} \times \overline{a - c}$ et C V (a) : W V (a — c) = T X (z) : T W $= \frac{z}{a} \times \overline{a - c}$; est itaque $TV^2 + TW^2 = \frac{p^2}{c^2} \times (a - c)^2 + \frac{z^2}{a^2} \times (a - c)^2$. Sed $TV^2 + TW^2 = VW^2 = (a - c)^2$, ergo $\frac{p^2}{c^2} \times (a - c)^2 + \frac{z^2}{a^2} \times (a - c)^2 = (a - c)^2$ et dividendo utrumque membrum æquationis per $(a - c)^2$ erit $\frac{p^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} \left(\text{sive } \frac{a^2p^2 + c^2z^2}{a^2c^2}\right) = 1$, et multiplicato utroque membro æquationis per a^2c^2 est $a^2p^2 + c^2z^2 = a^2c^2$, sed est $z^2 = x^2 - p^2$ (per const.) Ergo $a^2p^2 + c^2x^2 - c^2p^2 = a^2c^2$ et factâ transpositione $a^2p^2 - c^2p^2 = a^2c^2 - c^2x^2$, ideoque $p^2 = \frac{a^2c^2 - c^2x^2}{a^2 - c^2}$. Q. e. d.

PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

Definire et velocitates pendulorum in locis singulis, et tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.

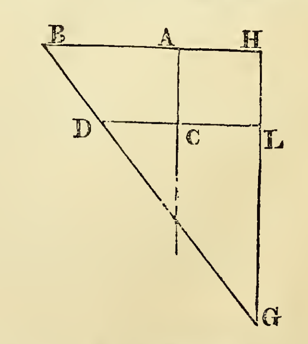
Centro quovis G, intervallo G H cycloidis arcum R S æquante, describe semicirculum H K M semidiametro G K bisectum. Et si vis cen-



tripeta, distantiis locorum a centro proportionalis, tendat ad centrum G, sitque ea in perimetro H I K æqualis vi centripetæ in perimetro globi

Simili ratiocinio invenietur æquatio ad epicycloidem sive cycloidem extra globum descriptam inversis solummodo terminis et signis ut sit $p\,p = \frac{c^2 x^2 - a^2 c^2}{c^2 - a^2}$.

467. *Lemma.* Ad punctum G tendat vis centripeta distantiæ ab illo puncto proportionalis quam in locis H, L exhibeant lineæ H B, L D rectæ G H perpendiculares, sitque recta G D B locus punctorum B, D, capiatur H A ad H B ut vis centripeta constans ad vim variabilem in loco dato H, et agatur A C rectæ H G parallela lineam L D secans in C, de loco H cadant corpora duo, quorum alterum vi constante H A, alterum vi variabili H B vel L D urgeatur, sintque illorum velocitates in eodem loco L, V, v, et erit V^2 ad v^2, ut area H A C L ad aream H B D L, (per Prop. 39. et not. 408.) id est $V^2 : v^2 = HL \times HA : HL \times \frac{BH + DL}{2} = 2\,HA : BH + DL$. Et quoniam in centro G evanescit D L erit in illo centro $V^2 : v^2 = 2\,HA : BH$, et $V : v = \sqrt{2\,HA} : \sqrt{BH}$. Quarè datis in loco H



viribus H A, H B, et velocitate in loco quovis L vel G vi constante acquisitâ, datur velocitas vi variabili in eodem loco acquisita.

Q O S ad ipsius centrum tendenti; et (o) eodem tempore quo pendulum T dimittitur e loco supremo S, cadat corpus aliquod L ab H ad G: quoniam vires quibus corpora urgentur sunt æquales sub initio et spatiis describendis T R, L G semper proportionales, atque ideo, si æquantur T R et L G, æquales in locis T et L; patet corpora illa describere spatia S T, H L æqualia sub initio, (p) ideoque subinde pergere æqualiter urgeri, et æqualia spatia describere. Quare (per Prop. XXXVIII.) tempus quo corpus describit arcum S T est ad tempus oscillationis unius, ut arcus H I, tempus quo corpus H perveniet ad L, ad semiperipheriam H K M, tempus quo corpus H perveniet ad M. Et velocitas corporis penduli in loco T est ad velocitatem ipsius in loco infimo R, (hoc est, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G, seu (q) incrementum momentaneum lineæ H L ad incrementum momentaneum lineæ H G, arcubus H I, H K æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata L I ad radium G K, sive ut (r) $\sqrt{S R q. - T R q.}$ ad S R. (s) Unde

(o) * *Et eodem tempore.* Id est, simul demittantur ex locis S et H corpora T et L.

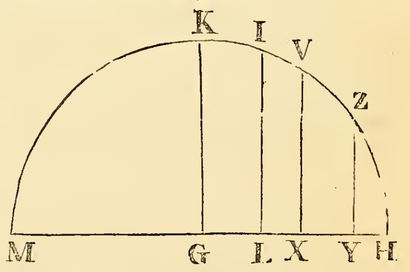
(p) * *Ideòque subindè pergere æqualiter urgeri et æqualia spatia* iisdem nempe temporibus *describere.*

(q) * *Seu incrementum momentaneum,* &c. Nam incrementa illa sunt spatia eodem tempusculo uniformiter descripta, quæ proindè sunt ut velocitates in locis L et G, quibus describuntur, arcus autem H I, H K, quæ tempora exhibent, crescunt ut tempora, hoc est, æquabili fluxu.

(r) *Sivè ut* $\sqrt{S R^2 - T R^2}$ *ad S R.* Est enim, ex naturâ circuli $L I^2 = M L \times L H = G H^2 - G L^2 = S R^2 - T R^2$, adeòque $L I = \sqrt{S R^2 - T R^2}$, et $L I : G K = \sqrt{S R^2 - T R^2} : G K$, seu S R.

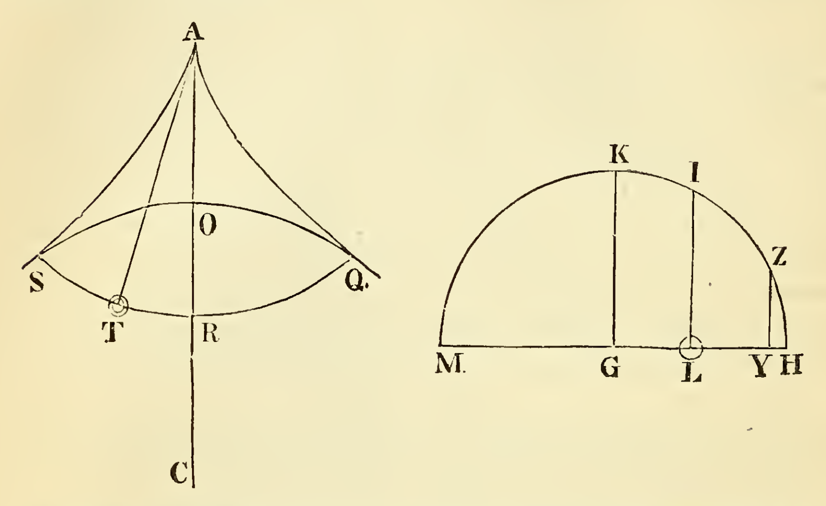
(s) 468. *Undè cùm,* &c. Datâ vi centripetâ in perimetro globi Q O S vel in H datur tum velocitas quâ corpus hâc vi sollicitatum describit circulum H K M, tum tempus quo semiperipheriam H K M percurrit (201) hoc est, tempus unius oscillationis integræ; et contrà, dato tempore unius oscillationis integræ, datur vis centripeta in H vel S (202). Porrò dato arcu S T, vel rectâ æquali H L, datur L I sinus arcus H I, et hinc datur hic arcus, adeòque et ratio H I, ad H K M, id est, ratio temporis quo percurritur H L vel S T ad tempus datum oscillationis integræ. Et contrà, dato tempore quo describitur H L vel S T, datur arcus H I, et hinc datur illius sinus rectus L I sinusque versus H L vel arcus S T. Datâ vi centripetâ in S vel H, datur velocitas corporis de loco S vel H in R vel G pervenientis (467); hinc verò datur velocitas corporis in loco quovis dato T vel L; cum (ex demonstr.) velocitas in R vel G, sit ad velocitatem in T vel L, ut G K ad L I, seu ut S R ad $\sqrt{S R^2 - T R^2}$. Dato tempore quo describitur S T vel H L, datur arcus H I, et illius sinus rectus L I, adeòque et velocitas in L et contrà.

Si corpus non ex summo loco S, vel H, sed ex alio quovis t, (vid. fig. Prop. 51.) vel Y, de-



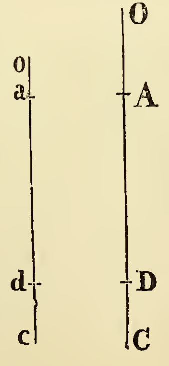
mittatur, erit tempus quo ex loco t pervenit ad R, vel ex Y ad G, æquale tempori dato dimidiæ oscillationis. Hinc dato arcu T t, vel rectâ æquali Y L, dabitur et tempus quo describitur et velocitas in T vel L, ac contrà. Nam cum sint arcus seu spatia quævis æqualibus temporibus descripta in oscillationibus inæqualibus, ut arcus vel spatia integris oscillationibus percursa (464), dato arcu T t, vel spatio Y L dabitur spatium H X, quod corpus de loco H demissum describit eodem tempore quo aliud corpus percurrit T t vel Y L; dato spatio H X, datur arcus H V et illius sinus rectus X V, et hinc datur tempus quo describitur H X et Y L, et velocitas in X; cumque sit velocitas in X, in corpore de loco H, cadente ad velocitatem in L, in corpore de loco Y cadente ut H G, ad Y G (464) dabitur velocitas in L, vel T; et contrà.

cùm, in oscillationibus inæqualibus, describantur æqualibus temporibus arcus totis oscillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, et velocitates et arcus descripti in oscillationibus universis. Quæ erant primò invenienda.



Oscillentur jam funipendula corpora in cycloidibus diversis intra globos diversos, quorum (t) diversæ sunt etiam vires absolutæ, descriptis: et, si vis absoluta globi cujusvis Q O S dicatur V, vis acceleratrix quâ pendulum urgetur in circumferentiâ hujus globi, ubi incipit directè versùs centrum ejus moveri, erit ut distantia corporis penduli a centro illo et vis absoluta globi conjunctim, hoc est, ut C O × V. Itaque (u) lineola H Y, quæ sit ut hæc vis acceleratrix C O × V, describetur dato tempore; et,

(t) 469. *Quorum diversæ sunt*, &c. Ex centris C, c, per omne circumquaque spatium diffundi intelligantur vires centripetæ in ratione distantiarum a suis respectivè centris crescentes, vires acceleratrices in locis datis æquè altis A, a, dicantur A, a; in aliis locis æquè altis D, d, dicantur V, v, et erit (ex hyp.) V : A = C D : C A = c d : c a = v : a, adeòque V : v = A : a, sed evanescentibus distantiis, C D, c d, sunt V, v, vires absolutæ (per definitionem VI. Newt.) quarè vires absolutæ sunt in ratione virium acceleratricium in locis æquè altis. Jam verò vires acceleratrices in locis quibuslibet O, o, dicantur B, b, erit (ex Dem.)



$$V : v = A : a$$

Et per hyp. $C\,O : C\,A = B : A$

$C\,A$ vel $c\,a : c\,o = a : b$

Ergò ex æquo $V \times C\,O : v \times c\,o = B : b$, id est, vis acceleratrix in loco quovis O, est ut distantia a centro et vis absoluta conjunctim.

(u) * *Itaque lineola nascens H Y, quæ sit ut hæc vis acceleratrix C O × V, describetur dato tempore.* Nam quadratum temporis quo describitur nascens H Y, est ut $\frac{H\,Y}{C\,O \times V}$ (per Cor. 5. Lem. X.) Undè cum data sit ratio H Y ad $C\,O \times V$ (ex hyp.), quadratum temporis adeòque et tempus ipsum quo describitur H Y datum erit.

si (x) erigatur normalis Y Z circumferentiæ occurrens in Z, arcus nascens H Z denotabit datum illud tempus. Est autem arcus hic nascens H Z in subduplicatâ ratione rectanguli G H Y, ideoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde tempus oscillationis integræ in cycloide Q R S (cum. sit ut semiperipheria H K M, quæ oscillationem illam integram denotat, directè; utque arcus H Z, qui datum tempus similiter denotat, inversè) fiet ut G H directè et $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inversè, hoc est, ob æquales G H et S R, ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, sive (per Corol. Prop. L.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Itaque oscillationes in globis et cycloidibus omnibus, quibuscunque cum viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione longitudinis fili directè, et subduplicatâ ratione distantiæ inter punctum suspensionis et centrum globi inversè, et subduplicatâ ratione vis absolutæ globi etiam inversè. Q. e. i.

Corol. 1. Hinc etiam oscillantium, cadentium et revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si rotæ, quâ cyclois integra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi cyclois (y) evadet linea recta per centrum globi transiens, et oscillatio jam erit descensus et subsequens ascensus in hâc rectâ. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem describit. Est (z) enim hoc tempus (per casum secundum) ad tempus semioscillationis in cycloide quâvis Q R S ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Corol. 2. Hinc etiam consectantur quæ Wrennus et Hugenius de

(x) * *Et si erigatur normalis,* &c. Arcus H Z erit ad semiperipheriam H K M, ut tempus datum quo describitur H Y, ad tempus unius oscillationis (Prop. 58.) quod proindè erit ut semiperipheria H K M, seu ut radius G H directè, et arcus H Z inversè. Est autem arcus nascens H Z æqualis chordæ H Z (per Lem. 7.) adeòque (ex naturâ circuli) $HZ^2 = HY \times MH = 2\,GH \times HY$; Quarè cùm sit H Y ut $CO \times V$, erit HZ^2 ut $2\,GH \times CO \times V$, seu, ut $GH \times CO \times V$; et hinc tempus unius oscillationis ut $\frac{GH}{\sqrt{GH \times CO \times V}} = \sqrt{\frac{GH}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{SR}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$ ob $GH = SR$, et $\frac{AR}{AC} = \frac{SR}{CO}$, (per Cor. Prop. 50.)

(y) * *Cyclois evadet linea recta* (461).

(z) * *Est enim hoc tempus,* &c. Quoniam cycloide Q R S in rectam mutatâ fit $AR = AC$, erit (per Cas. 2.) tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale (Prop. 38.) per circuli quadrantem ut $\sqrt{\frac{1}{V}}$. Undè erit hoc tempus ad tempus semioscillationis in cycloide quâvis Q R S in rectam non mutatâ ut $\sqrt{\frac{1}{V}}$ ad $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$, hoc est, ob datam V, ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$. Quarè dato tempore unius oscillationis in cycloide quâvis Q R S circa centrum C, dabitur tempus descensus de loco quovis ad idem centrum, et tempus huic æquale per quadrantem circuli ad quamvis distantiam descripti.

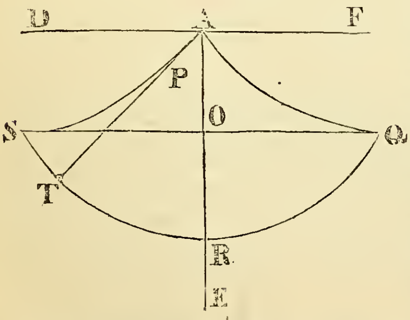
cycloide vulgari adinvenerunt. Nam ([a]) si globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus superficies sphærica in planum; visque ([b]) centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, et cyclois nostra abibit in cycloidem vulgi. Isto ([c]) autem in casu longitudo arcus cycloidis, inter planum illud et punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinui verso dimidii arcus rotæ inter idem inter planum et punctum describens; ut invenit Wrennus: Et ([d]) pendulum inter duas ejusmodi cycloides in simili et æquali cycloide temporibus æqualibus oscillabitur, ut demonstravit Hugenius. Sed ([e]) et descensus gravium, tempore oscillationis unius, is erit quem Hugenius indicavit.

Aptantur autem propositiones a nobis demonstratæ ad veram constitutionem terræ, quâtenus rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu clavorum, perimetris suis infixorum, cycloides extra globum; et pendula inferius in fodinis et cavernis terræ suspensa, in cycloidibus intra globos oscillari debent, ut oscillationes omnes evadant isochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decrescit in progressu a superficie terræ, sursum quidem in duplicatâ ratione distantiarum a centro ejus, deorsum vero in ratione simplici.

([a]) * *Nam si globi diameter augeatur* (462).

([b]) * *Visque* centripeta distantiæ infinitæ (quæ proindè non mutatur) proportionalis non mutabitur, et quoniam centro in infinitum abeunte, radii qui antè erant ad superficiem sphæricam perpendiculares fiunt paralleli; vis centripeta aget uniformiter secundùm lineas huic superficiei in planum mutatæ perpendiculares.

([c]) * *Isto autem in casu* (462).



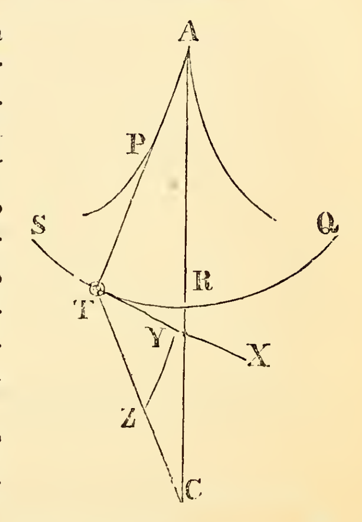
([d]) * *Et pendulum inter duas*, &c. Erit enim in hoc casu diameter rotæ O R quâ describitur cyclois Q R S, æqualis diametro A O rotæ quâ describitur cyclois A P S (462), quarè semicycloides S R, A S similes erunt et æquales.

470. ([e]) * *Sed et descensus*, &c. Erit in hoc casu tempus unius oscillationis ad tempus descensûs perpendicularis per diametrum rotæ A O vel O R, seu per dimidiam penduli longitudinem ut peripheria circuli ad ejus diametrum. Nam iisdem positis quæ (in Prop. 52. et ejus Cor. 2°.) erit tempus unius oscillationis æquale tempori semirevolutionis in circulo H K M (Prop. 38.). Est autem (200) tempus semirevolutionis in circulo H K M, ad tempus descensus uniformiter accelerati per dimidium radium H G, ut peripheria circuli ad diametrum. Quarè cum sit $\frac{1}{2}$ H G $=\frac{1}{2}$ S R $=\frac{1}{2}$ A R $=$ O R (462) erit tempus unius oscillationis ad tempus descensus perpendicularis per dimidiam penduli longitudinem ut circuli peripheria ad diametrum.

471. *Corol.* Dimidia penduli longitudo A O, est ad spatium A E descensu perpendiculari descriptum unius oscillationis tempore in duplicatâ ratione diametri ad peripheriam circuli. Sit enim tempus unius oscillationis t, diameter circuli ad peripheriam, ut d, ad p, et erit (469) tempus descensus perpendicularis per spatium A O $=\frac{dt}{p}$; sed (27) $\frac{ddtt}{pp}$: t t $=$ A O : A E, ergò A O : A E $=$ d d : p p. Hugenius cui pendulorum theoria debetur, Prop. 25. Part. 4. horologii oscillatorii, longitudinem penduli singulas oscillationes uno minuto secundo absolventis invenit pedum Paris. 3. et linearum 8 $\frac{1}{2}$, hoc est, linearum $\frac{881}{2}$, et hinc dimi-

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oscillationes semper isochronas peragent.



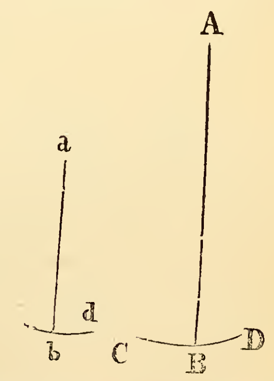
Oscilletur corpus T in curvâ quâvis lineâ S T R Q, cujus axis sit A R transiens per virium centrum C. Agatur T X quæ curvam illam in corporis loco T quovis contingat, inque hâc tangente T X capiatur T Y æqualis arcui T R. Nam (f) longitudo arcus illius ex figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innotescit. De puncto Y educatur recta Y Z tangenti perpendicularis. Agatur C T perpendiculari illi occurrens in Z, et erit vis centripeta proportionalis rectæ T Z. Q. e. i.

Nam si vis, quâ corpus trahitur de T versus C, exponatur per rectam T Z cap-

dia penduli longitudo erat linearum $\frac{881}{4} =$ 220. 25. Est autem diameter circuli ad peripheriam ut 113, ad 355, quam proximè, et proindè quadratum diametri ad quadratum peripheriæ ut 12769 ad 126025; quarè spatium uno minuto secundo descriptum a corpore gravi perpendiculariter cadente, est pedum Paris. 15. $\frac{1}{12}$, quam proximè.

472. *Corol.* Quoniam propè telluris superficiem gravium directio horizonti ad sensum perpendicularis est gravitasque constans, atque adeò V gravitas absoluta, et A C distantia a centro telluris datæ sunt, in pendulis in cycloidem vulgarem aut etiam in exiguos arcus circuli (465) excurrentibus, tempus unius oscillationis (per Cas. 2. Prop. 52.) erit ut $\sqrt{}$ A R, id est, in ratione subduplicatâ longitudinis penduli et proindè longitudo penduli in ratione duplicatâ temporis unius oscillationis.

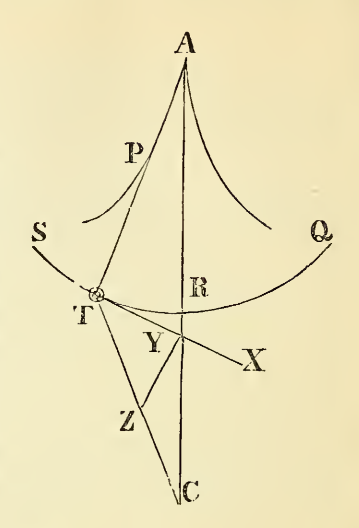
473. *Corol.* Numeri oscillationum isochronarum a duobus pendulis A B, a b, eodem tempore confectarum sunt reciprocè ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt. Nam si pendulum a b, bis oscilletur eo tempore quo A B semel; a b, quatuor oscillationes absolvet, dum A B duas conficit, et ità porrò in aliis suppositionibus, ut patet. Quarè numeri oscillationum isochronarum eodem tempore a duobus pendulis confectarum sunt in ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inversè (472).



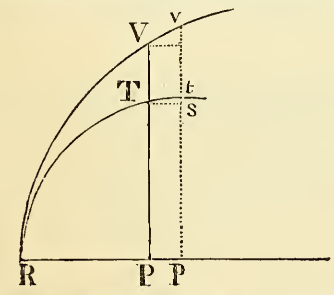
474. *Corol.* Hinc si tempus unius oscillationis penduli A B, sit T, tempus unius oscillationis penduli a b, sit t, numeri oscillationum eodem tempore confectarum N, n, erit T : t = n : N (473), et T T : t t = A B : a b (472) ac propterea n n : N N = A B : a b. Datis igitur tribus harum proportionum terminis quartus datus est.

(f) 475 *Nam longitudo arcus,* &c. Curvæ

tam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires T Y, Y Z; quarum Y Z trahendo corpus secundum longitudinem fili P T, motum ejus nil mutat, vis autem altera T Y motum ejus in curvâ S T R Q directè accelerat vel directè retardat. ([g]) Proinde cum hæc sit ut via describenda T R, accelerationes corporis vel retardationes in oscillationum duarum (majoris et minoris) partibus proportionalibus describendis, erunt semper ut partes illæ, et propterea facient ut partes illæ simul describantur. Corpora autem quæ partes totis semper proportionales simul describunt, simul describent totas. Q. e. d. ([h])

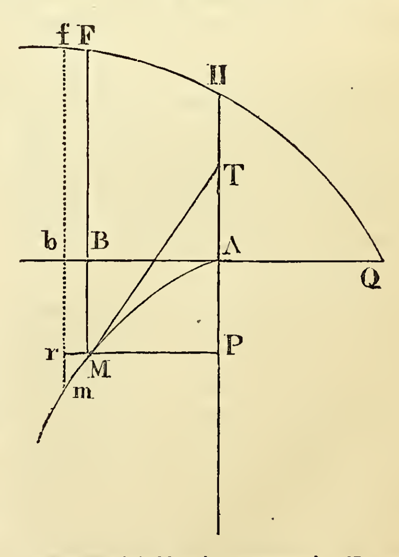


R T t sit axis R P, vertex R, ad axem ordinatim applicatæ T P, t p, infinitè propinquæ, T s axi parallela et ordinatæ t p occurrens in s.

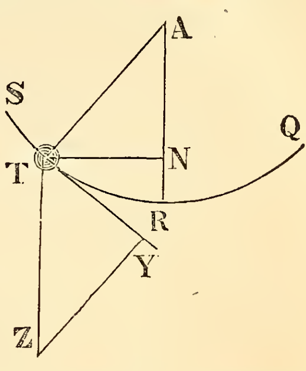


Sit R P = x, P T = y, et erit P p = T s = d x, t s = d y, $T t^2 = d x^2 + d y^2$, $T t = \sqrt{d x^2 + d y^2}$; quarè R T, fluens ipsius T t, æqualis erit fluenti quantitatis $\sqrt{d x^2 + d y^2}$. Ex æquatione ad curvam R T, quæratur valor ipsius d y per d x et alias quantitates, sitque d y = Q d x, Q vero quantitas quælibet constans aut variabilis, erit $\sqrt{d x^2 + d y^2} = d x \sqrt{1 + Q Q}$. In perpendiculo P T, capiatur $P V = A \times \sqrt{1 + Q Q}$, sitque A quantitas data, et curva R V locus punctorum V, erit areæ R V P elementum $P p \times P V = A\, d x \sqrt{1 + Q Q}$, undè $T t = d x \sqrt{1 + Q Q} = \frac{P p \times P V}{A}$, et capiendo utrinque fluentes $R T = \text{areæ}\ \frac{R V P}{A}$, curvæ igitur R T rectificatio ad quadraturam figuræ R V P reducta est.

476. Idem aliâ methodo fieri potest. Sit curvæ hujus rectificandæ A M m, axis A P, et vertex A. Per punctum quodvis M agatur tangens M T axi occurrens in T, et M F axi parallela rectam A B axi normalem secans in B; capiatur semper A B ad M T sicut constans quævis A ad B F, et punctum F curvam F H Q perpetuò tangat, erit spatium curvilineum B F H A æquale rectangulo sub arcu A M et constanti A compre-



Corol. 1. Hinc si corpus T, filo rectilineo A T a centro A pendens, describat arcum circularem S T R Q, et interea ([l]) urgeatur secundum lineas parallelas deorsum a vi aliquâ, quæ sit ad vim uniformem gravitatis, ut arcus T R ad ejus sinum T N: æqualia erunt oscillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas T Z, A R, similia erunt triangula A T N, Z T Y; et propterea T Z erit ad A T ut T Y ad T N; hoc est, si gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam A T; vis T Z, quâ oscillationes evadent isochronæ, erit ad vim gravitatis A T, ut arcus T R ipsi T Y æqualis ad arcûs illius sinum T N.



Corol. 2. Et propterea in horologiis, si vires a machinâ in pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi gravitatis componi possint, ut vis totâ deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu T R et radio A R ad sinum T N, oscillationes ([k]) omnes erunt isochronæ.

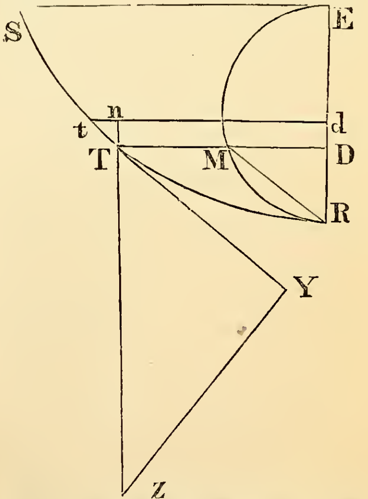
henso, adeòque arcus $A M = \frac{B F H A}{A}$. Nam ductâ m f priori M F parallelâ et infinitè propinquâ, demissoque ad axem A P perpendiculo M P, quod rectam m f, secat in r; erit ob triangula M P T, M r m similia M r : M m = M P, vel B A : M T = A : B F (per constr.) Ergò B F × M r, id est, elementum B b f F = M m × A, ac proindè spatium fluens A H F B æquale fluenti A M × A.

([g]) * *Proindè*, &c. Quæ sequuntur manifesta sunt (ex dem. Prop. 51.)

([h]) 477. *Q. e. d.* Datâ vi centripetâ T Z quâ corpus in datâ curvâ S R Q oscillationes semper isochronas peragit, velocitates illius corporis in locis singulis et tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur eodem modo definiuntur ac in Cas. 1°. Prop. 52. Ductâ enim ex centro virium C rectâ quæ curvam tangat in puncto aliquo S, erit in hoc puncto T Z = T Y, hoc est, vis centripeta in curvâ S T R æqualis vi centripetæ ad C perpendiculariter tendenti in S; quarè manente constructione Cas. 1. Prop. 52. et supponendo vim centripetam in H, (vid. fig. ibid.) quâ describitur circulus H K M, æqualem vi centripetæ in S, tempus unius oscillationis et singulæ oscillationum partes, et velocitates in locis singulis invenientur prorsus (ut in not. 468.) iisdemque ratiociniis res omnis demonstrabitur.

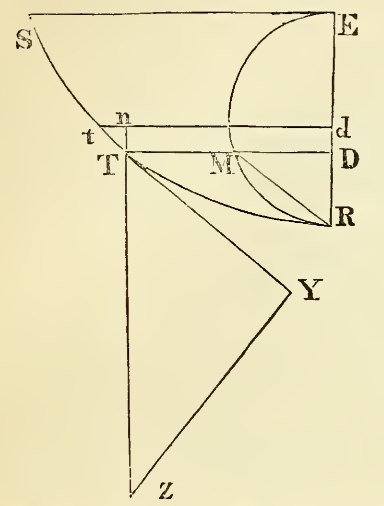
([i]) * *Intereà urgeatur secundum lineas parallelas*, &c. Centro C figuræ superioris in infinitum abeunte.

([k]) * *Oscillationes omnes erunt isochronæ.* Cùm enim vis tota T Z quâ oscillationes redduntur isochronæ sit (per Cor. 1.) ad vim gravitatis A T seu A R, ut T R ad T N, erit $T Z = \frac{A R \times T R}{T N}$, adeòque vis tota T Z, ut $\frac{A R \times T R}{T N}$.



478. Ex demonstratis solvi potest hoc problema: Datâ lege vis centripetæ, invenire curvam tautochronam S T R, in quâ nimirum, corpus oscillationes semper isochronas peragat.

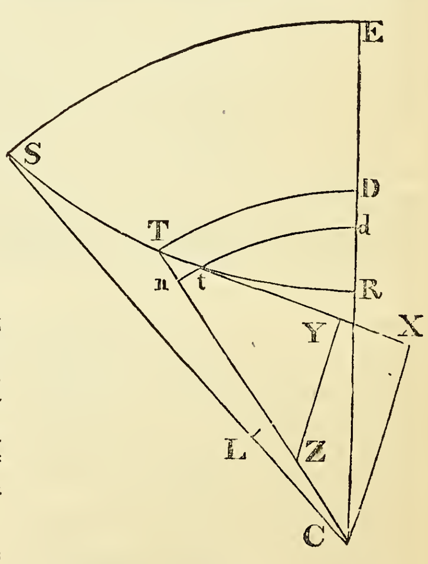
Casus 1[us]. Vis gravitatis directio T Z semper sit parallela axi E R curvæ S T R, sint S E, t d, T D ad axem R E ordinatim applicatæ, punctum E datum puncta D, d infinitè propin-



qua, tangens T Y æqualis arcui T R, Y Z ad T Y perpendicularis secet T Z in Z, et Z T producta secet t d in n. Dicantur R E = a, vis gravitatis in E vel S = g, in D vel T = v, pars lineæ verticalis per S ductæ determinata ad modum verticalis T Z, sit = b, R D = x, D T = y, T R = T Y = s. Ob triangula T n t, T Y Z similia, T n (d x) : T t (d s) = T Y (s) : T Z $= \frac{s\,d\,s}{d\,x}$; ob angulum T n t rectum $d\,s^2 = d\,x^2 + d\,y^2$; et (per Prop. 53.) $g : v = b : T\,Z \left(\frac{s\,d\,s}{d\,x}\right)$, ideoque $s\,d\,s = \frac{b}{g}\,v\,d\,x$, et sumptis fluentibus $\frac{1}{2}\,s\,s = \frac{b}{g}$ S. $v\,d\,x$; fluens autem S. $v\,d\,x$ ita sumi debet, ut evanescente x, ea fluens evanescat. Erit igitur $s\,s = \frac{2b}{g}$ S. $v\,d\,x$, $s = \sqrt{\left(\frac{2b}{g}\text{ S. } v\,d\,x\right)}$, et sumptis fluxionibus $d\,s = \frac{b\,v\,d\,x}{\sqrt{2\,b\,g\text{ S. } v\,d\,x}}$, proindeque $d\,s^2 = \frac{b\,b\,v\,v\,d\,x^2}{2\,b\,g\text{ S. } v\,d\,x} = d\,x^2 + d\,y^2$, et hinc $d\,x\sqrt{\frac{b\,v\,v - 2\,g\text{ S. } v\,d\,x}{2\,g\text{ S. } v\,d\,x}} = d\,y$ æquatio ad curvam tautochronam S T R, in quâ datâ lege vis gravitatis exterminabitur v.

Exemplum. Sit gravitas constans, seu v = g, et erit v d x = g d x, S. v d x = g x, quæ evanescit, ubi x = o. Quare æquatio ad curvam S R fiet $d\,x\sqrt{\frac{b - 2\,x}{2\,x}} = d\,y$. Quoniam vero $s\,s = \frac{2\,b}{g}$ S. $v\,d\,x = 2\,b\,x$, si ponatur b = S R, ut verticalis per S ducta curvam tangat in S, et loco s scribatur b, ac loco x scribatur a, erit b b = 2 b a, et proinde b = 2 a, atque s s = 4 a x, hoc est, S R = 2 R E, et $T\,R^2 = 4\,R\,E \times R\,D$; porrò si diametro R E describatur circulus E M R secans D T in M, erit $M\,R^2 = R\,E \times R\,D$, $4\,M\,R^2 = 4\,R\,E \times R\,D$, ideoque $T\,R^2 = 4\,M\,R^2$, et T R = 2 M R, quæ est proprietas cycloidis vulgaris circulo genitore E M R descriptæ.

Casus 2. Tendat vis centripeta ad punctum datum C. Centro C, radiis C E, C D, C d descripti sint arcus circulares E S, D T, d t n,



curvæ S R occurrentes in S, T, t, et rectæ C T in n, sintque E punctum in axe C E datum, D, d puncta infinitè propinqua, tangentis T X per T ductæ pars T Y æqualis arcui T R, et Z Y, C X ad tangentem perpendiculares. Dicantur C E = a, C R = c, S L pars radii C S eodem modo determinata ac T Z pars radii C T sit = b, vis centripeta in E vel S = g, in D vel T = v, C D vel C T = x, T R vel T Y = s, C X = p. Ob similitudinem triangulorum T n t, T Y Z, T X C, est T n (d x) : T t (d s) = T Y (s) : T Z $= \frac{s\,d\,s}{d\,x}$ et T C (x) : C X (p) = T t (d s) : t n $= \frac{p\,d\,s}{x}$, ideoque ob angulum T n t rectum $d\,s^2 = d\,x^2 + \frac{p\,p\,d\,s^2}{x\,x}$, et proinde $d\,s^2 = \frac{x\,x\,d\,x^2}{x\,x - p\,p}$.

Verùm (per Prop. 53.) g : v = b : T Z $\left(\frac{s\,d\,s}{d\,x}\right)$, undè $s\,d\,s = \frac{b}{g}\,v\,d\,x$, et sumptis fluentibus $\frac{1}{2}\,s\,s = \frac{b}{g}\,S.\,v\,d\,x$. Quoniam autem evanescente s, fit x = c, fluens S. v d x ita accipi debet, ut, positâ x = c, evanescat. Erit igitur $s\,s = \frac{2\,b}{g}\,S.\,v\,d\,x$, $s = \sqrt{\left(\frac{2\,b}{g} \times S.\,v\,d\,x\right)}$, et sumptis fluxionibus $d\,s = \frac{b\,v\,d\,x}{\sqrt{2\,b\,g\,S.\,v\,d\,x}}$, unde $d\,s^2 = \frac{b\,v\,v\,d\,x^2}{2\,g\,S.\,v\,d\,x} = \frac{x\,x\,d\,x^2}{x\,x - p\,p}$, atquè adeo $\frac{b\,v\,v}{2\,g\,S.\,v\,d\,x} = \frac{x^2}{x\,x - p\,p}$ æquatio ad tautochronam S T R, in quâ datâ lege vis centripetæ delebitur v.

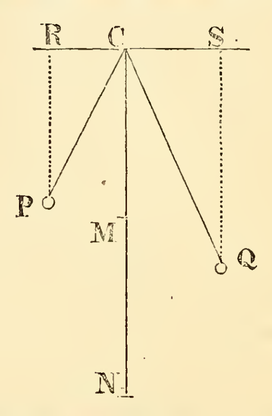
Exemplum. Vis centripeta sit ut distantia a centro C, hoc est, g : v = a : x, adeòque $v = \frac{g\,x}{a}$, $v\,d\,x = \frac{g\,x\,d\,x}{a}$, $S.\,v\,d\,x = \frac{g\,x\,x}{2\,a} + Q$ (constantem) et quoniam positâ x = c, evanescit S. v d x, erit $Q = \frac{-g\,c\,c}{2\,a}$, atque ita $S.\,v\,d\,x = \frac{g\,x\,x - g\,c\,c}{2\,a}$. Quarè erit $s\,s = \frac{2\,b}{g}\,S.\,v\,d\,x = \frac{b\,x\,x - b\,c\,c}{a}$, et æquatio ad tautochronam evadet $\frac{b\,x\,x}{a\,x\,x - a\,c\,c} = \frac{x\,x}{x\,x - p\,p}$, seu $p\,p = \frac{b\,x\,x - a\,x\,x + a\,c\,c}{b}$.

Jam si in hac æquatione ponatur b = a, erit p = c, et s s = x x = c c, ideòque tautochrona S R linea recta ad C R perpendicularis in R.

Si ponatur b major quàm a, et c = o, erit $p = x\sqrt{\frac{b - a}{b}}$, adeòque p ad x in ratione datâ, cumque sit p seu C X sinus anguli C T X, existente radio x seu C T, erit angulus C T X constans, et proinde tautochrona S R spiralis logarithmica.

Si fuerit b minor quàm a, et recta C S curvam S R tangat in S, erit b = S R; eùmque sit $s\,s = \frac{b\,x\,x - b\,c\,c}{a}$, si ponatur s = S R = b, et proinde x = a, fiet $b\,b = \frac{b\,a\,a - b\,c\,c}{a}$, et $b = \frac{a\,a - c\,c}{a}$. Jam si in æquatione ad curvam S R loco b scribatur $\frac{a\,a - c\,c}{a}$, erit $p\,p = \frac{a\,a\,c\,c - c\,c\,x\,x}{a\,a - c\,c}$ æquatio ad cycloidem, quæ describitur rotatione circuli cujus diameter est R E seu a — c super concavam peripheriam circuli centro C radio C E seu a descripti, ut liquet per n. 466.

Schol. In superioribus de pendulorum motu propositionibus corporis penduli gravitatem in centro ceu puncto coactam et filum gravitatis expers supposuimus, quæ pendulum simplex constituunt. Quamobrem ne demonstratæ oscillationum leges in experimentis valdè perturbentur, filum usurpandum est tenue cum globo exiguo et ex materiâ gravissimâ conflato. Si verò filum aut virga e quâ globus pendet gravis fuerit et globus major, pendulum non amplius simplex est, sed compositum, quod pluribus ponderibus inter se connexis instructum est.

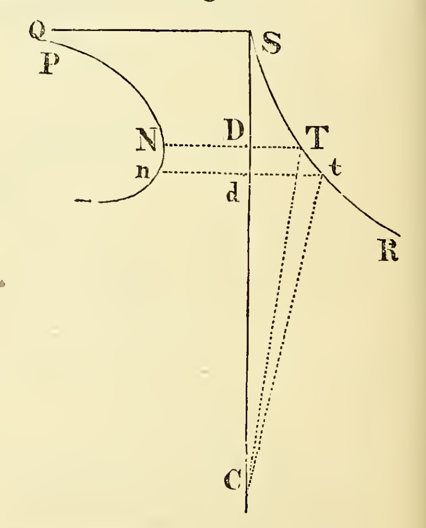


Pendulum compositum P C Q, onustum quotcumque ponduscululis P, Q, &c. quorum commune gravitatis centrum M circà punctum suspensionis C oscilletur. Recta C M per punctum suspensionis C et commune gravitatis centrum M ducta vocatur axis penduli compositi P C Q, recta verò R C S in puncto suspensionis C ad axem penduli C M perpendicularis dicitur axis oscillationis. Si in axe penduli compositi C M, capiatur C N æqualis longitudini penduli simplicis suas oscillationes in circulo eodem tempore quo pendulum compositum semper absolventis, pendulum illud simplex composito P C Q synchronum vel etiam isochronum dicitur, et punctum N centrum oscillationis penduli compositi P C Q appellatur. Porrò si singulorum ponduscolorum P, Q, &c. gravitas in punctis P, Q, &c. collecta intelligatur, et lineæ P C, Q C, &c. gravitatis expertes supponantur, sitque M summa ponduscolorum omnium P, Q, &c. atque ex punctis P, Q, &c. ad axem oscillationis R C S demittantur perpendicula P R, Q S, &c. erit $C\,N = \frac{P \times P\,R^2 + Q \times Q\,S^2}{M \times M\,C} +$, &c. id est, si pondera singula penduli compositi ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, et summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis, orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sivè distantia inter axem et centrum oscillationis ipsius penduli compositi. Hoc pulcherrimum theorema quo line-

PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum virium transeunte descriptis, descendent et ascendent.

Descendat corpus de loco quovis S, per lineam quamvis curvam S T t R in plano per virium centrum C transeunte datam. Jungatur C S et dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque D d partium illarum aliqua. Centro C intervallis C D, C d describantur circuli D T, d t, lineæ curvæ S T t R occurrentes in T et t Et ex datâ tum lege vis centripetæ, tum altitudine C S de quâ corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in aliâ quâvis altitudine C T (per Prop. XXXIX.) (1) Tempus autem, quo corpus describit lineolam T t, est ut lineolæ hujus longitudo, id est, ut secans anguli t T C directè; et velocitas inversè. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata D N ad rectam C S per punctum D perpendicularis, et ob datam D d erit rectangulum D d × D N, hoc est area D N n d, eidem tempori pro-



arum ac figurarum omnium oscillantium centrum oscillationis determinatur, primus in horologio oscillatorio invenit ac demonstravit Hugenius. Idem theorema suo quisque modo postea demonstrarunt fratres celeberrimi Jacobus et Joannes Bernoulli, ille in Actis Lipsiensibus an. 1691. et Commentariis Paris. an. 1703. Hinc verò in Actis Lipsiensibus et Commentariis Paris. an. 1714. quorum demonstrationes exposuit clariss. Wolfius in Elementis Mechanices. Hermannus quoque lib. 1°. Phoron. cap. 5°. et initio Tomi 3i. Acad. Petropol. duas ejusdem theorematis demonstrationes edidit.

Hugenius horologii oscillatorii parte 4â. Prop. 22. distantiam centri oscillationis a puncto suspensionis in sphærâ filo tenui suspensâ æqualem esse invenit longitudini fili cum radio sphæræ atquè duabus quintis partibus tertiæ proportionalis ad lineam compositam ex radio sphæræ ac longitudine fili et radium ipsum, hoc est, si filum dicatur L, radius sphæræ R, distantia centri oscillationis a puncto suspensionis D, erit $D = L + R + \frac{2\,R\,R}{5\,(L + R)}$. Sed hæc omnia indicare, non verò demonstrare nobis licet, cum his Propositionibus non utatur Autor noster.

(1) * *Tempus autem quo corpus*, &c. Nam, T t, est spatium nascens velocitate uniformi descriptum, est autem tempus quo spatium aliquod æquabiliter describitur ut spatium illud directè et velocitas inversè (5). Porrò si centro T radio dato D d, æquali differentiæ rectarum T C, t C circulus describi intelligatur, erit T t secans anguli t T C, quarè ob datum radium D d erit semper T t ut secans anguli t T C, atque adeò tempus quo describitur T t erit ut illa secans directè et velocitas inversè. Sed datâ tangente curvæ S T R in puncto T datur anguli C T t secans; undè dabitur D N proportionalis tempori quo describitur T t.

479. *Exemplum.* Centrum virium C, in infinitum abeat, ut sit vis centripeta constans, illius-

portionale. Ergo si P N n sit curva illa linea quam punctum N perpetuo tangit, ejusque asymptotos sit recta S Q rectæ C S perpendiculariter insistens: erit area S Q P N D proportionalis tempori quo corpus descendendo descripsit lineam S T; proindeque ex inventâ illâ areâ dabitur tempus. Q. e. i.

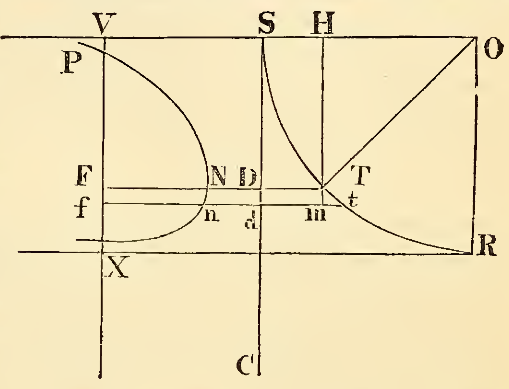
que directio rectæ S D C semper parallela, et arcus D T, d t, in rectas lineas ad S D normales mutentur. Sit curva S T R circuli quadrans cujus centrum O et radius O S ad S D perpendicularis; producantur perpendicula T D, O S ad F et V, et D F constans gravitatem exhibeat in loco D, punctum F perpetuò tanget rectam V F lineæ S D parallelam, eritque (408) velocitas in D vel T $= \sqrt{2\,S D \times F D}$. Ex puncto T ad S O demittatur perpendiculum T H rectam d t secans in m, sitque S O = a, S V = F D = b, S D = T H = x et ob triangula T O H, t T m, similia, erit HO $(\sqrt{aa - xx})$: T O (a) = T m (d x) : T t = $\frac{a\,d\,x}{\sqrt{aa - xx}}$, velocitas in T = $\sqrt{2\,S D \times D F} = \sqrt{2\,b\,x}$. Quarè tempus per arcum nascentem T t = $\frac{T t}{\sqrt{2 b x}}$ (5) = $\frac{a\,d\,x}{\sqrt{2\,a\,a\,b\,x - 2\,b\,x^3}}$ undè,

$$D N = \frac{a}{\sqrt{2\,b\,a\,a\,x - 2\,b\,x^3}}.$$

Si D N dicatur y, erit $y\,y = \frac{a\,a}{2\,b\,a\,a\,x - 2\,b\,x^3}$ æquatio ad curvam P N n, in quâ si ponatur x = o vel x = a erit y infinita, et proindè rectæ O V, R X ad S D perpendiculares sunt hujus curvæ asymptoti.

Similiter si corpus de loco R ascendat in semicirculo R T S, sitque ejus velocitas in R illa quâ possit ad altitudinem verticalem e ascendere, dicanturque X V seu R O = a, F X = x, ideoque velocitas in T = $\sqrt{2\,b\,e - 2\,b\,x}$, et T t = $\frac{a\,d\,x}{\sqrt{aa - xx}}$; erit tempus per T t = $\frac{a\,d\,x}{\sqrt{2\,b\,e - 2\,b\,x \times a\,a - x\,x}}$ et D N = y = $\frac{a}{\sqrt{2\,b\,e - 2\,b\,x \times (a\,a - x\,x)}}$, ubi D N per unitatis quadratum, ut servetur homogeneitas, divisa intelligitur.

Scholium. Si ex his tribus, vi centripetâ in singulis locis, curvâ in quâ corpus ascendit vel descendit, et tempore quo singuli curvæ arcus percurruntur, duo data fuerint, tertium dabitur. Sit enim (in superioribus figuris) D d = d x, T t = d s, t m = d y, velocitas in T = c, et

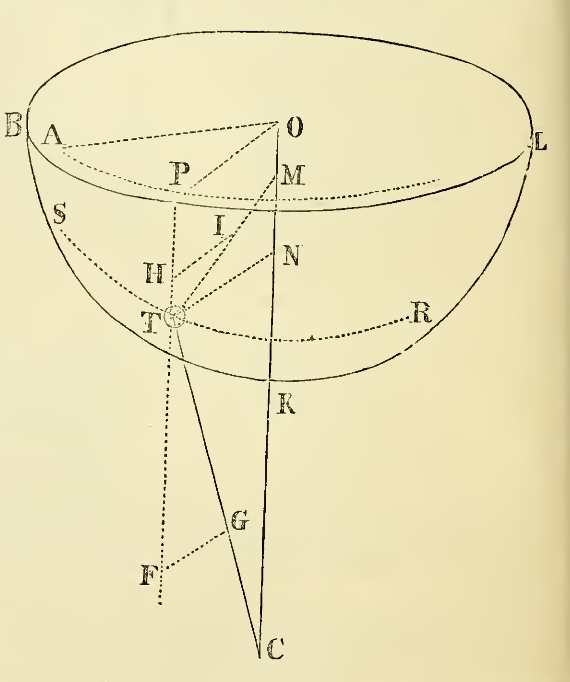


erit $d\,s^2 = d\,x^2 + d\,y^2$, et (5) c d t = d s, ideoque $c\,c\,d\,t^2 = d\,x^2 + d\,y^2$. Quare si, datâ vi centripetâ, seu (per Prop. 39.) æquatione inter c et x, detur etiam æquatio inter t et x vel y, dabitur æquatio inter x et y, hoc est, æquatio ad curvam S T t, et vice versâ. Exempli causâ, positâ vi centripetâ constante et ad distantiam infinitam tendente, corpus ita descendat in curva S T t, ut tempus per arcum quemvis S T proportionale sit altitudini correspondenti S d, dicanturque S d = x, D T = y, tempus per S T = t, velocitas in T = c; et erit d t ut d x, et c ut $\sqrt{x}$, ideoque c d t ut d x $\times \sqrt{x}$, et hinc si fuerit a quantitas constans, c d t $= d\,x \frac{\sqrt{x}}{a}$ et proinde $\frac{x\,d\,x^2}{a} = d\,x^2 + d\,y^2$, et hinc $(x - a)\,d\,x^2 = a\,d\,y^2$. Ponatur x — a = v, et erit d x = d v, et $v^{\frac{1}{2}}\,d\,v = a^{\frac{1}{2}}\,d\,y$, sumptisque fluentibus $\frac{2}{3}\,v^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\,y$, $\frac{4}{9}\,v^3 = a\,y\,y$, $v^3 = \frac{9}{4}\,a\,y\,y$, æquatio ad parabolam secundi generis, cujus est latus rectum $\frac{9\,a}{4}$, abscissa v, et ordinatim applicata y. Sed quoniam in illâ parabolâ, positâ y = o, fit v = o, adeòque x — a = v = o, et x = a, patet corpus de altitudine a cadere debere antequam in parabola descendat, capiendamque esse S D = v, ut tempus per arcum S T sit proportionale altitudini v + a, seu x.

PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

Si corpus movetur in superficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium transit, et a corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela et æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.

Sit B K L superficies curva, T corpus in eâ revolvens, S T R trajectoria, quam corpus in eâdem describit, S initium trajectoriæ, O M K axis superficiei curvæ, T N recta a corpore in axem perpendicularis, OP huic parallela et æqualis a puncto O, quod in axe datur, educta; A P (m) vestigium trajectoriæ a puncto P in lineæ volubilis O P plano A O P descriptum; A vestigii initium puncto S respondens; T C recta a corpore ad centrum ducta; T G pars ejus vi centripetæ quâ corpus urgetur in centrum C, proportionalis; T M recta ad superficiem curvam perpendicularis; T I pars ejus vi pressionis, quâ corpus urget superficiem vicissimque urgetur versus M a superficie, proportionalis; P T F recta axi parallela per corpus transiens, et G F, I H rectæ a punctis G et I in parallelam illam P H T F perpendiculariter demissæ. Dico jam, quod area A O P, radio O P ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis T G (per legum Corol. 2.) resolvitur in vires T F, F G; et vis T I in vires T H, H I:



(m) * *A P vestigium*, &c. Si corpus in superficie quâcunque curvâ moveatur, suoque motu curvam describat quæ in plano posita non sit, ad planum est referenda, idque fit si in superficie curvâ aliquod fingatur planum ad quod ex singulis curvæ descriptæ punctis erigantur perpendiculares, quarum extremitates aliam in plano lineam describent, hæc linea primæ vestigium seu linea projectionis dicitur.

Vires autem T F, T H agendo secundum lineam P F plano A O P perpendicularem mutant solummodo motum corporis quâtenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quâtenus secundum positionem plani factus; hoc est, motus puncti P, quo trajectoriæ vestigium A P in hoc plano describitur, idem est ac si vires T F, T H tollerentur, et corpus solis viribus F G, H I agitaretur; hoc est, idem ac si corpus in plano A O P, vi (n) centripetâ ad centrum O tendente et summam virium F G et H I æquante, describeret curvam A P. Sed vi tali describitur area A O P (per Prop. I.) tempori proportionalis. Q. e. d.

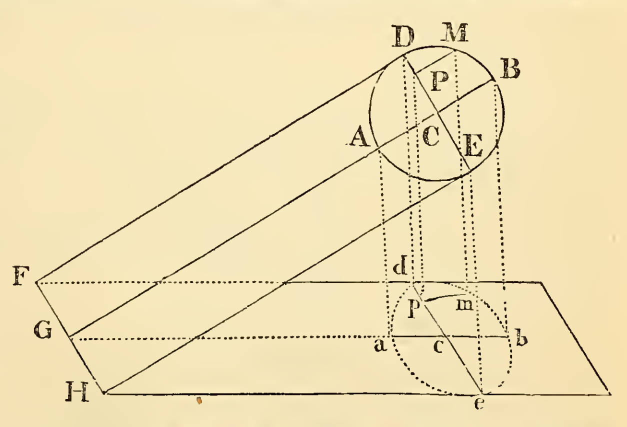
Corol. Eodem argumento si corpus, a viribus agitatum ad centra duo vel plura in eâdem quâvis rectâ C O datâ tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam S T; foret area A O P tempori semper proportionalis.

(n) * *Vi centripetâ ad centrum O*, &c. Nam curva superficies B S K L genita supponitur revolutione curvæ lineæ B S K circa axem suum O C, undè sequitur lineas omnes P O, H I, T M, F G, P F, C O esse in eodem plano, atquè ideò vim centripetam agentem in plano illo ad centrum O juxtà lineam P O dirigi.

480. *Lem.* Si linea recta A B projiciatur in planum F H e b d, projectio est linea recta a b, quæ est ad lineam A B, ut cosinus anguli inclinationis B G b, ad sinum totum. Nam si ex punctis A, B, demittantur ad planum F H e b d, perpendicula duo A a, B b, patet planum a A B b, esse ad planum F H e b d normale, adeòque perpendicula omnia ex singulis lineæ A B punctis demissa, cadere in lineam rectam a b, quæ est communis intersectio planorum F H e b d, a A B b. Q. e. 1um. Porrò productis B A, b a ut sibi occurrant in G, ob parallelas A a, B b, erit a b ad A B, ut G b ad G B, id est, ut sinus anguli G B b sive cosinus anguli inclinationis B G b, ad sinum totum. Q. e. 2um.

481. *Corol.* Si linea projicienda, plano in quod projicitur parallela fuerit projectio erit linea recta lineæ projiciendæ æqualis et parallela; Nam in hoc casu angulus inclinationis nullus est, et ejus cosinus fit radius. Hinc si linea E D, ad rectam A B perpendicularis, fuerit plano F H e b d, parallela, projectio illius e d, erit ipsi E D æqualis.

482. *Lemma.* Iisdem positis, si in plano D F H E B A, centro C, radio C D, describatur circulus D A E B, illius in planum F H e b d projectio d a e b, erit ellipsis cujus major axis d e æqualis erit diametro circuli D E, et ad minorem axem a b, rationem habebit sinûs totius ad cosinum anguli B G b, inclinationis planorum. Agatur enim P M ordinatim ad diametrum circuli D E, et projiciatur in rectam P m, erit d p = D P, et p e = P E (481) atque p m ad P M, ut sinus anguli P M m, seu anguli A B b, ad sinum totum (480) hoc est, ut a b, ad A B seu d e, adeòque $p\,m^2 : P\,M^2 = a\,b^2 : d\,e^2$, sed ex naturâ circuli $P\,M^2 = D\,P \times P\,E = d\,p \times p\,e$, Ergo $p\,m^2 : d\,p \times p\,e = a\,b^2 : d\,e^2$. Est igitur a e b d, ellipsis. Cætera patent per Lemma superius et ejus Corol.



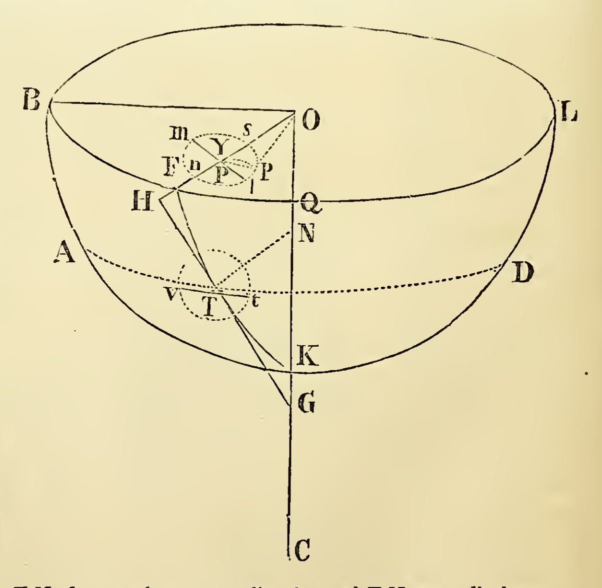
PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

Concessis figurarum curvilineàrum quadraturis, datisque tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curvâ cujus axis per centrum illud transit; invenienda est trajectoria quam corpus in eâdem superficie describet, de loco dato, datâ cum velocitate, versus plagam in superficie illâ datam egressum.

Stantibus quæ in superiore propositione constructa sunt, exeat corpus

483. *Lem.* Sint ellipseos datæ L S m n axes L m, S n, centrum P, O punctum in axe n S producto datum, p punctum perimetri non datum. Datâ areâ trianguli O p P, dabitur perpendiculum p r, ex puncto p, ad trianguli basim datam P O demissum et hinc ex naturâ ellipseos dabitur r P, atque ob angulum rectum ad r, dabitur P p, et indè punctum p in perimetro cum angulo O P p, et positione rectæ O p.

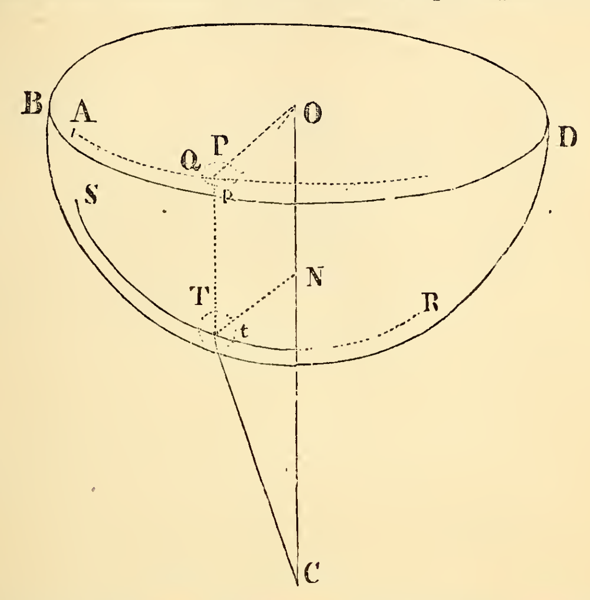
484. *Lemma.* Superficies curva B A T K L, describatur revolutione curvæ B A K circà axem suum immobilem O C, et singula curvæ illius puncta B, A circulos B Q L, A T D describent; cum curva B A K pervenit ad situm F T K, et punctum A ad T, agantur recta G T H curvam F T K tangens in T et axem secans in G, ac rectâ v T t circulum A T D tangens in eodem puncto T, sitque G T H, in plano curvæ O F K, et v T t, in plano circuli A T D. Manifestum est planum quod superficiem curvam B A T K L tangit in T, convenire cum plano in quo sunt rectæ G T H, v T t; et si fuerit O centrum circuli B F Q L, et ducatur radius O F tangenti G T occurrens in H, angulum G H O fore æqualem angulo inclinationis plani circuli B Q L O, ad planum quod superficiem curvam tangit in T; Ducto autem circuli A T D radio T N, fore angulum G T N, æqualem angulo inclinationis G H O.



485. *Corol.* 1. Iisdem positis, si centro T, radio quam minimo T t, circellus in superficie curvâ B A T L describatur, circellus ille evanescens erit in plano superficiem curvam tangente in T, adeòque angulus inclinationis plani B O L Q, ad planum circelli evanescentis productum, æqualis erit angulo G T N, (484).

486. *Corol.* 2. Si circellus radio T t descriptus projiciatur in planum B O L Q, illius projectio l s m n, erit ellipsis (482) cujus axis major l m æqualis est et parallelus circelli diametro v T t, quæ pars est evanescens circuli A T D, axis minor s n pars radii O F, et l m erit ad s n ut T G ad T N. Est enim circuli peripheria A T D adeòque et pars illius v T t, plano B F L O parallela; Quarè (481) diametri v T t projectio m l, erit linea parallela et æqualis ipsi v t; erit quoque l m, ad radium O P F normalis, ob v t ad T N perpendicularem, proindeque axis minor ellipseos s n erit pars radii

T de loco dato S secundum rectam positione datam in trajectoriam inveniendam S T R, cujus vestigium in plano B D O sit A P. Et ex datâ corporis velocitate in altitudine S C, (o) dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine T C. Eâ cum velocitate dato tempore quam minimo de-



scribat corpus trajectoriæ suæ particulam T t, sitque P p vestigium ejus in plano A O P descriptum. Jungatur O p, et circelli centro T intervallo T t in superficie curva descripti vestigium in plano A O P sit ellipsis p Q. Et (p) ob datum magnitudine circellum T t, datamque ejus ab axe C O distantiam T N vel P O, dabitur ellipsis illa p Q specie et magnitudine, ut et positione ad rectam P O. Cumque (q) area P O p sit tempori pro-

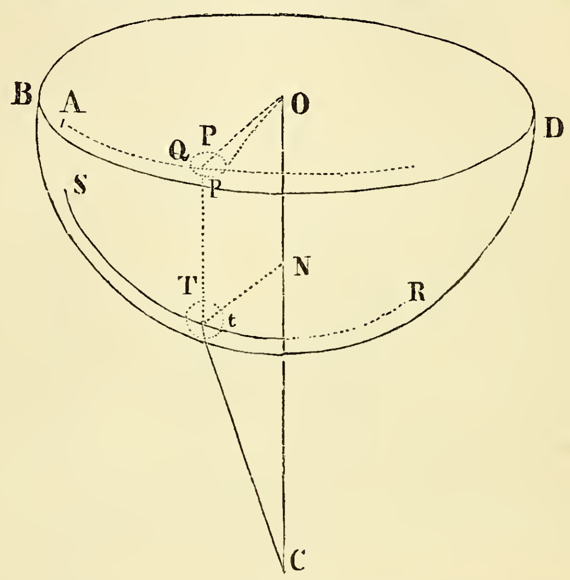
O F; Est autem (482) l m ad s n, ut sinus totus ad cosinum anguli inclinationis planorum G H O, seu G T N, (484) hoc est, ut T G ad T N, ob angulum T N G rectum.

(o) * *Dabitur ejus velocitas in aliâ,* &c. Nam (per Prop. 40.) velocitas corporis in altitudine T C, æqualis est velocitati quam corpus haberet ad eandem altitudinem in lineâ rectâ S C, si de loco S, rectâ fuisset versus C projectum cum eâdem velocitate quâ trajectoriam S T R, incipit describere in S; sed datâ in loco S velocitate corporis per lineam S C versus centrum C projecti, datur illius velocitas in alio quovis loco lineæ S C, (per Cor. 2. Prop. 39.). Ergo ex datâ corporis velocitate in altitudine S C, dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine T C.

(p) * *Et ob datum magnitudine circellum,* &c. Nam datis velocitate et tempore quibus uniformiter describitur spatium nascens T t, datur spatium illud T t, seu radius circelli (5). Præterea datâ altitudine T C, datur tum planum ad axem C O perpendiculare in quo circelli centrum positum est, tum angulus inclinationis plani quod in puncto T curvam superficiem B S T D tangit (484) ad planum B O D P, adeòque datur angulus inclinationis plani in quo est circellus nascens ad planum B O D P (485), undè (482. 486.) ellipsis P p Q in quam circellus projicitur dabitur specie et magnitudine ut et positione ad rectam P O.

(q) * *Cùmque area P O p, sit tempori* quo describitur *proportionalis* (Prop. 55.) eodemque tempore quo circelli radius T t describatur, ex hoc tempore dato datur, atque adeò dabitur an-

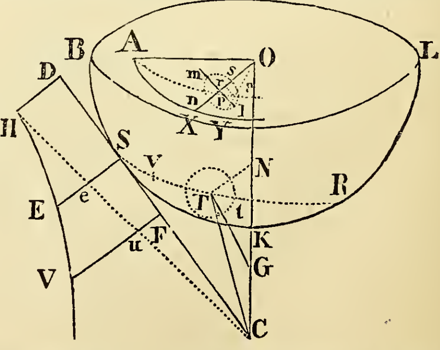
portionalis, atque ideo ex dato tempore detur, dabitur angulus P O p. Et inde dabitur ellipseos et rectæ O p intersectio communis p, unà cum angulo O P p in quo trajectoriæ vestigium A P p secat lineam O P. [r] Inde verò (conferendo Prop. XLI cum Corol. suo 2.) ratio determinandi



curvam A P p facile apparet. Tum ex singulis vestigiis punctis P, erigendo ad planum A O P perpendicula P T superficiei curvæ occurrentia in T, dabuntur singula trajectoriæ puncta T. Q. e. i.

gulus P O p, et indè dabitur ellipseos et rectæ O p intersectio communis p, unà cum angulo O P p (483).

(r) 487. *Inde verò*, &c. Sit D locus in rectâ C S productâ, de quo corpus vi centripetâ ad C tendente cadendo acquirit in loco S velocitatem cum quâ trajectoriam S T R incipit describere. In linea C S, capiatur C F = C T, et per puncta F, S, D, erigantur ad C D perpendicula F V, S E, D H vi centripetæ in illis locis proportionalia, sitque H E V linea quam punctum V perpetuò tangit. Per punctum T, agatur T G, quæ curvam cujus revolutione describitur superficies B S T K L, tangat in T; sitque eadem T G in curvæ illius plano, et producta, axi O C occurrat in G, velocitates in locis S, et T, seu F, erunt ut $\surd$ D H E S, et $\surd$ D H V F. (Per 1am. partem Prop. 39.) Et quoniam area P O p, seu $\frac{P O \times p r}{2}$ est ut tempus quo describitur T t sive P l, erit P l, ut P O $\times$ p r $\surd$ D H V F hoc est, spatium uniformiter descriptum ut velocitas et tempus conjunctim (5). Quarè si detur quantitas B erit P l = B $\times$ P O $\times$ p r $\times$ $\surd$ D H V F. Est



autem P l semiaxis transversus ellipseos ad P s semiaxem conjugatum ut T G ad T N seu P O (486) quarè erit $Ps = \frac{B\times PO^2\times pr\times\sqrt{DHVF}}{TG}$; sed ex naturâ ellipseos $Pl^2 : Ps^2 (= TG^2 : PO^2) = pr^2 : nr\times rs$ seu $Ps^2 - Pr^2$, atque adeò $PO^2\times pr^2 = TG^2\times Ps^2 - TG^2\times Pr^2$; et hinc $Pr^2 = Ps^2 - \frac{PO^2\times pr^2}{TG^2} = \frac{B^2\times PO^4\times pr^2\times DHVF - PO^2\times pr^2}{TG^2}$, proindèque $Pr = \frac{PO\times pr\times\sqrt{B^2\times PO^2\times DHVF - 1}}{TG}$,

$$pr = \frac{TG\times Pr}{PO\sqrt{B^2\times PO^2\times DHVF - 1}}.$$ Quarè

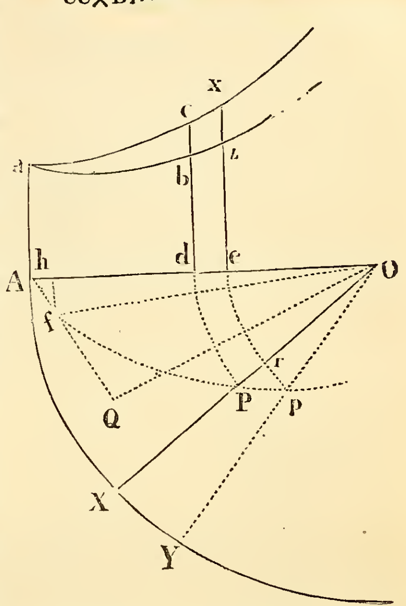
$$\frac{PO\times pr}{2} = POp = \frac{TG\times Pr}{2\sqrt{B^2\times PO^2\times DHVF - 1}}.$$

Centro O et radio O A, describatur circuli arcus A X Y, et producantur O P, O p, ut arcui huic occurrant in X et Y, erit P O : O X seu A O $= pr : XY = \frac{AO\times pr}{PO}$, et hinc area O X Y $\left(\text{sive } \frac{AO\times XY}{2}\right) = \frac{AO^2\times pr}{2PO}$

$$= \frac{AO^2\times TG\times Pr}{2PO^2\sqrt{B^2\times PO^2\times DHVF - 1}}.$$

Itaque si in recta d c, ad A O perpendiculari capiantur $db = \frac{TG}{2\sqrt{B^2\times PO^2\times DHVF - 1}}$ et $dc = \frac{AO^2\times TG}{2PO^2\sqrt{B^2\times PO^2\times DHVF - 1}}$, et describantur lineæ curvæ a b z, a c x, quas puncta b, c, perpetuò tangunt, deque puncto A, ad lineam A O, erigatur perpendiculum A a, ponendo d O = P O, patet fore areas A a b d, A a c d, areis A P O, A X O, æquales, &c., (ut in Prop. 41.)

488. Quantitas constans B, quam in superioribus æquationibus usurpavimus, facilè determinatur. Nam datâ directione corporis trajectoriam S T R, (vid. fig. not. 487.) describere incipientis, datur illius projectio A Q, quæ ut patet, est tangens vestigii A P p in A, quâ vestigium A P p incipit describi; projecto in tangentem A Q spatio quod corpus in S dato tempore describeret secundum directionem suam in S, sit O Q perpendiculum ex centro O, in tangentem A Q, demissum, velocitas in S ad velocitatem in A ut O Q, ad C quantitatem datam, et ductâ O f, sit area A O f descripta eodem tempusculo quo area nascens O P p et arcus nascentes T t, S v trajectoriæ S T R describuntur, et quoniam velocitates uniformes sunt ut spatia eodem tempore percursa, erit S v : A f = Q O : C, et demisso ex puncto f, ad A O perpendiculo f h, erit etiam A f : f h = A O : Q O. Undè ex æquo. S v : f h = A O : C, sed (ex dem. 487.) $Tt = Pl = B\times PO\times pr\times\sqrt{DHVF}$, adeòque in loco S, $Sv = B\times AO\times fh\times\sqrt{DHES}$, ergo, $Sv : fh = B\times AO\times\sqrt{DHES} : 1 = AO : C$, proindèque $B = \frac{1}{C\sqrt{DHES}}$, et $B^2 = \frac{1}{CC\times DHES}$. Quo valore in superioribus



æquationibus (487) substituto, invenitur $POp = \frac{C\times TG\times Pr\times\sqrt{DHES}}{2\sqrt{PO^2\times DHVF - CC\times DHES}}$ et $OXY = \frac{C\times AO^2\times TG\times Pr\times\sqrt{DHES}}{2PO^2\times\sqrt{PO^2\times DHVF - CC\times DHES}}$.

Harum formularum ope, nullâ ampliùs habitâ ratione circelli ejusque projectionis ellipseos, describi potest vestigium A P p, et ex dato tempore inveniri locus P, (ut in Prop. 41). Cùm autem trajectoria S T R, sit linea duplicis curvaturæ ad promovendam difficilem theoriam motuum in superficiebus curvis quam hic aperuit Newtonus, non parum adjumenti conferre potent tractatus quem de lineis duplicis curvaturæ an. 1731. Parisiis edidit Clarissimus Geometra D. Clairaut. Horum motuum in conoide parabolico, cono, et cylindro exempla dabimus.

489. *Exemplum* 1. Sit (vid. fig. not. 487.) curva B S K parabola cujus latus rectum = l, dicatur A O = r, K C = a, D C = b, T N, seu P O = x, et proindè P r = d x, erit ex naturâ parabolæ, $NK = \frac{x^2}{l}$, $NG = \frac{2x^2}{l}$. adeòque $TG^2 = \frac{4x^4 + llxx}{ll}$, et $TG = \frac{x\sqrt{4xx + ll}}{l}$; quarè si in superioribus for-

mulis (488) ponatur $C \times \sqrt{DHES} = pp$, erit $POp = \frac{p^2 x dx \sqrt{4xx + ll}}{2l\sqrt{x^2 \times DHVF - p^4}}$, et $O X Y = \frac{p^2 r^2 dx \sqrt{4xx + ll}}{2lxx\sqrt{x^2 \times DHVF - p^4}}$. Sit vis centripeta ut distantia a centro C directè, hoc est, in loco quovis T, vel F sit ut T C seu F C, et curva H E V in rectam H e u C mutabitur, et positâ $DH = q$, erit $DC (b) : FC$ seu $TC = DH (q) : Fu = \frac{q \times TC}{b}$. Quarè cum sit area $DHuF = DHC - FuC = \frac{1}{2} qb - \frac{1}{2} FC \times Fu$, erit $DHuF = \frac{qbb - q \times TC^2}{2b}$. Est autem $TC^2 = TN^2 + NC^2 = xx + \overline{\frac{xx}{l} + a}|^2 = \frac{x^4 + llxx + 2alxx + llaa}{ll}$. Ergò area $DHuF = \frac{qllbb - qx^4 - qllx^2 - 2qalx^2 - qlla^2}{2bll}$; Si itaque hic valor loco D H V F, in superioribus æquationibus substituatur, erit $OPp =$

$$\frac{p^2 x dx \sqrt{4bxx + bll}}{\sqrt{2qllbbx^2 - 2qx^6 - 2qllx^4 - 4qalx^4 - 2ql^2a^2x^2 - 4bl^2p^4}}$$

et $$OXY = \frac{p^2 r^2 dx \sqrt{4bxx + bll}}{x\sqrt{2ql^2b^2x^2 - 2qx^6 - 2ql^2x^4 - 4qalx^4 - 2ql^2a^2x^2 - 4bl^2p^4}}.$$

Si igitur ordinatæ d b. d c, dicantur y, z, æquationes ad curvas a b, a c, (vid. fig. 2. not. 487.)

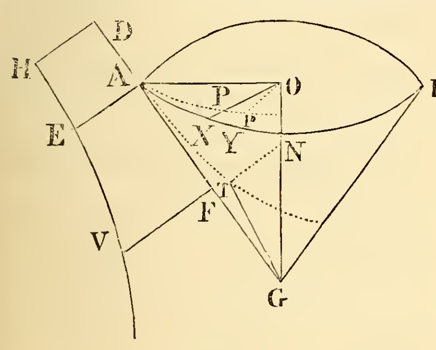
erunt $$yy = \frac{4bp^4x^4 + bp^4llxx}{2ql^2b^2x^2 - 2qx^6 - 2qllx^4 - 4qalx^4 - 2qlla^2x^2 - 4bl^2p^4}$$

et $$zz = \frac{4bp^4r^4xx + bp^4r^4ll}{2qllbbx^4 - 2qx^8 - 2qllx^6 - 4qalx^6 - 2ql^2a^2x^4 - 4bl^2p^4x^2}.$$

490. *Exemplum* 2. Sit A T G L, superficies coni recti cujus vertex G, axis G O, basis A X L O, et corpus de loco A egressum moveatur in trajectoriâ A T R, vis centripeta constans sit et juxta directionem axi O G parallelam semper agat, illamque in locis D, A, F, seu T, exponant rectæ D H, A E, F V æquales et ad rectam D F axi parallelam perpendiculares, erit punctum V in lineâ rectâ H E V, ipsi D F parallelâ. Sit D locus de quo corpus cadere debet ut habeat in loco A velocitatem cum quâ trajectoriam A T R incipit describere, et ex puncto T, ducatur T G, superficiem conicam tangens in T, et $TN = OP$ ad axem G O perpendicularis. Sit $HD = a$, $DA = b$, $OG = e$, $AG = f$, $AO = r$, $PO = TN = x$, $pr = dx$, erit (ex naturâ coni) $AO (r) : AG (f) = TN (x) : TG \left(\frac{fx}{r}\right)$. Et $AO (r) : OG (e) = TN (x) : NG \left(\frac{ex}{r}\right)$. Undè $ON = OG - GN = \frac{er - ex}{r}$, et $DF = DA + ON = \frac{rb + er - ex}{r} = \frac{hr - ex}{r}$ ponendo $b + e = h$. Quarè area $DHEA = ab$, et $DHVF = \frac{rha - aex}{r}$. Et hinc per formulas (488) $OPp = \frac{Cfxdx\sqrt{ab}}{2r\sqrt{haxx - qx^3 - CCab}}$, ponendo $\frac{ae}{r} = q$, et $OXY = \frac{Crfdx\sqrt{ab}}{2x\sqrt{haxx - qx^3 - CCab}}$, undè facilè inveniuntur æquationes ad curvas a b, a c, ut in exemplo 1°.

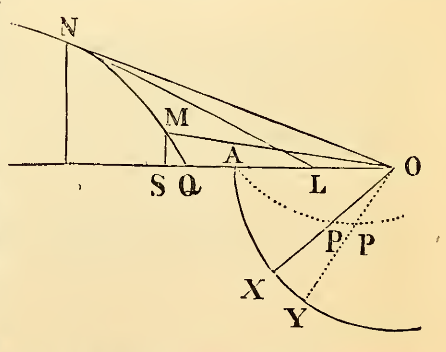
491. *Exemplum* 3um. Tendat vis centripeta ad coni verticem G, et in triplicatâ ratione dis-

tantiarum ab illo puncto G decrescat, sitque H E V curva ad quam terminantur perpendicula D H, A E, F V vim centripetam in locis singulis D, A, F, vel T, exhibentia, cætera verò maneant ut in exemplo superiori. Quoniam $T G = \frac{fx}{r}$ erit vis centripeta in loco T vel F ut $\frac{r^3}{f^3 x^3}$, adeòque si fuerit n quantitas data, vis



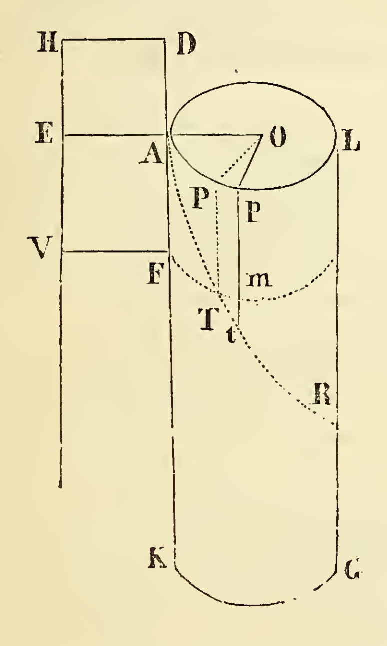
centripeta supponi poterit $= \frac{n^4}{x^3}$. Sit D G = m, et erit (431) area DHVF $= \frac{n^4 (mm - xx)}{mmxx} = \frac{kkmm - kkxx}{xx}$, ponendo $\frac{n^4}{mm} = kk$. Quarè si dicatur area D H E A = pp, erit $P O p = \frac{C p f x d x}{2 r \sqrt{kkmm - kkxx - CCpp}} = \frac{q x d x}{\sqrt{hh - xx}}$ ponendo $kkmm - CCpp = kkhh$, et $\frac{Cpf}{2rk} = q$. Similiter invenietur $O X Y = \frac{rrqdx}{x\sqrt{hh - xx}}$. Quoniam autem crescentibus areis A P O, A X O, decrescit P O, seu x, scribendum est $P O p = \frac{-qxdx}{\sqrt{hh - xx}}$ et $O X Y = \frac{-rrqdx}{x \sqrt{hh - xx}}$. Fiat $\sqrt{hh - xx} = z$, et erit $hh - xx = zz$ et $-xdx = zdz$, et $P O p = q dz$, sumptisque fluentibus et additâ constanti Q, erit $A P O = qz + Q = q\sqrt{hh - xx} + Q$. Porrò area A P O evanescit ubi P O, seu $x = A O = r$, quarè $o = q\sqrt{hh - rr} + Q$, et hinc $Q = -q \times \sqrt{hh - rr}$, proindeque $A P O = q\sqrt{hh - xx} - q\sqrt{hh - rr}$. Et dato igitur tempore quo corpus describit A T, geometricè invenitur longitudo lineæ P O. Ponatur nunc $x = \frac{hh}{y}$ et erit $-dx = \frac{hhdy}{yy}$, $hh - xx = \frac{hhyy - h^4}{y^2}$, $\sqrt{hh - xx} = \frac{h\sqrt{y^2 - h^2}}{y}$ atque adeò $O X Y = \frac{-rrqdx}{x\sqrt{hh - xx}} = \frac{rrqdy}{h\sqrt{y^2 - h^2}}$. Sit $\frac{rrq}{hh} = \frac{1}{2} s$, et erit $O X Y = \frac{1}{2} \frac{shdy}{\sqrt{yy - hh}}$. Undè habetur constructio sequens.

Centro O, semiaxe transverso O A Q = h, semiaxe conjugato = s, describatur hyperbola Q M N, ex illius perimetri puncto quovis N, demittatur ad axem O Q, perpendiculum N K, et abscissa O K dicatur y, ductâque rectâ N L, quæ hyperbolam tangat in N, et axi occurrat in L, erit (ex conic.) O K (y) : O Q (h) = O Q (h) : O L $= \frac{hh}{y} = x$, et sector hyperbolicus O N Q = S. $\frac{1}{2} \frac{shdy}{\sqrt{yy - hh}}$ (427) atque adeò A X O = O N Q + Q constante. Si ponatur x, seu $\frac{hh}{y}$ = O A = r, hoc est $y = \frac{hh}{r}$ evanescet area A X O, quare si capiatur O S $= \frac{hh}{r}$ et ad axem erigatur perpendiculum S M, hyperbolæ occurrens in M, jungaturque O M, erit o = O M Q + Q, et Q = − O M Q, undè A X O = O N Q − O M Q = O N M. Sumatur itaque sector circuli



O A X = sectori hyperbolico O N M, et in radio O X capiatur O P = O L, erit P punctum in vestigio seu curvâ A P p. Hinc si ex dato tempore quæratur locus T (vid. fig. super.) in trajectoriâ T R, inveniatur primum longitudo O P, seu O L, tum agatur L N tangens hyperbolam in puncto aliquo N; Deindè capiatur sector circularis A X O = sectori hyperbolico O N M, et in radio O X, capiatur O P = O L, ac tandem ex puncto P, erigatur ad planum A O P (vid. fig. super.) perpendiculum P T, quod superficiei conicæ occurret in loco quæsito T.

Exempl. 4. Moveatur corpus de loco A per trajectoriam A T R, in superficie concavâ cylindri recti A K G L, in quo sit baseos centrum O, manifestum est vestigium trajectoriæ A T R,



coincidere cum baseos peripheriâ circulari A P L, quam proindè punctum P, æquabili velocitate describet (per Prop. 56.) Sit vis centripeta constans et per lineas lateri cylindri A K parallelas semper agat, dicanturque H D = a, D A = b, A F = P T = y, m t = d y, arcus A P = x, P p = T m = d x, T t = $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, erit area D H E A = a b, area D H V F = a b + a y, velocitas in F vel T = $\sqrt{ab + ay}$, ndè tempusculum quo describitur nascens T t vel P p erit $= \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{ab + ay}}$. Et sit data velocitas quâ punctum P describit circulum A P L dicaturque c erit tempusculum quo describitur P p $= \frac{Pp}{c} = \frac{dx}{c}$; quarè $\frac{dx}{c} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{ab + ay}}$, et $\frac{dx^2}{cc} = \frac{dx^2 + dy^2}{ab + ay}$, et $abdx^2 + aydx^2 - ccdx^2 = ccdy^2$, et $dx = \frac{cdy}{\sqrt{ab - cc + ay}} = \frac{cdy}{\sqrt{aq + ay}}$ ponendo $ab - cc = aq$, fiat jam $\sqrt{q + y} = z$, $q + y = zz$, $dy = 2zdz$, $\sqrt{aq + ay} = z\sqrt{a}$ erit $dx = \frac{2czdz}{z\sqrt{a}} = \frac{2c}{\sqrt{a}} \times dz$. et sumptis fluentibus additâ constanti Q, erit $x = \frac{2cz}{\sqrt{a}} + Q = \frac{2c\sqrt{q + y}}{\sqrt{a}} + Q$. Ponatur y = o, erit etiam x = o, adeòque $o = \frac{2c\sqrt{q}}{\sqrt{a}} + Q$, et $Q = -\sqrt{\frac{4ccq}{a}}$, undè $x = \sqrt{\frac{4ccq + 4ccy}{a}} - \sqrt{\frac{4ccq}{a}}$. Sit $\frac{4cc}{a} = p$, et $\frac{4ccq}{a} = nn$, erit $x = \sqrt{nn + py} - n$, $xx + 2nx = py$, $y = \frac{xx + 2nx}{p}$. Concessâ igitur quadraturâ circuli facilè invenitur trajectoriæ A T R punctum quodvis T capiendo perpendiculum P T ad arcum A P, ut est A P + 2 n ad p. Ex tempore autem dato datur arcus A P. Si corporis de loco A egredientis velocitas eadem sit ac velocitas puncti P in plano baseos A P L O revolventis erit $cc = ab$, et quoniam supposuimus $ab - cc = aq$, esset $q = o$, et proindè $nn = \frac{4ccq}{a} = o$, atque hinc $y = \frac{xx}{q}$, seu $p : x = x : y$. Sive scribendo loco p ejus valorem $\frac{4cc}{a}$, in quo loco c c ponatur a b, erit $4b : x = x : y$, hoc est, 4 D A ad arcum A P ut is A P ad P T.

SECTIO XI.

De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium.

Hactenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum naturâ. Attractiones enim fieri solent ad corpora; et corporum trahentium et attractorum actiones semper mutuæ sunt et æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed (s) ambo (per legum Corollarium quartum) quasi attractione mutuâ, circum gravitatis centrum commune revolvantur: et si plura sint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, et idem attrahant, vel omnia se mutuo attrahant; hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat, vel uniformiter moveatur in directum. Quâ de causâ jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortasse, si physicè loquamur, verius dicantur impulsus. In mathematicis enim jam versamur; et propterea, missis disputationibus physicis, familiari utimur sermone, quo possimus a lectoribus mathematicis facilius intelligi.

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

Corpora (t) duo se invicem trahentia describunt, et circum commune centrum gravitatis, et circum se mutuò, figuras similes.

Sunt (u) enim distantiæ corporum a communi gravitatis centro reciprocè proportionales corporibus, atque ideo in datâ ratione ad invicem, et componendo in datâ ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminum suum communem æquali motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclina-

(s) * *Sed ambo (per leg. Corol. 4.) quasi attractione mutuâ* vel ad se invicem rectâ lineâ ferantur, vel, si ambo vi impressâ obliquè projiciuntur, *circum gravitatis centrum commune quiescens aut uniformiter progrediens revolvantur.*

(t) * *Corpora duo. (Vid. fig. in sub. pag.)* Si corpora duo S, P se invicem trahentia revolvantur circà commune gravitatis centrum C, pergendo de S ad T et de P ad Q, similes sunt hæ figuræ quatuor, nimirum P Q C, S T C, quas corpora S et P circa commune gravitatis centrum C describunt, tum figura p Q T quam corpus P describit circa corpus S spectatum tanquam immotum, et figura π T Q, quam S circà P similiter spectatum describit.

(u) * *Sunt enim distantiæ corporum a com-*

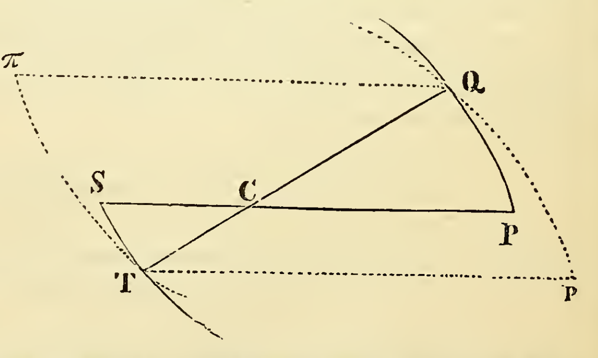
tionem ad se mutuò. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in datâ ratione ad invicem, et æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras circum eosdem terminos in planis, quæ unà cum his terminis vel quiescunt, vel ([a]) motu quovis non angulari moventur, describunt omninò similes. Proinde similes sunt figuræ, quæ his distantiis circumactis describuntur. Q. e. d.

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahunt, et interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuò, potest figura similis et æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi.

Revolvantur corpora S, P circa commune gravitatis centrum C, pergendo de S ad T, deque P ad Q. A dato puncto S ipsis S P, T Q æqua-

muni gravitatis centro Q C, C T *reciprocè proportionales corporibus datis* P, S (60) *atque ideò in datâ ratione ad invicem, et componendo,* Q C est ad Q T in datâ ratione corporis S ad summam corporum S + P. *Feruntur autem distantiæ* Q C, T C, *circa centrum* C *terminum suum communem æquali motu angulari,* id est, angulus Q C P est semper æqualis angulo T C S propterea quod distantiæ Q C, T C in directum semper jacent (60). Quarè (112) duæ figuræ P Q C, S T C similes sunt. Quod erat primum.

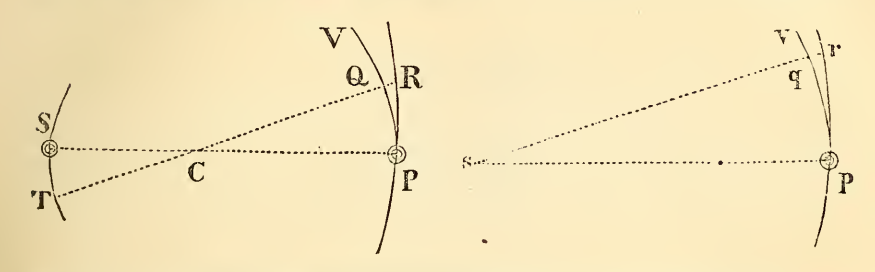


Agatur per T recta T p lineæ S P æqualis et parallela, et si corpus S tanquam immotum spectetur, motus corporis P quod in Q pervenit idem erit respectu corporis S seu T, ac si corpus P de loco p translatum esset in locum Q, eritque Q T ad T p seu S P, ut Q C ad C P, et angulus Q T p = Q C P unde figura p Q circà punctum S ut immotum spectatum a corpore P descripta erit similis figuræ P Q C ideoque et figuræ S T C, simili ratiocinio ostendetur figuram π T Q circa punctum P immotum a corpore S descriptam, esse similem figuræ S T C ideoque et figuræ P Q C. Quod erat alterum.

Quod forte facilius adhuc intelligetur, si ponamus in corpore S spectatorem qui se et lineam S P tanquam immota habeat, in hâc enim hypothesi, ubi corpus S pervenerit in locum T, linea S P, quæ tanquam immota spectatur erit T p ipsi S P æqualis et parallela et spectator in T locatus motum corporis P videbit sub angulo Q T p = Q C P, et ad distantiam T Q. Cum igitur sit semper Q C ad C P, ut Q T ad S P, seu T p, et angulus Q C P, æqualis angulo Q T p, figura p Q T, similis erit figuræ P Q C, adeòque et figuræ S T C. Pariter si per Q agatur Q π æqualis et parallela P S liquet figuram π T Q quam S circa P spectatum tanquam immotum describit esse similem et æqualem figuræ p Q T quàm corpus P, circa S spectatum tanquam immotum describit. Patet etiam harum omnium figurarum partes similes eodem tempore describi, ideoque etiam totas figuras æqualibus temporibus percurri.

([a]) * *Motu quovis non angulari.* Vide Legum Corol. 5. et 6.

les et parallelæ ducantur semper s p, s q; et curva p q v, quam punctum p revolvendo circum punctum immotum s describit, (b) erit similis et



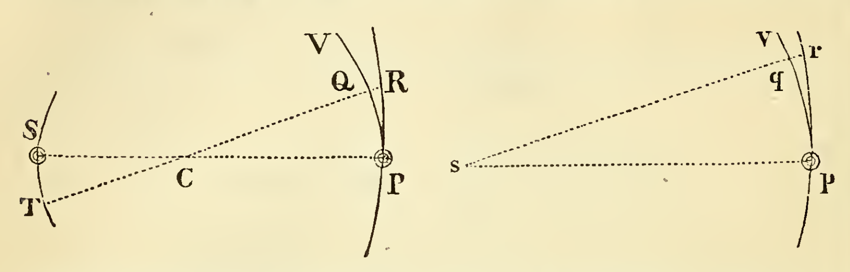
æqualis curvis, quas corpora S, P describunt circum se mutuò: proindeque (per Theor. XX.) similis curvis S T et P Q V, quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum C: idque quia proportiones linearum S C, C P, et S P vel s p ad invicem dantur.

Cas. 1. Commune illud gravitatis centrum C, per legum corollarium quartum, vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quiescit, inque s et p locentur corpora duo, immobile in s, mobile in p, corporibus S et P similia et æqualia. Dein tangant rectæ P R et p r curvas P Q et p q in P et p, et producantur C Q et s q ad R et r. Et ob similitudinem figurarum C P R Q, s p r q erit R Q ad r q ut C P ad s p, ideoque in datâ ratione. Proinde si vis, quâ corpus P versus corpus S, atque ideo versus centrum intermedium C attrahitur, esset ad vim, quâ corpus p versus centrum s attrahitur, in eâdem illâ ratione datâ; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus P R, p r ad arcus P Q, p q per intervalla ipsis proportionalia R Q, r q, ideoque vis posterior efficeret, ut corpus p gyraretur in curvâ p q v, quæ similis esset curvæ P Q V, in quâ vis prior efficit, ut corpus P gyretur; et revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione C P ad s p, sed (ob similitudinem et æqualitatem corporum S et s, P et p, et æqualitatem distantiarum S P, s p) sibi mutuò æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: et propterea, ut corpus posterius p trahatur per intervallum majus r q, requiritur tempus majus, (c) idque in subduplicatâ ratione intervallorum; propterea quod (per lemma decimum) spatia ipso

(b) * *Erit similis et æqualis curvis,* ut patet ex demonstratione propositionis superioris.

(c) *Idque in subduplicatâ ratione intervallorum.* Nascentibus arcubus q, P Q tempora quibus describuntur intervalla r q, R Q sunt in subduplicatâ ratione eorumdem intervallorum, per Lem. X. Quarè si velocitates uniformes quibus similes arcus nascentes p q, P Q æqualibus viribus centripetis describuntur, dicantur V, v, tempora T, t, erit $T^2 : t^2 = r q : R Q =$

motus initio descripta sunt in duplicatâ ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis p esse ad velocitatem corporis P in subduplicatâ



ratione distantiæ s p ad distantiam C P, eo ut temporibus, quæ sint in eâdem subduplicatâ ratione, describantur arcus p q, P Q, qui sunt in ratione integrâ: Et corpora P, p viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia C et s figuras similes P Q V, p q v, quarum posterior p q v similis est et æqualis figuræ, quam corpus P circum corpus mobile S describit. Q. e. d.

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, unà cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; et (per legum Corollarium sextum) motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, ideoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius, et propterea figuræ p q v similes et æquales. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc corpora duo, viribus distantiæ suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per Prop. X.) et circum commune gravitatis centrum, et circum se mutuo, ellipses concentricas; et vice versâ, si tales figuræ describuntur, sunt vires (d) distantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus, describunt (per Prop. XI. XII. XIII.) et circum commune gravitatis centrum, et circum se mutuo, sectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ describuntur. Et vice versâ, si tales figuræ describuntur, vires centripetæ sunt quadrato distantiæ reciprocè proportionales.

s p : C P = p q : P Q, est verò (5) $V : v = \frac{p\,q}{T} : \frac{P\,Q}{t}$ sive ut $\frac{T^2}{T} : \frac{t^2}{t}$, adeòque $V : v = T : t = \sqrt{s\,p} : \sqrt{C\,P}$. Itaque corpora P, p, viribus æqualibus semper attracta, circum centra quiescentia C, s, nascentes figuras similes P Q, p q, adeòque et figuras quasvis similes P Q V, p q v, describent temporibus et velocitatibus quæ erunt in subduplicatâ ratione distantiarum similium C P, s p. Est autem (ex Dem.) figura p q v, similis et æqualis figuræ quam corpus P, circum corpus mobile S, (spectatum tanquam immotum, ut in propositione superiori exposuimus) describit eodem tempore, quo circà centrum C, describit figuram similem P Q V.

(d) * *Distantiæ proportionales.* Cum enim (ex Dem.) corpus p, circà s, et corpora duo P, S, circà commune gravitatis centrum C, et circum se mutuò figuras similes vi centripetâ æquali describant, sitque (per Prop. X.) figura p q v, ellipsis cujus centrum S, liquet veritas corollarii.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis et ad centrum illud et ad se mutuò ductis, (e) describunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

Corporum duorum S *et* P, *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, et figuris, quæ corpora circum se mutuo describunt, figuram similem et æqualem describentis, in subduplicatâ ratione corporis alterius* S, *ad summam corporum* S + P.

Namque, ex demonstratione superioris propositionis, tempora, quibus arcus quivis similes P Q et p q describuntur, sunt in subduplicatâ ratione distantiarum C P et S P vel s p, hoc est, in subduplicatâ ratione corporis S ad summam corporum S + P. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes P Q et p q describuntur, hoc est, tempora tota, quibus figuræ totæ similes describuntur, sunt in eâdem subduplicatâ ratione. Q. e. d.

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

Si corpora duo S *et* P, *viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus, se mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos, quam corpus idem* P *circa alterum quiescens* S *eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum* S + P *ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc summam et corpus illud alterum* S.

(f) Nam si descriptæ ellipses essent sibi invicem æquales, tempora pe-

(e) * *Describunt areas temporibus proportionales.* Nam tempora quibus describuntur areæ quævis similes s p q, C P Q, et s p v, C P V, sunt semper in datâ ratione, nimirum, subduplicatâ distantiarum similium s p, C P (ex Dem.) et proindè tempus quo describitur area s p q, est ad tempus quo describitur area s p v, ut tempus quo describitur area C P Q, ad tempus quo describitur area C P V; sed (per Prop. 1.) tempora quibus describuntur areæ s p q, s p v, sunt areis illis adeòque et areis similibus C P Q, C P V proportionalia, ergò areæ C P Q, C P V sunt ut tempora quibus describuntur; et quoniam areæ quas corpora S, P circum centrum gravitatis describunt similes sunt areis quas iisdem temporibus describunt circum se mutuò, erunt quoque areæ istæ proportionales temporibus quibus describuntur.

(f) *Nam si descriptæ ellipses,* &c. Axis principalis ellipsium æqualium, quas corpora S, P circum se mutuò describunt (ut ad Prop. 57 exposuimus) æqualis est axi principali ellipseos, p q v, quam corpus p vel P, circà corpus s vel S, reverâ immotum describit (ut in Prop. 58.) Hic axis dicatur A, tempus periodicum quod in ellipsibus quatuor quas corpora S, P circum C

riodica (per theorema superius) forent in subduplicatâ ratione corporis S ad summam corporum S + P. Minuatur in hâc ratione tempus periodicum in ellipsi posteriore, et tempora periodica evadent æqualia; ellipseos autem axis principalis (per Prop. XV.) minuetur in ratione, cujus hæc est sesquiplicata, id est in ratione, cujus ratio S ad S + P est triplicata, ideoque erit ad axem principalem ellipseos alterius, ut primum duorum mediè proportionalium inter S + P et S ad S + P. Et inversè, axis principalis ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut S + P ad primum duorum mediè proportionalium inter S + P et S. Q e. d.

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur, motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuò, sed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex respectu distantiæ corporum a centro illo communi atque respectu distantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, [g] tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eædem sunt, ac si a corpore intermedio manarent. Q. e. d.

Et quoniam datur ratio distantiæ corporis utriusvis a centro illo communi ad distantiam inter corpora, dabitur ratio cujusvis potestatis distantiæ unius ad eandem potestatem distantiæ alterius; ut ratio quantitatis cujusvis, quæ ex unâ distantiâ et quantitatibus datis utcunque derivatur ad quantitatem aliam, quæ ex alterâ distantiâ, et quantitatibus totidem datis, datamque illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, quâ corpus unum ab altero trahitur, sit di-

et circum se mutuò describunt (ut in Prop. 57.) idem est, dicatur t, tempus periodicum in ellipsi p q v, quam corpus p, vel P, circà corpus S, vel s, reverâ immotum (ut in Prop. 58.) describit dicatur T, sitque X axis principalis ellipseos quam corpus idem P, vel p, circà alterum S vel s reverâ immotum (ut in Prop. 58.) describere posset tempore periodico t, erit (per Prop. 59.) $T^2 : t^2 = S + P : S$. et (per Prop. 15.) $T^2 : t^2 = A^3 : X^3$, quarè $A^3 : X^3 = S + P : S$. Jam si capiantur duæ quantitates B, C mediæ proportionales inter S + P et S, erit S + P ad S in ratione triplicatâ S + P, ad B, hoc est $S + P : S = (S + P)^3 : B^3$, ac proindè $A^3 : X^3 = (S + P)^3 : B^3$, ideoque $A : X = S + P : B$. Q. e. d.

(g) * *Tendunt ad commune gravitatis centrum*, est enim communis intersectio omnium rectarum quæ corpora revolventia jungunt, et secundum quas, vires quibus corpora se mutuò trahunt, diriguntur.

rectè vel inversè ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiæ potestas; vel denique ut quantitas quævis ex hâc distantiâ et quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, quâ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directè itidem vel inversè ut corporis attracti distantia a centro illo communi, vel ut eadem distantiæ hujus potestas, vel denique ut quantitas ex hâc distantiâ et analogis quantitatibus datis similiter derivata. ([h]) Hoc est, vis trahentis eadem erit lex respectu distantiæ utriusque. Q. e. d.

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum, quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare motus.

Corpora (per theorema novissimum) perinde movebuntur, ac si a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto traherentur; et centrum illud ipso motus initio quiescet per hypothesin; et propterea (per legum Corol. 4.) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus corporum (per Prop. XXV.) perinde ac si a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, et habebuntur motus corporum se mutuò trahentium. Q. e. i.

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuo trahunt, deque locis datis, secundum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.

([i]) Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut et motus spatii, quod unà cum hoc centro move-

([h]) * *Hoc est, vis trahentis eadem erit lex*, &c. Sit (in fig. Prop. 58.) $TQ = x$, $CQ = y$, et x ad y in ratione datâ a ad b, seu $x = \frac{ay}{b}$, vis quâ corpora S, P in locis T, Q se mutuò trahunt sit ut x^m, erit $x^m = \frac{a^m y^m}{b^m}$, adeòque eadem vis etiam ut y^m, ob datam rationem a^m, ad b^m, cumque vis quâ corpora se mutuò trahunt æqualis sit vi quâ ad commune gravitatis centrum C urgentur, erit quoque vis ad C tendens ut y^m. Sit nunc vis quâ corpora se mutuò trahunt ut $cx^n + ex^m$, et c, e quantitates datæ, erit $cx^n + ex^m = \frac{ca^n y^n}{b^n} + \frac{ea^m y^m}{b^m}$, ideòque vis ad C tendens ut $\frac{ca^n y^n}{b^n} + \frac{ea^m y^m}{b^m}$.

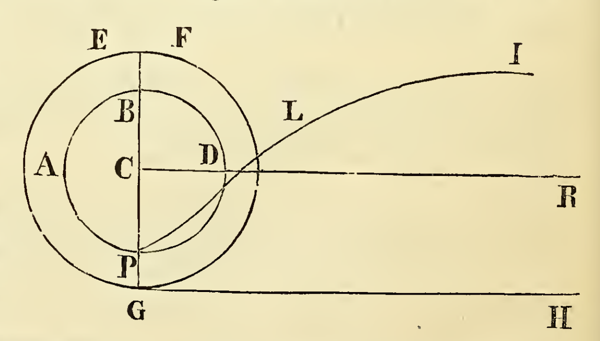
([i]) * *Ex datis corporum motibus absolutis sub initio, datur uniformis motus absolutus centri communis gravitatis* (67, 68, 69) *et hinc datur motus spatii quod unà cum hoc centro* et eâdem cum illo celeritate *moveretur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii.*

tur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per legum corollarium quintum, et theorema novissimum) perinde fiunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum unà cum communi illo gravitatis centro quiesceret, et corpora non traherent se mutuo, sed a corpore tertio sito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili, de loco dato secundum datam rectam, datâ cum velocitate exeuntis, et vi centripetâ ad centrum illud tendente correpti, (k) determinandus est motus per problema nonum et vicesimum sextum: et (l) habebitur simul motus corporis alterius circum idem centrum. (m) Cum hoc motu componendus est uniformis ille systematis spatii et corporum in eo gyrantium motus progressivus supra inventus, et habebitur motus absolutus corporum in spatio immobili. Q. e. i.

(k) * *Determinandus est motus per Probl.* 9. si corpora projiciantur secundùm directionem quæ cum eorum distantiâ non coincidat, et per Probl. 26. si coincidat directio projectionis cum distantiâ corporum.

(l) * *Et habebitur simul motus corporis alterius* e regione, si ex corpore cujus locus inventus est, per centrum gravitatis commune duorum, agatur recta quæ ità determinetur ut sit corpus cujus locus quæritur ad corpus aliud ut distantia data hujus a centro gravitatis communi ad eam rectam, in extremo hujus rectæ erit locus corporis quæsitus (60).

(m) 493. *Cum hoc motu componendus est*, &c. In hypothesi hujus problematis, corpora duo circà commune gravitatis centrum ceu umbilicum sectiones conicas describunt (per Cor. 2. Prop. 58.) et satis est (ex notâ superiori) unius corporis motum determinare. Itaque, exempli gratiâ, corpus P circulum P A B D uniformiter describat intereadum circuli centrum C, cum ipsius circuli plano æquabiliter movetur per rectam C R diametro P B perpendicularem, sitque semper circuli planum mobile in plano hujus schematis immoto. In linea C P capiatur C G ad C P in ratione velocitatis centri C per lineam C R progredientis, ad velocitatem corporis P in circuli peripheriâ revolventis, rota G E F centro C et radio C G descripta super regulam G H ad G C normalem progrediatur revolvendo circà axem suum, et punctum P in plano circuli G E F immotum describet intereà trochoidem P L I quæ erit trajectoria quam corpus P motu absoluto describit; (ut patet ex Prop. 31. et not. 367). Hâc enim ratione centrum C percurret spatium C R = G H = semiperipheria rotæ G E F, eodem tempore quo punctum P revolvetur per totam semiperipheriam P A B; eritque proindè velocitas centri C per lineam C R ad velocitatem puncti vel corporis P in peripheriâ circuli P A B ut semirota ad semicirculum, hoc est, ut radius C G ad radium C P. Hinc si velocitas centri C æqualis sit velocitati corporis P in circulo suo revolventis, trochois P L I erit cyclois vulgaris; si velocitas centri C major extiterit, erit P L I trochois oblongata, si velocitas centri C minor, erit P L I trochois decurtata.



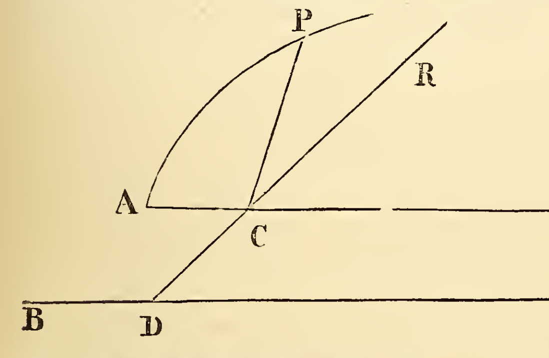
Sit nunc A P sectio quævis conica cujus vertex A, umbilicus seu virium et gravitatis commune centrum C, axis transversus A C, centrum C uniformiter moveatur in rectâ D R positione datâ, et cum illo planum curvæ A P C, ità transferatur in plano hujus schematis immoto, ut axis A C, rectæ B D, positione datæ sit semper parallelus. Dum corpus P in curvâ A P revol-

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

Viribus quibus corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum a centris: requiruntur motus plurium corporum inter se.

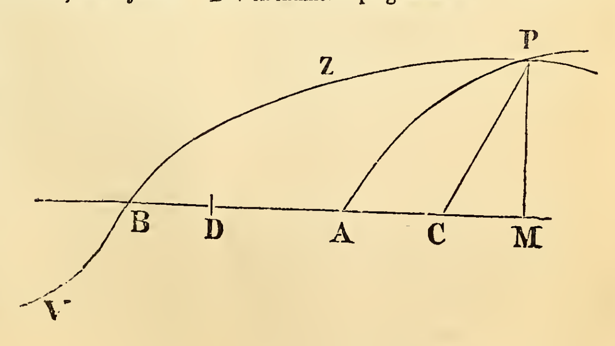
Ponantur primo corpora duo T et L *(Vid. fig. seq. pag.)* commune habentia gravitatis centrum D. Describent hæc (per Corollarium pri-

vens est in vertice A, sit C in D et A in B, ex datâ velocitate uniformi centri C in lineâ D R, dabitur spatium D C quod centrum illud C dato tempore describit, nec non positio curvæ A P,

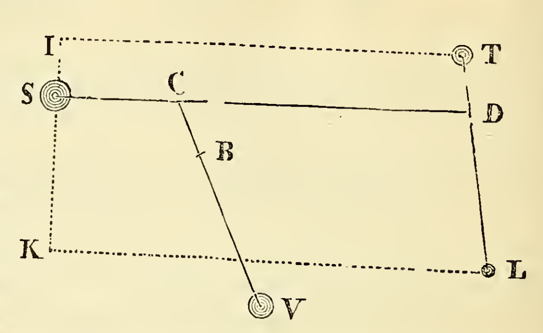


capiatur (per Prop. 30. vel 31. ejusve scholium) area A P C rectæ datæ D C seu tempori proportionalis et obtinebitur locus absolutus corporis P, hoc est, punctum trajectoriæ quam corpus P in plano hujus schematis immoto describit.

Sit A P parabola, et umbilicus C, cum plano A P C uniformi motu progrediatur in axe B C, dum corpus P est in vertice parabolæ A, sit umbilicus C in D et vertex A in B, et trajectoria B Z P, quam corpus P, in plano hujus chartæ immoto describit erit parabola secundi generis quæ cubica dici solet. Nam sit A C, seu B D $= p$, et proindè parabolæ A P, latus rectum $= 4p$ (per Theor. 2um. de Parabola). P M ad axem A B ordinatim applicatâ $= y$, B M $= x$, erit (ex naturâ Parabolæ, per Theor. 1um. de Parabolâ) A M $= \frac{yy}{4p}$, adeòque B A $=$ D C $= x - \frac{yy}{4p} = \frac{4px - yy}{4p}$, C M (sive A M — A C) $= \frac{yy - 4pp}{4p}$. Porrò (ex Archimede Prop. 17. de quadr. Parab. quæ est Theor. 4um. de Parabolâ) area A P M $= \frac{2}{3}$ A M $\times$ P M $= \frac{2y^3}{12p}$, area trianguli C P M $= \frac{1}{2}$ C M $\times$ P M $= \frac{y^3 - 4ppy}{8p}$; undè area A P C $=$ A P M — CPM $= \frac{y^3 + 12ppy}{24p}$. Est autem area A P C, tempori quo describitur proportionalis, seu ut linea D C vel B A $= \frac{4px - yy}{4p}$, quarè si fuerit $\frac{a}{6}$ quantitas constans, erit $\frac{y^3 + 12ppy}{24p} = \frac{4apx - ayy}{24p}$, hoc est $y^3 + ayy + 12ppy = 4apx$, æquatio ad parabolam cubicam B Z P, quæ crura habet contraria B Z, B V in infinitum progredientia.

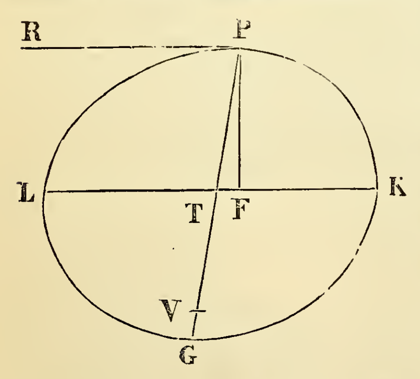


mum Theorematis 21.) ellipses centra habentes in D, quarum magnitudo ([n]) ex Problemate V. innotescit.



Trahat jam corpus tertium S priora duo T et L viribus acceleratricibus S T, S L, et ab ipsis vicissim trahatur. Vis S T, (per legum Corol. 2.) resolvitur in vires SD, DT; et vis S L in vires S D, D L. Vires ([o]) autem D T, D L, quæ sunt ut ipsarum summa T L, atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora T et L se mutuo trahunt, additæ his viribus corporum T et L, prior priori et posterior posteriori, componunt vires distantiis D T ac D L proportionales, ut prius, sed viribus prioribus majores; ideoque (per Corol. 1. Prop. X. et Corol. 1. et 8. Prop. IV.) efficiunt ut corpora illa describant ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices S D et S D, ([p]) actionibus motricibus S D × T et S D × L, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter et secundum lineas T I, L K,

([n]) 494. *Ex Problemate V. innotescit.* Si enim corpus aliquod de loco dato P exeat cum datâ velocitate et secundum datam directionem P R



ut ellipsim P L G K, circâ centrum T datum describat, recta P R positione data ellipsim tanget in P, ideòque diameter L K, ipsi P R parallela (Prop. 32. Lib. I. Conic. Apoll. sive Lem. IV. de Conic. et Theor. I. de Ell.) dabitur positione. Prætereà, si ex puncto P ad diametrum L K demittatur perpendiculum P F, erit vis centripeta data quâ corpus versus T urgetur secundum directionem P T ad partem vis illius quæ juxtà directionem P F, agit, ut P T ad P F, proindèque pars illa vis centripetæ dabitur. Datâ autem vi centripetâ juxtà directionem P F urgente, datâque corporis de loco P exeuntis velocitate in lineâ P R, ad P F perpendiculari, dabitur radius circuli ellipsim osculantis in P, quam corpus P cum hâc velocitate atque vi centripetâ potest describere (199,) et hinc dabitur altera diameter conjugata L K, et ellipsis describi poterit (vide Probl. de Ellipsi p. 98).

([o]) * *Vires autem D T, D L, quæ sunt ut ipsarum summa T L,* &c. Est enim D T ad T L in ratione datâ corporis L ad summam corporum T + L, et D L ad T L, in ratione datâ corporis T ad summam corporum T + L (60); quarè vires D T, D L, in quâcumque positione corporum T et L, sunt ut T L.

([p]) * *Actionibus motricibus S D × T, et S D × L* (per def. 8. et not. 12.) *quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter* ob æqualem vim acceleratricem S D, ut fit in corporibus gravibus, quæ licet massis inæqualia, vi tamen gravitatis acceleratrice, cadendo æqualiter accelerantur.

ipsi D S parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed faciunt ut ipsa æqualiter accedant ad lineam I K; quam ductam concipe per medium corporis S, et lineæ D S perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam I K accessus ([q]) faciendo ut systema corporum T et L ex unâ parte, et corpus S ex alterâ, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C. ([r]) Tali motu corpus S, eo quod summa virium motricium S D × T et S D × L, distantiæ C S proportionalium, tendit versus centrum C, describit ellipsin circa idem C; et punctum D, ob proportionales C S, C D, describet ellipsin consimilem e regione. Corpora autem T et L viribus motricibus S D × T et S D × L, prius priore, posterius posteriore, æqualiter et secundum lineas parallelas T I et L K, ut dictum est, attracta, pergent (per legum Corollarium quintum et sextum) circa centrum mobile D ellipses suas describere, ut prius. Q. e. i.

Addatur jam corpus quartum V, et ([s]) simili argumento concludetur hoc et punctum C ellipses circa omnium commune centrum gravitatis B describere; manentibus motibus priorum corporum T, L et S circa centra D et C, sed acceleratis. Et eâdem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. e. i.

([t]) Hæc ita se habent, etsi corpora T et L trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantiæ ductæ in corpora trahentia, et ([u]) ex præcedentibus facilè deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum B, in plano immobili describunt. Q. e. i.

([q]) * *Faciendo ut systema corporum T, et L,* (seu D centrum gravitatis commune ipsorum) *ex unâ parte, et corpus S ex alterâ, justis cum velocitatibus* in dato plano secundum directiones parallelas et contrarias impressis *gyrentur circà C commune gravitatis centrum trium corporum.*

([r]) * *Tali motu corpus S,* &c. Corpus S a corporibus T et L trahitur viribus quæ sunt inter se ut S T × T et S L × L (ex hyp.) et per resolutionem virium corpus S a corporibus T et L versus D et C juxtà directionem S D seu S C trahitur viribus quæ sunt inter se ut S D × T et S D × L, hoc est, vi quæ est ut $S D \times \overline{T + L}$, adeòque ut S D, ob datam corporum summam T + L, et ut C S, ob datam rationem S D ad C S, (61). Corpus idem S juxtà directiones oppositas ipsis D T, D L parallelas, trahitur viribus quæ sunt inter se ut D T × T et D L × L, hoc est, viribus æqualibus (60) quæ proindè nullam mutationem producunt. Quarè cum systema corporum T et L, seu ipsorum commune centrum gravitatis D, versus S seu C trahatur quoque vi quæ est ut S D, ac proindè ut C D (61), patet quod corpus S, ex unâ parte, et punctum D ex alterâ describant circum C ellipses consimiles, si justis cum velocitatibus, ut suprà dictum est, projiciantur.

([s]) * *Simili argumento, considerando corpora* T et L tanquam corpus unicum in centro D positum, *concludetur,* &c.

([t]) * *Hæc ità se habent.* Nam propositionis demonstratio non supponit vires acceleratrices quibus corpora T et L ad distantiam datam trahunt corpus S, esse æquales viribus acceleratricibus quibus se mutuò ad eandem distantiam trahunt. Undè manet demonstratio, etsi corpus S a corpore v. gr. T ad distantiam datam trahatur majori vel minori vi acceleratrice quam corpus L ad eandem distantiam.

([u]) * *Et ex præcedentibus facilè deducetur,*

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum ab eorundem centris, moveri posse inter se in ellipsibus; et radiis ad umbilicos ductis areas describere temporibus proportionales quam proximè.

In propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in ellipsibus accuratè. Quo magis recedit lex virium a lege ibi positâ, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri potest, ut corpora, secundum legem hic positam se mutuo trahentia, moveantur in ellipsibus accuratè, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multùm ab ellipsibus errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circà maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantque ad singula vires absolutæ proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legum Corol. quartum) vel quiescit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibiliter ab hoc centro: et maximum illud vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum, sine errore sensibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in ellipsibus, atque radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; (y) nisi quâtenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora usque donec error iste, et (z) actiones mutuæ sint datis quibusvis minores; atque ideo donec orbes cum ellipsibus quadrent,

Vis enim seu actio acceleratrix, quâ corpus T versus D trahitur, est (ex Dem. et Hyp.) ut $TL \times L + TD \times S$, hoc est, ut $TD \times \overline{S + T + L}$, ob $TL \times L = TD \times \overline{T + L}$ (60); et vis acceleratrix quâ punctum D versùs C trahitur, est (ex Dem. et Hyp.) ut $SD \times S$, hoc est ut $CS \times S + CD \times S$; sed (61) $CS \times S = CD \times \overline{T + L}$, adeòque vis acceleratrix quâ punctum D versùs C trahitur, est ut $CD \times \overline{T + L + S}$. Quarè vis acceleratrix quâ corpus T versùs D trahitur, est ad vim acceleratricem quâ punctum D trahitur versùs C, ut T D ad C D, hoc est ut distantiæ a punctis ad quæ illæ vires diriguntur. Corpus igitur T ad punctum D, et punctum D ad C trahuntur viribus absolutis æqualibus, hoc est, eodem modo ad sua respectivè centra D et C trahuntur quo traherentur, si circà idem virium centrum ad distantias T D, D C revolverentur, sed in hoc casu æqualibus temporibus periodicis ellipses suas describerent (per Cor. 2. Prop. X.) ergò et in illo casu corpus T circà D et punctum D circà C, æqualibus temporibus periodicis suas ellipses describunt. Idem eodem modo demonstratur, cùm plura sunt corpora revolventia.

(y) * *Nisi quâtenus errores inducuntur*, &c. Nam si corpus maximum a communi illo gravitatis centro non erraret, nullaque esset actio minorum corporum in se mutuò, quodlibet exiguum corpus revolveretur in ellipsi circà maximum, atque radiis ad idem ductis describeret areas temporibus proportionales (per Cor. 2. et 3. Prop. 58.)

(z) * *Et actiones mutuæ sint datis quibusvis minores* respectu actionis corporis maximi in corpora minora; nam cùm corporis vis attractiva ab

et areæ respondeant temporibus, sine errore, qui non sit minor quovis dato. Q. e. o.

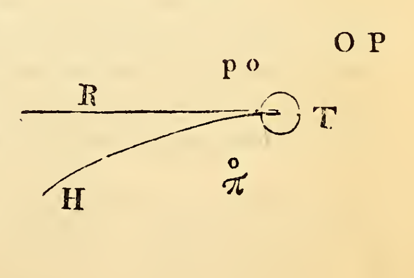
Cas. 2. ([a]) Fingamus jam systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum se mutuò revolventium corporum systema progredi uniformiter in directum, et interea vi corporis alterius longè maximi et ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut systema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur, efficiunt: manifestum est quod, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorsus orietur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem: secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; et augendo corporis maximi distantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ respectu earum longitudinis et inclinationes ad invicem minores sint, quam datæ quævis; perseverabunt motus partium systematis inter se sine erroribus, qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hâc attractione ad modum corporis unius; hoc est, ([b]) centro suo gravitatis describet circa corpus maximum sectionem aliquam conicam (viz. ([c]) Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsin fortiore) et radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, sine ullis erroribus, nisi quas partium distantiæ, perexiguæ sane et pro lubitu minuendæ, valeant efficere. Q. e. o.

soluta hic supponatur materiæ proportionalis, diminutâ corporis massâ, vis attractiva in eâdem ratione minuitur.

([a]) * *Fingamus jam corporum minorum*, P, p, π, *modo jam descripto circà maximum* T *revolventium systema progredi uniformiter in directum*, seu totius systematis commune gravitatis centrum T, progredi uniformiter per rectam T R, *et intereà vi corporis alterius longè maximi S, et ad magnam distantiam siti, urgeri ad latus* secundum rectas P S, p s, π S, T S, atque a rectâ T R retrahi et in curvam T H cogi, &c.

([b]) * *Hoc est, centro suo gravitatis*, in quo totum systema gravium P, p, π, T, unitum ac contractum intelligitur (71).

([c]) * *Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsim* vel circulum *fortiore;* manente enim velocitate corporis circà centrum virium S projecti, et circulum vel ellipsim describentis minui debet illius ad centrum S attractio, ut ad





Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. ([d]) In casu secundo, quo propiùs accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium systematis inter se; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maximè autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium systematis, versus corpus omnium maximum, ([e]) non sint ad invicem reciprocè ut quadrata distantiarum a corpore illo maximo; ([f]) præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum a corpore maximo. Nam si vis acceleratrix, æqualiter et secundum lineas parallelas agendo, perturbat motus inter se, necesse est, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora et non agendo in alia, necessariò mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione et inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si systematis hujus partes in ellipsibus, vel circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod eædem a viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissimè, aut urgentur æqualiter, et secundum lineas parallelas quamproximè.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum, se mutuo trahunt; et attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum et maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, et

eandem distantiam possit parabolam describere, et magis adhuc decrescere illam attractionem oportet, ut describat hyperbolam (per Cor. 7. Prop. 16. et Dem. Prop. 17.)

([d]) * *In casu* 2°. *quo propiùs accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium corporum, eò magis* recedit a casu ubi perturbatio est nulla, nempè quandò corpus S infinitè distat, ergò eò *magis turbabuntur motus partium systematis inter se.*

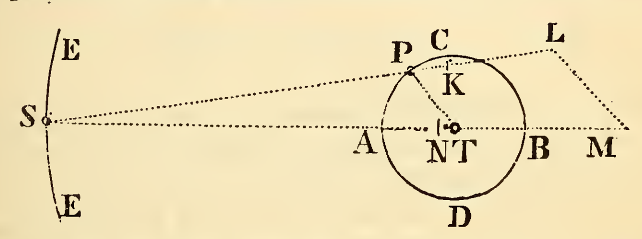
([e]) * *Non sint ad invicem reciprocè,* &c. Exempli causâ; Si corpora P, p, diversis legibus traherentur, P, v. gr. in ratione reciprocâ quadrati distantiæ suæ a corpore maximo S; p verò in ratione cubi distantiæ.

([f]) * *Præsertim si proportionis hujus inæqualitas,* &c. Exempli causâ, si inæqualitas attractionum acceleratricum in corporibus P, p, major sit inæqualitate distantiarum S P, S p; Nam si illæ inæqualitates attractionum et distantiarum essent in datâ ratione, evanescente distantiarum S P, S p differentiâ, quando corpus maximum S longissimè distat, evanesceret quoque attractionum acceleratricum inæqualitas.

figuram ad formam ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur, quam si maximum illud vel a minoribus non attractum quiescat, vel multò minus vel multò magis attractum, aut multò minus aut multò magis agitetur.

Liquet ferè ex demonstratione corollarii secundi propositionis præcelentis; sed argumento magis distincto et latius cogente sic evincitur.

Cas. 1. Revolvantur corpora minora P et S in eodem plano circa maximum T, quorum P describat orbem interiorem P A B, et S exteriorem

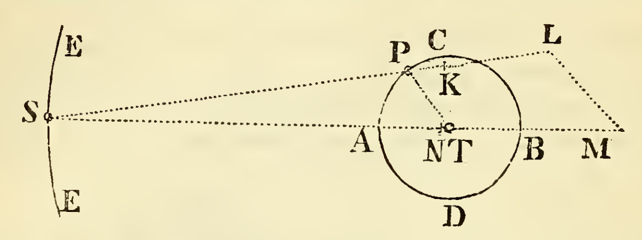


E S E. Sit S K mediocris distantia corporum P et S; et corporis P versùs S attractio acceleratrix, in mediocri illâ distantiâ, exponatur per eandem. In duplicatâ ratione S K ad S P capiatur S L ad S K, et ([g]) erit S L attractio acceleratrix corporis P versus S in distantiâ quâvis S P. Junge P T, eique parallelam age L M occurrentem S T in M; et attractio S L resolvetur (per legum Corol. 2.) in attractiones S M, L M. Et sic urgebitur corpus P vi acceleratrice triplici. Vis una tendit ad T, et oritur a mutuâ attractione corporum T et P. Hâc vi solâ corpus P circum corpus T, sive immotum, sive hâc attractione agitatum, describere deberet et areas, radio P T, temporibus proportionales, et ellipsin cui umbilicus est in centro corporis T. Patet hoc per Prop. XI. et Corollaria 2. et 3. Theor. XXI. Vis altera est attractionis L M, quæ quoniam tendit a P ad T, superaddita vi priori coincidet cum ipsâ, et sic faciet u areæ etiamnum temporibus proportionales describantur per Corol. 3. Theor. XXI. At ([h]) quoniam non est quadrato distantiæ P T reciprocè proportionalis, componet eâ cum vi priore vim ab hâc proportione aber-

([g]) * *Et erit S L attractio acceleratrix*, &c. Est enim (ex Hyp.) ut SP^2 ad SK^2 ità attractio acceleratrix in K (quam exhibet linea S K) ad attractionem acceleratricem in P, quam proindè exhibebit linea S L.

([h]) 495. *At quoniam non est quadrato distantiæ P T reciprocè proportionalis.* Est enim (ex constr.) $SK^2 : SP^2 = SL : SK$, adeòque $SK^3 : SP^3 = SL \times SK : SK \times SP = SL : SP$. Sed ob triangula M L S, T P S similia $SL : SP = LM : PT$; ergò $LM : PT = SK^3 : SP^3$, et proindè vis L M est ut $\frac{SK^3 \times PT}{SP^3}$, seu datâ S K, ut $\frac{PT}{SP^3}$; undè crescente distantiâ P T crescit vis L M.

rantem, idque eo magis, quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per Prop. XI. et per Corol. 2. Theor. XXI.) vis, quâ ellipsis circa umbilicum T describitur, tendere debeat ad umbilicum illum, et esse quadrato distantiæ P T reciprocè pro-



portionalis; vis illa composita, aberrando ab hâc proportione, faciet ut orbis P A B aberret a formâ ellipseos umbilicum habentis in T; idque eo magis, quo major est aberratio ab hâc proportione; atque ideo etiam quo major est proportio vis secundæ L M ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia S M, trahendo corpus P secundum lineam ipsi S T parallelam, componet cum prioribus vim, quæ non amplius dirigitur a P in T; quæque ab hâc determinatione tanto magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus: atque ideo quæ faciet ut corpus P, radio T P, areas non amplius temporibus proportionales describat; atque ut aberratio ab hâc proportionalitate tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis verò P A B aberrationem a formâ ellipticâ præfatâ hæc vis tertia duplici de causâ adaugebit, tum quod non dirigatur a P ad T, ([i]) tum etiam quod non sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ P T. Quibus intellectis, manifestum est, quod areæ temporibus tum maximè fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; et quod orbis P A B tum maximè accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipuè vis tertia fit minima, vi primâ manente.

Exponatur corporis T attractio acceleratrix versus S per lineam S N; et si attractiones acceleratrices S M, S N æquales essent; hæ, trahendo corpora T et P æqualiter et secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se

([i]) 496. *Tum etiam quod non sit reciprocè proportionalis*, &c. Nam P T est ad S T ut vis L M est ad vim S M, sed (495) vis L M est ut $\frac{SK^3 \times PT}{SP^3}$, et proindè vis S M est ut $\frac{SK^3 \times ST}{SP^3}$. Quarè vis S M, datis S K et S T, est ut $\frac{1}{SP^3}$

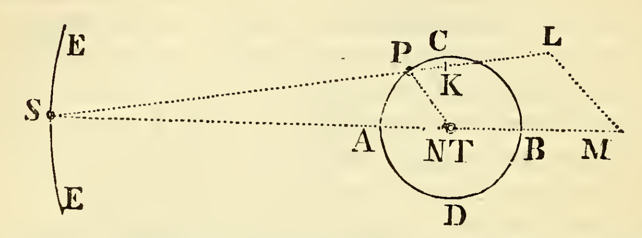
(per legum Corol. VI.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio S N minor esset attractione S M, tolleret ipsa attractionis S M partem S N, et maneret pars sola M N, quâ temporum et arearum proportionalitas et orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio S N major esset attractione S M, oriretur ex differentiâ solâ M N perturbatio proportionalitatis et orbitæ. Sic per attractionem S N reducitur semper attractio tertia superior S M ad attractionem M N, attractione primâ et secundâ manentibus prorsus immutatis: et propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, et orbita P A B ad formam præfatam ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio M N vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum P et T attractiones acceleratrices, factæ versùs corpus S, accedunt quantùm fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio S N non est nulla, neque minor minimâ attractionum omnium S M, sed inter attractionum omnium S M maximam et minimam quasi mediocris; hoc est, non multo major neque multo minor attractione S K. Q. e. d.

Cas. 2. (k) Revolvantur jam corpora minora P, S circa maximum T in planis diversis; et vis L M, agendo secundum lineam P T in plano orbitæ P A B sitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus P de plano orbitæ suæ deturbabit. (l) At vis altera N M, agendo secundum lineam quæ ipsi S T parallela est (atque ideo, quando corpus S versatur extra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ P A B) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, induce perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus P de plano suæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum P et T ad invicem situ, erit ut vis illa generans M N, ideoque minima evadet ubi M N est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio S N non est multo major, neque multo minor attractione S K. Q. e. d.

(k) 497. *Cas.* 2. Planum T E S E cum hujus schematis plano congruere supponatur, orbitæ verò P A B planum alterâ sui parte, v. gr. C A D suprà planum T E S E eminere, et alterâ parte D B C infrà planum T E S E deprimi intelligatur, linea recta D C communis planorum T E S E et P A B intersectio, linea nodorum dicitur, et illius extrema puncta D et C nodi appellantur. Nodi vel puncta quævis D, C dicuntur esse in quadraturis seu aspectum quadratum obtinere respectu corporis S, dum sunt in lineâ rectâ ad S T in puncto T perpendiculari, quod in hoc casu corpus S et punctum C vel D sub angulo recto de loco T videantur. Si super lineâ S T erectum intelligatur planum plano T E S E verticale, sintque puncta A et B in illo plano verticali, A quidem inter corpora S et T; B verò ultrà T, punctum A dicitur esse in conjunctione, et punctum B in oppositione respectu corporum S et T; et loca A et B, communi nomine syzigiæ vocantur. Motus in longitudinem est quo corpus revolvens P a puncto suæ orbitæ dato, v. gr. a puncto C recedit per C P A D B: motus in latitudinem est is quo corpus revolvens P ad planum immotum T E S E accedit vel ab eo recedit. Si corporum revolventium P et S motus inter se conferantur, et utrumque in eandem plagam feratur, v. gr. ab occidente in orientem, motus in consequentia fieri dicitur; si verò alterum in unam plagam, alterum in alteram moveatur, motus unius in consequentia alterius vocatur in antecedentia, v. gr. motus ab oriente in occidentem in antecedentia fieri dicetur.

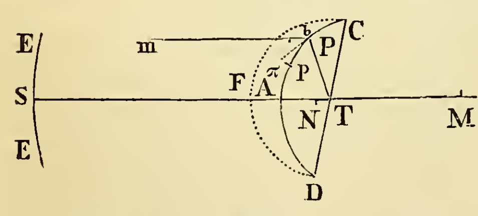
(l) * *At vis altera N M*, &c. Si orbitæ

Corol. 1. (n) Ex his facilè colligitur, quod, si corpora plura minora P, S, R, &c. revolvantur circa maximum T, motus corporis intimi P minimè perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum T pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur et agitatur, atque a cætera se mutuo.



Corol. 2. In systemate vero trium corporum T, P, S, si attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint ad invicem reciprocè ut quadrata distantiarum; corpus P, radio P T, aream circa corpus T velocius describet prope conjunctionem A et oppositionem B, quam prope quadraturas C, D. Namque vis omnis qua corpus P urgetur et corpus T non urgetur, quæque non agit secundum lineam P T accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in consequentia vel in antecedentia dirigitur. (o) Talis est vis N M. Hæc in transitu corporis

P A B (vid. fig. Newt.) pars A C B suprà planum T E S E elevata, pars verò altera A D B infrà ipsum depressa intelligatur, ita ut linea nodorum A B coincidat cum lineâ T S sitque proinde corpus S in lineâ nodorum productâ, vis N M ut potè quæ in corpus P agit secundùm lineam ipsi T S parallelam, jacebit in plano orbitæ P A B, et motum corporis P in latitudinem non perturbabit, hoc est, non efficiet ut corpus



P ad planum T E S E magis accedat aut ab eo recedat. Verùm si corpus S versatur extrà lineam nodorum, vis N M inducet perturbationem motûs in latitudinem. Sit enim C A D T pars orbitæ quam corpus P exclusâ vi N M describeret suprà planum T E S E seu C F D eminens, sit C D linea nodorum, P m recta æqualis et parallela N M, p locus ad quem corpus P exclusâ vi N M tempusculo minimo perveniret, b locus in lineâ P m ad quem corpus idem P, solâ vi N M, eodem tempusculo traheretur; corpus illud P duabus viribus impulsum, quarum altera agit secundum directionem P p in plano C A D altera secundùm directionem P m ad planum C A D inclinatam, motu composito describet lineam P π quæ non est in plano C A D.

(n) * *Corollarium primum* patet ex demonstratis cum duo tantum sunt corpora minora P, S; addatur enim tertium corpus R, eodem modo demonstrabitur motum corporis intimi P minimè perturbari attractione ipsius R, ubi corpus maximum T pariter attrahitur a corpore illo R, ac corpus P, et ità de pluribus corporibus ratiocinari licet. Quarè ex demonstratis *facilè colligitur quod si,* &c.

(o) 498. *Talis est vis N M.* Si supponamus orbem C A D B (vid. fig. Newt.) esse circulo finitimum, et distantiam S D maximam respectu radii P T, erit ferè S C = S K = S T = S N, et proindè N M = T M. Porrò corpore P in quadraturis C, D versante, est S C = S P = S K; quarè cum sit, (per constr. Prop. 66.) S L : S K = S K^2 : S P^2, erit in

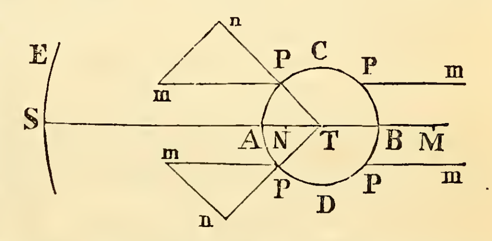
P a C ad A tendit in consequentia, motumque accelerat; dein usque ad D in antecedentia, et motum retardat; tum in consequentia usque ad B, et ultimo in antecedentia transeundo a B ad C.

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus P, cæteris paribus, velocius movetur in conjunctione et oppositione quam in quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis P, cæteris paribus, curvior est in quadraturis quam in conjunctione et oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et (p) præterea vis K L, vel N M, in conjunctione et oppositione contraria est vi, quâ corpus T trahit corpus P; ideoque vim illam minuit; corpus autem P minus deflectet a recto tramite ubi minus urgetur in corpus T.

Corol. 5. (q) Unde corpus P, cæteris paribus, longius recedet a corpore

quadraturis S L = S K = S C, et L M coincidet cum C T seu P T, adeòque evanescet T M seu N M. Nulla igitur erit virium S M, S N, in quadraturis differentia, et ideò corpus P reliquis viribus ad centrum T tendentibus agitatum, radio vectore areas ibi describet temporibus proportionales. At ubi corpus P extrà quadraturas est in hemiperipheriâ C A D, vis S M major est vi S N et corpus P virium differentiâ N M trahitur secundùm directionem ipsi T S parallelam.



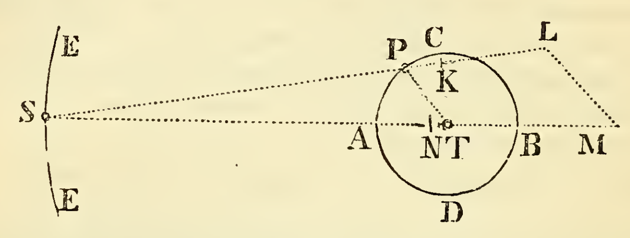
Sit P m æqualis et parallela ipsi N M, et demisso ex m in radium T P productum perpendiculo m n, vis P m, seu N M, in duas vires P n, n m resolvitur, quarum altera P n trahendo secundùm directionem radii T P, corporis P motum in longitudinem nihil mutat, nec æquabilem arearum descriptionem turbat; altera verò n m, trahendo secundum directionem n m, radio T P perpendicularem, hoc est, secundum directionem tangentis in P, motum in longitudinem accelerat in primo quadrante C A retardat in secundo quadrante A D.

In alterâ hemiperipheriâ D B C, vis S M minor est vi S N, quoniam corpus P a corpore S longius distat quam corpus T, unde si vires perturbantes ad solum corpus P referantur, virium S M, S N differentia N M negativa seu ablatitia erit, aut quod idem est, contrariâ directione aget; Fingatur enim corpora T et P urgeri ambo vi S N ubique æquali et sibi parallela, pergent moveri inter se quasi omnino abesset illa vis per Cor. 6. Legum motûs, tum trahatur corpus P vi N M secundum directionem oppositam vi S N, ex eâ actione mutabuntur motus corporum T et P inter se, sed etiam ex eâ actione vis S N quæ trahere corpus P fingebatur, reducetur ad vim S M quæ est vis reverâ agens dum vis S N agit in T, ergo si æstimentur motus corporum T et P inter se, quasi corpus P in hemiperipheriâ D B C urgeretur virium differentia N M in contrariam partem agente, obtinebuntur veræ mutationes motuum corporum T et P inter se, ex actionibus S N et S M ortæ, ideoque in posterum considerabitur corpus P in hemiperipheriâ D B C quasi urgeretur vi N M secundum directionem P m ipsi N M parallelam a P versùs m agente; atque ideo, si vis P m in duas vires, ut in alterâ hemiperipheriâ factum est, resolvatur, manifestum erit motum in longitudinem in quadrante D B accelerari et in quadrante B C retardari.

(p) 499. *Et præterea vis K L*, &c. Iisdem positis quæ in notâ superiori, rectæ S L, S M sunt fere parallelæ, ac proindè T M = P L et L M = P T quam proximè; quarè coincidente P cum A et K cum T, fit L M = A T = P K, et N M seu T M = P L = A T + K L, et N M — L M = K L, hoc est, vis tota perturbans quâ corpus P in conjunctione A a corpore T versus S retrahitur, est ut K L quam proximè; vi enim L M trahitur P versus T et vi N M a corpore T versus S retrahitur. Idem eodem modo demonstratur, corpore P in oppositione B posito.

(q) * *Undè corpus P*, &c. Nam cum orbita corporis P curvior sit in quadraturis C vel D quam in syzigiis A et B (per Cor. 4.) necesse est, cæteris paribus, ut in syzigiis A et B depres-

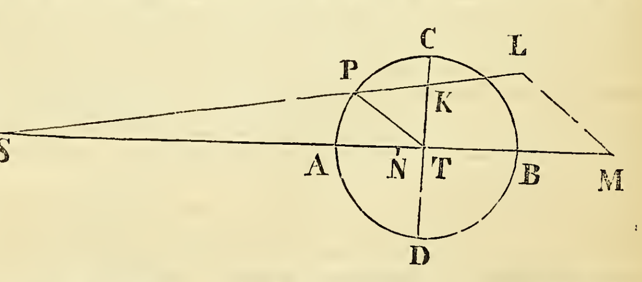
T in quadraturis, quam in conjunctione et oppositione. Hæc ita se habent excluso motu excentricitatis. Nam si orbita corporis P excentrica sit, excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. ostendetur) evadet maxima ubi apsides sunt in syzygiis; indeque fieri potest ut corpus P, ad apsidem summam appellens, absit longius a corpore T in syzygiis quam in quadraturis.



Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis T, quâ corpus P retinetur in orbe suo, augetur in quadraturis per additionem vis L M, ac diminuiter in syzygiis per ablationem vis K L, et (r) ob magnitudinem vis K L, magis diminuitur quam augetur; est autem vis illa vi centripeta

sior sit quam in quadraturis C et D ad instar ellipseos cujus sit centrum T axis major C D axis minor A B. Hæc ità se habent, si, exclusis viribus perturbantibus, orbita corporis P fuerit circulus cujus centrum T.

(r) 500. *Et ob magnitudinem vis K L*, &c. Si distantia mediocris S K vel S T ingens fuerit respectu radii T P orbitæ P A B, in loco quovis corporis P, erit vis L M quam proximè ad vim N M ut sinus totus ad sinum triplum distantiæ angularis corporis P a quadraturâ proximâ. Nam ob ingentem distantiam corporis S (ex hyp.) lineæ S L, S M sunt ferè parallelæ ac proinde $LM = PT$, NM seu $TM = PL$, et $SP = SK$; cumque sit S T ad lineam quadraturarum C D perpendicularis, erit etiam S K ad eandem normalis, et existente P T radio, erit P K sinus anguli P T C, hoc est, sinus distantiæ angularis corporis P a quadraturâ proximâ C. Porrò (per Prop. 66.) $SL : SK = SK^2 : SP^2$, adeòque $SL - SK : SK = SK^2 - SP^2 : SP^2$, hoc est, $KL : SK = PK \times SK + SP : SP^2 = PK \times 2SP : SP^2 = 2PK : SP = 2PK : SK$, ob $SK = SP$, et $SK + SP = 2SP$.



Quarè erit $KL = 2PK$, et P L seu $NM = 3PK$, hoc est, vis L M seu P T ad vim N M seu P L ut sinus totus P T ad 3 P K triplum sinum distantiæ angularis corporis P a quadraturâ proximâ.

501. *Corol.* Vis K L in conjunctione A, est ad vim similem in oppositione B, ut A T ad T B, et si orbita P A B circularis fuerit vel circulo finitima, erit vis K L in syzygiis duplo major vi L M in quadraturis quam proxime. Nam corpore P in syzygiis versante. fit $PK = AT = PT = LM$, et proindè N M seu P L fit $= 3LM$, et $KL = 2LM$. Tandem iisdem positis, vis N M maxima est in syzygiis, quoniam ibi P K fit maxima seu evadit $= AT$, et $NM = 3AT$.

Unde ob magnitudinem vis K L (500. 501.) vis centripeta corporis centralis T magis diminuitur quam augetur, ideoque censenda est pro absolutè diminutâ ab actione corporis S.

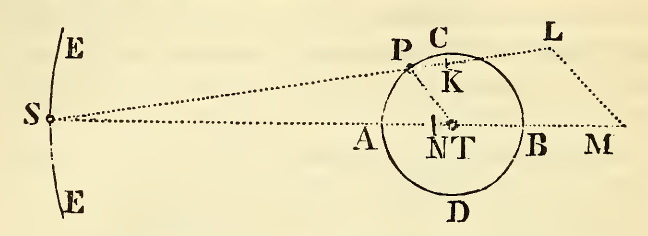
(per Corol. 2. Prop. IV.) in ratione compositâ ex ratione simplici radii T P directè et ratione duplicatâ temporis periodici inversè: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis K L; ideoque tempus periodicum, si maneat orbis radius T P, augeri, idque in subduplicatâ ratione, quâ vis illa centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione sesquiplicatâ, (per Corol. VI. Prop. IV.) Si vis illa corporis centralis paulatim languesceret, corpus P minus semper et minus attractum perpetuò recederet longius a centro T; et contra, si vis illa augeretur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui S, quâ vis illa diminuitur, (s) augeatur ac diminuatur per vices: augebitur simul ac diminuetur radius T P per vices; et (t) tempus periodicum augebitur ac

(s) * *Augeatur ac diminuatur per vices.* Quoniam vis quâ corpus P trahitur a corpore T, est ejusdem corporis P vis centripeta quâ in orbitâ suâ retinetur; si remissior fuerit vis illa, corpus P minus attractum a centro T longius recederet; et contrà, si augeatur vis illa, corpus P ad T propiùs accedet. Auctâ igitur actione corporis S in T per accessum corporis T ad S, augetur vis N M minuiturque vis centripeta corporis P, ac proindè crescit distantia P T. E contrà autem decrescente corporis S actione per recessum corporis T ab S decrescit quoque N M et augetur corporis P vis centripeta, minorque fit distantia P T. Hæc omnia per vices contingent, ubi nempè corpus T corpori S proximius fuerit, augebitur radius P T, ubi verò remotius evadet minuetur radius.

(t) * *Et tempus periodicum augebitur ac diminuetur*, &c. Corpus P circà T, exclusâ corporis longinqui S vi ablatitiâ, in circulo P A D revolvatur, et accedente vi illâ ablatitiâ corporis S quæ, ob ingentem distantiam S T, parva admodum sit respectu vis quâ corpus P a corpore T trahitur, idem corpus P in orbe ferè circulari adhuc revolvetur. Jam verò corporis circulum vel orbem circulo finitimum describentis vis acceleratrix versus T directa est semper (per Cor. 2. Prop. 4.) in ratione compositâ ex ratione simplici radii T P qui dicatur R directè et ratione duplicatâ temporis periodici, quod dicatur t inversè, hoc est, vis acceleratrix corporis P versus T, est ut $\frac{R}{t^2}$, et manente radio ut $\frac{1}{t^2}$; sed vis acceleratrix in distantiâ datâ est ut vis absoluta corporis trahentis, ergò si corporis T trahentis vis absoluta dicatur V, erit V ut $\frac{1}{t^2}$ et t^2 ut $\frac{1}{V}$, ac t ut $\frac{1}{\sqrt{V}}$ manente radio T P seu R. Porrò vis acceleratrix quâ corpus P versus T trahitur, exclusâ vi ablatitiâ corporis S, est reciprocè ut quadratum distantiæ T P, hoc est directè ut $\frac{1}{R^2}$ (ex hyp.) Et quoniam vis ablatitia corporis S, exigua admodum est respectu vis acceleratricis quâ corpus P a corpore T trahitur, accedente vi illâ ablatitiâ, vis reliqua acceleratrix in corpore P erit adhuc ut $\frac{1}{R^2}$ quam proximè; quare eâdem manente reliquâ vi centripetâ absolutâ corporis T et mutato utcumque radio R, quadratum temporis periodici t^2 erit ut distantiæ cubus R^3. ac proindè t ut $\sqrt{R^3}$. (per Corol. 6. Prop. 4.) hoc est tempus periodicum est in sesquiplicatâ ratione radii T P. Si igitur neque maneat radius idem, neque eadem vis centripeta absoluta in corpore T, sed per actionem corporis longinqui S radius augeatur, et vis centripeta minuatur, aut per diminutionem ejus actionis radius minuatur, et vis centripeta augeatur, quadratum temporis periodici t^2 erit in ratione compositâ ex binis rationibus suprà inventis, nimirum ex ratione $\frac{1}{V}$, et ratione R^3, hoc est t^2 erit ut $\frac{R^3}{V}$, et proindè t ut $\sqrt{\frac{R^3}{V}}$, aut quod idem est, tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compositâ ex ratione $\sqrt{R^3}$, sesquiplicatâ radii, et ratione $\frac{1}{\sqrt{V}}$ subduplicatâ hujus quâ vis illa centripeta corporis centralis T per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S diminuitur vel augetur; nam decrescente V crescit pariter $\frac{1}{V}$, et contrà crescente V in eâdem ratione decrescit $\frac{1}{V}$.

502. *Scholium.* Hinc ut David Gregorius in scholio ad Prop. 17. Lib. 4. Astronomiæ physicæ et geometricæ observavit, si vis centripeta corporis centralis T aliundè quam per vim extraneam corporis S augeatur et minuatur per

diminuetur in ratione compositâ ex ratione sesquiplicatâ radii, et ratione subduplicatâ, quâ vis illa centripeta corporis centralis T, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S, diminuitur vel augetur.



Corol. 7. Ex (u) præmissis consequitur etiam, quod ellipseos a corpore P descriptæ axis, seu apsidum linea, quoad motum angularem, progreditur et regreditur per vices, sed magis tamen progreditur, et per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis quâ corpus P urgetur in corpus T in quadraturis, ubi vis M N evanuit, componitur ex vi L M et vi centripeta, quâ corpus T trahit corpus P. Vis (y) prior L M, si augeatur distantia P T, augetur in eâdem fere ratione cum hâc distantiâ, et vis posterior, decrescit in duplicatâ illâ ratione, ideoque summa harum virium (z) decrescit in minore quam duplicatâ ratione distantiæ P T, et (a) propterea (per Corol. 1. Prop. XLV.) efficit ut aux, seu apsis summa,

vices, ut si corporis T vis centripeta absoluta supponatur ipsius massæ proportionalis et nova ei addatur et detrahatur per vices materia, atque indè ejus vis absoluta in eâdem ratione augeatur et minuatur, corpus P in minori et majori orbitâ per vices revolvetur, diminuto et aucto per vices radio T P ejusque tempus periodicum minuetur et augebitur per vices in ratione compositâ ex ratione susquiplicatâ radii directè et ratione subduplicatâ vis centripetæ absolutæ corporis T inversè ut supra. Vis enim acceleratrix composita et residua quâ corpus T auctum et diminutum per vices trahit corpus P est hic præcisè in duplicatâ ratione distantiæ inversè, quod in casu Corol. 6. quam proximè tantùm obtinet.

(u) * *Ex præmissis.* Si corpus P circum T ellipsim circulo finitimam describat cujus umbilicus sit T hujus ellipseos *axis major seu apsidum linea* motu angulari circà umbilicum T *per vices progreditur* seu fertur in consequentia *et regreditur,* seu in antecedentia movetur; progreditur nempè, dum corpus P est in syzygiis A et B, regreditur verò dum corpus P est in quadraturis C et D, *sed magis tamen progreditur quam regreditur, et per excessum progressionis fertur in consequentia.*

(y) * *Vis prior L M,* &c. Nam ob ingentem corporis S a corporibus P et T distantiam (ex Hyp.) S L est ferè parallela S M, et proindè L M ipsi P T parallela crescit ubique ut P T, quamproximè; in quadraturis verò L M coincidit cum P T.

(z) * *Decrescit in minore quam duplicatâ illâ ratione,* hoc est, non tantùm minuitur in distantiâ majore, nec tantùm augetur in distantiâ minore, quantùm minueretur vel augeretur, si vis tota acceleratrix, seu virium summa esset semper ut quadratum distantiæ reciprocè.

(a) * *Et propterea per Cor. 1. Prop. 45.* Sit $TP = A$, et $LM = c \times A$; c verò quantitas data, et vis quâ corpus P versus T exclusâ corporis S actione augetur, erit (ex Hyp.) ut $\frac{1}{A^2}$, et accedente vi exiguâ L M in quadraturis, harum virium summa erit ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, adeòque hæc virium summa decrescet in ratione paulò minore quam in duplicatâ distantiæ P T seu A. Nam si distantia variabilis A evadat $b \times A$, sitque b numerus unitate major, erit vis in simplici distantiâ A ad vim in distantiâ majore $b \times A$, ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, ad $\frac{1}{b^2 A^2} + cbA$, hoc est, ut $bb + cbbA^3$ ad $1 + cb^3A^3$ sive ut $bb \times \overline{1 + cA^3}$ ad $1 \times \overline{1 + cb^3A^3}$

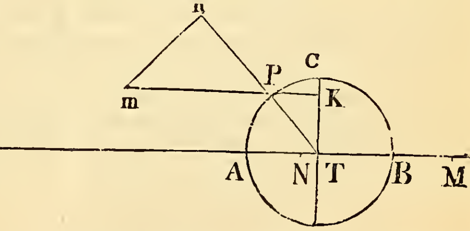
regrediatur. In conjunctione verò et oppositione vis, quâ corpus P urgetur in corpus T, differentia est inter vim, quâ corpus T trahit corpus P, et vim K L; et differentia illa, ([b]) propterea quod vis K L augetur quamproximè in ratione distantiæ P T, decrescit in majore quam duplicatâ ratione distantiæ P T, ([c]) ideoque (per Corol. 1. Prop. XLV.) efficit ut aux progrediatur. In ([d]) locis inter syzygias et quadraturas pen-

hæc autem ratio minor est quam ratio $\frac{1}{A^2}$ ad $\frac{1}{b^2 A^2}$, eu b^2 ad 1, cum $(1 + c A^3)$ minus sit quàm $1 + c b^3 A^3$. Ponamus itaque virium summam esse ut $\frac{1}{A^{2-q}}$, seu ut A^{-2+q}, et q, numerum positivum unitate longe minorem, et quoniam si motus totus angularis quo corpus P ab apside unâ ad eandem apsidem redit, sit ad motum angularem revolutionis unius seu 360°. ut numerus aliquis m ad n vis centripeta tota est ut $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ (per Cor. Prop. 45.) erit hic $\frac{nn}{mm} - 3 = q - 2$, $\frac{nn}{mm} = 1 + q$, $\frac{n}{m} = \sqrt{1 + q}$, et m ad n, seu motus totus angularis ab apside ad eandem apsidem ad 360° ut 1, ad $\sqrt{1 + q}$, adeòque motus ille angularis ab apside ad eandem $= \frac{360°}{\sqrt{1 + q}}$, quarè cum sit $\sqrt{1 + q}$, paulo major unitate, motus totus angularis ab apside ad eamdem apsidem minor erit 360°. et ideò apsides obviam ibunt corpori P revolventi, seu movebuntur in antecedentia, aut quod idem est, regrediuntur. Idem facilè demonstratur (per Cor. 2. Prop. 45.) vel per exempla tertia. Cum enim vis tota sit (ex Hyp.) ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, erit (loco citato), angulus revolutionis corporis inter apsides summam et imam $= 180° \times \sqrt{\frac{1 + c}{1 + 4c}}$; sed quoniam c est numerus positivus, $\frac{1 + c}{1 + 4c}$, est numerus unitate minor, ergò angulus revolutionis corporis P inter apsides minor est 180°.

([b]) * *Propterea quod vis K L*, &c. Est enim in syzygiis K L = 2 A T, seu 2 P T quam proximè (501.)

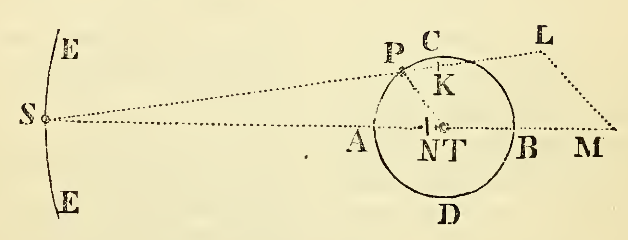
([c]) * *Ideòque per Cor.* 1. *Prop.* 45. Nam si in superiori calculo loco + q scribatur — q, vel loco $+ c \times A$, scribatur $- c \times A$, quod vis K L sit ablatitia, invenietur angulus totius revolutionis corporis P ab apside unâ ad eandem apsidem $= \frac{360°}{\sqrt{1 - q}}$, vel angulus inter apsides summam et imam $= 180° \times \sqrt{\frac{1 - c}{1 - 4c}}$. Est autem $\sqrt{1 - q}$, numerus unitate minor, et $\sqrt{\frac{1 - c}{1 - 4c}}$ numerus unitate major, adeòque $\frac{360°}{\sqrt{1 - q}}$, arcus major 360°. et $180° \times \sqrt{\frac{1 - c}{1 - 4c}}$, arcus major 180°. quarè apsides in hoc casu progrediuntur.

([d]) 503. *In locis inter syzygias et quadraturas*, &c. Iisdem positis quæ in Lemmate 500. quæritur distantia angularis corporis P a quadraturâ C, v. gr. ubi apsides quiescunt. Per locum corporis P agatur P m parallela et æqualis N M seu T M, et erit P m = 3 P K (500.) Vis P m, si in radium T P productum demittatur perpendiculum m n, resolvitur in vires P n, n m, quarum n m agendo secundum lineam radio perpendicularem, vim acceleratricem corporis P versus T nec auget, nec minuit, et P n



agendo secundum radium T P a P versus n, vim illam acceleratricem corporis P minuit; vis verò L M seu T P vim acceleratricem corporis P versus T auget. Quarè ubi erit P n = P T vis acceleratrix corporis P nec augebitur nec minuetur, et apsides quiescent. Porrò ob triangula T P K, m P n similia P T : P K = P m, seu 3 P K : P n seu P T Est igitur in loco quæsito P, $3 P K^2 = P T^2$, et proindè P T : P K = $\sqrt{3}$: 1. hoc est sinus totus ad sinum distantiæ angularis corporis P a quadraturâ proximâ ut $\sqrt{3}$ ad 1, seu ut 1732. ad 1000. proximè; undè angulus P T C invenitur esse 35°. 26′. circiter. Quiescent igitur apsides in quatuor locis corporis P quæ a quadraturis distant angulo 35°. 16′; et hinc in singulis corpo-

det motus augis ex causâ utrâque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis K L in syzygiis sit quasi duplo major quam vis L M in quadraturis, excessus erit penes vim K L, transferetque augem in consequentia. Veritas autem hujus et præcedentis corollarii facilius intelligetur concipiendo systema corporum duorum T, P corporibus pluribus, S, S, S, &c. in orbe E S E consistentibus, undique cingi. (e) Namque horum actionibus actio ipsius T minuetur undique, decrescetque in ratione plusquam duplicatâ distantiæ.



Corol. 8. (f) Cum autem pendeat apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiæ T P, in transitu corporis ab apside imâ ad apsidem summam; ut et a simili incremento in reditu ad apsidem imam; atque ideo maximus sit ubi proportio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit a duplicatâ ratione distantiarum inversâ: manifestum est quod apsides in syzygiis suis, per vim ablatitiam K L seu N M — L M, progre-

ris P revolutionibus, cæteris paribus, apsides regredientur per gradus revolutionis corporis P, 141°, et progredientur per grad. 219.

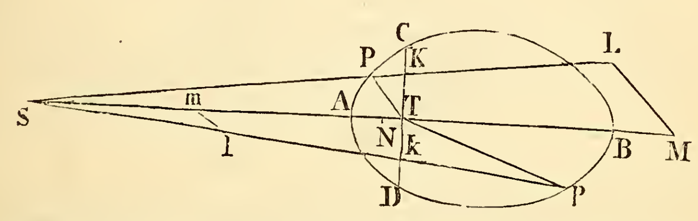
504. Iisdem positis, si orbita C P D, circulo finitima sit, erit vis addititia P T — P n, maxima in quadraturis. Nam cum sit semper P T : P K = 3 P K : P n, erit $P\,n = \frac{3\,P\,K^2}{P\,T}$, ac proindè $P\,T - P\,n = P\,T - \frac{3\,P\,K^2}{P\,T}$, quæ quantitas maxima evadet ubi erit P K = o, quod in quadraturis contingit.

(e) * *Namque horum actionibus*, &c. Hâc enim ratione corpus P erit semper in quadraturis simul et in syzygiis corporis, seu corporum S, adeòque cum vis ablatitia K L; in syzygiis et propè syzygias sit ferè duplo major quam vis addititia L M, in quadraturis et propè quadraturas, actio corporis T minuetur undique, decrescetque proindè in ratione plusquam duplicatâ distantiæ T P.

(f) * *Cum autem* (per Corol. 7.) *pendeat apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiæ T P* quæ augetur in recessu a centro T, sive *in transitu corporis P ab apside imâ ad apsidem summam, ut et a simili incremento* in accessu ad centrum, sivè *in reditu* ab apside summâ *ad apsidem imam, manifestum est* progressum vel regressum apsidum maximum esse *ubi ratio*

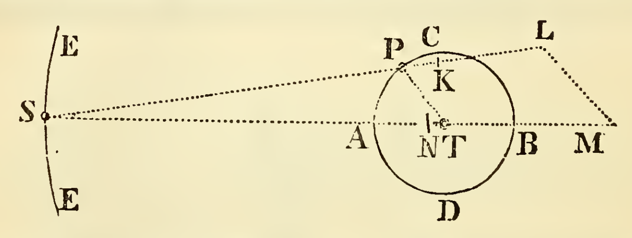
dientur velocius, inque quadraturis suis tardius recedent per vim additi-tiam L M. Ob diuturnitatem verò temporis, quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longè maxima.

Corol. 9. Si corpus aliquod, vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ a centro revolveretur circa hoc centrum in ellipsi; et mox, in descensu ab apside summâ seu auge ad apsidem imam; vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicatâ distantiæ diminutæ: manifestum est quod corpus, perpetuò accessu vis illius



vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit a duplicatâ ratione distantiarum inversâ, porrò dum linea apsidum seu major axis ellipseos B C A D, cujus umbilicus est T, in syzygiis A, B versatur, ratio vis totius corporis P in apside summâ positi ad vim ejus in apside imâ versantis, magis recedit a duplicatâ ratione distantiarum inversâ quam in alio quovis lineæ apsidum situ. Sit enim B apsis summa, A apsis ima, et erit T B distantia maxima, A T minima (ex naturâ ellipseos.) Undè corpore P in conjunctione A versante erit vis ablatitia K L (seu differentia virium acceleratricum corporum T et P versus S) omnium minima, et corpore P in oppositione B versante, erit differentia illa K L omnium maxima. Cum autem ob ingentem corporis S distantiam (ex Hyp.) sit ferè K L ad k l ut A T ad T B (501) ratio vis corporis P in A versantis ad vim illius in B positi, exprimi hic poterit per rationem $\frac{b}{AT^2} - c \times AT$, ad $\frac{b}{TB^2} - c \times TB$, (si ratio b ad c exprimat rationem vis absolutæ trahentis corpus P versus T, ad vim absolutam ablatitiam K L) seu reductione ad eundem denominatorem factâ, per rationem $\overline{TB^2} \times \overline{b - c \times AT^3}$, ad $AT^2 \times \overline{b - c\, TB^3}$, quæ ratio eò magis recedit a ratione TB^2 ad AT^2, seu duplicatâ distantiarum inversâ, quo magis ratio quantitatis $b - c \times AT^3$, ad quantitatem $b - c \times TB^3$, recedit a ratione æqualitatis, seu quo minor est A T respectu T B, quarè dum linea apsidum est in syzygiis A, B. ratio vis totius in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit a ratione duplicatâ distantiarum inversâ. In hoc igitur lineæ apsidum situ apsides celerrimè progrediuntur, corpore P in syzygiis vel prope syzygias versante. Dum vero corpus P est in quadraturis C. D, fit vis L M = C T, vel D T; Est autem ex naturâ ellipseos, summa linearum C T, D T, omnium minima; quarè in integrâ corporis P revolutione, apsides viribus C T, D T tardissimè regrediuntur in quadraturis corporis P, et celerrimè progrediuntur in ipsius syzygiis, atque adeò excessus progressus supra regressum erit in hoc casu omnium maximus, et apsides in integrâ corporis P revolutione celerrimè moventur in consequentia. Ob contrarias prorsus causas, si linea apsidum in quadraturis posita sit, apsides velocissimè regredientur, corpore P in quadraturis versante, et tardissimè progredientur corpore P in syzygiis existente, et ex hâc utrâque causâ fieri poterit ut in integrâ corporis P circum T revolutione, regressus apsidum superet eorum progressum, proindèque ut apsides in antecedentia ferantur; sed quoniam, cæteris paribus, vis ablatitia K L quæ progressum apsidem in syzygiis corporis P inducit est (500) fere duplo major vi adjectitiâ L M quæ apsidum regressum in quadraturis corporis P producit, excessu progressûs suprà regressum, apsides progrediuntur in integrâ sui revolutione circum T, hoc est, eo tempore quo apsides ex T visæ omnes cum corpore S, aspectus subeunt; augetur verò progressus ille, si corpora P et S in suis orbitis ferantur in eandem plagam; In hâc enim hypothesi, apsides diutius hærent in syzygiis quam in quadraturis, quia in syzygiis progrediuntur cum corpore S, atque adeò diutius illud quasi comitantur, in quadraturis verò feruntur in antecedentia et corporis S in consequentia revolventis aspectum quadratum veluti fugiunt; undè fit ut apsides diutius progrediantur in syzygiis suis quam regrediuntur in suis quadraturis.

novæ impulsum semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum quam si urgeretur vi solâ crescente in duplicatâ ratione distantiæ diminutæ; ideoque orbem describeret orbe elliptico interiorem, et in apside imâ propius accederet ad centrum quam prius. (g) Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis in recessu corporis ab apside imâ ad apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, redieret corpus ad distantiam priorem, ideoque si vis decrescat in



majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem et sic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare si ratio incrementi et decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper excentricitas; (h) et contra, diminuetur eadem, si ratio illa decrescat. Jam verò in systemate corporum T, P, S, ubi apsides orbis P A B sunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, et maxima fit ubi apsides sunt in syzygiis. Si apsides constituantur in quadraturis, ratio prope apsides minor est et prope syzygias major quam duplicata distantiarum, et ex ratione illâ majori oritur augis motus directus, (i) uti jam dictum est. (k) At si consideretur ratio incrementi vel

(g) * *Orbis igitur accessu hujus vis novæ fiet magis excentricus;* manente enim distantiâ apsidis summæ ab orbitæ umbilico, decrescet distantia apsidis imæ ab eodem umbilico, majorque proinde erit ratio prioris distantiæ ad posteriorem, quam si vis illa nova non accessisset, hoc est, orbis fiet magis excentricus.

(h) * *Et contra,* &c. Si in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam, vis centripeta augeatur minus quam in duplicatâ ratione distantiæ diminutæ, corpus describet orbem orbi elliptico exteriorem, et in apside imâ, minus accedet ad centrum quam prius, hoc est, orbis fiet minus excentricus, et excentricitas adhuc minuetur, si in corporis ascensu ab apside imâ ad summam, vis centripeta minus decrescat quam anteà creverat. Quarè si ratio incrementi et decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus minuatur, minuetur semper excentricitas.

(i) * *Uti jam dictum est* (Cor. 7.)

(k) * *At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu corporis* P *inter apsides in quadraturis* C, D *constituti, hæc minor est quam duplicata distantiarum.* Sit enim apsis ima C, summa D, umbilicus T, erit (ex Dem.) vis in apside imâ ad vim in apside summâ ut $\frac{b}{CT^2} + n \times CT$, ad $\frac{b}{TD^2} + n \times TD$, (si ratio b ad n exprimat rationem vis absolutæ trahentis corpus P versus T ad vim absolutam addititiam L M) et reductione ad eamdem denominationem factâ ut $TD^2 \times \overline{b + n CT^3}$ ad $CT^2 \times \overline{b + n TD^3}$, quæ ratio minor est quam ratio TD^2, ad CT^2, ob T D, majorem quam C T; et quoniam in hoc lineæ apsidum situ ratio T D ad C T seu ratio distantiarum umbilici T a quadraturis maxima est, (ex naturâ ellipseos) patet rationem totius decrementi et incrementi vis centripetæ in transitu corporis P inter apsides minimam esse in quadraturis apsidum. Et contrà si fuerit A apsis ima, B apsis summa, erit vis in apside imâ

decrementi totius in progressu inter apsides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in apside imâ est ad vim in apside summâ in minore quam duplicatâ ratione distantiæ apsidis summæ ab umbilico ellipseos ad distantiam apsidis imæ ab eodem umbilico, et contra, ubi apsides constituuntur in syzygiis, vis in apside imâ est ad vim in apside summâ in majore quam duplicatâ ratione distantiarum. Nam vires L M in quadraturis additæ viribus corporis T componunt vires in ratione minore, et vires K L in syzygiis subductæ a viribus corporis T relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi et incrementi totius, in transitu inter apsides, minima in quadraturis, maxima in syzygiis: et propterea in transitu apsidum, a quadraturis in syzygias perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipseos; inque transitu a syzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, et excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis E S T immobile manere; et ex errorum expositâ causâ manifestum est, quod ex viribus N M, M L, quæ sunt causa illa tota, vis M L agendo semper secundum planum orbis P A B, nunquam perturbat motus in latitudinem; quodque vis N M, ubi nodi sunt in syzygiis, agendo etiam secundum idem orbis planum, (l) non perturbat hos motus; (m) ubi verò sunt in quadraturis, eos maximè perturbat, corpusque P de plano

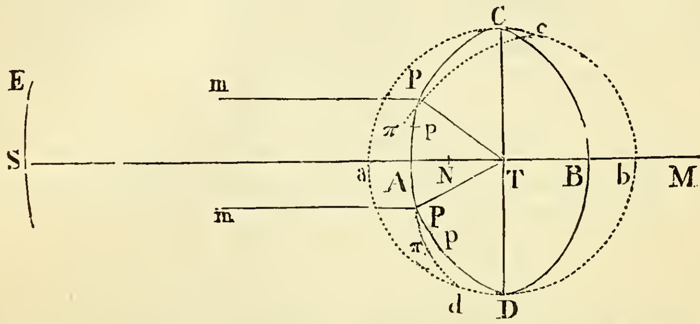
ad vim in apside summâ ut $TB^2 \times \overline{b - cAT^3}$, ad $AT^2 \times \overline{b - cTB^3}$, adeòque in majori ratione quam TB^2, ad AT^2, et quoniam ratio T B, ad A T, in his apsidum locis maxima est, ex naturâ ellipseos, ratio decrementi et incrementi totius in transitu inter apsides, maxima est in syzygiis apsidum, et propterea singulis corporis P revolutionibus in transitu apsidum a quadraturis ad syzygias, hæc ratio perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipseos, et in transitu apsidum a syzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, et excentricitatem diminuit. Maxima ergò est orbis excentricitas, ubi apsides sunt in syzygiis, minima ubi sunt in quadraturis.

505. Ex his etiam sequitur in unâquâque corporis P circum T revolutione excentricitatem orbis circà syzygias corporis P augeri, et circà ejus quadraturas minui, minimamque esse in illius quadraturis, maximam in syzygiis, cæteris paribus. Nam (per Cor. 7.) corporis P vis centripeta tota in syzygiis decrescit in majori quam duplicatâ ratione distantiæ auctæ, et crescit in majori ratione quam duplicatâ distantiæ diminutæ, et in quadraturis contrà. Quarè corpus P, in syzygiis et propè syzygias describit partem orbis magis excentrici, in quadraturis verò et propè quadraturas partem orbis minus excentrici (ex demonstratis initio Cor. 9.) Et quoniam vis additítia L M in quadraturis corporis P maxima est, et vis ablatitia K L in syzygiis ejus etiam maxima, vis autem additítia excentricitatem diminuit et ablatitia auget, manifestum est quod (cæteris paribus) in unâ corporis P revolutione, excentricitas orbis minima sit in quadraturis corporis P, et maxima in illius syzygiis, atque adeò quod a quadraturis ad syzygias perpetuò augeatur, et a syzygiis ad quadraturas perpetuò minuatur.

(l) * *Non perturbat hos motus.* Patet per Cas. 2. Prop. 66.

(m) 506. *Ubi verò sunt in quadraturis eos maximè perturbat;* Ubi nodi sunt in quadraturis C et D inclinatio directionis vis N M (quæ lineâ P m exhibetur) ad planum orbitæ corporis P maxima est, ut potè æqualis planorum C A D, E S T inclinationi et proindè, cæteris paribus, maximè potenter agit; in alio enim lineæ nodorum situ, minor est inclinatio directionis vis N M ad planum orbitæ corporis P, et evanescit cum nodi sunt in syzygiis, crescitque adeò in transitu nodorum a syzygiis ad quadraturas, et contrà, decrescit in eorum transitu a quadraturis ad syzygias.

orbis sui perpetuò trahendo, (n) minuit inclinationem plani in transitu corporis a quadraturis ad syzygias, augetque vicissim eandem in transitu a syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut (o) corpore in syzygiis existente inclinatio evadat omnium minima, (p) redeatque ad priorem magnitudi-

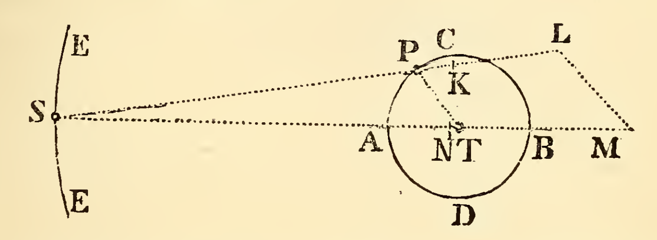


(n) 507. *Minuit inclinationem plani*, &c. Si orbitæ corporis P nodi in quadraturis C, D constituantur, angulus inclinationis orbitæ ad planum immotum E S T perpetuò minuitur in transitu corporis P a quadraturis ad syzygias, augetur verò in transitu corporis a syzygiis ad quadraturas, et in utroque transitu nodi regrediuntur. Sit enim orbitæ P A B pars C A D suprà planum immotum E S T elevata altera, verò pars C B D infrà illud depressa intelligatur; per locum corporis P agatur recta P m parallela lineæ T S, exhibens directionem vis N M, et corpus P feratur primum a nodo seu quadraturâ C ad conjunctionem A, et quoniam corpus P vi revolutionis per arcum P p urgetur, et vi N M per rectam P m trahitur, tempore quam minimo, vi compositâ, describet lineolam P π quæ non est in plano C P T, sed ab eo deflectit versus P m, adeòque corpus movetur in plano T P π quod productum plano E S T non occurret in C sed ultra C versus oppositionem B. Centro T et intervallo T P describatur in plano E S T circulus C a D b, in plano C P D circuli arcus P C, et in plano π P T arcus P c circulo C a D b occurrens in c. Et quoniam vis N M minima est respectu vis revolutionis corporis P, angulus C P c, inclinationis planorum C P T et c P T minimus est seu infinitesimus, et arcus P c ab arcu P C nonnisi minimâ seu infinitesimâ quantitate differt; quarè cum (ex hyp.) arcus P C a quadrante C A differat finitâ quantitate P A, summa arcuum P C, P c semicirculo minor est, et hinc in triangulo spherico C P c, angulus externus P C a (per Prop. 13. sphæricorum Menelai, vel per Theor. 33. Sphæricorum Clariss. Wolfii,) major est angulo interno opposito P c C, hoc est, inclinatio plani c P T ad planum immotum E S T minor est inclinatione plani C P T ad idem planum E S T. In transitu igitur corporis P a quadraturâ C ad conjunctionem A orbitæ inclinatio perpetuò minuitur, et quoniam nodus C transfertur in c, fitque proindè obviam corpori revolventi, nodi regrediuntur. Eodem modo demonstratur inclinationem minui et nodos regredi in transitu corporis a quadraturâ D ad oppositionem B. Jam feratur corpus a conjunctione A ad quadraturam proximam D, et in loco quovis P, duplici vi, nempe vi revolutionis per arcum P p et vi N M per rectam P m urgetur, atque adeò describit lineolam P π, quæ ab arcu P p versus P m declinat. Quarè si centro T et intervallo T P describantur ut suprà tres arcus P D, a D, P d, eodem modo demonstrabitur nodum D transferri in antecedentia in d, et angulum P d a majorem esse angulo interno opposito P D d, hoc est, inclinationem orbitæ augeri in transitu corporis P, a conjunctione ad quadraturam proximam, et eadem eodem modo ostenduntur fieri in transitu ab oppositione B ad quadraturam C. Q. e. d.

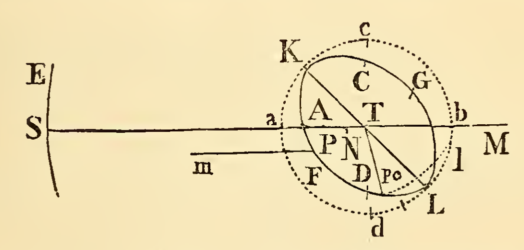
(o) * *Corpore in syzygiis existente.* Vis enim N M, cæteris paribus maxima est in syzygiis (501).

(p) * *Redeatque ad priorem magnitudinem circiter.* Si enim orbita C A D B perfectè circularis maneret, æqualis esset vis N M in paribus corporis P distantiis a nodis C et D, in utroque quadrante C A et A D, vel D B et B C; quarè cum orbita C A D, circulo finitima supponatur, et per vim exiguam N M minuatur inclinatio plani in transitu corporis P a quadraturis ad syzygias, et contrà, augeatur per æqualem vim N M in transitu corporis P a quadraturis ad syzygias; liquet quòd inclinatio redeat ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus P a

nem circiter, ubi corpus ad nodum proximum accedit. ([q]) At si nodi constituantur in octantibus post quadraturas, id est, inter C et A, D et B, intelligitur ex modo expositis, quod, in transitu corporis P a nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur



deinde in transitu per proximos 45 gradus, usque ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, et postea denuò in transitu per alios 45 gradus, usque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, ([r]) et propterea minor est semper in nodo subsequente quam in præcedente. ([s]) Et simili ratiocinio, inclinatio magis augetur, quam diminuitur, ubi nodi sunt in octantibus alteris inter A et D,



syzygiâ ad nodum proximum in quadraturâ positum accedit.

([q]) 508. *At si nodi constituantur in octantibus post quadraturas, id est* in locis K et L ità ut anguli K T c, K T a sint æquales, seu 45°. 1°. *Inclinatio plani perpetuò minuitur in transitu corporis* P *a nodo ad gradum indè nonagesimum* F vel G. 2°. *Augetur in transitu a gradu illo* 90°. *ad quadraturam proximam*. 3°. In utroque transitu regrediuntur nodi. 4°. *In transitu* a quadraturâ *ad nodum proximum inclinatio minuitur* et nodi progrediuntur. 1um. 2um. et 3um. Eodem modo demonstrantur ac superius (507). Quartum ità ostenditur. Dum corpus P a quadraturâ D ad nodum proximum L fertur, directio vis N M, quæ antè dirigebatur a P versus m in contrariam mutatur; Quarè corpus P inter D et L positum vi revolutionis urgetur per arcum P p et vi N M ab illo arcu retrahitur versus M atque vi utrâque fertur tempore minimo per lineolam p π quæ ab arcu P p in plagam M a deflectit. Si itaque centro T et intervallo T P describantur tres arcus circulares P L, p π, L l b a, in planis T P L, T π, E S T eodem modo ac in notâ 507. patet angulum P l L minorem esse angulo P L a. Undè in transitu corporis a quadraturâ D ad nodum proximum L inclinatio orbitæ minuitur et nodus progreditur; eadem fieri in transitu corporis a quadraturâ C ad nodum proximum K, eodem modo demonstratur. Q. e. d.

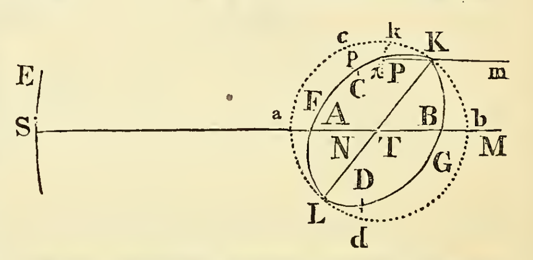
([r]) * *Et propterea minor est semper inclinatio in nodo subsequente quam in præcedente*, quod verum quoque est, ubicumque constituatur nodus K inter c et a, ut patet ex ipsis demonstrationibus in notis 507. et 508. traditis.

([s]) 509. *Et simili ratiocinio*, &c. Si nodus K constituatur inter quadraturam C vel c et op-

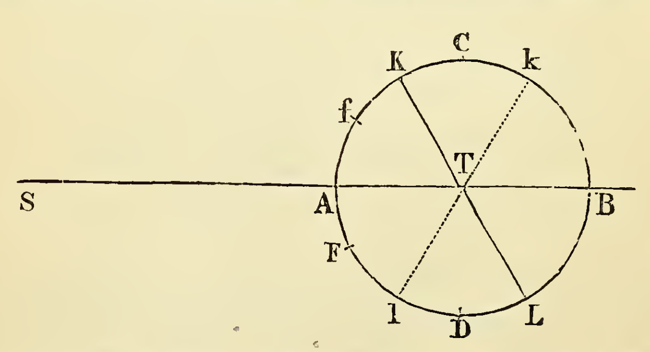
B et C. ([t]) Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum a syzygiis ad quadraturas, in singulis corporis ad nodos appulsibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi sunt in

positionem B vel b, et nodus oppositus L inter quadraturam D vel d, et conjunctionem A seu a, feraturque corpus a nodo K per C ad alterum nodum L. 1°. In transitu corporis a nodo ad quadraturam proximam inclinatio plani perpetuò augetur et nodi progrediuntur. 2°. In transitu a quadraturâ C vel D ad gradum a nodo nonagesimum F vel G inclinatio minuitur et nodi regrediuntur. 3°. In transitu a gradu illo 90°. ad nodum proximum inclinatio augetur et nodi regrediuntur. 2um. et 3um. demonstrantur prorsus ut in notâ 507. 1um. verò ità ostenditur. Dum corpus P versatur inter nodum K et quadraturam C, vi revolutionis urgetur per arcum P p, et vi N M trahitur secundum directionem P m in plagam M, adeòque vi utrâque describet tempusculo minimo lineolam P π, quæ ab arcu P p deflectet versus P m; quarè si centro T, radio T P, describantur ut suprà arcus P K, π P k, K k c a in planis T p P, T π P, E S T patet propositum, ut in notâ 507.

510. *Corol.* Ex tribus superioribus demonstra-

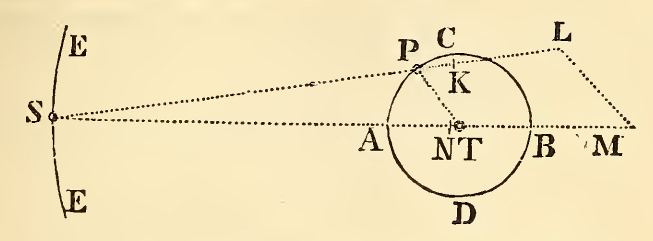


tionibus (507, 508, 509) inter se collatis manifestum est nodos progredi quamdiu corpus P inter quadraturam alterutram et nodum quadraturæ proximum versatur; eos verò regredi, dum corpus P in aliis quibuslibet locis versatur. Undè sequitur in singulis corporis P a nodo ad nodum revolutionibus nodos magis regredi quam progredi, adeòque absolutè regredi nisi fuerint in syzygiis.



([t]) * *Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis,* &c. Quoniam in singulis corporis P a nodo ad nodum revolutionibus, linea nodorum regreditur (510) et in transitu nodorum a syzygiis A et B ad quadraturas C et D, inclinatio orbitæ perpetuò minuitur (508) deindè verò in transitu nodorum a quadraturis C et D, ad syzygias B, et A, perpetuò augetur (509), manifestum est inclinationem minimam esse ubi nodi sunt in quadraturis et corpus P in syzygiis (in quibus vis N M, cæteris paribus, maxima est) et maximam inclinationem esse ubi nodi sunt in syzygiis. Porrò sint nodi K et L inter C et A, D et B primum, deindè regrediendo transeant in loca k et l, inter C et B, D et A, sintque arcus C K et C k, æquales. In primo casu inclinatio minuitur in transitu corporis P, per quadrantem K F, (508) et in secundo casu æqualibus viribus augetur per quadrantem f l, (509). In primo casu inclinatio augetur per arcum F D (508), et in secundo casu æqualibus viribus minuitur per arcum C f = F D (509). Tandem in primo casu, inclinatio minuitur per arcum D L, (508) et in secundo casu augetur æqualibus viribus per arcum æqualem k C, (509). Quarè, cæteris paribus, in transitu nodorum a quadraturis ad syzygias inclinatio planorum iisdem gradibus crescit quibus anteà decreverat in transitu nodorum a syzygiis ad quadraturas, ideòque nodis ad syzygias proximas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur.

quadraturis, et corpus in syzygiis: dein crescit iisdem gradibus, quibus antea decreverat, nodisque ad syzygias proximas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur.



Corol. 11. Quoniam corpus P, ubi nodi sunt in quadraturis, perpetuò trahitur de plano orbis sui, idque in partem versus S in transitu suo a nodo C per conjunctionem A ad nodum D; et in contrariam partem in transitu a nodo D per oppositionem B ad nodum C: manifestum est, quod in motu suo a nodo C corpus perpetuò recedit ab orbis sui plano primo C D, usque dum perventum est ad nodum proximum; ideoque in hoc nodo, longissimè distans a plano illo primo C D, transit per planum orbis E S T non in plani illius nodo altero D, sed in puncto quod inde vergit ad partes corporis S, quodque proinde novus est nodi locus in anteriora vergens. Et simili argumento pergent nodi recedere in transitu corporis de hoc nodo in nodum proximum. (u) Nodi igitur in quadraturis constituti perpetuò recedunt; in syzygiis, ubi motus in latitudinem nil perturbatur, quiescunt; in locis intermediis, conditionis utriusque participes, recedunt tardius: ideoque, semper vel retrogradi, vel stationarii singulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

Corol. 12. Omnes illi in his corollariis descripti errores sunt paulò majores in conjunctione corporum P, S, quam in eorum oppositione; (x) idque ob majores vires generantes N M et M L.

Corol. 13. Cumque rationes horum corollariorum non pendeant a mag-

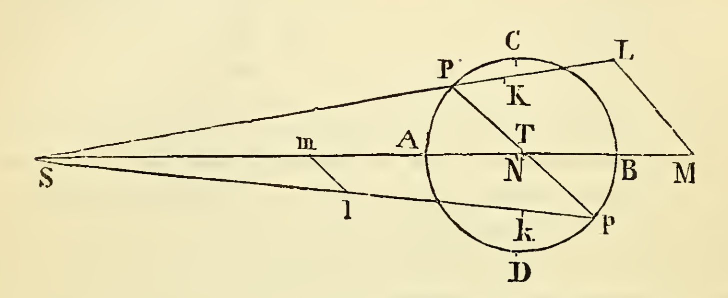
(u) * *Nodi igitur in quadraturis constituti,* &c. In integrâ corporis P revolutione, nodi partim regrediuntur, partim progrediuntur, nisi fuerint in quadraturis vel in syzygiis constituti (510); dum autem in quadraturis versantur, vis N M, quæ eorum regressum producit, maxime potenter agit (506); quarè nodi in quadraturis constituti celerrimè regrediuntur; in syzygiis ubi motus in latitudinem nihil perturbatur quiescunt, in locis intermediis recedunt quidem singulis revolutionibus corporis P, (510), sed tardius quam in quadraturis, *ideoque semper,* &c.

511. *Lemma.* Si fuerint tres quantitates a, a + b, a + 2 b in continuâ proportione arithmeticâ, ratio 2æ. ad 1am. (quæ e tribus est minima) major erit quam ratio 3æ. (quæ est maxima) ad 2am. Est enim $a + b : a = \overline{a + b} \times \overline{a + b} : aa + ab = aa + 2ab + bb : aa + ab$; sed est $a + 2b : a + b = aa + 2ab : aa + ab$. Ergo cum ratio $aa + 2ab + bb$ ad $aa + ab$ major sit quam ratio $aa + 2ab$ ad $aa + ab$, erit ratio a + b ad a major ratione a + 2 b ad a + b.

(x) * *Idque ob majores vires generantes N M et M L.* Vis L M in conjunctione est ut

nitudine corporis S, obtinent præcedentia, omnia ubi corporis S tanta statuitur magnitudo, (y) ut circa ipsum revolvatur corporum duorum T et P systema. Et ex aucto corpore S auctâque ideo ipsius vi centripetâ a quâ errores corporis P oriuntur, evadent errores illi omnes, paribus distantiis, majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus S circum systema corporum P et T revolvitur.

Corol. 14. (z) Cum autem vires N M, M L, ubi corpus S longinquum

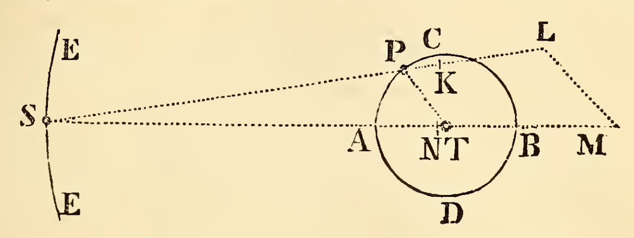


$\frac{A\,T}{S\,A^3}$, et vis l m in oppositione est ut $\frac{T\,B}{S\,B^3}$ (495). Quarè (cæteris paribus) hoc est, si fuerit A T = T B vis M L in conjunctione major erit vi m l in oppositione propter $S\,A^3$ minorem quam $S\,B^3$. Quod erat unum. Porro si A T et B T sint æquales, tres lineæ S A, S T, S B erunt in continuâ proportione arithmeticâ et proindè S K mediocris distantia corporis P ab S erit æqualis S T; et quoniam S K exhibet vim acceleratricem corporis P versùs S in mediocri distantiâ S K, et S N exponit vim acceleratricem corporis T versus S, (Prop. 66.) erit S N = S T, atque adeò N M = T M, et m N = T m. Sed quoniam P T, seu A T : S T = L M : S M, erit $S\,M = \frac{S\,T \times L\,M}{A\,T}$, et similiter invenietur $S\,m = \frac{S\,T \times l\,m}{A\,T}$, adeòque $T\,M = S\,M - S\,T = \frac{S\,T \times L\,M - S\,T \times A\,T}{A\,T}$ et $T\,m = S\,T - s\,m = \frac{S\,T \times A\,T - S\,T \times l\,m}{A\,T}$; undè differentia T M — T m, erit ut $S\,T \times L\,M + S\,T \times l\,m - S\,T \times 2\,A\,T$, hoc est, ut L M + l m — 2 A T; Est autem summa L M + l m, major quam 2 A T. Nam cum sit (495) $L\,M = \frac{S\,T^3 \times A\,T}{S\,A^3}$, et $l\,m = \frac{S\,T^3 \times A\,T}{S\,B^3}$, recta L M major est rectâ A T, in ratione $S\,T^3$ ad $S\,A^3$, et l m minor est A T in ratione $S\,B^3$ ad $S\,T^3$. Est verò ratio $S\,T^3$ ad $S\,A^3$, major ratione $S\,B^3$ ad $S\,T^3$ (511) et proindè differentia rectarum L M et A T major erit quam differentia rectarum A T et l m, et ideò summa L M + l m major est quam 2 A T; Quarè tandem erit T M major quam T m, seu vis N M major in conjunctione quam in oppositione; Quod erat alterum.

(y) * *Ut circà ipsum revolvatur*, &c. Demonstrationes enim sunt eædem, sive corpus S moveatur circum T, seu corpus T revolvatur circum S.

(z) 512. * *Cum autem vires N M, M L*, &c. Ob magnam distantiam corporis S, erit ferè L S parallela M S, et S N = S T = S K, ac M L = P T; et quoniam N M in syzygiis est ut M L in quadraturis (501). Si auctâ vel diminutâ actione corporis S, orbita C A D B unà cum lineis hinc pendentibus P T, N M, M L augeatur vel diminuatur (Cor. 6. hujus Prop. 66.) tres illæ lineæ in eâdem ferè ratione inter se (cæteris paribus) augebuntur vel diminuentur. Est autem vis M L ad vim S K ut recta M L ad rectam S K, seu quam proximè ut P T ad S T; Quarè vis M L (adeòque et vis N M) est quam proximè ut vis S K et ratio P T, ad S T, conjunctim, hoc est, si vis acceleratrix S K dicatur A ut $\frac{A \times P\,T}{S\,T}$. Porrò datâ vi absolutâ corporis S, vis acceleratrix A in distantiâ S K seu S T est ut $\frac{1}{S\,T^2}$, (ex hyp.) Quarè vires N M, M L, datâ vi absolutâ corporis S, sunt ut $\frac{P\,T}{S\,T^3}$; hoc est (si detur distantia P T) ut $S\,T^3$ reciprocè. Verùm si variabilis sit vis absoluta V corporis S, erit vis acceleratrix A in distantiâ S T, ut vis absoluta V directè et quadratum distantiæ S T inversè, (nam manente vi absolutâ

est, sint quamproximè ut vis S K et ratio P T ad S T conjunctim, hoc est, si detur tum distantia P T, tum corporis S vis absoluta, ut S T cub. reciprocè; sint autem vires illæ N M, M L causæ errorum et effectuum omnium, de quibus actum est in præcedentibus corollariis: manifestum



est, quod effectus illi omnes, stante corporum T et P systemate, et mutatis tantum distantiâ S T et vi absolutâ corporis S, sint quamproximè in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis S, et ratione triplicatâ inversâ distantiæ S T. Unde si systema corporum T et P revolvatur circa corpus longinquum S; vires illæ N M, M L, et earum effectus erunt (per Corol. 2. et 6. Prop. IV.) reciprocè in duplicatâ ratione temporis periodici. Et inde etiam, ([a]) si magnitudo corporis S propor-

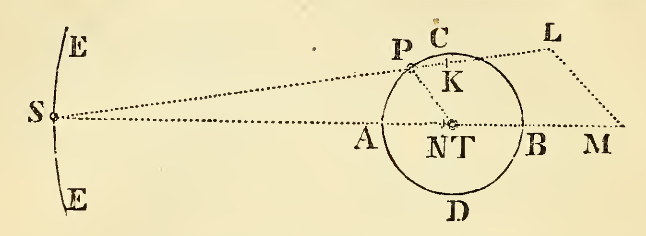
corporis S, vis acceleratrix est ut $S\,T^2$ inversè, et manente distantiâ S T vis acceleratrix est ut vis absoluta directè, proindéque variantibus vi absolutâ et distantiâ simul, vis acceleratrix est ut vis absoluta directè et quadratum distantiæ inversè); Quarè si loco vis acceleratricis A ratio illa composita in facto $\frac{A \times P\,T}{S\,T}$ ponatur, vires N M, M L erunt quam proximè ut $\frac{V \times P\,T}{S\,T^3}$, seu datâ P T, ut $\frac{V}{S\,T^3}$, hoc est in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis S, et ratione triplicatâ inversâ distantiæ S T. Vis autem absoluta corporis S, est (ex Dem.) in ratione compositâ vis acceleratricis A et quadrati distantiæ S T, et vis acceleratrix A in distantiâ S T est (per Corol. 2. Prop. 4.) in ratione compositâ ex ratione directâ distantiæ S T et ratione duplicatâ inversâ temporis periodici corporis T circum S ad distantiam S T circulum describentis, adeòque vis absoluta corporis S est ut cubus distantiæ S T directe, et quadratum temporis periodici corporis T inversè. Quarè vires N M, M L (earumque effectus) quæ sunt directè ut vis absoluta, et inversè ut cubus distantiæ, sunt reciprocè in duplicatâ ratione temporis periodici corporis T.

([a]) * *Si magnitudo* seu massa *corporis S proportionalis sit ipsius vi absolutæ*, dato corpore S dabitur vis illius absoluta; undè si præterea data sit distantia P T, *vires N M, M L et earum effectus erunt*, ex suprà demonstratis, ut cubus distantiæ S T inversè; sed diameter apparens F G corporis longinqui S ex T visi, hoc est, angulus F T G sub quo diameter F G de loco T videtur, est ut distantia S T inversè; nam cum globi S diameter parva admodum supponatur respectu distantiæ S T, angulus F T G, erit admodum exiguus, et globi radius S F ad S T normalis usurpari poterit pro arcu circuli centro T et intervallo T S descripti, adeòque



(154) angulus $F\,T\,S = \frac{F\,S}{S\,T}$, hoc est, ob datum radium S F, angulus F T S et ipsius duplus F T G erit ut S T inversè. *Vires igitur N M, M L earumque effectus, erunt ut cubus diametri apparentis corporis longinqui S è corpore T spectati.*

tionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ N M, M L, et earum effectus directè ut cubus diametri apparentis longinqui corporis S e corpore T spectati, et vice versâ. Namque hæ rationes eædem sunt, atque ratio superior composita.



Corol. 15. (b) Et quoniam si, manentibus orbium E S E et P A B formâ, proportionibus et inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, et si corporum S et T vel maneant, vel mutentur vires in datâ quâvis ratione; (c) hæ vires (hoc est, vis corporis T, quâ corpus P de recto tramite in orbitam P A B deflectere, et vis corporis S, quâ corpus idem P de orbitâ illâ deviare cogitur) agunt semper eodem modo, et eâdem proportione: necesse est ut similes et proportionales sint effectus omnes, et proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut orbium diametri, angulares verò iidem, qui prius, et errorum linearium similium, vel angularium æqualium tempora ut orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, si dentur orbium formæ et inclinatio ad invicem, et mutentur utcunque corporum magnitudines, vires et distantiæ; ex datis erroribus et errorum temporibus in uno casu, colligi possunt errores et

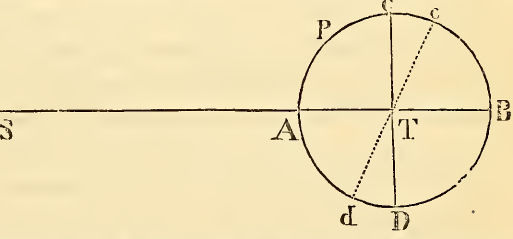
(b) * *Et quoniam si manentibus*, &c. Hoc est, si corporum S et T vel maneant vel mutentur vires absolutæ in datâ quâvis ratione, et orbium E S E et P A B, magnitudo ità mutetur, ut orbis E S E sibi similis semper maneat, sicut et orbis P A B sibi, et horum orbium inclinatio non mutetur, nec proportio seu ratio axium unius orbis ad axes alterius aut linearum quarumvis in uno orbe ad lineas homologas in altero orbe.

(c) * *Hæ vires*, &c. Vis acceleratrix quâ corpus P in loco P versùs T trahitur, est (512) ad vim acceleratricem quâ versus S urgetur, in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis T ad vim absolutam corporis S, et ratione inversâ duplicatâ distantiæ P T ad distantiam P S. Quarè si vires absolutæ et distantiæ in datis rationibus mutentur, manebit eadem virium acceleratricum ratio, et ob figurarum similitudinem, in similibus corporum P, T, S positionibus, antè et post distantias viresque mutatas omnium linearum S P, S K, M L, S M, N M, &c. eadem manet ratio, atque adeo vires agunt semper eodem modo et eâdem proportione. Necesse igitur est ut antè et post distantias, et vires mutatas in datis rationibus, similes ac proportionales sint effectus omnes et proportionalia effectuum tempora (196); hoc est, errores omnes lineares similes a viribus M L, N M producti, seu deviationes corporis P in longitudinem et latitudinem a locis illis in quibus versaretur, si viribus perturbantibus M L, N M non agitaretur, sunt ut orbium diametri, et anguli sub quibus e centro T deviationes illæ similes videntur, semper manent æquales, ut patet ex naturâ figurarum similium (Lem. V. et not. 112), et errorum linearium similium vel angularium æqualium tempora, sunt ut orbium tempora periodica (196). Hæc omnia etiam obtinent, ubi corporum duorum T, et P systema

errorum tempora in alio quovis, quam proximè: sed brevius hâc methodo. (d) Vires N M, M L, cæteris stantibus, sunt ut radius T P, et harum effectus periodici (per Corol. 2. Lem. X.) ut vires, et quadratum temporis periodici corporis P conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis P; et hinc errores angulares e centro T spectati (id est, tam motus augis et nodorum, quàm omnes in longitudinem et latitudinem errores apparentes) sunt, in quâlibet revolutione corporis P, ut quadratum temporis revolutionis quam proximè. Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii XIV. et in quolibet corporum T, P, S systemate, ubi P circum T sibi propinquum, et T circum S longinquum revolvitur, errores angulares corporis P, de centro T apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius P, ut quadratum temporis periodici corporis P directè, et quadratum temporis periodici corporis T inversè. (e) Et inde motus medius augis

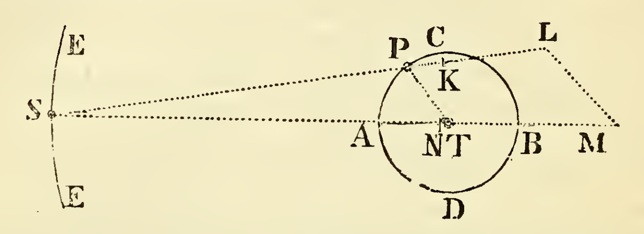
circâ corpus S revolvitur, ut patet, si loco orbis E S E in demonstratione ponatur orbis quem corpus T circum S describit.

(d) * *Vires N M, M L,* &c. Quoniam vires N M, M L sunt (Cor. 14.) ut vis S K et ratio P T ad S T conjunctim, manentibus vi S K et S T erunt vires illæ ut radius T P et proindè aucto vel diminuto radio illo T P, manent in datâ inter se ratione, et quoniam ob longinquitatem corporis S ad similes orbis variabilis P A B (sed sibi semper similis et æquè inclinati) partes similiter applicantur quamproximè, illarum effectus periodici (per Corol. 2. Lem. X.) sunt ut vires ipsæ et quadratum temporis periodici corporis P circum T conjunctim, hoc est, ut radius T P, et quadratum temporis periodici corporis P quamproximè. Porrò si in orbitâ circulari vel circulo finitima P A B, sit arcus D d error linearis periodicus v. gr. nodi D in antecedentia ad d regressi tempore unius revolutionis corporis P circum T, angulus D T d, sub quo error ille D d è centro T videtur, hoc est, error angularis periodicus erit $= \frac{D\,d}{T\,D}$ (154). Errores igitur angulares periodici sunt ut errores lineares directè et radius T D vel T P inversè, adeòque ut quadratum temporis periodici corporis P quamproximè. Et hæc quidem vera sunt, stantibus vi absolutâ corporis S et distantiâ S T et variantibus radio T P ac tempore periodico corporis P; verum stantibus radio T P et tempore periodico corporis P et variantibus vi absolutâ corporis S atque distantiâ S T, errores periodici tum lineares, tum angulares sunt (Corol. 14.) reciprocè ut quadratum temporis periodici corporis T circum S, quarè variantibus tum radio T P, et tempore periodico corporis P, tum radio S T, atque vi absolutâ corporis S, errores angulares corporis P de centro T apparentes, erunt in singulis revolutionibus corporis illius P circum T, in ratione ex binis superioribus rationibus compositâ, seu erunt ut quadratum temporis periodici corporis P, directè et quadratum temporis periodici corporis T, inversè.



(e) * *Et indè motus medius augis,* &c. Si corpus quodvis celeriùs et tardiùs vel in plagas oppositas per vices moveatur, illius velocitas æquabilis media, seu motus medius obtinetur, si spatium quod corpus illud in unam plagam latum, longo satis tempore percurrit, per illud notabile tempus dividatur. Hinc quoniam apsidum et nodorum motus tardior et celerior est per vices, nuncque in antecedentia, nunc in consequentia fit, invenitur illorum motus medius angularis, si spatium angulare totum, quod plurium revolutionum corporis P tempore describunt, per illud tempus dividatur. Quarè cum motus angularis periodicus augis et nodorum sit (ex Dem.) ut quadratum temporis periodici corporis P directè, et quadratum temporis periodici corporis T inversè, si ratio hæc composita per tempus periodicum corporis P pluries sumptum dividatur, erit quotiens seu motus medius angu-

erit in datâ ratione ad motum medium nodorum; et motus uterque erit ut tempus periodicum corporis P directè et quadratum temporis periodici corporis T inversè. Augendo vel minuendo excentricitatem et inclinationem orbis P A B (f) non mutantur motus augis et nodorum sensibiliter, nisi ubi eædem sunt nimis magnæ.



Corol. 17. Cum autem linea L M nunc major sit nunc minor quam radius P T, exponatur vis mediocris L M per radium illum P T; et erit hæc ad vim mediocrem S K vel S N (quam exponere licet per S T) ut longitudo P T ad longitudinem S T. Est autem vis mediocris S N vel S T, quâ corpus T retinetur in orbe suo circum S, ad vim, quâ corpus P retinetur in orbe suo circum T, (g) in ratione compositâ ex ratione radii S T, ad radium P T, et ratione duplicatâ temporis periodici corporis P circum T ad tempus periodicum corporis T circum S. Et ex æquo, vis mediocris L M ad vim, quâ corpus P retinetur in orbe suo circum T (quâve corpus idem P, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile T ad distantiam P T revolvi posset) est in ratione illâ duplicatâ periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis unà cum distantia P T, datur vis mediocris L M; (h) et eâ datâ, datur etiam vis M N quam proximè per analogiam linearum P T, M N.

laris augis et nodorum ut tempus periodicum corporis P directè et quadratum temporis periodici corporis T inversè; et indè motus medius augis et nodorum, qui sunt ambo ut eadem quantitas, seu ut tempus periodicum corporis P directè et quadratum temporis periodici corporis T inversè, datam habent ad se mutuò rationem.

(f) * *Non mutantur*, &c. Nam vires M L, N M motuum augis et nodorum productrices, cæteris stantibus, non multum mutantur, si augeatur vel minuatur excentricitas et inclinatio orbis P A B, nisi magna satis fuerit illa mutatio, ut patet ex ratione quâ vires illæ M L, N M Prop. 66. determinantur.

(g) * *In ratione compositâ ex ratione radii S T*, &c. Nam (per Cor. 2. Prop. 4.) vis acceleratrix mediocris S T quâ corpus T circum S ad distantiam S T circulum vel orbem circulo finitimum describere supponitur, est ad vim similem quâ corpus P in orbitâ suâ circulari vel circulo finitimâ retinetur in ratione compositâ ex ratione radii S T ad radium P T directè, et ratione duplicatâ temporis periodici corporis T circum S, ad tempus periodicum corporis P circum T, inversè. Quarè vis prior est ad posteriorem in ratione compositâ ex ratione radii S T ad radium P T, et ratione duplicatâ temporis periodici corporis P ad tempus periodicum corporis T; cumque sit etiam, ex Dem., vis mediocris L M ad vim mediocrem S T, ut P T ad S T, erit per compositionem rationum et ex æquo, vis mediocris L M, ad vim acceleratricem quâ corpus P retinetur in orbe suo circum T, ut quadratum temporis periodici corporis P circum T ad quadratum temporis periodici corporis T circum S.

(h) * *Et eâ datâ*, datur etiam vis N M (500).

Corol. 18. Iisdem legibus, quibus corpus P circum corpus T revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem T ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari annulum fluidum, rotundum ac corpori T concentricum; et singulæ annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis P peragendo, propius accedent ad corpus T, et celerius movebuntur in conjunctione et oppositione ipsarum et corporis S, quam in quadraturis. Et nodi annuli hujus, seu intersectiones ejus cum plano orbitæ corporis S vel T, quiescent in syzygiis; extra syzygias verò movebuntur in antecedentia, et velocissimè quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, (i) et axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completâque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quâtenus per præcessionem nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis T, ex materiâ non fluidâ constantem, ampliari et extendi usque ad hunc annulum, et alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus et retardatus (ut in superiore corollario) (k) in syzygiis velocior erit, in quadraturis tardior quam superficies globi, et sic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis S, nullum acquiret motum fluxus et refluxus. (l) Par est ratio globi uniformiter progredientis in directum, et interea revolventis circa centrum suum (per legum Corol. 5.) ut et globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, (per legum Corol. 6.) Accedat autem corpus S, et ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. (m) Vis autem L M trahet aquam deorsum in quadraturis, facietque ipsam descendere usque ad syzygias; et vis K L trahet eandem sursum in syzygiis, sistetque descensum ejus et faciet ipsam ascendere usque ad quadraturas: nisi quâtenus motus fluendi et refluendi ab alveo aquæ dirigatur, et per frictionem aliquâtenus retardetur.

Corol. 20. Si annulus jam rigeat, et minuatur globus, cessabit motus

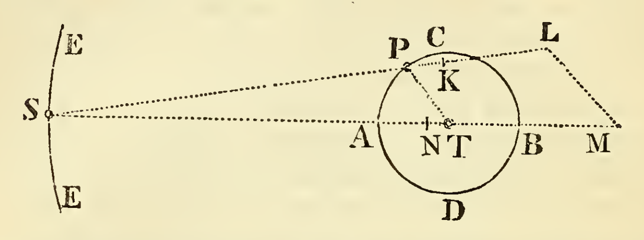
(i) * *Et axis ejus* seu recta per centrum annuli ducta ad planum ejus perpendiculariter, cum plano illo *singulis revolutionibus oscillabitur,* hoc est, ad planum E S T magis et minus per vices inclinabitur (Cor. 10.) *completaque,* &c. totum verò Corollarium patet ex Corol. 3. 5. 10. 11. 13.

(k) * *In syzygiis velocior erit,* &c. Per Cor. 18. et 3. Nam velocitas uniformis quâ globus circà axem suum revolvitur eodem tempore periodico quo pars quælibet fluidi suam revolutionem absolvit, media erit inter maximam velocitatem fluidi in syzygiis et minimam in quadraturis.

(l) * *Par est ratio,* &c. Id est, exclusâ actione corporis S aqua uniformiter revolvendo circum centrum globi vel uniformiter moti in directum vel de cursu rectilineo per lineas parallelas uniformiter tracti, nullum acquiret motum fluxûs et refluxûs, *accedat autem,* &c.

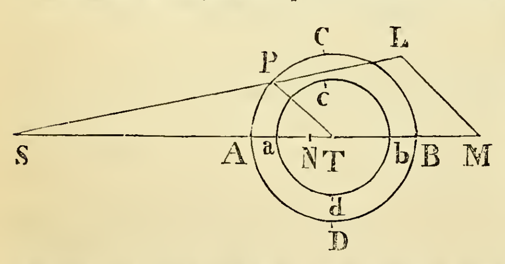
(m) * 514. *Vis autem L M,* &c. Patet per Corol. 5. Verum ut totum hoc Corollarium 19um.

fluendi et refluendi; (n) sed oscillatorius ille inclinationis motus et præcessio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyrosque compleat iisdem temporibus, et superficie suâ contingat ipsum interius, eique inhæreat; et participando motum ejus, compages utriusque



oscillabitur, et nodi regredientur. (o) Nam globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli globo orbati maximus inclinationis angulus est, ubi nodi sunt in syzygiis. Inde in progressu nodorum ad quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, et isto conatu motum imprimit globo toti. (p) Retinet globus motum impressum, usque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque (q) hâc ratione maximus decrescentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, et minimus inclinationis angulus in octantibus post quadraturas; dein maximus reclinationis motus in syzygiis, et maximus angulus in octantibus

clarius intelligatur, sit c a d b globi solidi æquator hoc est, circulus globi maximus ad axem rotationis globi perpendicularis C A D B zona fluida satis profunda, seu annulus fluidus globo circumpositus, et supponendo quod centrum



gravitatis globi solidi accuratè vel quamproximè coincidat cum figuræ centro T, globus eodem quamproximè modo trahetur a corpore longinquo S, et trahet ipse particulam P fluidi (71) ac si tota illius massa esset in centro T coacta (quod quidem accuratè verum esse quibusdam in casibus posteà demonstrabitur), sed hic approximatio sufficit; quarè fluidi particula quævis P a corpore S inæqualiter attracta totusque proindè annulus movebuntur, ut in Corol. 19°. ex Corollariis præcedentibus determinatum est.

(n) * *Sed oscillatorius ille*, &c. Patet per Cor. 18. et not. superiorem.

(o) * *Nam globus indifferens est*, &c. Liquet etiam ex legibus 1ª. et 2ª. et not. 9.

(p) * *Retinet globus motum impressum.* Per Leg. 1. et 2.

(q) * *Atque hâc ratione maximus inclinationis motus fit in quadraturis nodorum* (per Corol. 18. et 10.) non ideò tamen ibidem fit minimus inclinationis angulus, sed in octantibus post quadraturas. Sint enim nodi K et L in octantibus post syzygias A et B, et retrogrediendo accedant ad quadraturas C, D; dum nodus K percurrit arcum K C, et nodus L, arcum L D, inclinatio per actionem vis N M, continuò decrescit, cumque nodus K, pervenit in C, et transit ad octantem k perseverat, ex inertiâ materiæ, motus inclinationis decrescentis per totum arcum K C impressus; Licet vis N M in contrarium agat per totum arcum C k = C K; vis enim N M

proximis. Et eadem est ratio globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulò quam juxta polos, vel constat ex materiâ paulo densiore. (r) Supplet enim vicem annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus. Et quanquam, auctâ utcunque globi hujus vi centripetâ, tendere supponantur omnes ejus partes deorsum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus et præcedentis corollarii (s) vix inde mutabuntur; nisi quod loca maximarum et minimarum altitudinum aquæ diversa erunt. Aqua enim jam in orbe suo sustinetur et permanet, non per vim suam centrifugam, sed per alveum in quo fluit. Et præterea vis L M trahit aquam deorsum maxime in quadraturis, et vis K L seu N M — L M trahit eandem sursum maximè in syzygiis. Et hæ vires conjunctæ desinunt trahere aquam deorsum et incipiunt trahere

per arcum C k motum inclinationis decrescentis iisdem gradibus diminuit, quibus per arcum K C productus et acceleratus est. Quarè ille decrescentis inclinationis motus penitùs non destruitur. nisi nodus K pervenerit in k tumque vis N M planum reclinat, hoc est, nodo existente in k incipit motus reclinationis sivè motus inclinationis crescentis et perseverat usque ad octantem proximum L atquè ibi cessat. Liquet igitur minimum angulum inclinationis fieri in octantibus nodorum k, l post quadraturas C, D maximum verò dum nodi versantur in octantibus K et L post syzygias A, B.

(r) * *Supplet enim vicem annuli*, &c. Patet per not. 514. Si materiæ in æquatoris regionibus excessus per annulum C c A D b, (vid. fig. not. 514.) exhibeatur et reliqua globi materia in centro T coacta intelligatur

(s) * *Vix indè mutabuntur.* Nam major partium globi in centrum T gravitas non impedit quin annulus fluidus vel solidus, impressiones virium L M, N M suscipiat, loca tamen maximarum et minimarum altitudinum aquæ diversa erunt. Hucusque enim supposuimus particulas aquæ ex virium centripetæ et centrifugæ æquilibrio, in orbe suo sustineri et permanere instar corporis solitarii P circum T in spatio libero revolventis; atquè indè ex Cor. 5. ostensum est in Cor. 18. maximam aquæ altitudinem in quadraturas incidere, minimam in syzygias. Verùm si manente eâdem vi centrifugâ augeatur vis centripeta, seu gravitas particularum aquæ, particulæ illæ non vi suâ centrifugâ, sed alvei parietibus, ut in mari atque fluminibus telluris contingit, sustinentur et in orbe suo permanent ac proindè non amplius ad legem corporis solitarii circum centrum T, in spatio libero revolventis a centro illo T recedunt, vel ad illud accedunt. Loca igitur maximarum et minimarum altitudinum aquæ diversa erunt: velocitas tamen partium aquæ, cæteris paribus, maxima erit in syzygiis, minima in quadraturis (per Cor. 5.) Prætereà vis L M addititia trahit aquam deorsum, seu ad centrum T, maximè in quadraturis (504) et vis ablatitia K L trahit eandem sursum, maximè in syzygiis (501) et ideò si globus cum aquâ circumpositâ non revolveretur circà centrum T, minimæ aquarum altitudines in quadraturis C et D, maximæ in syzygiis A et B essent; verum revolvente cum globo aquâ à C ad A, vis addititia post quadraturas agens, aquam deorsum semper urget, donec vi ablatitiâ vincatur; et similiter hæc vis ablatitia post syzygias sursum trahit aquas, quarum proindè minimæ altitudines non incident in quadraturas, sed post quadraturas, maximæ verò post syzygias. Insuper rotatio globi circà proprium axem maximas aquarum altitudines a syzygiis A et B versus quadraturas D et C transfert, intereadum vires L M, N M simul junctæ maximas eas aquarum altitudines in syzygiis instaurare perpetuò nituntur, aqua autem à C et D continuò fluit versus A et B, dum elevatio ab A versus D et a B versus C transfertur, et ideò inter A et D ut et inter B et C dantur duo motus contrarii quibus aqua accumulatur ità ut altitudines

aquam sursum in octantibus ante syzygias, ac desinunt trahere aquam sursum incipiuntque trahere aquam deorsum in octantibus post syzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire potest in octantibus post syzygias, et minima in octantibus post quadraturas circiter; nisi quâtenus motus ascendendi vel descendendi ab his viribus impressus vel per vim insitam aquæ paulò diutius perseveret, vel per impedimenta alvei paulò citius sistatur.

Corol. 21. Eâdem ratione, quâ materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem verò diminuitur, et per ablationem tollitur; (t) si materia plusquam redundans tollatur, hoc est, si globus juxta æquatorem vel depressior reddatur, vel rarior quam juxta polos, orietur motus nodorum in consequentia.

Corol. 22. Et inde vicissim, ex motu nodorum innotescit constitutio globi. Nimirum si globus polos eosdem constanter servat, et motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone globum uniformem et perfectè circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunque obliquè in superficiem suam facto propelli, et motum inde concipere (u) partim circularem, partim in directum. Quoniam globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neque propensior est in unum axem, unumve axis situm, (x) quam in alium quemvis; perspicuum est, quod is axem suum, axisque inclinationem vi propriâ nunquam mutabit. (y) Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ superficiei parte, quâ prius, impulsu quocunque novo; et cùm citior vel serior impulsus effectum nil mutet, mani-

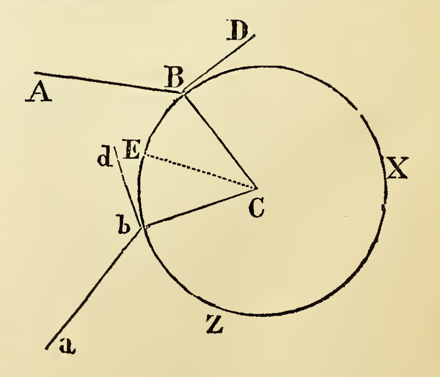
maximæ inter hæc puncta incidant ferè circà octantes.

(t) * *Si materia plusquam redundans tollatur*, seu si materia redundans negativa fiat, motus nodorum qui erat in antecedentia, negativus evadet, hoc est, orietur motus nodorum in consequentia.

(u) * *Partim circularem, partim in directum.* Vis A B quâ globus B X Z obliquè impellitur, secundum directionem A B, in duas vires resolvitur, quarum altera ad centrum C juxta radium B C dirigitur, ei motum globi in directum producit, altera secundum tangentem B D radio B C normalem agit, et motum rotationis circà axem plano A B D X C perpendicularem inducit.

(x) * *Quam in alium quemvis;* antequam motus imprimatur, perspicuum est quod is axem suum rotationis axisque inclinationem ad planum quodvis positione datum vi propriâ nunquam mutabit.

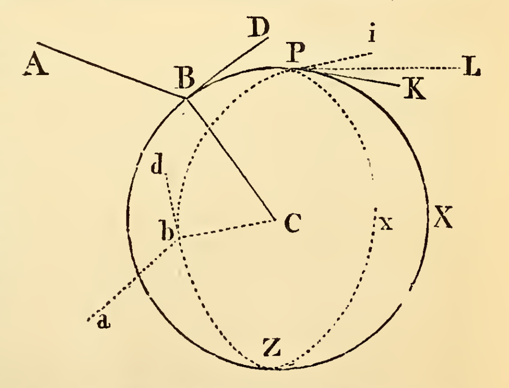
(y) * *Impellatur jam globus obliquè, in eâdem illâ superficiei parte* B *quâ priùs*, &c.



festum est, quod hi duo impulsus successivè impressi eundem producent motum, ac si simul impressi fuissent, hoc est, eundem, ac si globus vi simplici ex utroque (per legum Corol. 2.) compositâ impulsus fuisset, atque ideo simplicem, circa axem inclinatione datum. (z) Et par est ratio impulsûs secundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut et impulsus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulsus secundus sine primo generaret; atque ideo impulsuum amborum factorum in loca quæcunque: (a) generabunt hi eundem motum circularem ac si simul et semel in locum intersectionis æquatorum motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus et perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes componit et ad unum reducit, et quâtenus in se est, gyratur semper motu simplici et uniformi circa axem unicum, inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si globus plano quocunque, per centrum suum et centrum in quod vis dirigitur transeunte, dividi intelligatur in duo hemisphæria; urgebit semper vis illa utrumque hemisphærium æqualiter, et propterea globum, quoad motum rotationis, (b) nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum et æquatorem materia nova in formam

(z) * *Et par est ratio impulcûs secundi facti in locum alium quemvis b, in æquatore B X Z motûs primi.* Resolvitur enim vis a b in duas vires, quarum una ad centrum C dirigitur per radium b C; alia secundùm tangentem b d agit; et vires duæ utriusque impulsus ad centrum C per radios B C, b C directæ in unam componentur secundùm directionem radii alicujus E C agentem, quâ globus in directum movebitur uniformiter; vires autem B D, b d quæ rotationem globi producunt, eodem modo componuntur ad unicum rotationis motum efficiendum ac si fuisset vis B D in loco b impressa, aut vis b d, in loco B æquatoris B X Z motûs primi; vis enim B D eundem rotationis motum inducit, sivè imprimatur in B, sivè in b.

(a) * *Generabunt hi,* &c. Globus B P X Z b duabus viribus A B, a b obliquè impellatur, iisque singulis in duas alias vires, secundùm directiones B C, B D; b c, b d ut suprà divisis, sit B P X Z æquator quem punctum B vi B D describit, et b P x Z æquator alter quem punctum b vi b d describeret, horum æquatorum communes intersectiones P, Z; vires quæ secundum radios B C, b c, agunt in unam componentur, ut suprà, quâ globus movebitur uniformiter in directum; vires autem B D, b d, eosdem rotationis motus seorsim producunt quos producerent, si in punctum P singulæ agerent seorsim, forentque P K, P i;



sed vires duæ P K, P i, in unam P L componuntur quâ globus circâ æquatorem unicum rotatur. Quarè vires seu impulsus A B, a b generabunt motum unicum simplicem ac uniformem, tum directum, tum circularem circâ axem unicum inclinatione semper invariabili datum adeòque et sibi semper parallelum.

(b) * *Nullam in partem inclinabit.* Sit S virium centrum, A P Q E globus circâ axem

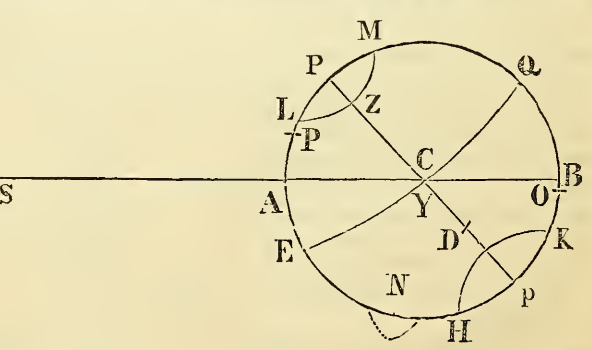
montis cumulata, et hæc, perpetuo conatu recedendi a centro sui motus, turbabit motum globi, facietque ut poli ejus errent per ipsius superficiem, et circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuò describant. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in casu (per Corol. 21.) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, quâ ratione (per Corol. 20.) nodi regredientur; vel denique ex alterâ axis parte addendo materiam novam, quâ mons inter movendum libretur, et hoc pacto nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons et hæcce nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales et orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum et maximum* T, *radiis ad ipsum ductis, describere potest.*

Nam corporis S attractiones versus T et P componunt ipsius attractio-

P p revolvens, S C B planum per centrum globi C et per centrum virium S transiens, globumque dividens in duo hemispheria A P B, A p B, vis centripeta urgebit semper utrumque hemispherium æqualiter versùs S, et propterea globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit, manebitque proindè eadem axis P p inclinatio. Addatur verò alicubi, v. gr. in N, inter polum p et æquatorem E Y Q materia nova in formam montis cumulata, et hæc, perpetuo conatu recedendi a centro sui motûs D, turbabit motum globi, quod partem globi N, cui adhæret validius trahat quam vis centrifuga partem oppositam O, magis depressam; et ideò faciet ut poli P, p, errent per superficiem globi et circulos L Z M, H X K, circum se punctumque sibi oppositum describant. Nam cum materia illa est in loco N, suâ majori vi centrifugâ facit ut polus p accedat ad H et polus P ad M, sublato partium globi æquilibrio; undè materiâ illâ revolvente, poli H et M circulos H X K H, M Z L M describunt in superficie globi circà puncta P, p, sive circa loca polorum antequam materia in N addita esset. *Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro* p vel P ubi polum non magis in unam partem trahit quam in alteram; *vel in æquatore* E Y Q, ubi polum unum non magis trahit quam alterum, *vel ex alterâ axis parte* in O *addendo materiam novam quâ motus* in N *inter movendum libratur*, seu quâ axis in partes oppositas æque trahatur, vel etiam addendo materiam novam ex alterâ æquatoris parte in R, quâ polus P tantum trahatur quantum polus p à materiâ in N positâ.

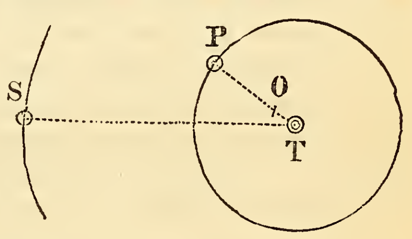


nem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum T et P commune gravitatis centrum O, quam in corpus maximum T, quæque quadrato distantiæ S O magis est proportionalis reciprocè, quam quadrato distantiæ S T: (c) ut rem perpendenti facile constabit.

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P *et* T *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, et orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum et maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multò magis aut multò minus attractum aut multò magis aut multò minus agitetur.*

(d) Demonstratur eodem fere modo cum Prop. LXVI. sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Sufficeret rem sic æstimare. Ex demonstratione Propositionis novissimæ liquet centrum, in quod corpus S conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, et quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus S ex unâ parte, et commune centrum aliorum duorum ex alterâ parte, circa commune omnium centrum quiescens, ellipses accuratas. (e) Liquet hoc per Corolla-

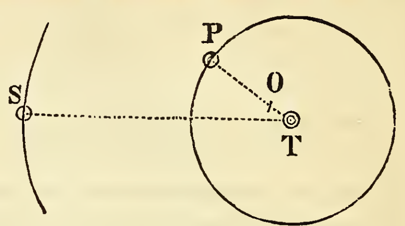


(c) * *Ut rem perpendenti facilè constabit.* Nam vis acceleratricis compositæ quâ corpus S a corporibus T et P trahitur directio cadit inter lineas S P, S T, et cæteris paribus, magis accedit ad S T, quam ad S P (si modò corpus majus T cæteris paribus magis trahat quam corpus minus P) quemadmodum centrum gravitatis O, propius est corpori T quam corpori P; prætereà manente distantiâ S T, vis acceleratrix corporis S versùs P augetur vel diminuitur, dum decrescit vel crescit distantia S P, et similiter distantia S O, augetur vel diminuitur, prout crescit vel decrescit S P; Quarè attractio absoluta (seu tota) corporis S quadrato distantiæ S O magis proportionalis est reciprocè, quam quadrato distantiæ S T; insuper commune gravitatis centrum O ferè spectari potest tanquam punctum in quo corporum T et P vires physicè uniuntur.

(d) * *Demonstratur eodem ferè modo,* &c. Nimirum resolvendo singulas attractiones corporis S versùs P et T in alias quarum duæ ad centrum O dirigantur et aliæ duæ directiones habeant rectæ T P parallelas.

(e) * *Liquet hoc,* &c. Nam si centrum in quod corpus S conjunctis viribus urgetur coincideret cum centro O gravitatis communi duorum corporum P et T hæc duo corpora P et T ellipses accuratas seorsim describerent circum se mutuò et circum centrum illud O (per Corol. 2. Prop. 58). Et prætereà corpus S ex unâ parte et duorum aliorum systema tanquam unum corpus consideratum, hoc est, eorum commune gravitatis centrum O ex alterâ parte ellipses accuratas describerent circum commune trium S, T, P centrum gravitatis quiescens (per Corol. 2. Prop. 58.) Quod adhuc clarius intelligetur, si

rium secundum Propositionis LVIII. collatum cum demonstratis in Prop. LXIV. et LXV. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro, in quod tertium S attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, et augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit; hoc est, ubi corpus intimum et maximum T lege cæterorum attrahitur: fitque major semper, ubi trium commune illud centrum, (f) minuendo motum corporis T, moveri incipit, et magis deinceps magisque agitatur.



Corol. Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod orbitæ descriptæ propius accedent ad ellipticas, et arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directè et quadrata distantiarum inversè, se mutuo trahant agitentque, et orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum [(g) nimirum umbilicus orbitæ primæ et intimæ in centro gravitatis corporis maximi et intimi; ille orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; et sic deinceps] quam si corpus intimum quiescat et statuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In systemate corporum plurium, A, B, C, D, &c. *si corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, &c. *viribus acceleratricibus quæ sunt reciprocè ut*

legantur Propositiones 64. 65. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri O, duorum P et T a centro in quod tertium S trahitur. *Detur prætereà motus* non uniformis in directum *communi trium centro,* (quod continget, si corpus intimum et maximum T, lege cæterorum non attrahitur, ut ex dictis patet) *et augebitur perturbatio, proindè,* &c.

(f) * *Minuendo motum corporis T,* &c. Quâ ratione fit ut centrum commune trium corporum, intereà dum corpora S et P moventur, nunc accedat ad corpus T nunc ab illo recedat, pro mutatâ corporum illorum distantiâ, et hinc magis ac magis perturbabitur motus ellipticus et magis ac magis deinceps agitabitur centrum commune gravitatis trium corporum.

(g) * *Nimirum umbilicus orbitæ primæ et intimæ,* quam v. gr. corpus parvum P hic describit *in centro gravitatis corporis maximi et intimi T* quod ferè coincidit cum communi centro O gravitatis duorum P et T (per Cas. 1. Prop. 65.); umbilicus *orbitæ secundæ* quam v. gr. corpus S describit *in communi centro gravitatis* O, *corporum duorum intimorum P et T;* umbilicus *tertiæ* orbitæ quam aliud corpus longius distans describeret *in communi centro gravitatis trium interiorum P, T, S,* &c. Nam idem est ratiocinium seu tria seu quatuor aut plura sint corpora (ut in Prop. 64. 65.)

quadrata distantiarum a trahente; et corpus aliud B *trahit etiam cætera* A, C, D, &c. *viribus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a trahente: erunt absolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora* A, B, *quorum sunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium B, C, D versus A, paribus distantiis, sibi invicem æquantur ex hypothesi; et similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus B, paribus distantiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis A ad vim absolutam attractivam corporis B, (h) ut attractio acceleratrix corporum omnium versus A ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus B, paribus distantiis; (i) et ita est attractio acceleratrix corporis B versus A, ad attractionem acceleratricem corporis A versus B. Sed attractio acceleratrix corporis B versus A est ad attractionem acceleratricem corporis A versus B, ut massa corporis A ad massam corporis B; propterea quod vires motrices, quæ (per definitionem secundam, septimam et octavam) sunt ut vires acceleratrices et corpora attracta conjunctim, hic sunt (per motus legem tertiam) (k) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis A est ad absolutam vim attractivam corporis B, ut massa corporis A ad massam corporis B. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si singula systematis corpora A, B, C, D, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula systematis corpora A, B, C, D, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt vel reciprocè, vel directè in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum a trahente, quæve secundum legem quamcunque communem ex distantiis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires (l) absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In systemate corporum quorum vires decrescunt in ratione

(h) * *Ut attractio acceleratrix corporum omnium,* seu ut attractio acceleratrix uniuscujusque corporis versus A, &c. Patet enim quod si vis absoluta dupla vel tripla, &c. sit, actio quoque acceleratrix in distantiâ datâ dupla vel tripla erit.

(i) * *Et ita est attractio acceleratrix corporis B versus A, ad attractionem acceleratricem corporis A versus B,* ob distantiam inter B et A, et A et B eandem.

(k) * *Sibi invicem æquales.* Si enim attractio acceleratrix corporis B versus A dicatur V et attractio acceleratrix corporis A versus B dicatur v; vis motrix in B, erit $B \times V$; in A erit $A \times v$; et (per leg. 3am.) $B \times V = A \times v$. Undè $V : v = A : B$. Ergò *absoluta,* &c.

(l) * *Vires absolutæ sunt ut corpora.* Omnia enim ratiocinia eadem manent in hujus Corollarii hypothesi ac in demonstratione et hypothesi Propositionis.

duplicatâ distantiarum, si minora circa maximum in ellipsibus, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, (m) quam fieri potest accuratissimis revolvantur; et radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accuratè aut quamproximè, in ratione corporum; et (n) contra. Patet per Corol. Prop. LXVIII. collatum cum hujus Corol. 1.

Scholium.

His propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, et corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem naturâ et quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, et colligendo summas virium. Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: sive conatus iste fiat ab actione corporum vel se mutuo petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium; sive is ab actione ætheris, aut aëris, mediive cujuscunque seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem *impulsus*, non species virium et qualitates physicas, sed quantitates et proportiones mathematicas in hoc tractatu expendens ut in definitionibus explicui. In mathesi investigandæ sunt virium quantitates et rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positis consequentur: deinde, ubi in physicam descenditur conferendæ sunt hæ rationes cum phænomenis; ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis et rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuò agere; et quales motus inde consequantur.

(m) * *Quam fieri potest accuratissimis revolvantur,* ut in duobus casibus Prop. 65. expositum est.

(n) * *Et contrà.* Si vires corporum illorum absolutæ sint ad invicem in ratione corporum, et minora corpora circà maximum in ellipsibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, quam fieri potest, accuratissimis revolvantur, et radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales, corporum illorum seorsim spectatorum vires acceleratrices decrescent in ratione duplicatâ distantiarum aut accuratè aut quam proximè; ut liquet ex Corol. 2°. Prop. 58. collato cum Prop. 64. 65.

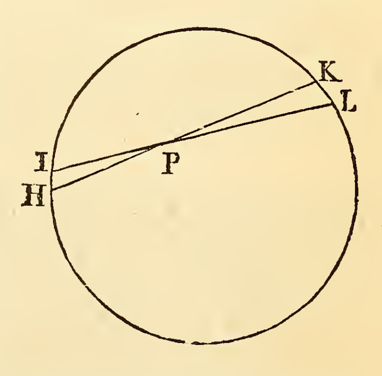
SECTIO XII.

De corporum sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit H I K L superficies illa sphærica, et P corpusculum intus constitutum. Per P agantur ad hanc superficiem lineæ duæ H K, I L, arcus quam minimos H I, K L intercipientes; et, ob triangula H P I, L P K (per Corol. 3. Lem. VII.) (°) similia, arcus illi erunt distantiis H P, L P proportionales; et superficiei sphæricæ particulæ quævis ad H I et K L, rectis per punctum P transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicatâ illâ ratione. Ergo vires harum particularum in corpus P exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directè, et quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruent. Et simili argumento, attractiones omnes per totam sphæricam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus P nullam in partem his attractionibus impellitur. Q. e. d.

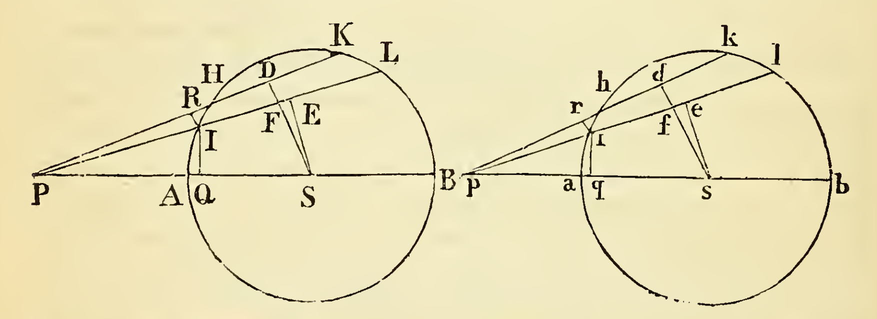


(°) * *Similia,* &c. Anguli enim H P I, L P K ad verticem oppositi, et anguli H I L, L K H eidem arcui insistentes æquantur (per Prop. 27. Lib. 3. Elem.) Nam arcus evanescentes I H, K L, pro ipsorum chordis usurpari possunt (per Cor. 3. Lem. 7.) Quarè arcus H I, K L distantiis H P, L P proportionales sunt, et hinc si ad superficiem sphæricam per punctum P ductæ intelligantur innumeræ rectæ ad arcus quamminimos ut H I, K L terminatæ, rectæ illæ figuras solidas (pyramides vel conos) similes formabunt quorum bases in superficie sphæricâ similes erunt, et proindè (per Lem. 5.) rationem habebunt duplicatam laterum H I, H L seu distantiarum H P, L P. *Ergo vires,* &c.

PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphæræ; vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.

Sint A H K B, a h k b æquales duæ superficies sphæricæ, centris S, s, diametris A B, a b descriptæ, et P, p corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineæ P H K, P I L, p h k, p i l, auferentes a circulis maximis A H B, a h b, æquales arcus H K, h k et I L, i l: Et ad eas demittantur perpendicula S D, s d; S E, s e; I R, i r; quorum S D, s d secent P L, p l in F et f: Demittantur etiam



ad diametros perpendicula I Q, i q. Evanescant anguli D P E, d p e: et (p) ob æquales D S et d s, E S et e s, lineæ P E, P F et p e, p f et lineola D F, d f pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis D P E, d p e simul evanescentibus, (q) est æqualitatis. His itaque constitutis, (r) erit P I ad P F ut R I ad D F, et p f ad p i ut d f, vel D F ad r i; et ex æquo P I × p f ad P F × p i ut R I ad r i, hoc est (per Corol. 3. Lem. VII.) (s) ut arcus I H ad arcum i h. (t) Rursus

(p) * *Et ob æquales D S et d s, E S et e s,* &c. (Per Prop. 14. Lib. 3. Elem.)

(q) * *Est æqualitatis.* Nam evanescentibus D P E, d p e angulis, puncta F, f coincidunt cum punctis E, e, et iis punctis coincidentibus, æquales sunt lineæ P E, P F et p e, p f, et lineolæ D F, d f fiunt differentiæ linearum D S et E S, d s et e s, ac proindè (ob æquales D S et d s, E S et e s) æquantur.

(r) * *Erit P I ad P F,* &c. Ob parallelas R I, D F et r i, d f.

(s) *Ut arcus I H ad arcum i h.* Nam triangula evanescentia R H I, r h i similia sunt ob angulos ad R et r rectos (ex Hyp.) et angulos ad H et h æquales, quos nempè metiuntur dimidii arcus æquales H K, h k (per Prop. 32. Lib. 3. Elem.) arcus enim H I, h i pro tangentibus in H et h usurpari possunt (per Cor. 3. Lem. 7.) Quarè R I est ad r i, ut arcus I H ad arcum i h.

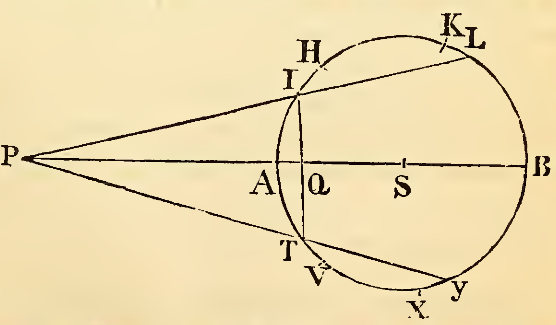
(t) * *Rursus,* &c. Ob triangula P Q I, P E S et p q i, p e s similia, est P I : P S = I Q : S E.

P I ad P S ut I Q ad S E, et p s ad p i ut s e vel S E ad i q; et ex æquo P I × p s ad P S × p i ut I Q ad i q. Et conjunctis rationibus P I quad. × p f × p s ad p i quad. × P F × P S, ut I H × I Q ad i h × i q; hoc (u) est, ut superficies circularis, quam arcus I H convolutione semicirculi A K B circa diametrum A B describet, ad superficiem circularem, quam arcus i h convolutione semicirculi a k b circa diametrum a b describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula P et p, sunt (per hypothesin) ut ipsæ superficies directè, et quadrata distantiarum superficierum a corporibus inversè, hoc est, ut p f × p s ad P F × P S. Suntque hæ vires ad ipsarum partes obliquas, quæ (factâ per legum Corol. 2. resolutione virium) secundum lineas P S, p s ad centra tendunt, ut P I ad P Q, et p i ad p q; id est (ob similia triangula P I Q et P S F, p i q et p s f) ut P S ad P F, et p s ad p f. Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus P versus S ad attractionem corpusculi p versus s, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc (x) est, ut p s quad. ad P S quad. Et simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum K L, k l descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut p s quad. ad P S quad. inque eâdem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies sphærica, capiendo semper s d æqualem S D et s e æqualem S E, distingui potest. Et,

(u) 515. * *Hoc est, ut superficies circularis, quam arcus I H convolutione semicirculi A K B circà diametrum A B describet.* Nam circularis illa superficies æqualis est facto ex peripheriâ circuli cujus radius I Q in arcum avanescentem I H, et similiter superficies circularis quam arcus i h, convolutione semicirculi a k b circà diametrum a b, describet, æquatur facto ex peripheriâ circuli cujus radius i q, in arcum evanescentem i h, (152). Cum igitur peripheriæ circulorum sint ut radii, facta illa erunt inter se ut I H × I Q, ad i h × i q.

(x) * *Hoc est*, &c. Deleto in utrâque quantitate facto P F × p f, erunt attractiones ut $\frac{ps}{PS}$ ad $\frac{PS}{ps}$ seu reducendo ad eundem denominatorem, ut $\frac{ps^2}{PS \times ps}$ ad $\frac{PS^2}{ps \times PS}$, hoc est, ut ps^2 ad PS^2.

516. *Scholium.* Si ex alterâ parte diametri A B capiatur arcus A T = A I, et arcus T V = I H, vires obliquæ et æquales I Q, T Q sibi mutuò opponentur, nullumque motum in corpusculo P producent. Undè patet vires integras in corpusculum P ab utroque hemispherio A H B, A T B seu a totâ superficie sphæricâ exercitas esse omninò viribus ad centrum S tendentibus æquales.



per compositionem, vires totarum superficierum sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eâdem ratione. Q. e. d.

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad sphæræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis; ac detur tum sphæræ densitas, tum ratio diametri sphæræ ad distantiam corpusculi a centro ejus: dico quod vis quâ corpusculum attrahitur, proportionalis erit semidiametro sphæræ.

Nam concipe corpuscula duo seorsim a (y) sphæris duabus attrahi, unum ab unâ et alterum ab alterâ, et distantias eorum a sphærarum centris proportionales esse diametris sphærarum respectivè, sphæras autem resolvi in particulas similes et similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas sphæræ alterius, in ratione compositâ ex ratione particularum directè et ratione duplicatâ distantiarum inversè. Sed particulæ sunt ut sphæræ, hoc est, in ratione triplicatâ diametrorum, et distantiæ sunt ut diametri; et ratio prior directè unà cum ratione posteriore bis inversè est ratio diametri ad diametrum. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si corpuscula in circulis, circa sphæras ex materiâ æqualiter attractivâ constantes, revolvantur; sintque distantiæ a centris sphærarum proportionales earumdem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice versâ, si tempora periodica sunt æqualia, distantiæ erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per Corol. 3. Prop. IV.

Corol. 3. Si ad solidorum duorum quorumvis, similium et æqualiter densorum, puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis; vires, quibus corpuscula, (z) ad solida illa duo similiter sita, attrahentur ab iisdem, erunt ad invicem ut diametri solidorum.

(y) * *A sphæris duabus* homogeneis, ejusdemque densitatis ità nempè ut sub æqualibus voluminibus æquales materiæ quantitates ubique contineantur, et vis absoluta attrahens sit semper ut quantitas materiæ.

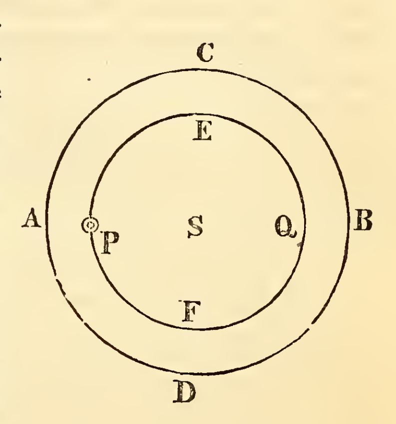
(z) * *Ad solida illa duo similiter sita*, ità ut distantiæ corpusculorum a similibus solidorum duorum particulis sint ut eorum solidorum diametri.

517. *Scholium.* Hinc si hujusmodi sphæra per centrum perforetur, æqualia erunt tempora omnia, quibus corpus de locis quibusvis ad centrum usque cadit, (per Cor. 2. Prop. 38.) et corpusculorum in hujusmodi sphærâ per spatia libera minima revolventium tempora periodica erunt æqualia (per Cor. 3. Prop. 4.) atque ad hujus generis sphæram pertinent quæ in Prop. 51. 52. hujusque Corollariis demonstrata sunt.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

Si ad sphæræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra sphæram constitutum attrahitur vi proportionali distantiæ suæ ab ipsius centro.

In sphærâ A C B D, centro S descriptâ, locetur corpusculum P; et centro eodem S, intervallo S P, concipe sphæram interiorem P E Q F describi. Manifestum est, (per Prop. LXX.) quod sphæricæ superficies concentricæ, ex quibus sphærarum differentia AEBF componitur, attractionibus suis per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus P. Restat sola attractio sphæræ interioris P E Q F. Et (per Prop. LXXII.) hæc est ut distantia P S. Q. e. d.



Scholium.

Superficies, ex quibus solida componuntur, hic non sunt purè mathematicæ, sed orbes adeo tenues, ut eorum crassitudo instar nihili sit; nimirum orbes evanescentes, ex quibus sphæra ultimò constat, ubi orbium illorum numerus augetur et crassitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies et solida, componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphæram constitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro.

Nam distinguatur sphæra in superficies sphæricas innumeras concentricas, et attractiones corpusculi a singulis superficiebus oriundæ erunt reciprocè proportionales quadrato distantiæ corpusculi a centro (per Prop.

LXXI.) Et componendo fiet summa attractionum, hoc est attractio corpusculi in sphæram totam, in eâdem ratione. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantiis a centris homogenearum sphærarum attractiones sunt ut sphæræ. Nam (per Prop. LXXII.) si distantiæ sunt proportionales diametris sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illâ ratione; et, distantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicatâ illâ ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicatâ illâ ratione, hoc est, in ratione sphærarum.

Corol. 2. In distantiis quibusvis attractiones sunt ut sphæræ applicatæ [a] ad quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum, extra sphæram homogeneam positum, trahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro, constet autem sphæra ex particulis attractivis; [b] decrescet vis particulæ cujusque in duplicatâ ratione distantiæ a particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad sphæræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum a punctis; dico quod sphæra quævis alia similaris ab eâdem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciprocè ut quadratum distantiæ suæ a centro sphæræ trahentis, (per Prop. LXXIV.) et propterea eadem est, ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus sphæræ. Hæc autem attractio tanta est, quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis sphæræ attractæ particulis eâdem vi traheretur, quâ ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Prop. LXXIV.) reciprocè proportionalis quadrato distantiæ suæ a centro sphæræ; ideoque huic æqualis attractio sphæræ est in eâdem ratione. [c] Q. e. d.

[a] * *Ad quadrata distantiarum.* Nam æqualibus distantiis, attractiones sunt ut sphæræ (per Cor. 1.) et æqualibus sphæris, attractiones sunt ut quadrata distantiarum a centris reciprocè (per Prop. 74.) Quarè variantibus sphæris et distantiis simul, attractiones sunt ut sphæræ ad quadrata distantiarum applicatæ.

[b] * *Decrescet vis particulæ cujusque,* &c. Nam cum vis attractrix absoluta quantitati materiæ proportionalis supponatur, si vis particularum sphæræ in majori vel minori ratione quam duplicatâ distantiarum a particulis decresceret, corpusculum extra sphæram constitutum majori vel minori vi traheretur quam reciprocè proportionali quadrato distantiæ a centro sphæræ.

[c] * *Q. e. d.* Demonstratio clarius intelligitur appositâ figurâ. Sphæra A sphæram similarem B attrahat, et vis acceleratrix quâ sphæræ B particula quævis P in centrum C sphæræ A urgetur est reciprocè ut quadratum distantiæ P C a centro sphæræ trahentis (per Prop. 74.) et propterea eadem est ac si vis tota

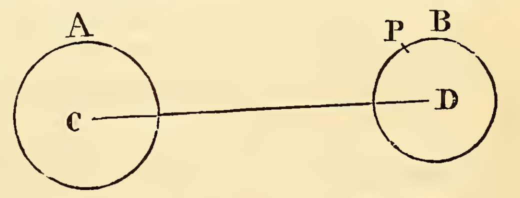
([d]) *Corol.* 1. Attractiones sphærarum, versus alias sphæras homogeneas, sunt ut sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centris earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius eâdem vi, quâ ab ipsis vicissim trahuntur; ideoque cum in omni attractione urgeatur (per Legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, ([e]) geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum conicarum sectionum ([f]) demonstrata sunt, obtinent, ubi sphæra attrahens locatur in umbilico: et corpora moventur extra sphæram.

Corol. 4. Ea vero, quæ de motu corporum circa centrum conicarum sectionum ([g]) demonstrantur, ([h]) obtinent ubi motus peraguntur intra sphæram.

attrahens manaret de corpusculo unico C sito in centro sphæræ trahentis A; vis autem tota acceleratrix quâ sphæra integra B a corpusculo C trahitur, tanta est quanta foret vicissim attractio ejusdem corpusculi C versùs centrum D sphæræ B, si modò illud corpusculum C a singulis sphæræ B particulis eâdem vi traheretur quâ ipsas attrahit, ut manifestum est. Foret autem (in hâc hyp.) illa corpusculi C versus centrum D attractio (per Prop. 74.) reciprocè proportionalis quadrato distantiæ suæ C D a centro D sphæræ B; Quarè attractio sphæræ B versus C ut potè æqualis attractioni suppositæ corpusculi C versus D, est in eâdem ratione inversâ quadrati distantiæ C D. Q. e. d.



([d]) * *Cor.* 1. Vis acceleratrix quâ sphæræ B particula quævis P versus centrum C sphæræ A urgetur, est ut sphæra A applicata ad quadratum distantiæ C P, (per Cor. 2. Prop. 74.) et propterea eadem est ac si vis tota attrahens quæ esset ut sphæra A manaret de corpusculo unico C sito in centro sphæræ trahentis A; et similiter sphæra tota B ad centrum C trahitur ut corpusculum unicum in centro D situm (per Prop. 75.) vis autem acceleratrix quâ corpusculum in centro D positum versus C trahitur, est ut vis absoluta corpusculi C seu ut sphæra A directè et quadratum distantiæ C D inversè. Quarè *attractiones sphærarum* acceleratrices *versùs alias sphæras homogeneas sunt ut sphæræ trahentes applicatæ*, &c.

([e]) * *Geminabitur vis attractionis mutuæ*, &c. Si sphæra A sphæram B vi propriâ attrahente destitutam trahat, erit vis acceleratrix sphæræ B versùs centrum C sphæræ trahentis A, ut $\frac{A}{CD^2}$, (per Cor. 2. Prop. 75.) jam si sphæræ B vis propria attrahens tribuatur, vis acceleratrix sphæræ A versùs B indè genita, erit ut $\frac{B}{CD^2}$, et vis illius motrix (15) ut $\frac{B \times A}{CD^2}$, quæ (per Leg. 3.) æquatur vi motrici sphæræ B versùs sphæram A ex reactione sphæræ A genitæ. Quarè dividendo per B, vis acceleratrix sphæræ B, versùs centrum C sphæræ A, rursùs erit ut $\frac{A}{CD^2}$, ideóque attractio tota acceleratrix sphæræ B, versùs centrum sphæræ A, erit in distantiâ datâ ut sphæra ipsa A, et in distantiâ variabili ut sphæra A ad quadratum distantiæ applicata. Quod similiter dicendum est de attractione sphæræ A versùs centrum sphæræ B. Observandum verò est quod si (ut hîc supponitur) vires absolutæ particularum utriusque sphæræ A et B æquales sint et utraque vi propriâ attractivâ quantitati materiæ proportionali prædita sit, attractio mutua dupla evadit.

([f]) * *Demonstrata sunt.* (In Sect. 3â. 6â. 7â. 9â. 11â.)

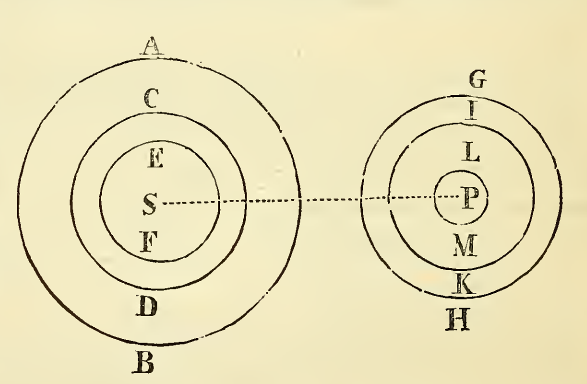
([g]) * *Demonstrantur.* (Prop. 10. 38. 47. 51. 52. 64.)

([h]) * *Obtinent*, &c. (Per Prop. 63.) ubi motus peraguntur intra sphæram, hoc est, ubi intra sphæram solidam via corporibus motis libera conceditur.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem et vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu verò per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undique similares; et vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicatâ ratione distantiæ corporis attracti: dico quod vis tota, quâ hujusmodi sphæra una attrahit aliam, sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ centrorum.

Sunto sphæræ quotcunque concentricæ similares A B, C D, E F, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam densiorem versus centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; et hæ (per Prop. LXXV.) trahent sphæras alias quotcunque concentricas similares G H, I K, L M, &c. singulæ singulas, viribus reciprocè proportionalibus quadrato distantiæ S P. ([1]) Et componendo vel dividendo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum supra alias; hoc est, vis, quâ sphæra tota, ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis composita A B, trahit totam ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis compositam G H; erit in eâdem ratione. Augeatur numerus sphærarum concentricarum in infinitum sic, ut materiæ densitas unà cum vi attractivâ, in progressu a circumferentiâ ad centrum, secundum legem quamcunque crescat vel decrescat; et, additâ materiâ non attractivâ, compleatur ubivis densitas deficiens, eo ut sphæræ acquirant formam quamvis optatam; et



([1]) * *Et componendo vel dividendo*, &c. Hoc est, in datâ distantiâ centrorum communium S, P, sit attractio sphærarum G H, I K, L M à sphærâ A B, a, b, c; a sphærâ C D, d, e, f; a sphærâ E F, g, h, i: variante verò illâ distantiâ communium centrorum S, P vires omnes illæ mutabuntur respectivè secundum rationem illam inversam quadrati distantiæ centrorum, ergò summa vel differentia virium quibus omnes sphæræ G H, I K, L M a sphæris A B, C D, E F attrahuntur in primâ distantiâ, erit ad summam vel differentiam virium in altero casu inversè ut quadrata distantiarum.

vis, quâ harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum superius, in eâdem illâ distantiæ quadratæ ratione inversâ. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si ejusmodi sphæræ complures sibi invicem per omnia similes, se mutuò trahant; attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt, in æqualibus quibusvis centrorum distantiis, ut sphæræ attrahentes.

([k]) *Corol.* 2. Inque distantiis quibusvis inæqualibus, ut sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones verò motrices, seu pondera sphærarum in sphæras erunt, in æqualibus centrorum distantiis, ut sphæræ attrahentes et attractæ conjunctim, id est, ut contenta sub sphæris per multiplicationem producta.

([l]) *Corol.* 4. Inque distantiis inæqualibus, ut contenta illa directè et quadrata distantiarum inter centra inversè.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur a sphæræ utriusque virtute attractiva mutuo exercita in sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servatâ.

Corol. 6. Si hujusmodi sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas; sintque distantiæ inter centra revolventium et quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt ([m]) proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent; ubi sphæra attrahens formæ et conditionis cujusvis jam descriptæ locatur in umbilico.

([k]) * *Cor.* 2. Attractiones acceleratrices sphærarum G H, I K, L M, &c. in sphæras A B, C D, E F, &c. singularum versùs singulas sunt (per Cor. 1. Prop. 75.) ut sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum inter centra S, P. Quarè componendo vel dividendo summa attractionum illarum omnium vel excessus aliquarum suprà alias, hoc est, tota attractio acceleratrix sphæræ compositæ G I M H versùs sphæram compositam A C F B erit ut summa vel differentia sphærarum concentricarum similarium A B, C D, E F, &c. ad quadratum distantiæ S P applicata. Sed si sphæræ trahentes sunt sibi invicem per omnia similes, summæ illæ vel differentiæ sunt ut sphæræ ipsæ. Quarè patet veritas Corol. 1. et 2.

([l]) * *Cor.* 4. Corollaria 3um. et 4um. ex Corollariis 1°. et 2°. manifesta sunt; Nam attractionis quantitas motrix, seu pondus sphæræ attractæ in sphæram trahentem æquipollet facto ex vi acceleratrice ductâ in quantitatem materiæ, seu in massam sphæræ attractæ; vis autem acceleratrix (per Cor. 2. Prop. hujus) est ut sphæra attrahens applicata ad quadratum distantiæ inter centra, et quantitates materiæ in sphæris per omnia similibus, sunt ut volumina, seu ut sphæræ ipsæ. Quarè attractiones motrices seu pondera sphærarum in sphæras, sunt ut contenta sub sphæris per multiplicationem producta directè et quadrata distantiarum inter centra inversè.

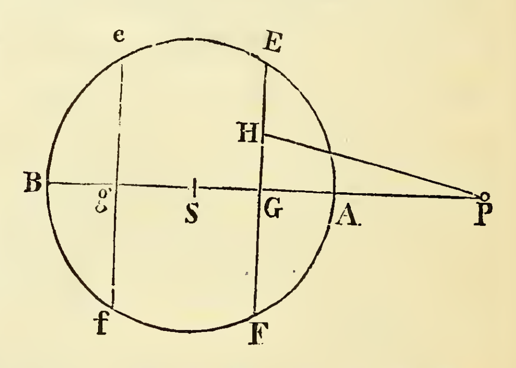
([m]) * *Proportionales diametris.* Cor. 6. et 7. constant per Cor. 3. Prop. 4æ.

Corol. 9. (n) Ut et ubi gyrantia sunt etiam sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad singula sphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, quâ sphæræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra sphærarum.

Cas. 1. Sit A E B F sphæra; S centrum ejus; P corpusculum attractum, P A S B axis sphæræ per centrum corpusculi transiens; E F, e f plana duo, quibus sphæra secatur, huic axi perpendicularia, et hinc inde æqualiter distantia a centro sphæræ; G, g intersectiones planorum et axis; et H punctum quodvis in plano E F. Puncti H vis centripeta in corpusculum P, secundum lineam P H exercita, est ut distantia P H; et (per Legum Corol. 2.) secundum lineam P G, seu versus centrum S, ut longitudo P G. Igitur punctorum omnium in plano E F, hoc est plani totius vis, quâ corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut distantia P G multiplicata per numerum punctorum, id est, ut solidum quod continetur sub plano ipso E F et distantia illa P G. Et similiter vis plani e f, quâ corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut planum illud ductum in distantiam suam P g, sive ut huic æquale planum E F ductum in distantiam illam P g; et summa virium plani utriusque ut planum E F ductum in summam distantiarum P G + P g, id est, ut planum illud ductum in duplam centri et (o) corpusculi distantiam P S, hoc est, ut duplum planum E F ductum in distantiam P S, vel ut summa æqualium planorum E F + e f ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in sphærâ totâ, hinc inde æqualiter a centro sphæræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam P S, hoc est, ut sphæra tota et ut distantia P S conjunctim. (p) Q. e. d.



(n) * *Ut et ubi gyrantia*, &c. Patet per Cor. 2. Prop. 58.

(o) * *Et corpusculi distantiam P S.* Est enim P g = P G + 2 G S, adeóque P g + P G = 2 P G + 2 G S = 2 P S.

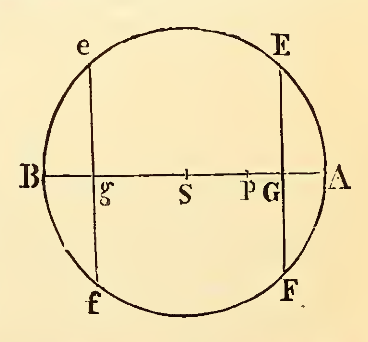
(p) * *Q. e. d.* Observandum est vires obli

Cas. 2. Trahat jam corpusculum P sphæram A E B F. Et eodem argumento probabitur quod vis, quâ sphæra illa trahitur, erit ut distantia P S. Q. e. d.

Cas. 3. Componatur jam sphæra altera ex corpusculis innumeris P; et quoniam vis, quâ corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi a centro sphæræ primæ, (q) et ut sphæra eadem conjunctim, atque ideo eadem est, ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro sphæræ; vis tota, quâ corpuscula omnia in sphæra secunda trahuntur, hoc est, quâ sphæra illa tota trahitur, eadem erit, ac si sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro sphæræ primæ, (r) et propterea proportionalis est distantiæ inter centra sphærarum. Q. e. d.

Cas. 4. Trahant sphæræ se mutuo, et vis geminata proportionem priorem servabit. Q. e. d.

Cas. 5. Locetur jam corpusculum p intra sphæram A E B F; et quoniam vis plani e f in corpusculum est ut solidum contentum sub plano illo et distantiâ p g; et vis contraria plani E F ut solidum contentum sub plano illo et distantiâ p G; (s) erit vis ex utrâque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiæ distantiarum, id est, ut summa illa ducta in p S distantiam corpusculi a centro sphæræ. Et simili argumento, attractio planorum omnium E F, e f in sphærâ totâ, hoc est, attractio sphæræ totius, est conjunctim ut summa planorum omnium, seu sphæra tota, et ut p S distantia corpusculi a centro sphæræ. Q. e. d.



Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris p componatur sphæra nova, intra sphæram priorem A E B F sita; probabitur ut prius quod attractio,

quas G H, in plano quovis E F, ex utrâque axis P B parte in æqualibus distantiis sumptas esse æquales et oppositas, nullumque proindè motum producere.

(q) * *Et ut sphæra eadem conjunctim,* per Cas. 1.

(r) * *Et propterea proportionalis est distantiæ,* &c. Si data est sphæra prima trahens per Cas. 2.

(s) * *Erit vis ex utrâque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut* $ef \times pg - EF \times pG$. Est autem $Sg = SG$, adeóque $pg - pG = pS + SG - pG = 2pS$; Quarè cùm sit etiam $EF = ef$, erit $ef \times pg - EF \times pG = ef \times \overline{pg - pG} = 2ef \times pS = \overline{ef + EF} \times pS$. Si punctum G est inter p et S situm, vis tota erit ut $ef \times pg + EF \times pG$, et quoniam est semper $Sg = SG$, atque in hoc casu $pg + pG = pS + SG + pG = 2pS$, similiter invenietur vis tota ut $\overline{ef + EF} \times pS$.

sive simplex sphæræ unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, erit ut distantia centrorum p S. Q. e. d.

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

Si sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam sint utcunque dissimilares et inæquabiles, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undique similares; et vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujusmodi sphæræ duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distantiæ inter centra sphærarum.

Demonstratur ex Propositione præcedente eodem modo, quo Propositio LXXVI. ex Propositione LXXV. demonstrata fuit. (§)

Corol. Quæ superius in Propositionibus X. et LXIV. de motu corporum circa centra conicarum sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum sphæricorum conditionis jam descriptæ, et attracta corpora sunt sphæræ conditionis ejusdem.

Scholium.

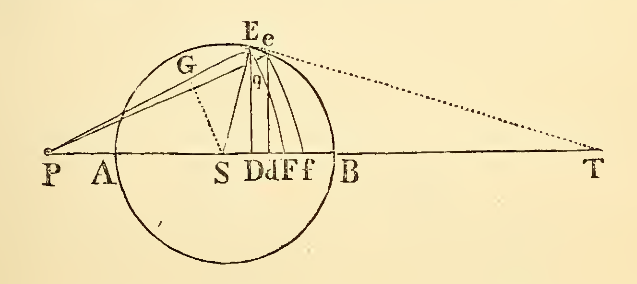
Attractionum casus duos insigniores jam dedi expositos; nimirum ubi vires centripetæ decrescunt in duplicatâ distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in utroque casu ut corpora gyrentur in conicis sectionibus, et componentes corporum sphæricorum vires centripetas eâdem lege, in recessu a centro, decrescentes vel crescentes cum seipsis: Quod est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegantes exhibent, sigillatim percurrere longum esset. Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare ut sequitur.

(§) Quæ in Corollariis Prop. 76. ubi attractio sphæræ versùs sphæram erat quadrato distantiæ centrorum reciprocè proportionalis, demonstrata sunt, ea, mutatis mutandis, ad casum hujus Propositionis 78. transferri possunt. Nimirum si ejusmodi sphæræ complures per omnia similes se mutuò trahant, attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt ut sphæræ trahentes et distantiæ inter centra conjunctim; attractiones verò motrices ut sphæræ attrahentes et attractæ et distantiæ inter centra conjunctim, eademque valent ubi attractio oritur a sphæræ utriusque virtute attractivâ mutuò exercitâ in sphæram alteram.

LEMMA XXIX.

Si describantur centro S *circulus quilibet* A E B, *et centro* P *circuli duo* E F, e f, *secantes priorem in* E, e, *lineamque* P S *in* F, f; *et ad* P S *demittantur perpendicula* E D, e d: *dico quod, si distantia arcuum* E F, e f *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis* D d *ad lineam evanescentem* F f *ea sit, quæ lineæ* P E *ad lineam* P S.

Nam si linea P e secet arcum E F in q; et recta E e, quæ cum arcu evanescente E e coincidit, producta occurrat rectæ P S in T; et ab S demittatur in P E normalis S G: ob (t) similia triangula D T E, d T e, D E S; erit D d ad E e, ut D T ad T E, seu D E ad E S; et ob (u) triangula E e q, E S G (per Lem. VIII. et Corol. 3. Lem. VII.) similia, erit E e ad e q seu F f ut E S ad S G; et ex æquo, D d ad F f ut D E ad S G; hoc est (ob similia triangula P D E, P G S) ut P E ad P S Q. e. d.



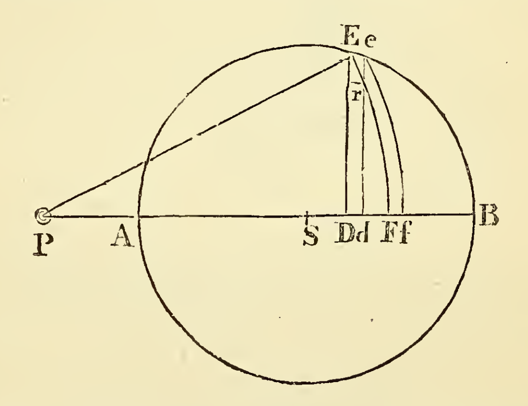
(t) * *Ob similia triangula D T E, d T e, D E S.* Ob parallelas D E, d e, triangula D T E, d T e similia sunt; et quoniam recta T E circulum A E B tangit in E, erit angulus S E T rectus, et proindè demisso ex puncto E ad basim S T perpendiculo E D, erit triangulum D E S simile triangulo D T E (Prop. 8. Lib. 6. Elem.)

(u) * *Et ob triangula E e q, E S G, &c.* Anguli ad G et q recti sunt et proindè æquales; et quoniam anguli P E q, S E e sunt quoque recti et æquales, (ex naturâ circuli) detracto communi angulo S E q, anguli residui G E S, q E e, erunt etiam æquales. Quarè triangula E e q, E S G sunt similia (Prop. 4. Lib. 6. Elem.)

PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinitè diminutam jamjam evanescens E F f e, *convolutione sui circa axem* P S, *describat solidum sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, quâ solidum illud trahit corpusculum situm in* P, *est in ratione compositâ ex ratione solidi* D E q × F f, *et ratione vis quâ particula data in loco* F f *traheret idem corpusculum.*

Nam si primò consideremus vim superficiei sphæricæ F E, quæ convolutione arcus F E generatur, et a linea d e ubivis secatur in r; erit superficiei pars annularis, convolutione arcus r E genita, ut lineola D d,



manente sphæræ radio P E (uti [x] demonstravit Archimedes in lib. de Sphærâ et Cylindro.) Et hujus vis, secundum lineas P E vel P r undique in [y] superficie conicâ sitas exercita, ut hæc ipsa superficiei pars annularis; hoc est, ut lineola D d, vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato sphæræ radio P E et lineola illa D d: at secundum li-

([x]) 518. *Uti demonstravit Archimedes,* &c. Facilis est demonstratio. Quoniam enim angulus P E r rectus est (ex naturâ circuli) erit angulus D E r æqualis angulo D P E, ob summum angulorum D P E + P E D recto P E r æqualem. Undè si ex puncto r in lineam D E demissum intelligatur perpendiculum quod æquale erit lineæ D d, constituetur triangulum evanescens simile triangulo E P D, eritque adeò D E : P E = D d : E r = $\frac{\text{P E} \times \text{D d}}{\text{D E}}$, sed (515) zona circularis convolutione arcûs r E genita, est ut rectangulum r E × D E; Quarè si in hoc rectangulo loco r E substituatur valor ipsius modò inventus, erit zona ut P E × D d, hoc est, ob datum radium P E, ut D d. Q. e. d.

([y]) * *In superficie conicâ.* Nam in convolu-

neam P S ad centrum S tendentem minor in ratione P D ad P E, (z) ideoque ut P D × D d. Dividi jam intelligatur linea D F in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur D d; et superficies F E dividetur (a) in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium P D × D d, hoc est, ut $\frac{1}{2}$ P F q — $\frac{1}{2}$ P D q, ideoque ut (b) D E quad. Ducatur jam superficies F E in altitudinem F f; et fiet solidi E F f e vis exercita in corpusculum P ut D E q × F f: puta si detur vis quam particula aliqua data F f in distantia P F exercet in corpusculum P. (c) At si vis illa non detur, fiet vis solidi E F f e ut solidum D E q × F f et vis illa non data conjunctim. Q. e. d.

tione puncti E, linea P E superficiem conicam describit.

(z) * *Ideoque ut P D × D d.* Nam si vis secundum directionem P E agens per lineam P E exponatur, vis illius pars quæ agit secundùm directionem P S, exponetur per lineam P D; erit P E ad P D ut rectangulum P E × D d ad rectangulum P D × D d, quod proindè vim illam secundùm directionem P D exhibebit, vires autem obliquæ E D ab utrâque axis P B parte se mutuò destruunt.

(a) * *Dividetur in totidem æquales annulos.* (Per not. 518.)

(b) * *Et superficies F E dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium P D × D d, hoc est, ut $\frac{1}{2}$ P F q — $\frac{1}{2}$ P D q, ideoque ut D E quad.* Scilicet omnes P D, dum ex P D in P F mutantur uniformiter crescendo progressionem arithmeticam faciunt, quoniam omnes particulæ D d quibus lineæ P D successive augentur sunt æquales: ergo omnium P D summa eâ ratione invenitur quâ summæ progressionum arithmeticarum obtinentur, nempe primum et ultimum progressionis terminum simul junctos multiplicando per numerum terminorum progressionis, et dimidium facti sumendo; Progressionis verò hujusce primus terminus est P D, ultimus P F numerus vero terminorum D F, siquidem D F est summa incrementorum æqualium evanescentium lineæ P D, ergo summa omnium P D est $\frac{\overline{PF + PD} \times DF}{2}$, sive (quia D F est differentia linearum P F et P D) est summa omnium P D $= \frac{\overline{PF + PD} \times \overline{PF - PD}}{2}$ sed (per 6. 2. Elem.) factum summæ et differentiæ duarum linearum æquatur differentiæ quadratorum ipsorum, ergo $\frac{\overline{PF + PD} \times \overline{PF - PD}}{2} = \frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2$ et summa omnium $PD \times Dd = \overline{\frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2} \times Dd$, sed D d est particula quæ in omnibus hisce casibus ut eadem assumitur, ergo vires totius superficiei F E quæ sunt ut summa omnium P D × D d sunt ut $\frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2$ sive ut $PF^2 - PD^2$ sed PF^2 est æquale PE^2 per constr. et $PE^2 - PD^2 = DE^2$ (per 47. 1. El.) ergo vires superficiei F E, sunt ut DE^2. Q. e. d.

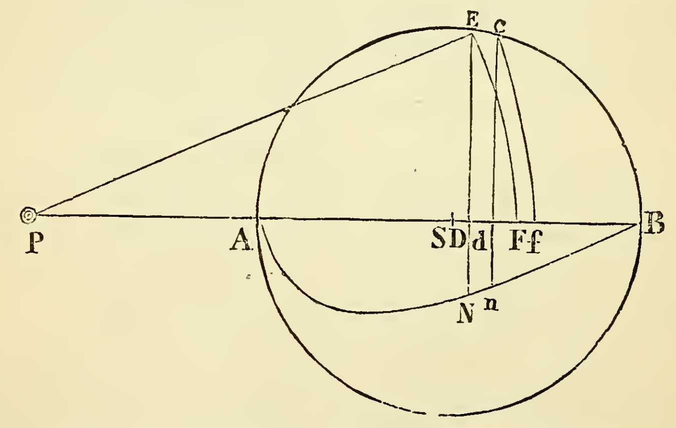
Idem aliter. Sit radius datus P E = a, variabilis F D = x, erit fluxio D d = d x, et P D = a — x, atquè adeò P D × D d = a d x — x d x, et sumptis utrinque fluentibus (165) S. $PD \times Dd = ax - \frac{1}{2}xx = \frac{2ax - xx}{2} = \frac{DE^2}{2}$, (Prop. 13. Lib. 6. Elem.) Quarè vis superficiei convolutione arcûs F E genitæ erit ut DE^2.

(c) * *At si vis illa non detur,* &c. Zona convolutione arcûs E e genita ducatur in datam altitudinem F f, et erit annuli solidi indè geniti vis secundum lineam P E undiquè exercita ut hic ipse annulus et vis lineolæ F f conjunctim, hoc est, si vis lineolæ F f dicatur V, ut P E × D d × F f × V (518). At vis annuli secundùm lineam P S minor erit in ratione P D ad P E, ideòque erit ut P D × D d × F f × V. Et quoniam variante P D, manet factum F f × V quod nimirum vis V in singulis particulis datis F f, æqualis supponatur; Si sumantur fluentes, ut suprà, erit vis tota solidi E F f e, in corpusculum P secundùm lineam P S exercita ut $DE^2 \times Ff \times V$.

PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

Si ad sphæræ alicujus A B E, *centro* S *descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, et ad sphæræ axem* A B, *in quo corpusculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis singulis* D *perpendicula* D E, *sphæræ occurrentia in* E, *et in ipsis capiantur longitudines* D N, *quæ sint ut quantitas* $\frac{DEq \times PS}{PE}$ *et vis, quam sphæræ particula sita in axe ad distantiam* P E *exercet in corpusculum* P, *conjunctim: dico quod vis tota, quâ corpusculum* P *trahitur versus sphæram, est ut area* A N B *comprehensa sub axe sphæræ* A B, *et lineâ curvâ* A N B, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*

Etenim stantibus quæ in Lemmate et Theoremate novissimo constructa sunt, concipe axem sphæræ A B dividi in particulas innumeras æquales



D d et sphæram totam dividi in totidem laminas sphæricas concavo-convexas E F f e, et erigatur perpendiculum d n. Per Theorema superius vis, quâ lamina E F f e trahit corpusculum P, est ut D E q × F f et vis particulæ unius ad distantiam P E vel P F exercita conjunctim. Est autem (per Lemma novissimum) D d ad F f ut P E ad P S, et inde F f æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; et D E q × F f æquale D d in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, et propterea vis laminæ E F f e est ut D d in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ et vis particulæ ad distantiam P F exercita conjunctim, hoc est (ex Hypothesi) ut D N × D d, seu area evanescens D N n d. Sunt igitur laminarum om-

nium vires, in corpus P exercitæ, ut areæ omnes D N n d, hoc est, sphæræ vis tota ut area tota A N B. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantiis, et fiat D N ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$; erit vis tota, quâ corpusculum a sphæra attrahitur, (d) ut area A N B.

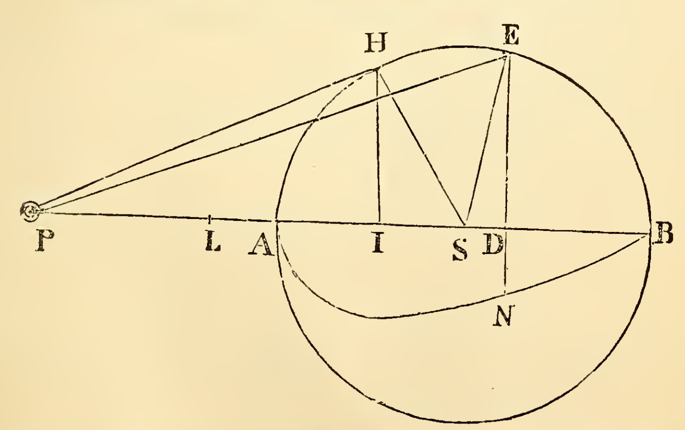
Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut distantia corpusculi a se attracti, et fiat (e) D N ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$; erit vis, quâ corpusculum P a sphærâ totâ attrahitur, ut area A N B.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciprocè ut cubus distantiæ corpusculi a se attracti, et fiat D N ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$; erit vis, quâ corpusculum a totâ sphærâ attrahitur, ut area A N B.

Corol. 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens ponatur esse reciprocè ut quantitas V, fiat autem D N ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis, quâ corpusculum a sphærâ totâ attrahitur, ut area A N B.

PROPOSITIO LXXXI. THEOREMA XLI.

Stantibus jam positis, mensuranda est area A N B.

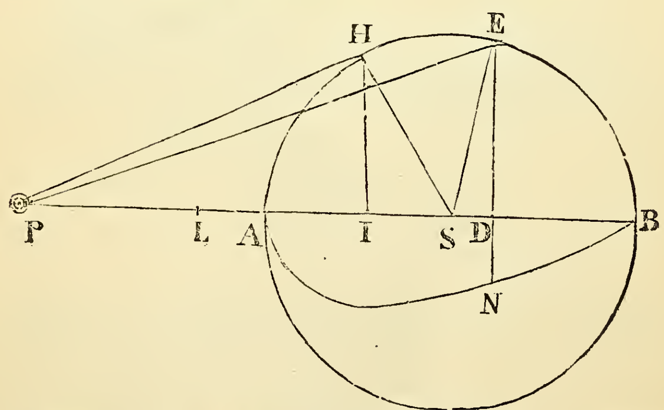


A puncto P ducatur recta P H sphæram tangens in H, et ad axem

(d) * *Ut area A N B.* Nulla enim habenda est ratio vis particulæ F f quæ eadem in omnibus distantiis manet ex hyp.

(e) * *Fiat D N,* &c. Substitutâ quantitate $\frac{1}{PE}$ loco vis particulæ F f.

P A B demissa normali H I, bisecetur P I in L; et erit (per Prop. XII. Lib. 2. Elem.) P E q æquale P S q + S E q + 2 P S D. Est autem S E q seu S H q (ob (f) similitudinem triangulorum S P H, S H I) æquale rectangulo P S I. Ergo P E q æquale est contento sub P S et P S + S I + 2 S D, hoc (g) est, sub P S et 2 L S + 2 S D, id est, sub P S et 2 L D. Porrò D E quad. æquale est S E q — S D q, seu (†) S E q — L S q + 2 S L D — L D q, id est, 2 S L D — L D q — A L B. Nam L S q — S E q seu L S q — S A q (per Prop. VI. Lib. 2. Elem.) æquatur rectangulo A L B. Scribatur itaque 2 S L D — L D q — A L B pro D E q; et quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ secundum Corollarium quartum Propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ D N, resolvet sese in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi si pro V scribatur ratio inversa vis centripetæ, et pro P E medium proportionale inter P S et 2 L D; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, (h) quarum areæ per methodos vulgatas innotescunt. Q. e. f.



(f) * *Ob similitudinem triangulorum*, &c. (Per Prop. 13. Lib. 6. Elem.)

(g) * *Hoc est sub P S et 2 L S + 2 S D.* Ob P S + S I = P I + 2 S I = 2 L I + 2 S I = 2 L S.

(†) * *Seu S E² — L S²*, &c. Ob S D = L D — L S, adeóque $SD^2 = LD^2 - 2SLD + LS^2$.

(h) 519. *Quarum areæ per methodos vulgatas innotescunt.* Sint variabiles P E = z, L D = x, adeoque D d = d x, sint constantes P A = a, P B = b, P S = c, et L S = m, L A = p, L B = q, et erit areæ A N D fluxio D N × d x ut $\frac{2mcxdx}{zV} - \frac{cxxdx}{zV} - \frac{pqcdx}{zV}$: quoniam verò PE^2 (z z) = 2 P S × L D (2 c x), est $x = \frac{zz}{2c}$ et $dx = \frac{zdz}{c}$, quibus valoribus loco x et d x in formula substitutis illa in hanc mutatur $\frac{mz^2dz}{cV} - \frac{z^4dz}{4c^2V} - \frac{pqdz}{V}$.

Exempl. 1. Si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens sit reciprocè ut distantia; pro V scribe distantiam P E; dein $2\,PS \times LD$ pro P E q, et fiet D N ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2\,LD}$. Pone D N æqualem ejus duplo $2\,SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: et ordinatæ pars data 2 S L ducta in longitudinem A B describet aream rectangulam $2\,SL \times AB$; et pars indefinita L D ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, eâ lege ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini L D, ([i]) describet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, (†) id est, aream $SL \times AB$; quæ subducta de areâ priore $2\,SL \times A$

Sit vis attractiva ut distantiæ z dignitas $\frac{1}{z^n}$ erit $V = z^n$, quo valore loco V in formulâ posito, fiet $DN \times dx$ ut $\frac{mz^{2-n}dz}{c} - \frac{z^{4-n}dz}{4c^2} - pqz^{-n}dz$, unde sumptis singulorum terminorum fluentibus (165) erit S. $DN \times dx$, seu area AND, ut $\frac{mz^{3-n}}{\overline{3-n} \times c} - \frac{z^{5-n}}{\overline{5-n} \times 4c^2} - \frac{pqz^{1-n}}{1-n} + Q$ constans. Sed fluens illa evanescere debet dum fit $PE\,(z) = PA\,(a)$ est ergo $Q = \frac{a^{5-n}}{\overline{5-n} \times 4c^2} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{ma^{3-n}}{\overline{3-n} \times c}$ ac proinde fluens accurata ubi $PE\,(z) = PB\,(b)$ erit $\frac{mb^{3-n}}{\overline{3-n} \times c} - \frac{b^{5-n}}{\overline{5-n} \times 4c^2} - \frac{pqb^{1-n}}{1-n} + \frac{a^{5-n}}{\overline{5-n} \times 4c^2} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{ma^{3-n}}{\overline{3-n} \times c}$.

520. Cùm sit semper $PE^2 = 2\,PS \times LD$; et ubi P E fit P B sit $LD = LB$, ubi verò P E fit P A sit $LD = LA$, erit $PB^2\,(b^2) = 2\,PS \times LB\,(2cq)$ et $PA^2\,(a^2) = 2\,PS \times LA\,(2cp)$ quibus valoribus, loco b^2 et a^2 substitutis, formula fit

$$\frac{2mqb^{1-n}}{3-n} - \frac{q^2b^{1-n}}{5-n} - \frac{pqb^{1-n}}{1-n} + \frac{p^2a^{1-n}}{5-n} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{2mpa^{1-n}}{3-n},$$

et restitutis litteris figuræ

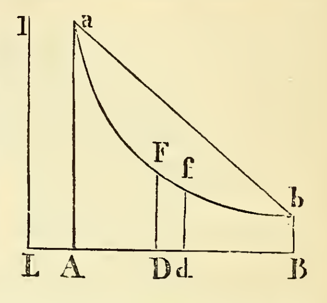
$$\frac{2\,SLB \times PB^{1-n}}{3-n} - \frac{LB^2 \times PB^{1-n}}{5-n} - \frac{ALB \times PB^{1-n}}{1-n} + \frac{AL^2 \times PA^{1-n}}{5-n} + \frac{ALB \times PA^{1-n}}{1-n} - \frac{2\,SLA \times PA^{1-n}}{3-n}.$$

521. *Cor.* 1. Hinc liquet aream A N B, seu attractionem cui proportionalis est, semper posse algebraice inveniri, tribus tantum casibus exceptis in quibus est n — 1 vel 3, vel 5, seu in quibus vis attractiva decrescit in ratione distantiæ simplici, vel triplicatâ vel quintuplicatâ. In his enim casibus tribus divisores $1-n$, $3-n$, $5-n$, evanescunt; sed tum fluens per logarithmos, aut quod idem est, per quadraturam hyperbolæ obtinetur, ut exemplis infrà positis patebit.

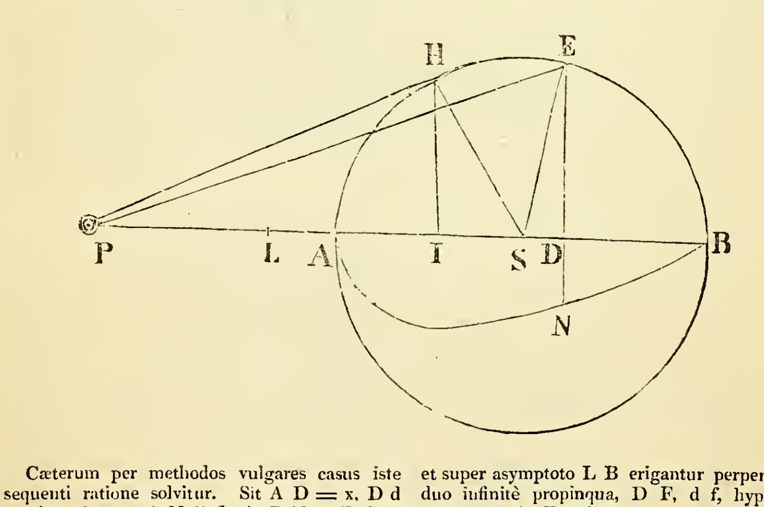
([i]) 522. *Describet aream* $\frac{LBq - LAq}{2}$. Area, quam describet, erit trapezium, nam si a puncto L in longitudinem A B semper erigantur perpendicula æqualia L D, omnes terminabuntur in recta linea ducta a puncto L in terminum perpendiculi in B erecti et æquali L B, sicque formabitur triangulum cujus pars secundum A B sita est area quæsita, et ea erit trapezium cujus latera in A et B perpendicularia, inter se parallela sunt, et latus puncto A insistens erit æquale L A, latus verò oppositum in B erectum erit æquale L B, hujus ergo trapezii superficies erit $\frac{LA + LB}{2} \times AB$, sed $AB = LB - LA$, ergo per 6. 2. El. $\frac{LA + LB}{2} \times \overline{LB - LA} = \frac{LB^2 - LA^2}{2}$: (quod trapezium est æquale trapezio A a b B in figurâ Newtonianâ descripto, ut liquet per ejus figuræ const.)

(†) *Id est, aream* $SL \times AB$, cùm enim hæc area sit $= \frac{LA + LB}{2} \times AB$, sitque $LB = LA + 2\,AS$ erit $LA + LB = 2\,LA + 2\,AS = 2\,LS$ unde $\frac{LA + LB}{2} \times AB = LS \times AB$. Unde etiam sequitur trapezium A a b B rectangulo $LS \times AB$ esse æquale.

relinquit aream S L × A B. Pars autem tertia $\frac{A L B}{L D}$, ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream hyperbolicam; quæ subducta de areâ S L × A B relinquet aream quæsitam A N B. Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula L l, A a, B b, quorum A a ipsi L B, et B b ipsi L A æquetur. Asymptotis L l, L B per puncta a b describatur hyperbola a b. Et acta chorda b a claudet aream a b a areæ quæsitæ A N B æqualem.



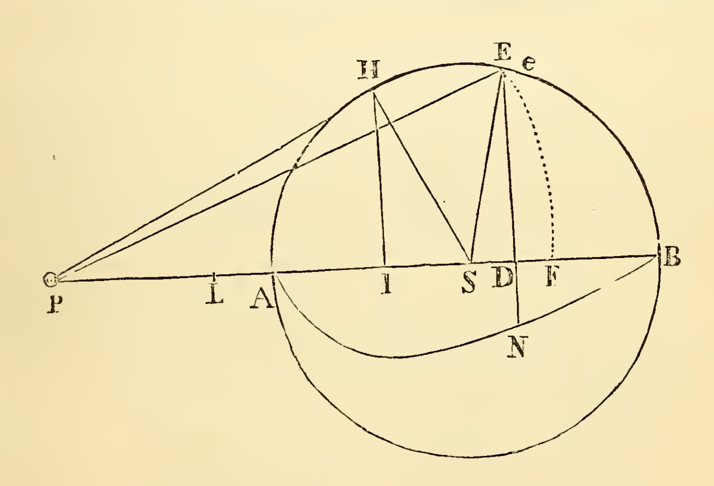
Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas sphæræ particulas tendens sit reciprocè ut cubus distantiæ, vel (quod perinde est) ut cubus ille applica-



Cæterum per methodos vulgares casus iste sequenti ratione solvitur. Sit A D = x. D d = d x erit areæ A N D fluxio D N × D d = 2 S L × d x — L A × d x — x d x — $\frac{A L B \times d x}{L D}$. Primi termini 2 S L × d x, fluens (165) est 2 S L × $\dot{x}$ = 2 S L × A B, ubi A D, seu x = A B. Secundi termini L A × d x + x d x, fluens est L A × x + ½ x x = $\frac{2 L A + A B \times A B}{2}$ = L S × A B, quandò x, seu A D, fit A B. Quarè duorum priorum terminorum fluens est 2 S L × A B — S L × A B sive S L × A B. Jam ut tertii termini $\frac{A L B \times d x}{L D}$ fluens inveniatur describatur hyperbola A B, prout Newtonus præscribit, et super asymptoto L B erigantur perpendicula duo infinitè propinqua, D F, d f, hyperbolæ occurrentia in F et f, sitque A D = x, D d = d x, et erit (per Theor. 4. de Hyperbolâ) L A × A a = L D × D F, adeóque D F = $\frac{L A \times A a}{L D} = \frac{A L B}{L D}$, et D F × D d, seu fluxio areæ A a F D = $\frac{A L B \times d x}{L D}$. Quarè area hyperbolica A a F D, æqualis est fluenti tertii termini, et area hyperbolica A a b B, est ejusdem termini fluens, ubi x, seu A D = A B. Hæc igitur subducta de rectangulo S L × A B, sive de trapezio A a b B ipsi æquali, relinquet aream quæsitam A N B. Relinquitur autem area a F b a; undè patet constructio.

523. *Cor.* 1. Si distantia corpusculi P a

tus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PE\ cub.}{2\,ASq}$ pro V, dein $2\,PS \times LD$ pro PEq; et fiet DN ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2\,PS} - \frac{ALB \times ASq}{2\,PS \times LDq}$, id (k) est (ob continuè proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2\,LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream hyperbolicam; secunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2\,LDq}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2\,LA} - \frac{ALB \times SI}{2\,LB}$, id est $\frac{1}{2}AB \times SI$. De primâ subducatur summa secundæ et tertiæ, et manebit area

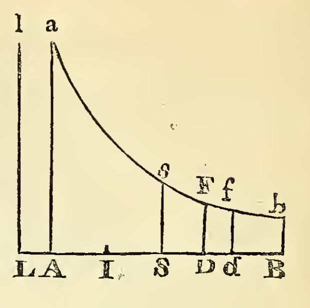


sphærâ evanescat, erit $Bb = LA = o$ ideoque hyperbola AFb cum suis asymptotis Ll, LB congruet nullaque erit ejus area. Quarè corpusculo posito in A, seu in contactu sphæræ attractio erit ut rectangulum $SL \times AB = 2\,AS^2$, ut etiam demonstrari posset eodem modo ac demonstrata fuit Prop. 72.

524. *Cor.* 2. Vis quâ corpusculum P, versùs portionem sphæræ convolutione superficiei AEF, genitam trahitur est ut $\overline{LB - \frac{1}{2}x} \times x - AaFD$; Nam (per not. 522.) vis illa est ut $2\,SL \times x - LA \times x - \frac{1}{2}xx - AaFD$, et $2\,SL = 2\,LA + 2\,AS$ et $2\,SL - LA = LA + 2\,AS = LB$, unde vis illa est $\overline{LB - \frac{1}{2}x} \times x - AaFD$; sed P posito in contactu sphæræ est $LB = AB$ et areâ hyperbolicâ evanescit, vis ergo fit in contactu $\overline{AB - \frac{1}{2}x} \times x$, sive $\overline{AB - \frac{1}{2}AD} \times AD$.

525. *Cor.* 3. Quoniam attractio corpusculi P versùs sphæram totam est ut $SL \times AB - AabB$, ejusdem attractio versùs portionem sphæræ convolutione superficiei FEeB (fig. Prop. 80.) genitam, erit ut $SL \times AB - LB \times x + \frac{1}{2}xx + AaFD - AabB = SL \times AB - LB \times AD + \frac{1}{2}AD^2 - DFbB$, sive substitutis $LA + \frac{1}{2}AB$ pro SL, $LA + AB$ loco LB, et pro $AB - AD$ posito BD fiet ut $\overline{LA + \frac{1}{2}BD} \times BD - DFbB$, et corpusculo in contactu posito, erit ut $\frac{1}{2}BD^2$.

(k) * *Id est, ob continuè proportionales, &c.* Per Prop. 8. l. 6. El. undè $AS^2 = PS \times SI$.



quæsita A N B. (¹) Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendicula L l, A a, S s, B b, quorum S s ipsi S I æquetur, perque punctum s asymptotis L l, L B describatur hyperbola a s b occurrens perpendiculis A a, B b in a et b; et rectangulum 2 A S I subductum de area hyperbolica A a s b B relinquet aream quæsitam A N B.

Exempl. 3. Si vis centripeta, ad singulas sphæræ particulas tendens, decrescit in quadruplicatâ ratione distantiæ a particulis; scribe $\frac{\text{P E q q}}{\text{2 A S cub.}}$

(¹) 526. * *Unde talis emergit problematis constructio.* Sit, ut suprà A D = x, D d = d x, erit areæ A N D, fluxio D N × D d, ut $\frac{\text{L S I} \times \text{d x}}{\text{L D}} - \frac{1}{2}\text{S I} \times \text{d x} - \frac{\text{A L B} \times \text{S I} \times \text{d x}}{2\,\overline{\text{L A} + \text{x}}^2}$. Jam ut primi termini $\frac{\text{L S I} \times \text{d x}}{\text{L D}}$, fluens habeatur, describatur hyperbola a s b, eo modo quo jubet Newtonus, erectisque perpendiculis D F, d f, sit A D = x, D d = d x, et quoniam (per Theor. 4. de Hyperbolâ) L S × S I = L D × D F, erit D F = $\frac{\text{L S I}}{\text{L D}}$, et D F × D d = $\frac{\text{L S I} \times \text{d x}}{\text{L D}}$. Patet igitur (ut in not. 522.) aream Hyperbolicam A a s b B, æqualem esse fluenti primi termini, dum A D seu x = A B; secundi termini $\frac{1}{2}$ S I × d x, fluens est $\frac{1}{2}$ S I × A D = $\frac{1}{2}$ S I × A B, dum fit A D = A B; tertii tandem termini fluens hoc modo invenitur. Quantitatis $\frac{\text{d x}}{(\text{L A} + \text{x})^2}$ fluens (165) est $-\frac{1}{\text{L A} + \text{x}}$ + Q constans; et quoniam fluens illa evanescere debet ubi x = o, erit Q = $\frac{1}{\text{L A}}$. Quarè fluens accurata est $\frac{1}{\text{L A}} - \frac{1}{\text{L D}} = \frac{1}{\text{L A}} - \frac{1}{\text{L B}}$, ubi x = A B. Est igitur tertii termini $\frac{1}{2}$ A L B × S I × $\frac{\text{d x}}{\overline{\text{L A} + \text{x}}^2}$ fluens = $\frac{\text{A L B} \times \text{S I}}{2\text{L A}} - \frac{\text{A L B} \times \text{S I}}{2\text{L B}} = \frac{1}{2}$ L B × S I − $\frac{1}{2}$ L A × S I = $\frac{1}{2}$ A B × S I, undè summa 2ⁱ et 3ⁱ. termini est A B × S I = 2 A S × S I. Quarè rectangulum 2 A S I subductum de areâ hyperbolicâ A a s b B relinquet aream quæsitam A N B.

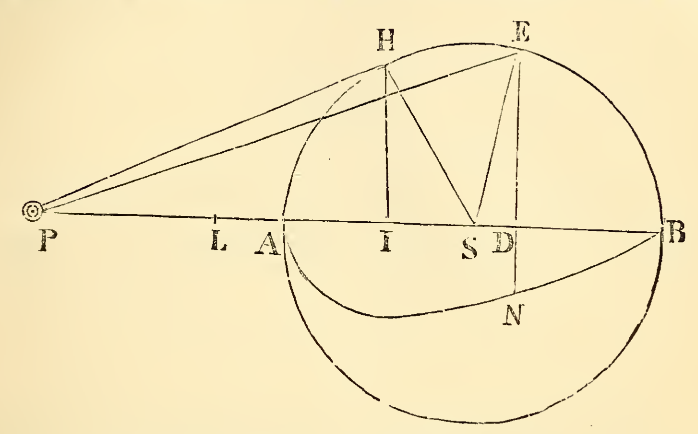
527 *Cor.* 1 Si corpus P sphæram tangat in A, attractio evadet infinita, nam in hoc casu L A = o et A a cum asymptoto L l coincidit, ac proindè attractio per aream hyperbolæ infinitam B L l a s b exponitur.

528. *Corol.* 2. Vis quâ corpusculum P in sphæræ portionem convolutione superficiei A E F genitam, trahitur, est ut A a F D − $\frac{1}{2}$ S I × A D − $\frac{1}{2}$ L B × S I + $\frac{\text{A L B} \times \text{S I}}{2\text{L D}}$, ut ex notâ 526. manifestum est. Quarè in contactu ubi L A = o, erit vis illa ut area infinita A a F D, cujus respectu aliæ finitæ quantitates evanescunt.

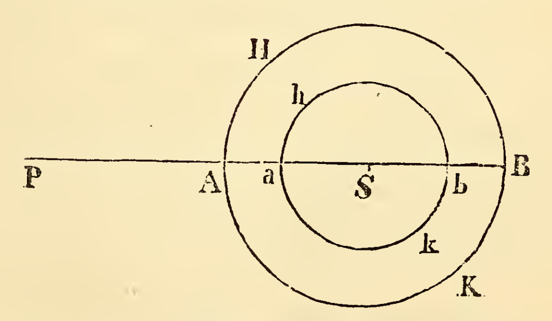
529. *Cor.* 3. Et quoniam corpusculi P attractio in sphæram totam est ut area hyperbolica A a s b B − 2 A S I, ejusdem attractio versùs portionem concavo-convexam, convolutione superficiei F E e B, genitam, erit ut A a s b B − A a F D − 2 A S I + $\frac{1}{2}$ A D × S I + $\frac{1}{2}$ L B × S I − $\frac{\text{A L B} \times \text{S I}}{2\text{L D}}$ = D F b B + $\frac{1}{2}\overline{\text{L A} - \frac{1}{2}\text{B D}}$ × S I − $\frac{\text{A L B} \times \text{S I}}{2\text{L D}}$, ponendo A B pro 2 A S, $\frac{1}{2}$ L A + $\frac{1}{2}$ A B pro $\frac{1}{2}$ L B, et $\frac{1}{2}$ B D pro $\frac{1}{2}$ A B − $\frac{1}{2}$ A D.

530. *Cor.* 4. Simili modo inveniri potest vis quâ corpus P trahitur versùs sphæram concavam A a H B K a, si ex attractione in sphæram totam solidam detrahatur attractio in sphæram interiorem a h b k. Patet autem corpusculi P in A, seu in contactu positi attractionem versùs sphæram cavam A a H B K a, interiori concentricam, infinitam esse; Nam si ex vi infinitâ quâ versùs sphæram solidam A H B K S, trahitur, subducatur vis finita quâ versùs sphæram interiorem a h b k s urgetur, relinquetur attractio infinita versùs sphæram concavam A a H B K a · quin imò, si ex sphærâ concavâ detrahatur pai quævis a contactu remota ut H h B K k, at tractio corpusculi in contactu A positi versùs re siduam H h A a K k, adhuc infinita erit, 1 patet (per Cor. 2. et 3).

pro V, dein $\sqrt{2 PS \times LD}$ (m) pro P E, et fiet D N ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2 SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIq}{2\sqrt{2 SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2 SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$.



(n) Cujus tres partes ductæ in longitudinem A B, producunt areas totidem, viz. $\frac{2\, SIq \times SL}{\sqrt{2 SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2 SI}}$ in

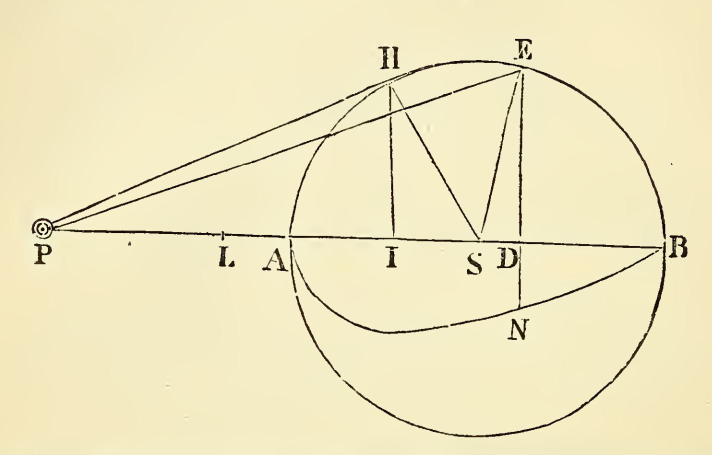


(m) * *Pro P E.* Erit $PE^5 = 4 PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2 PS \times LD}$, et $AS^3 = PS \times SI \times \sqrt{PS \times SI}$. Undè fiet $\frac{SLD \times PS}{PE \times V} = \frac{4 SLD \times PS \times AS^3}{PE^5} = \frac{4 SL \times LD \times PS^2 \times SI \sqrt{PS \times SI}}{4 PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2 PS \times LD}} = \frac{SL \times SI \sqrt{SI}}{LD \sqrt{2 LD}} = \frac{SL \times SI^2}{LD \sqrt{2 SI \times LD}} = \frac{SI^2 \times SL}{2\sqrt{2 SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^3}}$. Et ità de cæteris terminis.

(n) *Cujus tres partes,* &c. Sit $AD = x$ fluxio $AD = dx$, et erit areæ A N D fluxio $DN \times dx$, ut $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2 SI}} \times \frac{dx}{\overline{LA + x}^{\frac{3}{2}}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2 SI}} \times \frac{dx}{\overline{LA + x}^{\frac{1}{2}}} - \frac{SI^2 \times ALB}{2\sqrt{2 SI}} \times \frac{dx}{\overline{LA + x}^{\frac{5}{2}}}$, quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA + x}^{\frac{3}{2}}}$, seu $\overline{LA + x}^{-\frac{3}{2}}\, dx$ fluens est $\frac{-2}{\overline{LA + x}^{\frac{1}{2}}} + Q$ const. (165) quæ evanescere debet ubi $x = 0$; quarè erit $Q = \frac{2}{\sqrt{LA}}$ et fluens accurata $= \frac{2}{\sqrt{LA}} - \frac{2}{\sqrt{LB}}$, dum fit $x = AB$. Primi

$\overline{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}$; et $\frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA\,cub.}} - \frac{1}{\sqrt{LB\,cub.}}$

(°) Et hæ post debitam reductionem fiunt $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, SI q, et SI q +



$\frac{2\,SI\,cub.}{3\,LI}$. Hæ vero, subductis posterioribus de priore, evadunt $\frac{4\,SI\,cub.}{3\,LI}$. Proinde vis tota, quâ corpusculum P in sphæræ centrum

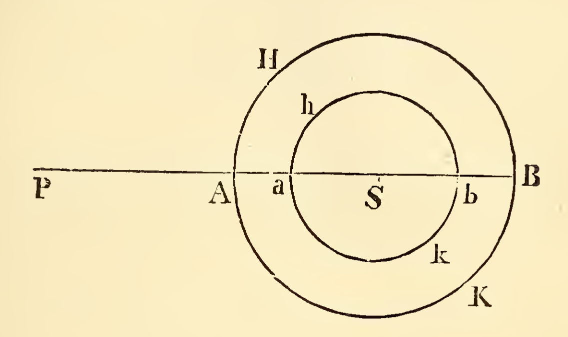
igitur termini fluens erit $\frac{2SI \times SL}{\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$. Quantitatis $\frac{dx}{LA+x^{\frac{1}{2}}}$, fluens est $2\,(LA + x)^{\frac{1}{2}} + Q$ const. et factâ $x = o$, invenitur $Q = -2\sqrt{LA}$; quarè fluens accurata est $2\sqrt{LB} - 2\sqrt{LA}$, dum $x = AB$. Secundi igitur termini fluens erit $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}}$, in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$.

Quantitatis $\frac{dx}{LA+x^{\frac{5}{2}}}$, fluens est $\frac{-2}{3\,(LA+x)^{\frac{3}{2}}}$ + Q, et $Q = \frac{2}{3\sqrt{LA^3}}$, undè fluens integra erit $\frac{2}{3\sqrt{LA^3}} - \frac{2}{3\sqrt{LB^3}}$, ubi $x = AB$, et proindè tertii termini fluens est $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA^3}} - \frac{1}{\sqrt{LB^3}}$.

(°) * *Et hæ post debitam reductionem*, &c. Est $PS \times SI = AS^2$ (per Prop. VIII. Lib. VI. Elem.) sed $PS = LS + LI$, ob $PL = LI$, (per constr.) et $SI = LS - LI$, ergò $PS \times SI = LS^2 - LI^2 = AS^2$, et hinc $LI^2 = LS^2 - AS^2 = \overline{LS + AS} \times \overline{LS - AS} = LB \times LA$. Quarè LI sive $LS - SI = \sqrt{LA \times LB}$, et $2LS - 2SI = 2\sqrt{LA \times LB}$, et $2SI = 2LS - 2\sqrt{LA \times LB} = LB - 2\sqrt{LB \times LA} + LA$, et extractâ utrinque radice quadratâ $\sqrt{2SI} = \sqrt{LB} - \sqrt{LA}$. His positis, facilis est terminorum reductio; erit enim, $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}} = \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{\sqrt{LB \times LA}} = \frac{\sqrt{2SI}}{LI}$. Quarè patet primum fluentis terminum esse $\frac{2SI^2 \times SL}{LI}$; secundum verò esse SI^2. Tertius terminus, reductione ad communem denominatorem factâ, est $\frac{SI^2 \times LA \times LB}{3\sqrt{2SI}} \times \frac{\sqrt{LB^3} - \sqrt{LA^3}}{LA \times LB\sqrt{LA \times LB}} = \frac{SI^2 \times \sqrt{LB^3} - \sqrt{LA^3}}{3LI \times \sqrt{LB} - \sqrt{LA}}$. Peractâ divisione invenitur $\frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} = LB + LB^{\frac{1}{2}} + LA^{\frac{1}{2}} + LA = LB + LI +$

trahitur, est ut $\frac{S\,I\ cub.}{P\,I}$, (p) id est, reciprocè ut P S cub. × P I. Q. e. i.

Eâdem methodo determinari potest attractio corpusculi siti intra sphæram, sed expeditius per Theorema sequens.



$LA = 2SI + 3LI$, ob $LB + LA = 2LS = 2SI + 2LI$. Quarè tertius terminus est $\frac{SI^2 \times \overline{2SI + 3LI}}{3LI} = SI^2 + \frac{2SI^3}{3LI}$, unde tres fluentes ad communem denominatorem reducti fiunt $\frac{6SI^2 \times SL - SI^2 \times 3LI - SI^2 \times 3LI - 2SI^3}{3LI} = \frac{6SI^2 \times \overline{SL - LI} - 2SI^3}{3LI}$, sed quia $SL - LI = SI$ fiunt $\frac{6SI^3 - 2SI^3}{3LI} = \frac{4}{3}\frac{SI^3}{LI}$.

(p) * *Id est reciprocè ut $PS^3 \times PI$.* Nam cum sit $PS \times SI = AS^2$, ideóque $SI = \frac{AS^2}{PS}$, hinc, dato radio A S, est S I ut $\frac{1}{PS}$, SI^3, ut $\frac{1}{PS^3}$; est verò $LI = \frac{1}{2} PI$ ideóque etiam et L I ut P I, unde erit $\frac{4SI^3}{3LI}$ ut $\frac{1}{PS^3 \times PI}$, neglectâ fractione $\frac{4}{3}$.

531. *Cor.* 1. In accessu corporis P ad sphæram, ità crescit illius attractio, ut in contactu infinita evadat, dum enim coincidit P cum A, puncta H et I cum eodem puncto A coincidunt, fitque $PI = 0$, et proindè quantitas $\frac{1}{PS^3 \times PI}$, infinita.

532. *Cor.* 2. Attractio corpusculi in contactu A positi versùs sphæram cavam A a H B K a, infinita est. Hæc enim attractio habetur, si ex attractione infinitâ versùs sphæram solidam A H B K S, subducatur attractio finita versùs sphæram interiorem a h b k S.

533. Hic adjungemus solutionem casûs tertii qui pendet a quadraturâ hyperbolæ, ubi nempè vis est ut PE^5 reciprocè (520). Scribe igitur $\frac{PE^5}{2AS^4}$, pro V; dein $8PS^3 \times LD^3$ pro PE^6, et $PS \times SI$ pro AS^2, unde est $\frac{PS}{PE \times V} = \frac{SI^2}{4LD^3}$ et fiet D N, ut $\frac{SL \times SI^2}{2LD^2} - \frac{SI^2}{4LD} - \frac{ALB \times SI^2}{4LD^3}$ seu, ut $\frac{SL \times SI^2}{LD^2} - \frac{1}{2}\frac{SI^2}{LD} - \frac{1}{2}\frac{ALB \times SI^2}{LD^3}$; undè fluxio $DN \times Dd$, erit ut $\frac{SL \times SI^2 \times dx}{\overline{LA + x}|^2} - \frac{1}{2}\frac{SI^2 \times dx}{LA + x} - \frac{1}{2}\frac{ALB \times SI^2 \times dx}{\overline{LA + x}|^3}$, positâ $AD = x$.

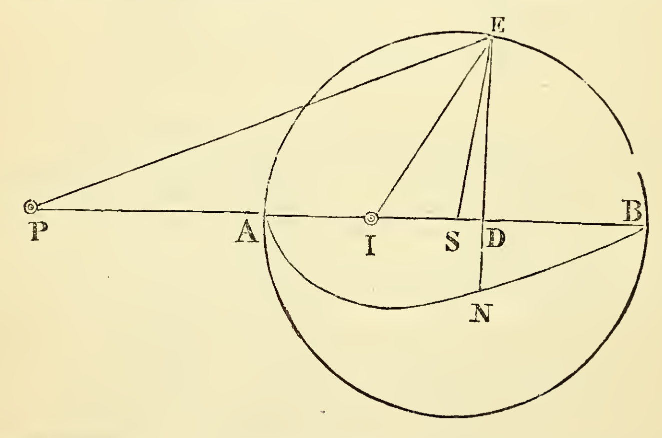
Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA + x}|^2}$, fluentem suprà (526) invenimus esse $\frac{1}{LA} - \frac{1}{LB} = \frac{LB - LA}{LA \times LB} = \frac{AB}{LI^2}$ ubi x seu $AD = AB$. Quare primi termini fluens erit $\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$.

Quantitatis $\frac{dx}{\overline{LA + x}|^3}$ fluens $= \frac{-1}{2(LA + x)^2} + Q$ const. quæ evanescere debet positâ x, seu $AD = 0$, quarè erit $Q = \frac{1}{2LA^2}$ et fluens accurata, ubi $AD = AB$, erit $\frac{1}{2LA^2} -$

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In sphærâ centro S *intervallo* S A *descriptâ, si capiantur* S I, S A, S P *continuè proportionales: dico quod corpusculi intra sphæram, in loco quovis* I, *attractio est ad attractionem ipsius extra sphæram, in loco* P, *in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione distantiarum a centro* I S, P S, *et subduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis* P *et* I, *ad centrum tendentium.*

Ut, si vires centripetæ particularum sphæræ sint reciprocè ut distantiæ corpusculi a se attracti; vis, quâ corpusculum situm in I trahitur a sphærâ totâ, erit ad vim, quâ trahitur in P, in ratione compositâ ex sub-



duplicatâ ratione distantiæ S I ad distantiam S P, et ratione subduplicatâ vis centripetæ in loco I, a particulâ aliquâ in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco P ab eâdem in centro particulâ oriundam, id est, ratione subduplicatâ distantiarum S I, S P ad invicem reciprocè. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt rationem æqualitatis, et propterea attrac-

$\frac{1}{2\,LB^2} = \frac{LB^2 - LA^2}{2\,LA^2 \times LB^2} = \frac{2\,SL \times AB}{2\,LI^4} = \frac{SL \times AB}{LI^4}$; undè tertii termini fluens erit $\frac{1}{2}\,\frac{ALB \times SI^2 \times SL \times AB}{LI^4} = \frac{1}{2}\,\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$, et differentia fluentium primi et tertii termini erit $\frac{1}{2}\,\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$. Secundi termini $\frac{1}{2}\,SI^2 \times \frac{dx}{LA + x}$, fluens est area hyperbolæ quæ itâ describitur. Ad puncta L, A, B, (vid. fig. exempli 2[i].) erige perpendicula L l, A a, B b, et asymptotis L l, L B, describe Hyperbolam æquilateram cujus sit dignitas $\frac{1}{2}\,SI^2$, et quoniam est (Theor. 4. Hyp.) $LD \times DF = \frac{1}{2}\,SI^2$ ideóque $DF = \frac{1}{2}\,\frac{SI^2}{LD}$, erit $DF \times Dd = \frac{1}{2}\,\frac{SI^2 \times dx}{LA + x}$ positâ $AD = x$. Quapropter area hyperbolica A a b B, æqualis est fluenti secundi termini ubi $AD = AB$. Hæc igitur area subducta de rectangulo $\frac{1}{2}\,\frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$ relinquet aream quæsitam A N B.

tiones in I et P a sphærâ totâ factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum sphæræ sunt reciprocè in duplicatâ ratione distantiarum, colligetur quod attractio in I sit ad attractionem in P, ut distantia S P ad sphæræ semidiametrum S A: si vires illæ sunt reciprocè in triplicatâ ratione distantiarum, attractiones in I et P erunt ad invicem ut S P quad. ad S A quad.: Si in quadruplicatâ, ut S P cub. ad S A cub. Unde cum attractio in P, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciprocè ut P S cub. $\times$ P I, attractio in I erit reciprocè ut S A cub. $\times$ P I, id est (ob datum S A cub.) reciprocè ut P I. (q) Et similis est progressus in infinitum. Theorema verò sic demonstratur.

Stantibus jam ante constructis, et existente corpusculo in loco quovis P, (r) ordinatim applicata D N inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo si agatur I E, ordinata illa pro alio quovis corpusculi loco I, (s) mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, e sphæræ puncto quovis E manantes, esse ad invicem in distantiis I E, P E, ut PE^n ad IE^n (ubi numerus n designet indicem potestatum P E et I E) (t) et ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ et $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob continuè proportionales S I, S E, S P, (u) similia sunt triangula S P E, S E I, et inde fit I E ad P E ut I S ad S E vel S A; pro ratione I E ad P E scribe rationem I S ad S A; et ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. (x) Sed P S ad S A subduplicata est ratio dis-

(q) * *Similis est progressus in infinitum.* Vires centripetæ acceleratrices a particulâ aliquâ in centro positâ oriundæ, sint inter se in distantiis I S, P S reciprocè ut harum distantiarum potestates IS^n, PS^n, et vis quâ corpusculum situm in I trahitur a sphærâ totâ, erit ad vim quâ trahitur in loco P ut $IS^{\frac{1}{2}}$ ad $PS^{\frac{1}{2}}$ et $PS^{\frac{n}{2}}$ ad $IS^{\frac{n}{2}}$ conjunctim, hoc est, ut $PS^{\frac{n-1}{2}}$ ad $IS^{\frac{n-2}{2}}$. Quarè cum sit, (ex Hyp.) P S : A S = A S : S I, adeóque $IS = \frac{AS^2}{PS}$, et $IS^{\frac{n-1}{2}} = \frac{AS^{n-1}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}$, vires illæ erunt ad invicem ut $PS^{\frac{n-1}{2}}$ ad $\frac{AS^{n-1}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}$, seu ut PS^{n-1} ad AS^{n-1}. Hinc si n = 1, vires erunt in ratione æqualitatis, si n = 2, erunt ut P S ad A S; Si n = 3 ut PS^2 ad AS^2, si n = 4 ut PS^3 ad AS^3, et ità porrò in infinitum.

(r) * *Ordinatim applicata D N inventa fuit,* &c. (Cor. 4. Prop. 80.)

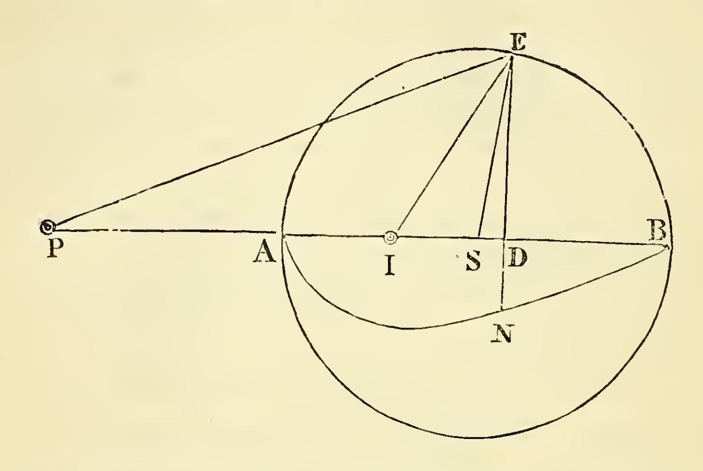
(s) * *Mutatis mutandis.* Nempè corpore in I sito, radio I E, describendus arcus circuli, et in formulâ attractionis $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, loco P S et P E, scribe I S, et I E.

(t) * *Et ordinatæ illæ,* &c. Si loco V scribantur PE^n, et IE^n, quæ sunt reciprocè ut vires acceleratrices in locis P et I, (per Cor. 4. Prop. 80.)

(u) * *Similia sunt triangula S P E, S E I,* per Prop. 6. Lib. 6. Elem.

(x) * *Sed P S ad S A subduplicata est ratio distantiarum P S, S I,* ob continuè proportionales P S, S A, S I. Porrò vires in distantiis P S, I S, sunt ad invicem ut IS^n, ad PS^n

tantiarum P S, S I; et IE^n ad PE^n (ob proportionales I E ad P E ut I S ad S A) subduplicata est ratio virium in distantiis P S, I S. Ergo



ordinatæ, et propterea areæ quas ordinatæ describunt, hisque proportionales attractiones, sunt in ratione compositâ ex subduplicatis illis rationibus. Q. e. d.

(ex Hyp.) et $IS : PS = IS^2 : AS^2 = IE^2 : PE^2$, (ob proportionales $IE : PE = IS : AS$), atque adeò $IS^n : PS^n = IE^{2n} : PE^{2n}$, et $IS^{\frac{n}{2}}\ PS^{\frac{n}{2}} = IE^n : PE^n$. Quarè IE^n est ad PE^n in ratione subduplicatâ virium in distantiis P S, I S, et ordinatarum ratio $PS \times IE^n$, ad $SA \times PE^n$ æqualis est rationi $PS^{\frac{1}{2}} \times IS^{\frac{n}{2}}$, ad $IS^{\frac{1}{2}} \times PS^{\frac{n}{2}}$.

534. *Scholium.* Iisdem positis quæ in Prop. 82. si centro I radio I A sphæra A C M D descripta sit, vis quâ corpusculum in I situm a totâ sphærâ majore A H B K versùs centrum S trahitur, æqualis est vi quâ subductâ sphæra minore A C M D traheretur. Nam corpusculum in centro I sphæræ A C M D positum, æqualiter undiquè ab hujus sphæræ minoris partibus trahitur.

535. *Cor.* 1. Si centro S radio S I descripta sit sphæra I h b k, et vis centripeta in recessu corporis attracti decrescat in triplicatâ ratione distantiarum a particulis materiæ trahentibus, corpusculum in I situm seu in contactu sphæræ cavæ A I H B K I, subductâ sphærâ interiore I h b k, vi infinitâ retrahitur a centro S versùs A. Nam vis quâ corpusculum in contactu I a sphærâ interiore I h b k versùs centrum S trahitur, infinita est (520. 527) respectu vis illius quâ extrâ contactum traheretur. Sed vis quâ a sphærâ totâ solidâ A H B K S, versus idem centrum S trahitur finita est, ut potè quæ rationem finitam habeat ad vim finitam, quâ corpusculum in loco P urgeretur (Prop. 82.) ergò vis quâ a sphærâ cavâ A I H B K I, retrahitur a centro versùs A infinita est; vis enim quâ in centrum S, a sphærâ solidâ A H B K S in centrum trahitur, æqualis est vi sphæræ interioris I h b k s, demptâ vi contrariâ sphæræ cavæ A I H B K I.

536. *Cor.* 2. Ductâ per I rectâ H F ad A B

PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

Invenire vim quâ corpusculum in centro sphæræ locatum ad ejus segmentum quodcunque attrahitur.

Si P corpus in centro sphæræ, et R B S D segmentum ejus plano R D S et superficie sphæricâ R B S contentum. Superficie sphæricâ E F G centro P descriptâ secetur D B in F, ac distinguatur segmentum in partes B R E F G S, F E D G. Sit autem superficies illa non purè mathematica, sed physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profunditas O, et erit hæc superficies (per [y] demonstrata Archimedis) ut P F × D F × O. Ponamus præterea vires attractivas particularum sphæræ esse reciprocè ut distantiarum dignitas illa, cujus index est n; et vis, quâ superficies E F G trahit corpus P, erit (per Prop. LXXIX.) ut $\frac{DEq \times O}{PF^n}$, id [z] est, ut $\frac{2 DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DFq \times O}{PF^n}$. Huic proportionale sit perpendiculum F N ductum in O; et [a] area curvilinea B D I, quam ordinatim applicata F N in longitudinem D B per motum continuum ducta describit, erit ut vis tota quâ segmentum totum R B S D trahit corpus P. Q. e. i.

perpendiculari et sphæræ occurrente in H et F vis quâ sphæræ segmentum A H F corpusculum in contactu, I situm versus A trahit, est etiam infinita in eâdem virium hypothesi. Nam partes omnes segmenti cavi I H b B K F I, corpus in I positum ad centrum S trahunt, ideóque a solo segmento A H F a centro versus A retrahitur, sed vi infinitâ a centro retrahitur 535. Ergo, &c.

(y) * *Per demonstrata Archimedis.* Nam (515) elementum superficiei E F G, est ut P F ducta in elementum lineæ D F, adeóque ob datam P F, respectu superficiei totius E F G, superficies illa (165) erit ut P F × D F, et proindè lamina ex hâc superficie et profunditate O, genita erit ut P F × D F × O.

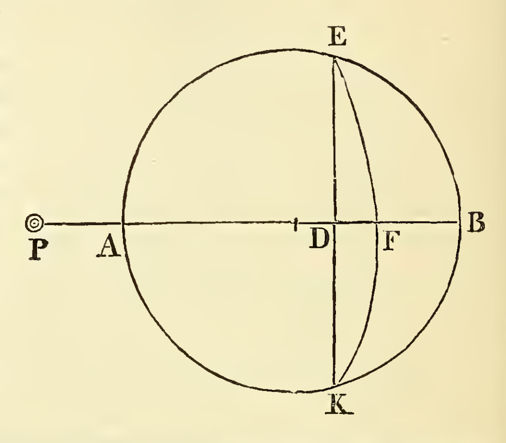
(z) * *Id est,* &c. Nam (per Prop. 13. Lib. 6. Elem.) $DE^2 = \overline{2PF - DF} \times DF = 2PF \times DF - DF^2$. Quarè $\frac{DE^2 \times O}{PF^n} = \frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \times O}{PF^n}$.

(a) 537. * *Et area curvilinea,* &c. Si segmentum R B S D R, in laminas innumeras profunditatis evanescentis O divisum intelligatur, et capiatur semper perpendiculum F N, vi singularum laminarum proportionale; manifestum est (per Lem. 4.) summam elementorum F N × O, seu aream curvilineam D N I B, proportionalem fore summæ virium. Sit igitur P D = a, P F = x, D F = x — a, et erit

PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

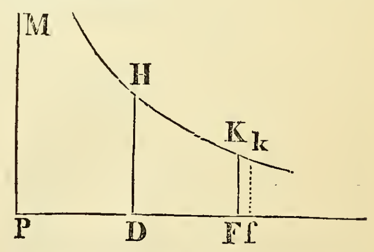
Invenire vim, quâ corpusculum, extra centrum sphæræ in axe segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.

A segmento E B K trahatur corpus P in ejus axe A D B locatum. Centro P intervallo P E describatur superficies sphærica E F K, quâ distinguatur segmentum in partes duas E B K F E et E F K D E. (b) Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI. et vis partis posterioris per Prop. LXXXIII.; et summa virium erit vis segmenti totius E B K D E. Q. e. i.



laminæ sphæricæ E F G vis attractiva ut $\frac{2xdx - 2adx}{x^{n-1}} - \frac{xxdx - 2axdx + aadx}{x^{n}} = \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{aadx}{x^{n}} = x^{2-n}dx - aax^{-n}dx$, cujus fluens $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{aax^{1-n}}{1-n} + Q$ const. Sed posita $x = a$, segmentum et vis illius evanescunt, ergò erit $Q = -\frac{a^{3-n}}{3-n} + \frac{a^{3-n}}{1-n} = \frac{2a^{3-n}}{\overline{3-n} \times \overline{1-n}}$, et fluens accurata $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{aax^{1-n}}{1-n} + \frac{2a^{3-n}}{\overline{3-n} \times \overline{1-n}}$.

538. *Cor.* Hinc patet vim quâ corpus in P locatum, a segmento trahitur semper posse algebraicè exponi, duobus casibus exceptis in quibus n est 1 vel 3. tùm autem per logarithmos vel areas hyperbolicas habetur. In 1°. casu areæ D N I, fluxio erit $xdx - \frac{aadx}{x}$. Primi termini fluens est $\frac{1}{2}xx + Q$, quæ evanescere debet positâ $x = a$, quare erit $Q = -\frac{1}{2}aa$, et fluens accurata $= \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}aa$. Ut secundi termini fluens obtineatur, per punctum P agatur P M ad P F normalis, et asymptotis P M, P F, describatur Hyperbola æquilatera cujus sit dignitas PD^2; per puncta D, F, f erigantur perpendicula D H, F K, f k hyperbolæ occurrentia in H, K, k, sintque puncta F, f, infinitè propinqua, et erit area hyperbolica D H K F, æqualis fluenti secundi termini; nam (per Theor. 4. de hyperbolâ) $PD \times DH = PD^2 = PF \times FK$, et ideò $FK = \frac{PD^2}{PF}$, ac $FK \times Ff = \frac{PD^2 \times dx}{x}$ et area D H K F evanescit, ubi P F seu $x = PD$.



In 2°. casu areæ D N I, fluxio est $\frac{dx}{x} - \frac{aadx}{x^3}$. Secundi termini fluens est $\frac{aa}{2xx} + Q$, et invenitur $Q = -\frac{1}{2}$, positâ $x = a$, atque adeò fluens accurata, erit $\frac{aa}{2xx} - \frac{1}{2}$. Ponatur $a = 1$, et primi termini $\frac{dx}{x}$, fluens, erit area hyperbolica D H K F = S. $\frac{aadx}{x}$. Quarè area D N I est ut, D H K F $+ \frac{1}{2} - \frac{1}{2xx}$.

(b) * *Quæratur vis partis prioris.* 525. 529.

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum sphæricorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum deque motibus inde oriundis, (c) ob earum in rebus philosophicis aliqualem usum, subjungere.

(c) * *Ob earum in rebus philosophicis aliqualem usum.* Vide Quæstiones Lib. 4. Optices Newtoni. 30. Theoremata ad calcem Astronomiæ Clariss. Keillii, Physicam Clariss. s'Gravesandii, Dissertationem Clariss. De Maupertuis in Commentariis Paris. 1732. ubi has Newtoni sectiones clarè exponit.

SECTIO XIII.

De corporum non sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longè fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicatâ distantiarum a particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum a particulis; attractio versus corpus sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV.) sit reciprocè ut quadratum distantiæ attracti corporis a centro sphæræ, haud sensibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur propositio de sphæris attractivis. (d) Et par est ratio orbium sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoque vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si sphæris hisce orbibusque sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, et partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum, qui ex contactu oritur. Constat igitur propositio de corporibus figurarum omnium. Q. e. d.

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicatâ vel plusquam triplicatâ ratione distantiarum a particulis, attractio longe fortior erit in contactu, quam cum trahens et attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujusmodi sphæram

(d) * *Et par est ratio orbium sphæricorum concavorum.* (Per Prop. 71.)

trahentem ([e]) augeri in infinitum, constat per solutionem Problematis XLI. in exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per exempla illa et Theorema XLI. inter se collata, ([f]) facile colligitur de attractionibus corporum versus orbes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed et addendo vel auferendo his sphæris et orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eò ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit Propositio de corporibus universis. Q. e. d.

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

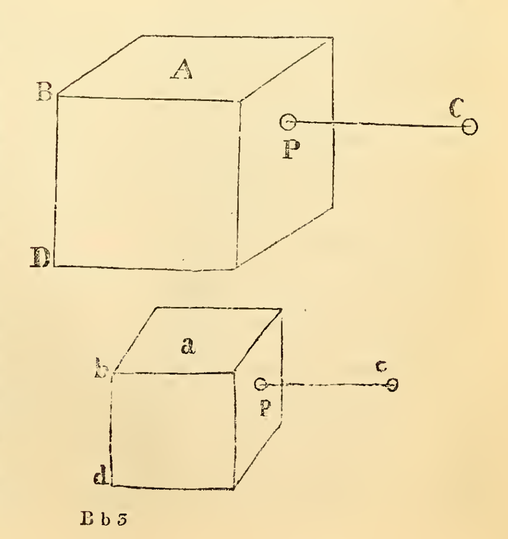
Si corpora duo sibi invicem similia, et ex materiâ æqualiter attractivâ constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia et ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales, et in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales, et in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; et componendo, ita attractio in totum primum corpus ([g]) ad attractionem in totum secundum. Q. e. d.

([e]) * *Augeri in infinitum constat,* &c. (521. 527. 531.)

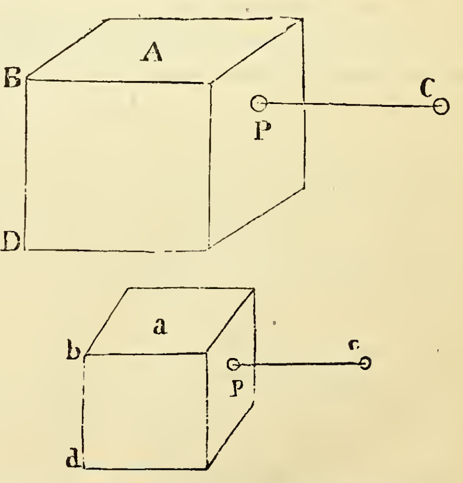
([f]) * *Facilè colligitur de attractionibus,* &c. 528. 530. 532. 535. 536.

([g]) 539. * *Ad attractionem in totum secundum.* Corpora similia A, a, seorsim attrahant corpuscula C, c sibi ipsis proportionalia et ad se similiter posita, sintque P, p particulæ totis A, a, proportionales et in totis similiter sitæ et attractio decrescat in ratione dignitatis distantiarum, cujus sit index n; erit attractio corpusculi C in particulam P ad attractionem corpusculi c in particulam p, ut $P \times pc^n$, ad $p \times PC^n$. Undè si corpora A et a in particulas innumeras ut P et p divisa intelligantur, erit, componendo, attractio corpusculi C in totum corpus A ad attractionem corpusculi c in totum corpus a, ut $P \times pc^n$ ad $p \times PC^n$, quod particulæ omnes P, p sint ubique totis similes et in iis similiter sitæ, et distantiæ earum a corpusculis C, c semper maneant proportionales distantiis



Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis cujusvis distantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directè, et distantiarum dignitates illæ inversè. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicatâ distantiarum a corpusculis attractis, corpora autem sint ut A cub. et B cub. ideoque tum corporum latera cubica, tum corpusculorum attractorum distantiæ a corporibus, ut A et B: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{\text{A cub.}}{\text{A quad.}}$ et $\frac{\text{B cub.}}{\text{B quad.}}$, id est, ut corporum latera illa cubica A et B. Si vires particularum decrescant in ratione triplicatâ distantiarum a corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{\text{A cub.}}{\text{A cub.}}$ et $\frac{\text{B cub.}}{\text{B cub.}}$, id est, æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplicatâ; attractiones in corpora erunt ut $\frac{\text{A cub.}}{\text{A q q.}}$ et $\frac{\text{B cub.}}{\text{B q q.}}$, id est, reciprocè ut latera cubica A et B. Et sic in cæteris.

Corol. 2. (h) Unde vicissim, ex viribus, quibus corpora similia trahunt



P C, p c. Cum igitur sit P ad p ut A ad a, et distantiæ p c, P C sint lateribus homologis b d, B D proportionales (ex Hyp.) erit attractio corpusculi C, in totum corpus A, ad attractionem corpusculi c in totum corpus a, ut $A \times pc^n$ ad $a \times PC^n$, atque etiam ut $A \times bd^n$ ad $a \times BD^n$, et ut $BD^3 \times bd^n$, ad $bd^3 \times BD^n$, hoc est, ut bd^{n-3} ad BD^{n-3}, ob proportionales $A : a = BD^3 : bd^3$, (per Hyp.) ex quibus patet Corollarium 1um. quod sequitur; Nam si n = 2, erunt attractiones ut B D ad b d; si n = 3, erunt æquales; si, n = 4, erunt ut b d, ad B D, hoc est, reciprocè ut latera cubica corporum.

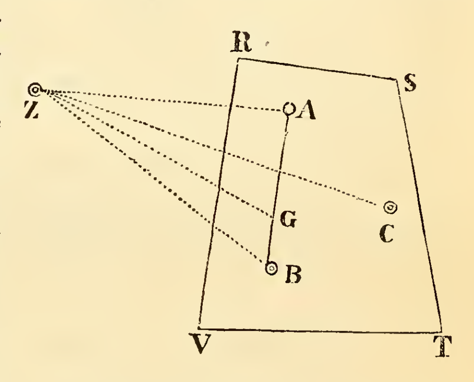
(h) 540. * *Undè vicissim*, &c. Nam si experimentis inventum sit attractionem corpusculi C in corpus A, esse ad attractionem corpusculi c, in corpus a, ut est B D ad b d, vel ut 1 ad 1, vel ut b d ab B D, vires particularum attractivarum decrescunt in ratione distantiarum duplicatâ, vel triplicatâ, vel quadruplicatâ (539). Et generatim, si experimentis inventa fuerit attractio corpusculi C in A ad attractionem corpusculi c in a, ut numerus N ad numerum n, ponaturque vim particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti decrescere in ratione dignitatis distantiarum cujus sit index x erit (539) $n : N = BD^{x-3} : bd^{x-3}$, adeóque (si L logarithmum significet quantitatis cui præponitur) erit $L.\frac{n}{N} = L.\frac{BD^{x-3}}{bd^{x-3}} = \overline{x-3} \times L.\frac{BD}{bd}$. Quarè erit $x \times L.\frac{BD}{bd} = L.\frac{n}{N} + 3.\ L.\frac{BD}{bd}$, et x =

corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti; si modo decrementum illud sit directè vel inversè in ratione aliquâ distantiarum.

PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

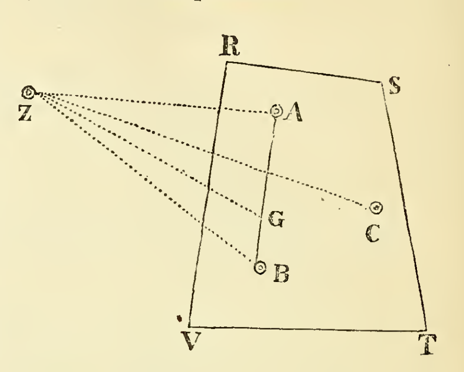
Si particularum æqualium corporis cujuscunque vires attractivæ sint ut distantiæ locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; et eadem erit cum vi globi ex materiâ consimili et æquali constantis, et centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis R S T V particulæ A, B trahant corpusculum aliquod Z viribus, quæ, si particulæ æquantur inter se, sint ut distantiæ A Z, B Z; sin particulæ statuantur inæquales, sint ut hæ particulæ et ipsarum distantiæ A Z, B Z conjunctim, sive (si ita loquar) ut hæ particulæ in distantias suas A Z, B Z respectivè ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa A × A Z et B × B Z. Jungatur A B, et secetur ea in G ut sit A G ad B G ut particula B ad particulam A; et erit G commune centrum gravitatis particularum A et B. Vis A × A Z (per legum Corol. 2.) resolvitur in vires A × G Z et A × A G, et vis B × B Z in vires B × G Z et B × B G. Vires autem A × A G et B × B G, ob proportionales A ad B et B G ad A G, æquantur; ideoque cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires A × G Z et B × G Z. Tendunt hæ ab Z versus centrum G, et vim $\overline{A + B} \times G\,Z$ componunt;



$\dfrac{L.\,\frac{n}{N}}{L.\,\frac{BD}{bd}} + 3$. Invenietur itaque dignitatis index x, per tabulas logarithmicas. Exempli causâ. Si $\frac{n}{N} = \frac{bd}{BD}$, erit L. $\frac{bd}{BD} = -$ L. $\frac{BD}{bd}$, et ideò $x = -1 + 3 = 2$. Si $\frac{n}{N} = 1$, erit L. $\frac{n}{N} = 0$, et proindè $x = 3$. Si $\frac{n}{N} = \frac{BD}{bd}$, erit $x = 4$, prorsùs ut suprà. Si $\frac{n}{N} = \frac{BD^p}{bd^p}$, erit L. $\frac{n}{N} = p \times$ L. $\frac{BD}{bd}$, et $x = p + 3$. Sed si $\frac{n}{N} = \frac{bd^p}{BD^p}$, invenietur $x = 3 - p$. Si $\frac{BD}{bd} = 10$, erit $x = \dfrac{L\,\frac{n}{N}}{1.0000000} + 3 = L\,\frac{n}{N} + 3$.

hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ A et B consisterent in eorum communi gravitatis centro G, globum ibi componentes.



Eodem argumento, si adjungatur particula tertia C, et componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum G; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in G et particulæ C; hoc est, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; et eadem erit, ac si globus et particula C consisterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque R S T V, ac si corpus illud, servato gravitatis centro, [i] figuram globi indueret. Q. e. d.

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit, ac si corpus attrahens R S T V esset sphæricum: et propterea si corpus illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum [k] movebitur in ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiæ locorum a singulis: vis ex omnium viribus composita, quâ corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; et eadem erit, ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent et in globum formarentur.

Demonstratur eodem modo, atque Propositio superior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit, ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent et in globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; corpus attractum movebitur in ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

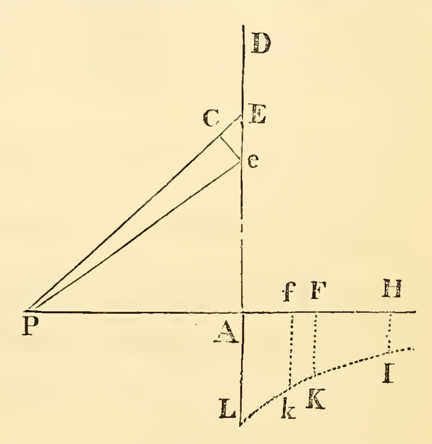
(i) * *Figuram globi indueret.* Per Prop. 77.

(k) * *Movebitur in ellipsi,* &c. Per Cor. Prop. 78. et per Cor. 1. Prop. 10.

PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad singula circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, crescentes vel decrescentes in quâcunque distantiarum ratione: invenire vim, quâ corpusculum attrahitur ubivis positum in rectâ, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.

Centro A intervallo quovis A D, in plano, cui recta A P perpendicularis est, describi intelligatur circulus; et invenienda sit vis, quâ corpusculum quodvis P in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis E ad corpusculum attractum P agatur recta P E. In rectâ P A capiatur P F ipsi P E æqualis, et erigatur normalis F K, quæ sit ut vis quâ punctum E trahit corpusculum P. Sitque I K L curva linea quam punctum K perpetuò tangit. Occurrat eadem circuli plano in L. In P A capiatur P H æqualis P D, et erigatur perpendiculum H I curvæ prædictæ occurrens in I; et erit corpusculi P attractio in circulum ut area A H I L ducta in altitudinem A P. Q. e. i.

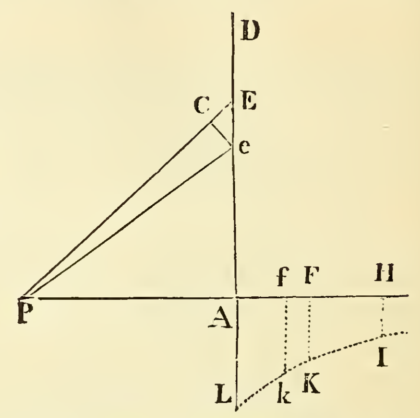


Etenim in A E capiatur linea quam minima E e. Jungatur P e et in P E, P A capiantur P C, P f ipsi P e æquales. Et quoniam vis, quâ nnuli centro A intervallo A E in plano prædicto descripti punctum quodvis E trahit ad se corpus P, ponitur esse ut F K, et inde vis quâ punctum illud trahit corpus P versus A, (l) est ut $\frac{A P \times F K}{P E}$, et vis, quâ annulus totus trahit corpus P versus A, ut annulus et $\frac{A P \times F K}{P E}$ conjunctim; (m) annulus autem iste est ut rectangulum sub radio A E et latitudine

(l) * *Est ut* $\frac{A P \times F K}{P E}$, per Leg. Cor. 2.

(m) * *Annulus autem iste*, &c. Nam annulus E Z X e, æqualis est differentiæ

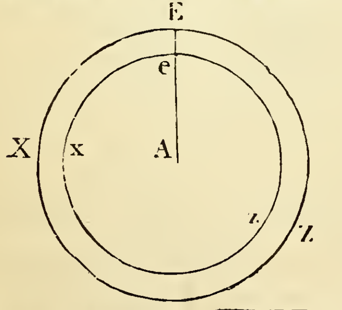
E e, (n) et hoc rectangulum (ob proportionales P E et A E, E e et C E) æquatur rectangulo $P E \times C E$ seu $P E \times F f$; crit vis, quâ annulus iste trahit corpus P versus A, ut $P E \times F f$ et $\frac{A P \times F K}{P E}$ conjunctim, id est, ut contentum $F f \times F K \times A P$, sive ut area F K k f ducta in A P. (o) Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in circulo, qui centro A et intervallo A D describitur, trahunt corpus P versus A, est ut area tota A H I K L ducta in A P. Q. e. d.



Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicatâ distantiarum ratione, hoc est, si sit F K ut $\frac{1}{P F \text{ quad.}}$, (p) atque ideo area A H I K L ut $\frac{1}{P A} - \frac{1}{P H}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $1 - \frac{P A}{P H}$, id est, ut $\frac{A H}{P H}$.

Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciprocè ut distantiarum dignitas quælibet D^n, hoc est, si sit F K ut $\frac{1}{D^n}$,

circulorum A E Z X, A e z x, hoc est, $\frac{A E \times E Z X E - A e \times e z x e}{2}$, et quoniam evanescente E e, fit $E Z X E = e z x e$,



erit annulus evanescens ut $\overline{A E - A e} \times E Z X E$, hoc est, ut $E e \times E Z X E$ sive quia radius A E est ut peripheria E Z X E, ut $E e \times A E$.

(n) * *Et hoc rectangulum*, &c. Anguli enim ad C et A recti æquantur, et angulus P E A utrique triangulo C E e, A E P communis est, adeóque triangula hæc similia sunt, et latera habent proportionalia. (Per Prop. 4. Lib. 6. Elem.)

(o) * *Et propterea summa virium*, &c. Per Cor. Lem. 4.

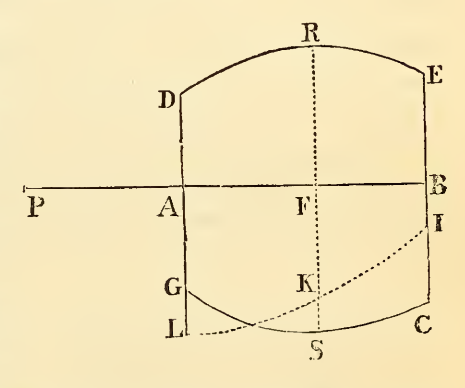
(p) * *Atque ideò area*, &c. Sit enim $P F = x$, $F f = d x$, et erit $F K \times F f$, ut $\frac{d x}{x x}$ (ex Hyp.) cujus fluens est $-\frac{1}{x} + Q.$ const. (165), Et quoniam area A L K F evanescere debet, ubi $P F = P A$, erit $Q = \frac{1}{P A}$ et area A L K F ut $\frac{1}{P A} - \frac{1}{P F} = \frac{1}{P A} - \frac{1}{P H}$ ubi $P F = P H$. Cùm igitur attractio corpusculi P, in circulum sit ut $A H I K L \times P A$, erit quoque ut $1 - \frac{P A}{P H} = \frac{P H - P A}{P H} = \frac{A H}{P H}$.

(q) ideoque area A H I K L ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpusculi P in circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, et numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciprocè ut PA^{n-2}, propterea quod (r) terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evanescet.

PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quâcunque distantiarum ratione decrescentes.



(s) In solidum D E C G tranatur corpusculum P, situm in ejus axe A B. Circulo quolibet R F S ad hunc axem perpendiculari secetur hoc solidum, et in ejus semidiametro F S, in plano aliquo P A L K B per axem transeunte, capiatur (per Prop. XC.) longitudo F K vi, quâ corpusculum P in circulum illum attrahitur, proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam L K I, planis extimorum circulorum A L et B I occurrentem in L et I; et erit attractio corpusculi P in solidum (t) ut area L A B I. Q. e. i.

(q) * *Ideóque area*, &c. Si enim D dicatur x, erit $PK \times Ff$ ut $\frac{dx}{x^n}$, (ex Hyp.) et (165) area A F K L, ut $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + Q.$ const. positâ x seu P F = P A, invenitur Q = $\frac{1}{(n-1)PA^{n-1}}$, ideóque area A F K L, ut $\frac{1}{(n-1)PA^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ hoc est, ob datam quantitatem n — 1, ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$ ubi P F = P H.

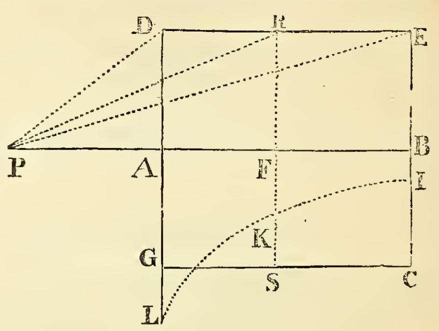
(r) * *Terminus alter evanescet.* Ob P H, infinitam.

(s) * *In solidum D E C G*, &c. Convolutione superficiei A D R E B circà axem A B genitum.

(t) * *Ut area L A B I.* Patet per Cor Lem. 4. Nam area illa est ut summa virium singulorum circulorum, qui per omnia puncta lineæ A B describi possunt.

541. *Scholium.* Sit abscissa P F = x, ejus fluxio d x, ordinatim applicata F R = y, P R = $\sqrt{yy + xx}$, et vis reciprocè ut distantiæ dignitas cujus index n, erit F K ut $\frac{1}{PF^{n-2}}$

Corol. 1. Unde si solidum cylindrus sit, parallelogrammo A D E B circa axem A B revoluto descriptus, et vires centripetæ in singula ejus puncta tendentes sint reciprocè ut quadrata distantiarum a punctis: (u) erit attractio corpusculi P in hunc cylindrum ut A B — P E + P D. Nam ordinatim applicata F K (per Corol. 1. Prop. XC.) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem A B, describit aream 1 × A B: et pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem P B, describit aream 1 in $\overline{PE - AD}$, id quod ex curvæ L K I quadraturâ facilè ostendi potest; et similiter pars eadem ducta in longitudinem P A describit aream 1 in $\overline{PD - AD}$, ductaque in ipsarum P B, P A differentiam A B describit arearum differentiam 1 in $\overline{PE - PD}$. De contento primo 1 × A B auferatur contentum postremum 1 in $\overline{PE - PD}$, et restabit, area L A B I æqualis 1 in $\overline{AB - PE + PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, est ut A B — P E + P D.



Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit, quâ sphærois A G B C attrahit corpus quodvis P, exterius in axe suo A B situm. (x) Sit N K R M

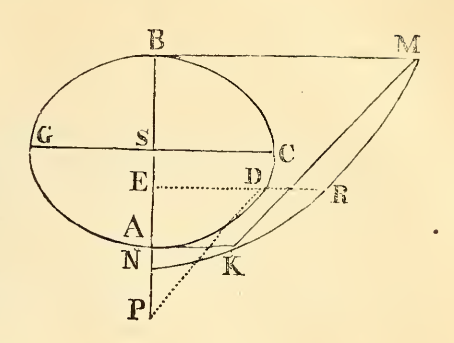
$-\frac{PF}{PR^{n-1}} = \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{x}{(yy + xx)^{\frac{n-1}{2}}}$ (per Cor. 2. Prop. 90.) Quarè areæ A F K L fluxio erit ut $\frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{x\,dx}{(yy + xx)^{\frac{n-1}{2}}}$, et hujus fluens ut vis quâ corpusculum P in solidum D R S G trahitur. Datâ verò curvæ D R E naturâ, inveniendus est valor ordinatæ y per abscissam x, et indè fluens determinanda.

(u) * *Erit attractio corpusculi P*, &c. Si ordinatim applicata F R, dicatur b, patet (429) areæ A F K L, elementum fore ut $dx - \frac{x\,dx}{(bb + xx)^{\frac{1}{2}}}$. Fiat $bb + xx = zz$, et erit $x\,dx = z\,dz$, et proindè elementum prædictum ut $dx - dz$. Quarè A F K L erit ut $x - z + Q$, et quoniam hæc area evanescit, ubi P F, seu $x = PA$, et P R seu $z = PD$, erit $Q = PD - PA$, et area A F K L, seu attractio corpusculi P, in cylindrum D R S G, ut $PF - PR + PD - PA = AF - PR + PD = AB - PE + PD$, ubi fit $PF = PB$, et $PR = PE$.

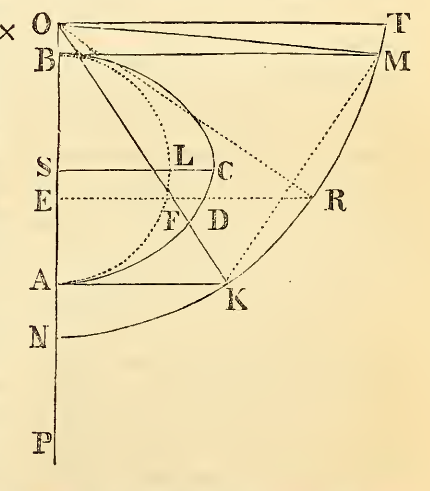
(x) 542. *Sit N K R M sectio conica cujus ordinatim applicata E R æquetur semper longitudini P D*, &c. Sit $AP = a$, curvæ datæ A C B cujus convolutione generatur sphærois sit semiaxis $AS = b$, alter semiaxis $SC = c$, $AE = x$, erit $PE = a + x$, et (ex naturâ ellipseos) erit $ED^2 = \frac{cc}{bb} \times \overline{2bx - xx}$; unde quadratum E R ordinatæ ad curvam N K R M sive $PD^2 = PE^2 + ED^2 = a^2 + 2ax + xx + \frac{cc}{bb} \times 2bx - \frac{cc}{bb}xx$; cum ergo hæc æquatio ad curvam N K R M, ultrà secundum gradum non assurgat constat eam curvam esse ex Sectionibus Conicis: erit autem ellipsis si quantitas $xx - \frac{cc}{bb}xx$ sit negativa, quod evenit ubi S C (sive c) major est quàm A S (sive b); Erit verò parabola si ea quantitas evanescat, ideóque si $c = b$ quod evenit ubi curva A C B est circulus; Denique erit hyperbola si ea quantitas sit positiva, hoc est, si A S sit longior axis.

543. Sit A C B ellipsis cujus axis C S sit major axi A S, quo casu curva N K R M erit ellipsis, hac ratione ejus curvæ N K R M determinabuntur axes et vertex. Dicatur ejus ellip-

sectio conica cujus ordinatim applicata E R, ipsi P E perpendicularis, æquetur semper longitudini P D, quæ ducitur ad punctum illud D, in quo applicata ista sphæroidem secat. A sphæroidis verticibus A, B ad ejus axem A B erigantur perpendicula A K, B M ipsis A P, B P æqualia respectivè, et propterea sectioni co-



seos N K R M semiaxis O N = s, alter semiaxis O T dicatur t, distantia verticis N a vertice A curvæ A C B, dicatur p, abscissa N E erit = p + x, et ordinatæ E R quadratum erit ex ellipseos natura $\frac{tt}{ss} \times \overline{2sp + 2sx - pp - 2px - xx}$, quod ex constructionis hypothesi fuit repertum (542) $= a^2 + 2ax + xx + \frac{cc}{bb} 2bx - \frac{cc}{bb} \times xx$. Conferantur horum valorum termini homogenei, scilicet constantes cum constantibus, eos qui unam variabilem includunt cum similibus, &c. fient tres istæ æquationes (variabilibus deletis) $a^2 = \frac{tt}{ss} \times \overline{2sp - pp}$; $a + \frac{cc}{b} = \frac{tt}{ss} \times \overline{s - p}$; $1 - \frac{cc}{bb} = - \frac{tt}{ss}$. Ex hac tertiâ æquatione, mutatis signis utrinque, reducto primo membro ad communem denominatorem, et inversis terminis fit $\frac{ss}{tt} = \frac{bb}{cc - bb}$ et $ss = \frac{bbt^2}{cc - bb}$. Tum secundæ æquationis $a + \frac{cc}{b} = \frac{tt}{ss} \times \overline{s - p}$ multiplicatis terminis per $\frac{ss}{tt}$, reductione factâ primi membri ad eumdem denominatorem, et substitutione factâ valoris $\frac{ss}{tt}$ supra inventi fit $s - p = \frac{b}{cc - bb} \times \overline{ba + cc}$. Denique, primæ æquationis $a^2 = \frac{tt}{ss} \times \overline{2sp - pp}$ multiplicatis membris per $\frac{ss}{tt}$, substituto ejus valore, utrinque mutatis signis et addito s s, fit tandem $ss - \frac{b^2}{c^2 - b^2} a^2 = ss - 2sp + pp$, in quâ novâ æquatione cum secundum membrum sit ipsum quadratum quantitatis s — p, substituto ejus valore prius reperto, et loco s s in primo membro substituto etiam ejus valore, fit $\frac{bb}{c^2 - b^2} \times \overline{t^2 - a^2} = \frac{bb}{c^2 - b|^2} \times \overline{ba + cc|}^2$ et diviso utroque membro per $\frac{b^2}{c^2 - b^2}$ transponendo a^2, et reducendo secundum membrum ad communem



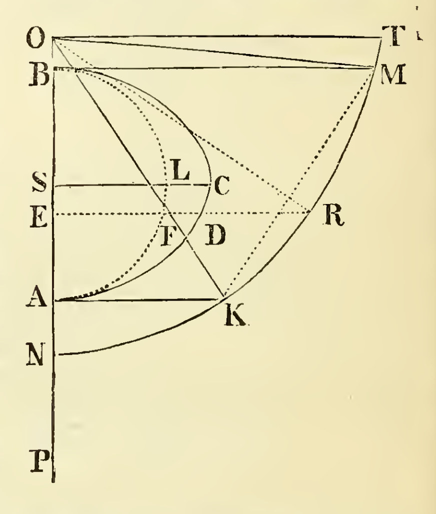
denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus est $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times \overline{a^2 + 2ab + c^2}$, sive quia P S = a + b est $PS^2 - b^2 = a^2 + 2ab$, ideoque est $t^2 = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \times \overline{PS^2 - b^2 + c^2}$ nempe $OT^2 = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \overline{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ qui termini sunt omnes dati, hoc ergo invento cætera ad ellipsim pertinentia commodè invenientur.

In gratiam notæ sequentis, ex his valorem quantitatis $\frac{t^2 + s^2 - PO^2}{t^2}$ determinabimus,

nicæ occurrentia in K et M; et jungatur K M auferens ab eâdem segmentum K M R K. Sit autem sphæroidis centrum S et semidiameter

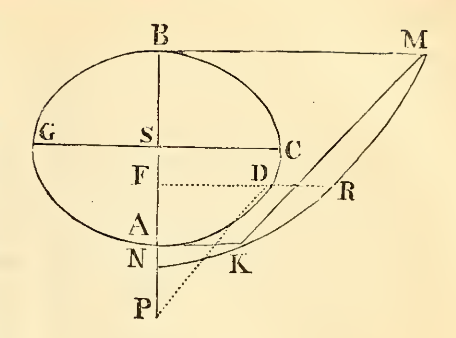
quam esse æqualem quantitati $\frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$, ita ex valoribus supra inventis statuitur; Est $ss = \frac{bbt^2}{c^2-b^2}$ ex tertiâ æquatione, unde erit $s^2 + t^2 = \frac{b^2t^2+c^2t^2-b^2t^2}{c^2-b^2} = \frac{c^2t^2}{c^2-b^2}$, ideoque $\frac{s^2+t^2}{t^2} = \frac{c^2}{c^2-b^2} = \frac{CS^2}{CS^2-AS^2}$. Est verò $AO = s - p$, et $PO = PA + AO = a + s - p$, et cum sit $s - p = \frac{b}{cc-bb} \times \overline{ba+cc}$ (ex secundâ æquatione) est $PO = a + \frac{b}{cc-bb} \times \overline{ba+cc}$, quo valore reducto ad communem denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus est $PO = \frac{cc}{c^2-b^2} \times \overline{a+b}$ sive $= \frac{CS^2}{CS^2-AS^2} \times PS$, cumque sit $t^2 = \frac{CS^2}{CS^2-AS^2} \times \overline{PS^2-AS^2+CS^2}$ est $\frac{PO}{t^2} = \frac{PS}{PS^2-AS^2+CS^2}$ et $\frac{PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{CS^2-AS^2} \times \frac{PS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$. Unde tandem est $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{CS^2-AS^2} - \frac{CS^2}{CS^2-AS^2} \times \frac{PS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$, sive $= \frac{CS^2}{CS^2-AS} \times (1 - \frac{PS^2}{PS^2-AS^2+CS^2})$ reducendoque ad eumdem denominatorem, deletisque terminis sese destruentibus $= \frac{CS^2}{CS^2-AS^2} \times \frac{-AS^2+CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2} = \frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ diviso numeratore et denominatore per $CS^2 - AS^2$. Est ergo $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$. Q. e. d.

544. Sit autem curva data A C B circulus, ita ut sphærois ejus convolutione genita, sit accurata sphæra, erit curva N K R M parabola, stantibus enim quæ in n°. 542. dicta sunt, erit ut prius $PE = a + x$, et ex naturâ circuli $EP^2 = 2bx - xx$, unde erit P F quadratum $= PE^2 + EF^2 = a^2 + 2ax + xx + 2bx - xx = a^2 + 2ax + 2bx$; cum ergo ordinata E R ad curvam N K R M sumatur æqualis P F, ejus ordinatæ quadratum erit æquale abscissæ ipsi per quantitates constantes ductæ, sed ultra primum gradum non assurgenti, quæ est parabolæ proprietas. Dicatur ergo ejus parabolæ latus rectum l, distantia verticis N a vertice A curvæ A C B dicatur p, abscissa N E erit $p + x$ et ex parabolæ natu.



erit ordinatæ E R quadratum $= lp + lx$ conferatur hic valor cum valore ejusdem ER^2 supra invento $a^2 + 2ax + 2bx$, termini constantes cum constantibus et qui variabilem includunt cum similibus, fient duæ æquationes $lp = a^2$, et $l = 2a + 2b = 2PS$, ideoque $p = \frac{a^2}{2a+2b} = \frac{PA^2}{2PS}$; et cum ex natura parabolæ, sit $ER^2 = l \times \overline{p+x}$ erit $p + x = NE = \frac{ER^2}{2PS}$; Cumque area parabolica inter abscissam, ordinatam, et curvam intercepta sit æqualis duobus tertiis rectanguli abscissæ per ordinatam, erit area parabolica $NER = \frac{\frac{2}{3}ER^3}{2PS} = \frac{ER^3}{3PS}$, et quoniam, ex constructione, ordinatæ in A et B erectæ sunt æquales P A et P B, erit area parabolica $NAK = \frac{PA^3}{3PS}$ et area parabolica $NBM = \frac{PB^3}{3PS} = \frac{\overline{PA+2AS}|^3}{3PS}$ et differentia harum arearum A K R M B respondens axi sphæræ A B, erit $\frac{6PA^2 \times AS + 12PA \times AS^2 + 8AS^3}{3PS}$, et denique dempto trapezio A K M B, segmentum parabolicum residuum K R M erit æquale

maxima S C: et vis, quâ sphæroïs (†) trahit corpus P, erit ad vim, quâ sphæra diametro A B descripta trahit idem corpus, ut $\frac{A S \times C S q - P S \times K M R K}{P S q + C S q - A S q}$ ad $\frac{A S \text{ cub.}}{3 P S \text{ quad.}}$. Et eodem computandi fundamento invenire licet vires segmentorum sphæroidis.



$\frac{2 A S^3}{3 P S}$, trapezium enim A K M B est æquale $\frac{1}{2} A B \times \overline{A K + B M}$ sive (quia $\frac{1}{2} A B = A S$, $A K = P A$ et $B M = P B = P A + 2 A S$) est æquale $2 A S \times P A + 2 A S^2$, et reducendo ad denominatorem $3 P S$ sive $3 P A + 3 A S$ est æquale $\frac{6 A S \times P A^2 + 12 A S^2 \times P A + 6 A S^3}{3 P S}$ quod deductum ex area A K R M B $= \frac{6 P A^2 \times A S + 12 P A \times A S^2 + 8 A S^3}{3 P S}$ remanet $\frac{2 A S^3}{3 P S}$. Q. e. d.

(†) 545. *Vis quâ sphæroïs trahit corpus P est ad vim quâ sphæra diametro A B descripta trahit idem corpus ut* $\frac{A S \times C S^2 - P S \times K M R K}{P S^2 + C S^2 - A S^2}$ *ad* $\frac{A S^3}{3 P S^2}$.

Supponatur juxta solutionem hujusce problematis, curvam describi secundum A B, cujus ordinatæ singulo puncto E applicatæ sint æquales vi quâ corpus P a circulo cujus radius est E D trahitur; ea vis est per Cor. 1. Prop. 90. ut $1 - \frac{P E}{P D}$, sit O E hujus curvæ abscissa sumpta a puncto O (centro curvæ N K R M juxta notam 543. determinatæ) dicaturque z, ejus fluxio erit d z, fluxio itaque areæ curvæ quæ exhibet vim sphæroidis erit $d z - \frac{P E}{P D} d z$, cumque sit $P E = P O - O E = P O - z$ et $P D = E R$ ordinatæ curvæ N K R M, per constructionem, sitque E R (ut facile deducitur ex n°. 543) $= \frac{t}{s} \sqrt{s s - z z}$, fluxio ejus areæ erit $d z - \frac{P O d z}{\frac{t}{s} \sqrt{s s - z z}} + \frac{z d z}{\frac{t}{s} \sqrt{s s - z z}}$.

Terminorum positivorum $d z + \frac{z d z}{\frac{t}{s} \sqrt{s s - z z}}$ fluens est $z - \frac{s}{t} \sqrt{s s - z z}$ (165) sed ut $z = O E$ et $\frac{s}{t} \sqrt{s s - z z} = \frac{s s}{t t} \times \frac{t}{s} \sqrt{s s - z z} = \frac{s s}{t t} E R$ fluxio terminis positivis respondens est $O E - \frac{s s}{t t} E R$, et area toti lineæ O A respondens est $O A - \frac{s^2}{t^2} A K$, ex quâ demenda area parti O B respondens secundum quam curva quæ vim sphæroidis exprimit non ducitur, quæque est $O B - \frac{s^2}{t^2} B M$, utque per constructionem $A K = A P$, et $B M = P B = B A + A P$ erit vera fluens $O A - O B - \frac{s^2}{t^2} \times \overline{A P - B A - A P} = A B + \frac{s^2}{t^2} A B = A B \times \frac{s^2 + t^2}{t^2}$.

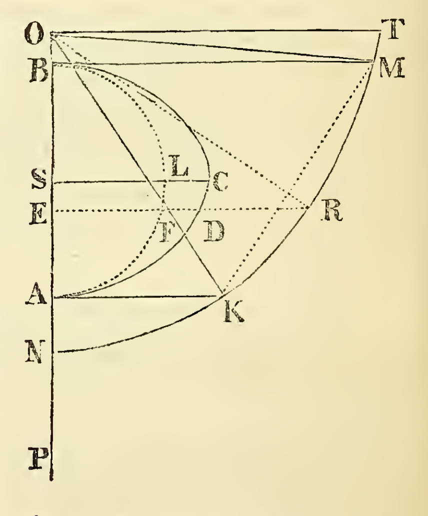
Tertii termini $\frac{P O d z}{\frac{t}{s} \sqrt{s s - z z}}$ fluens sic invenitur; Sectoris Elliptici T O K fluxio est (424) $\frac{\frac{1}{2} s t d z}{\sqrt{s s - z z}}$ multiplicetur per $\frac{2 P O}{t^2}$ nascetur terminus propositus $\frac{P O d z}{\frac{t}{s} \sqrt{s s - z z}}$ unde fluens termini propositi erit sector ille ellipticus T O K per $\frac{2 P O}{t^2}$ multiplicatus, sed quoniam area quæsita non respondet toti O A, sed tantum ejus parti A B, vera fluens areæ quæsitæ ex tertio termino inveniendo est sector $T O K \times \frac{2 P O}{t^2}$ dempto sectore $T O M \times \frac{2 P O}{t^2}$ sive sector $M O K \times \frac{2 P O}{t^2}$; Dividitur autem sector M O K in figuram rectilineam M O K et mix-

Corol. 3. Quod si corpusculum intra sphæroidem in axe collocetur, attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius hoc argumento

tilineam M R K; triangulum M O K valet $\frac{1}{2}$ P O $\times$ A B, nam producatur recta M K pertinget ad P, propter P A $=$ A K et P B $=$ B M, totum verò triangulum O M P $= \frac{1}{2}$ O P $\times$ B M $= \frac{1}{2}$ O P $\times$ P B, et triangulum O K P $= \frac{1}{2}$ O P $\times$ A K $= \frac{1}{2}$ O P $\times$ A P, unde sublato triang. O K P ex triang. O M P, remanet triang. O M K $= \frac{1}{2}$ O P $\times$(P B $-$ A P) $= \frac{1}{2}$ O P $\times$ A B. Unde tandem fluens quæsita hujus tertii termini est $\frac{2PO}{t^2} \times \frac{1}{2} OP \times AB + \frac{2PO}{t^2} \times MRK = \frac{PO^2}{t^2} \times AB + \frac{2PO}{t^2} \times MRK$, quæ detracta ex fluente terminorum positivorum $AB \times \frac{s^2+t^2}{t^2}$ fit $AB \times \frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2} - \frac{2PO}{t^2} \times MRK$, cum ergo sit $\frac{s^2+t^2-PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{PS^2-AS^2+CS^2}$ et $\frac{PO}{t^2} = \frac{PS}{PS^2-AS^2+CS^2}$ (545) est fluens quæsita (quia A B $=$ 2 A S) $\frac{2AS \times CS^2 - 2PS \times MRK}{PS^2-AS^2+CS^2}$.

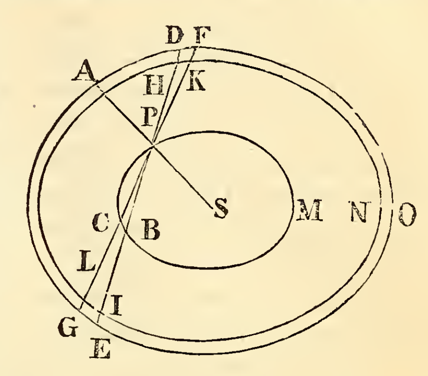
Si autem curva A C B sit circulus, sphærois in sphæram veram mutatur, fit CS $=$ AS et segmentum M R K fit $\frac{2AS^3}{3PS}$ (544) ideóque mutatur hæc formula in istam $\frac{2AS \times AS^2 - \frac{2PS \times 2AS^3}{3PS}}{PS^2 - AS^2 + AS^2}$. $= \frac{2AS^3 - \frac{4}{3}AS^3}{PS^2} = \frac{2AS^3}{3PS^2}$ quæ exprimet vim sphæræ; itaque divisa expressione vis sphæroidis et vis sphæræ per communem multiplicatorem 2; *erit vis sphæroidis ad vim sphæræ ut* $\frac{AS \times CS^2 - PS \times MRK}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ *ad* $\frac{AS^3}{3PS^2}$. Q. e. d.

Potest etiam determinari vis sphæræ, hoc calculo, sit ut prius P A $=$ a, A B $=$ 2 b, abscissa A E $=$ x, P F $=$ v, erit $PE^2 = a^2 + 2ax + xx$, et $EF^2 = 2bx - xx$ (ex naturâ circuli) ideóque $PF^2 (vv) = a^2 + 2ax + 2bx$, unde invenitur $x = \frac{vv - a^2}{2 \times (a+b)}$ et $dx = \frac{2vdv}{2 \times (a+b)} = \frac{vdv}{a+b}$ et $PE = a + x = \frac{a^2 + 2ab + vv}{2 \times (a+b)}$ et $\frac{dx}{PF} = \frac{dv}{a+b}$. Itaque, cum fluxio areæ quæ exprimit vim sphæræ sit per Cor. 1. Prop. XC. ut $dx - \frac{PEdx}{PF}$, erit ea fluxio ut $dx - \frac{a^2 + 2ab + vv}{2 \times (a+b)^2} dv$ cujus fluens est $x - \frac{a^2v + 2abv + \frac{1}{3}v^3}{2 \times \overline{a+b}|^2} + Q$ const., quæ evanescere debet ubi $x = o$ et $v = a$, ideóque est $- \frac{a^3 + 2a^2b + \frac{1}{3}a^3}{2 \times \overline{a+b}|^2} + Q = o$, et $Q = \frac{\frac{4}{3}a^3 + 2a^2b}{2 \times \overline{a+b}|^2}$: vis autem



totius sphæræ obtinetur si fiat x $=$ A B (2 b) et v $=$ P B (a $+$ 2 b), estque ideò $2b + \frac{\frac{4}{3}a^3 + 2a^2b - a^3 - 4a^2b - 4ab^2 - \frac{1}{3}a^3 - 2a^2b - 4ab^2 - \frac{8}{3}b^3}{2 \times \overline{a+b}|^2}$ $= 2b - \frac{4a^2b + 8ab^2 + \frac{8}{3}b^3}{2 \times \overline{a+b}|^2} = 2b \times (1 - \frac{2a^2 + 4ab + \frac{4}{3}b^2}{a \times \overline{a+b}|^2})$, et reducendo ad eumdem denominatorem $= 2b \times \frac{2a^2 + 4ab + 2b^2 - [illegible]a^2 - 4ab - \frac{4}{3}b^2}{2 \times \overline{a+b}|^2}$ $= 2b \times \frac{\frac{2}{3}b^2}{2 \times \overline{a+b}|^2}$ sive ponendo A S pro b, et P S pro a $+$ b dividendoque numeratorem et denominatorem per 2, vis tota sphæræ est $\frac{2AS^3}{3PS^2}$. Q. e. i.

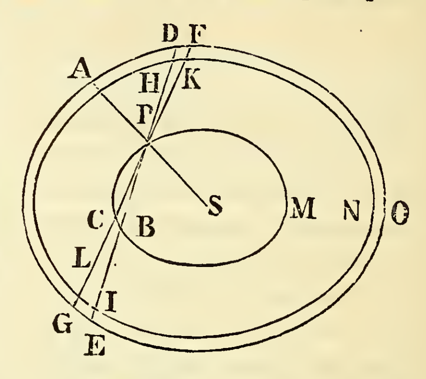
colligitur, sive particula in axe sit, sive in aliâ quâvis diametro datâ. Sit A G O F sphærois attrahens, S centrum ejus, et P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum semidiameter S P A, tum rectæ duæ quævis D E, F G sphæroidi hinc inde occurrentes in D et E, F et G; sintque P C M, H L N superficies sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium et concentricarum, quarum prior transeat per corpus P, et secet rectas D E et F G in B et C, posterior secet easdem rectas in H, I et K, L. Habeant autem sphæroides omnes axem communem, et erunt rectarum partes hinc inde interceptæ D P et B E, F P et C G, D H et I E, F K et L G sibi mutuò æquales; (y) propterea quod rectæ D E, P B et H I bisecantur in eodem puncto, ut et rectæ F G, P C et K L. Concipe jam D P F, E P G designare conos oppositos, angulis verticalibus D P F, E P G infinitè parvis descriptos, et lineas etiam D H, E I infinitè parvas esse; et conorum particulæ sphæroidum superficiebus abscissæ D H K F, G L I E, ob æqualitatem linearum D H, E I, (z) erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum a corpusculo P, et propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus sphæroidum innu-



(y) * *Propterea quod rectæ D E, P B*, &c. Cum enim tres ellipses A G O, H L N, P C M similes sint, idemque centrum et axes communes ac proindè communes etiam diametros homologas habeant, patet lineas D E, H I, P B esse in tribus illis ellipsibus ad communem diametrum ordinatas, idemque dicendum esse de tribus lineis F G, K L, P C. Nam si per punctum A, in ellipsi A G O homologum puncto P in ellipsi P C M ducta intelligatur recta ipsi P B, seu D E parallela, hæc linea ordinata erit ad eandem ellipseos A G O diametrum ad quam in ellipsi P C M ordinata est linea P B, atque adeò rectæ D E, P B sunt ad eandem diametrum ordinatæ, idemque eodem modo de cæteris lineis ostendi potest. Quare ab illâ communi diametro rectæ D E, P B, et H I, bisecantur in eodem puncto, ut et rectæ F G, P C, et K L a suâ communi diametro.

(z) * *Erunt ad invicem*, &c. Si ex punctis D et E in lineam F G demissa intelligantur perpendicula infinitè parva p, et P, hæc, ob angulos D P F, E P G, æquales, erunt ut distantiæ D P, E P, Sed quoniam evanescentibus angulis D P F, E P G, lineæ D H, F K et G L, E I, fiunt parallelæ, erit superficies D H K F, ad superficiem G L I E, ut rectangulum $p \times \frac{DH + FK}{2}$, ad rectangulum $P \times \frac{GL + EI}{2}$, hoc est, (ob $DH + FK = LG + EI$) ut p ad P, seu ut D P ad E P. Quarè si D P F, E P G conos vel pyramides in sphæroide A G O designent, solida D H K F, G L I E erunt ut superficies prædictæ in perpendicula perpendiculis p, P, similia ductæ, hoc est, ut quadrata distantiarum D P, E P. Quoniam igitur vis quâ particula solida D H F K trahit corpusculum P est ad vim quâ illud trahitur a particulâ solidâ G L I E, ut solidum $\frac{DHKF}{DP^2}$, ad solidum $\frac{GLIE}{EP^2}$, hoc est, ut $\frac{DP^2}{DP^2}$, ad $\frac{EP^2}{EP^2}$, manifestum est corpusculum P utrinque æqualiter attrahi.

merarum similium concentricarum et axem communem habentium dividantur spatia D P F, E G C B in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires coni D P F et segmenti conici E G C B, et per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra sphæroidem intimam P C B M. Trahitur igitur corpus P a sola sphæroide intimâ P C B M, et propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, quâ corpus A trahitur a sphæroide totâ A G O D, ut distantia P S ad distantiam S. Q. e. d.



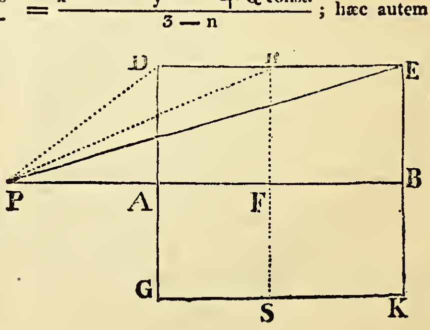
PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

E corpore dato formanda est sphæra vel cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX. LXXXI. et XCI.) ([a]) inveniri potest. Dein factis experimentis

([a]) * *Inveniri potest.* Hoc est per Propositiones citatas inveniri potest generalis expressio seu formula attractionis corpusculi in sphæram vel cylindrum aliamve figuram regularem, et lex attractionis corpusculi in eandem figuram experimentis inventa conferri debet cum generali illâ formulâ, et indè habebitur æquatio cujus ope determinari poterit formulæ generalis exponens indeterminata, quæ exhibebit attractionem in singulas particulas materiæ.

Exemplum. In cylindrum A D E K G trahatur corpusculum P, situm in ejus axe A B, ut in Prop. XCI.; supponaturque vis in singulas cylindri particulas tendens reciprocè ut distantiæ dignitas cujus index n, et dicatur P A = a, P D = b. P B = c, P E = e, R F = g, P F = x, P R = y, eritque y y = x x + g g, ideoque y d y = x d x. Quare fluxio vis quâ corpusculum P in cylindrum A D R S G trahitur, erit (541) ut $\frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{xdx}{y^{n-1}} = \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{ydy}{y^{n-1}} = x^{2-n}dx - y^{2-n}dy$; cujus fluens $= \frac{x^{3-n} - y^{3-n} + Q \text{ const.}}{3-n}$; hæc autem



evanescit, ubi x = a, et y = b; Quare erit Q $= b^{3-n} - a^{3-n}$, et fluens accurata $= \frac{b^{3-n} - a^{3-n} + c^{3-n} - e^{3-n}}{3-n}$,

invenienda est vis attractionis in diversis distantiis, et lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

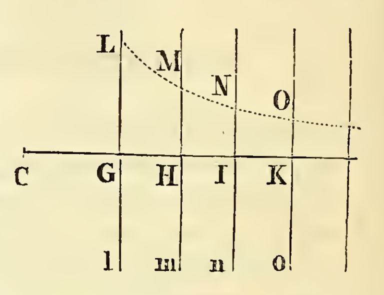
Si solidum ex unâ parte planum ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, et vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie planâ, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, et index ternario minor quam index potestatis distantiarum.

Cas. 1. Sit L G l planum quo solidum terminatur. Jaceat solidum

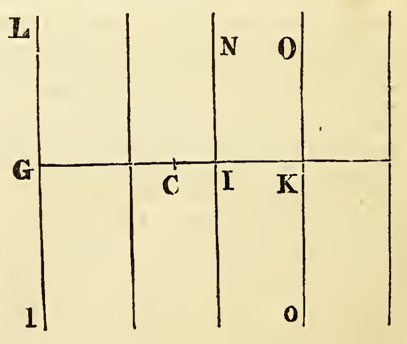
ubi $x = c$, et $y = e$. Jam verò vis quâ corpusculum P in totum cylindrum A D E K G trahitur, experimentis inventa sit ut $b - a + c - e$, et habebitur æquatio $b - a + c - e = \frac{b^{3-n} - a^{3-n} + c^{3-n} - e^{3-n}}{3-n}$, ex quâ determinandus est valor indicis generalis n. Porro posito $n = 2$, æqualia fiunt æquationis membra, ergo vis in singulas cylindri particulas tendens erit reciprocè ut quadratum distantiæ a particulâ, quemadmodum in Cor. 1. Prop. 91. positum est. Verum si hâc ratione, varios tentando numeros, non potest indicis generalis n valor inveniri, ponatur $3 - n = z$, et vis corpusculi in cylindrum experimentis reperta sit ut quantitas q; et erit $q z = b^z - a^z + c^z - e^z$. Fiat $a^z = p$, $b^z = v$, $c^z = r$, $e^z = s$. et erit (L significante Logarithmum quantitatis cui præfigitur) $L.\,a^z = L.\,p$, $L.\,b^z = L.\,v$, $L\,c^z = L.\,r$, $L.\,e^z = L.\,s$, adeoque $z\,L.\,a = L.\,p$, et $z = \frac{L.\,p}{L.\,a} = \frac{L.\,v}{L.\,b} = \frac{L.\,r}{L.\,c} = \frac{L.\,s}{L.\,e}$. Unde $\frac{L.\,a \times L.\,v}{L.\,b} = L.\,p$, atque adeo $L.\,v^{\frac{L.\,a}{L.\,b}} = L.\,p$, proindeque $v^{\frac{L.\,a}{L.\,b}} = p$, et simili modo invenietur $v^{\frac{L.\,c}{L.\,b}} = r$, et $v^{\frac{L.\,e}{L.\,b}} = s$. Quare æquatio erit $\frac{q.\,L.\,v}{L.\,b} = v - v^{\frac{L.\,a}{L.\,b}} + v^{\frac{L.\,c}{L.\,b}} - v^{\frac{L.\,e}{L.\,b}}$, quæ ab exponente indeterminata libera est. Ut autem tollatur etiam L. v, ponatur $v = t + 1$, et (383) erit $L.\,v = L.\,\overline{t + 1} = t - \frac{1}{2}tt + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 -$, &c. in infinit. Si itaque in æquatione modo inventa loco v scribatur $t + 1$, et loco L. v series $t - \frac{1}{1}t^2 + \frac{1}{3}t^3 -$, &c. obtinebitur æquatio ab exponentibus et logarithmis indeterminatis libera, ex quâ per reversionem serierum invenietur valor quantitatis t, et inde reperietur L. v, atque per L. v habebitur valor indicis z, et inde valor ipsius n. Nam cum sit $z = \frac{L.\,v}{L.\,a}$, et $L.\,v = L.\,\overline{t + 1}$, erit $z = \frac{L.\,\overline{t+1}}{L.\,a}$, et $n = 3 - z = 3 - \frac{L.\,\overline{t+1}}{L.\,a}$.

Si in æquatione vel quantitate exponentiali proposita, indeterminata z in solis quantitatum datarum exponentibus reperiretur, hæc æquatio vel quantitas superiori methodo posset ad aliam reduci numero terminorum finitam, in quâ nulla esset amplius exponens vel logarithmus indeterminata. Nam si $q = f\,a^z + g\,b^{2z} + h\,c^{4z} +$, &c., sitque $v = a^z$ erit $q = f\,v + g\,v^{\frac{2\,L.\,b}{L.\,a}} + h\,v^{\frac{4\,L.\,c}{L.\,a}} +$, &c. erit enim $z = \frac{L.\,v}{L.\,a}$ et $b^{2z} = b^{2\frac{L.\,v}{L.\,a}}$ et $L.\,b^{2z} = \frac{2\,L.\,v}{L.\,a} \times L.\,b = \frac{2\,L.\,b}{L.\,a}\,L.\,v$, unde est $b^{2z} = v^{\frac{2\,L.\,b}{L.\,a}}$ et sic de cæteris.

autem ex parte plani hujus versus I, inque plana innumera m H M, n I N, o K O, &c. ipsi G L parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum C extra solidum. Agatur autem C G H I planis illis innumeris perpendicularis, et decrescant vires attractivæ punctorum solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus n ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC.) vis, quâ planum quodvis m H M trahit punctum C, (b) est reciprocè ut $C H^{n-2}$. In plano m H M capiatur longitudo H M ipsi $C H^{n-2}$ reciprocè proportionalis, et erit vis illa ut H M. Similiter in planis singulis l G L, n I N, o K O, &c. capiantur longitudines G L, I N, K O, &c. ipsis $C G^{n-2}$, $C I^{n-2}$, $C K^{n-2}$, &c. reciprocè proportionales; et vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, ideoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis solidi totius ut area G L O K in infinitum versus O K producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est reciprocè ut $C G^{n-3}$, et propterea vis solidi totius est reciprocè ut $C G^{n-3}$. Q. e. d.



Cas. 2. Collocetur jam corpusculum C ex parte plani l G L intra solidum, et capiatur distantia C K æqualis distantiæ C G. Et solidi pars L G l o K O, planis parallelis l G L, o K O terminata, corpusculum C in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuò per æqualitatem tollentibus. Pro-



(b) * *Est reciprocè,* &c. Sit C H = x, erit M H ut $\frac{1}{x^{n-2}}$, (hyp.) et areæ G L M H, elementum ut $\frac{dx}{x^{n-2}}$, adeóque (165) area ipsa ut Q const. $- \frac{1}{(n-3)\,x^{n-3}}$, quæ evanescit ubi x = C G, Quare Q $= \frac{1}{(n-3)\,C G^{n-3}}$, et area G L M H, ut $\frac{1}{(n-3)\,C G^{n-3}} - \frac{1}{(n-3)\,C H^{n-3}}$. At cum C H infinita evadit, terminus $\frac{1}{(n-3)\,C H^{n-3}}$ evanescit fitque area infinita G L O K, ut $\frac{1}{(n-3)\,C G^{n-3}}$, seu ob datam n — 3, ut $C G^{n-3}$, reciprocè.

inde corpusculum C solâ vi solidi ultra planum O K siti trahitur. Hæc autem vis (per casum primum) est reciprocè ut $C K^{n-3}$, hoc est (ob æquales C G, C K) reciprocè ut $C G^{n-3}$. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si solidum L G I N planis duobus infinitis parallelis L G, I N utrinque terminetur; (c) innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractivâ solidi totius infiniti L G K O vim attractivam partis ulterioris N I K O, in infinitum versus K O productæ.

Corol. 2. Si solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo distantiam (d) decrescet quam proximè in ratione potestatis $C G^{n-3}$.

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum et ex unâ parte planum trahat corpusculum e regione medii illius plani, et distantia inter corpusculum et planum collata cum dimensionibus corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distantiarum; vis attractiva corporis totius decrescet quamproximè in ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, et index ternario minor quam index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet; propterea quod, in hoc casu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario secundo, semper est infinitè major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

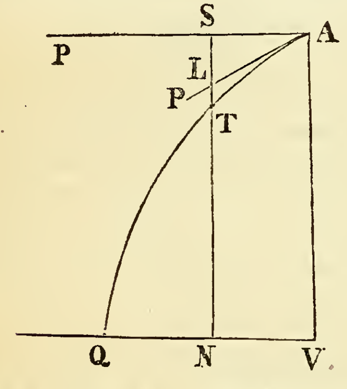
Si corpus aliquod perpendiculariter versus planum datum trahatur, et ex datâ lege attractionis quæratur motus corporis: solvetur problema

(c) * *Innotescit ejus vis*, &c. Ex demonstratis attractio solidi totius L G K O, in infinitum versus O producti, est ut $\frac{1}{C G^{n-3}}$ solidi verò infiniti N I K O, ut $\frac{1}{C I^{n-3}}$. Quarè attractio solidi L G I N, est ut $\frac{1}{C G^{n-3}} - \frac{1}{C I^{n-3}}$.

(d) * *Decrescet quam proximè*, &c. Vis enim attractiva, si corpus infinitum sit, est ut $\frac{1}{C G^{n-3}} - \frac{1}{C I^{n-3}}$; sed si perexigua sit distantia C G respectu C I, terminus $\frac{1}{C I^{n-3}}$, minimus erit respectu termini $\frac{1}{C G^{n-3}}$ et negligi poterit, ideóque attractio erit quam proximè ut $C G^{n-3}$ reciprocè. Quod tamen verum esse non potest, si fuerit $n = 3$; Nam in hoc casu $\frac{1}{C H^{n-2}} = \frac{1}{C H}$, ideoque M H erit ut $\frac{1}{C H}$ et rectangulum M H × C H datum, proindeque curva L M O hyperbola, cujus asymptotus C K, et area illius finita L M N I G vim exponit solidi L G I N; area verò infinita N O K I, vim solidi infiniti N I K O.

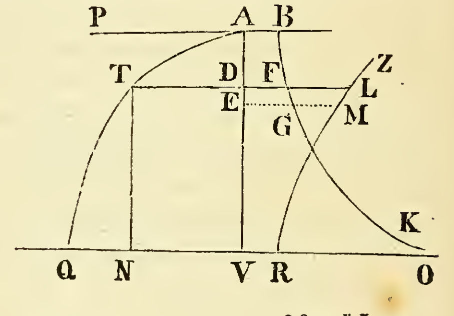
quærendo (per Prop. XXXIX.) motum corporis rectâ descendentis ad hoc planum, et (per legum Corol. 2.) componendo motum istum cum uniformi motu, ([a]) secundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, si quæratur lex attractionis in planum secundum lineas perpendiculares factæ, eâ conditione ut corpus attractum in datâ quâcunque curvâ lineâ moveatur, ([b]) solvetur problema operando ad exemplum problematis tertii.

([a]) 546. *Secundum lineas eidem plano parallelas*, &c. Corpus A quod ad planum V Q perpendiculariter et secundum lineas lineæ A V parallelas trahitur, exeat de loco A juxtà directionem quamlibet A P. 1°. Si projectionis di-



rectio A P plano V Q parallela fuerit, dabitur tempus quo corpus, datâ velocitate uniformi projectionis, percurreret lineam A S, et per Prop. 39. invenietur in lineâ S N lineæ A V parallelâ spatium S T quod corpus vi attractrice eodem tempore describit, et hinc habebitur punctum T in trajectoriâ A T Q, quam corpus utroque motu, impresso nimirum et ex vi attractrice genito describit. 2°. Si directio projectionis A P plano trahenti V Q parallela non est, ductâ A S plano V Q et S L rectæ A V parallelis, motus projectionis A L resolvatur in motus A S et S L, et datis velocitatibus uniformibus A S et S L, dabuntur tum tempus quo percurritur A S, tum spatium S T quod corpus hoc eodem tempore describit ex vi attractrice et motu impresso S L simul (per Cor. 3. Prop. 39.) unde habebitur punctum T trajectoriæ A T Q cujus omnia puncta eodem modo possunt inveniri.

Exemplum. Exeat corpus de loco A secundum directionem A P plano trahenti V Q parallelam, et ductâ D T eidem plano parallelâ, sit vis trahens in totâ lineâ D T, ut D V cubus reciprocè. De loco D, erigatur semper D F perpendicularis ad A V et vi trahenti in lineâ D T proportionalis, sitque B F G linea curva quam punctum G perpetuò tangit. In D F capiatur D L lateri quadrato areæ A B F D reciprocè proportionalis, et punctum L sit semper in lineâ curvâ Z L R, prorsùs ut in Prop. 39. Jam dicatur A V = a, D V = x, T D

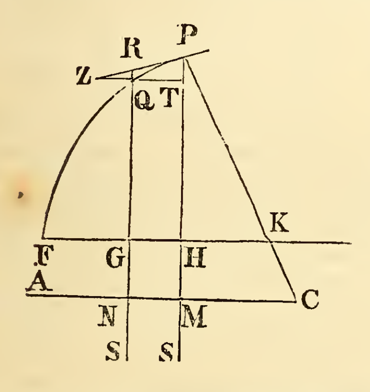


= y, erit area A B F D ut $\frac{aa - xx}{xx}$ (430) et proindè D L, ut $\frac{x}{\sqrt{aa - xx}}$ adeóque elementum D L M E, ut $\frac{x\,dx}{\sqrt{aa - xx}}$, et area V D L R. ut hujus elementi fluens $Q - \sqrt{aa - xx}$ (165. 166), evanescit autem area V D L R ubi x = o. Quarè Q = a, et area V D L R, ut $a - \sqrt{aa - xx}$. Hinc positâ x = a, erit area V A B Z R, ut a, et area D A B Z L, ut $\sqrt{aa - xx}$. Porrò si punctum T est in trajectoriâ A T Q erit D T seu y proportionalis tempori quo uniformiter describitur D T, et quo motu accelerato percurritur A D seu (per Prop. 39.) erit y, ut $\sqrt{aa - xx}$, adeóque y y ut a a — x x. Undè patet trajectoriam A T Q esse ellipsim cujus centrum V, semiaxis unus V A, alter conjugatus V Q. Iisdem positis et vi ad planum V Q trahente in vim repellentem mutatâ corpus describet hyperbolam cujus centrum V semiaxis V A vertex A.

([b]) 547. *Solvetur problema*, &c. Moveatur corpus P in curvâ P Q F vi perpendiculariter tendente ad planum F.K, sint P et Q puncta infinitè propinqua, P Z tangens in P, P C radius circuli curvam P Q F osculantis in P;

Operationes autem contrahi solent resolvendo ordinatim applicatas in series convergentes. Ut si ad basem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ sit ut basis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; et quæratur vis quâ corpus, secundum positionem ordinatim applicatæ, vel in basem attractum vel a basi fugatum, moveri possit in curvâ lineâ, quam ordinatim applicata termino suo superiore semper attingit: Suppono basem augeri parte quam minima O, et ordinatim applicatam $\overline{A+O}|^{\frac{m}{n}}$ resolvo (†) in seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} OO$

P H, Q G perpendicula ex punctis P, Q in planum F K demissa, C A recta lineæ F K parallela et secans perpendicula P H, Q G producta in M et N; producatur G Q, ut tangenti



P Z occurrat in R, et per Q agatur recta Z Q T plano F K parallela, ac tangenti occurrens in Z rectæ verò P H in T. Jam ob similia triangula C P M, P Z T et R Z Q, est $CP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$, et ex naturâ circuli osculatoris $PR^2 = QR \times \overline{RN+QN}$ (per Prop. 36. Lib. 3. Elem.) sive coëuntibus punctis P et Q, $PR^2 = QR \times 2PM$. Ergò $CP^2 : PM^2 = QR \times 2PM : QT^2$, ideóque $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$, consideretur vis centripeta ut tendens ad centrum S infinitè distans, et erit S P quantitas constans, ac $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$. Est igitur (per Cor. 1. et 5. Prop. 6.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$, hoc est, ob constantem quantitatem $2SP^2$, reciprocè ut $\frac{PM^3}{CP^2}$, seu in ratione compositâ ex duplicatâ ratione radii osculatoris C P directè et triplicatâ perpendiculi P M inversè. Porrò datâ curvâ P Q F invenietur in singulis locis radius osculi C P (214) et punctum K ubi plano occurrit ac proindè invenietur P M, per proportionem $PK : PH = PC : PM$, vel etiam per proportionem P R vel $PQ : QT = PC : PM$. Quare dabitur lex vis centripetæ.

(†) 548. *Resolvo in seriem infinitam*, &c. Ut hæc liqueant sequentia de dignitatum formulis sunt memoriæ revocanda.

Lemma. Binomii a + b, dignitas $\overline{a+b}|^n$ cujus index n, est $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3 + \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^{n-4} b^4$ + &c. Satis patet ex potentiarum formatione. Si enim binomium a + b, ad 2am. 3am. 4am., &c. dignitates evehatur, in singulis dignitatis cujusque terminis, index litteræ a unitate perpetuò decrescit, dum contrà index litteræ b unitate crescit, et coefficientes seu unciæ singulorum terminorum progrediuntur ut numeri $\frac{n}{1}$, $\frac{n \times n-1}{1 \times 2}$, $\frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3}$, $\frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$, &c.

549. *Cor.* 1. Si ponatur a = P, et $Q = \frac{b}{a}$, adeóque $a^n = P^n$, $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$, $\frac{b^3}{a^3} = Q^3$, $\frac{b^4}{a^4} = Q^4$, his valoribus in lemmatis formulâ substitutis erit $\overline{a+b}|^n = P^n + \frac{n}{1} P^n Q + \frac{n \times n-1}{1 \times 2} P^n Q^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{1 \times 2 \times 3} \times$

$A^{\frac{m-2n}{n}}$, &c. atque hujus termino in quo O duarum est dimensionum, id est, termino $\frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem esse sup-

$P^n Q^3 +$, &c. et si rursùs ponatur $P^n = A$; $\frac{n}{1} P^n Q = B$; $\frac{n \times \overline{n-1}}{1 \times 2} P^n Q^2 = C$; $\frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1 \times 2 \times 3} P^n Q^3 = D$, et ità porrò, erit $\overline{a+b}|^n = \overline{P+PQ}|^n = P^n + \frac{n}{1} AQ + \frac{n-1}{2} BQ + \frac{n-2}{3} CQ + \frac{n-3}{4} DQ +$, &c.

550. *Cor.* 2. Iisdem formulis uti possumus pro polynomio quovis ad datam dignitatem evehendo, si pars una polynomii litteræ a binomii ponatur æqualis, cæteræ verò partes omnes supponantur æquales litteræ b. Exempli causâ. Sit trinomium $d + e + f$ ad tertiam dignitatem elevandum, pone $n = 3$, $d = a$, $e + f = b$, et formula $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n \times \overline{n-1}}{1 \times 2} \times a^{n-2} b^2 + \frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3$, mutabitur in seriem $d^3 + 3d^2(e+f) + 3d \times (e+f)^2 + (e+f)^3$; cum enim perventum est ad coefficientem in quâ est $n - 3$, abrumpitur series ob $n - 3 = o$. Porrò per eandem formulam generalem $(e+f)^2 = ee + 2ef + ff$, et $(e+f)^3 = e^3 + 3e^2f + 3ef^2 + f^3$. Quarè tandem $(d+e+f)^3 = d^3 + 3d^2e + 3d^2f + 3de^2 + 6def + 3dff + e^3 + 3e^2f + 3ef^2 + f^3$.

Ita etiam formulam pro dignitate infinitinomii possumus obtinere, sit enim series $A + BZ + CZ^2 + DZ^3 + EZ^4$, &c. ad dignitatem p evehenda sub ducto calculo invenietur.

$$A^p + pA^{p-1}BZ + pA^{p-1}CZ^2 + pA^{p-1}DZ^3$$
$$+ p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2}B^2Z^2 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} \times 2BCZ^3$$
$$+ p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A^{p-3}B^3Z^3$$

551. *Cor.* 3. Si ex binomio $a + b$, extrahenda sit radix cujus index $\frac{m}{p}$, loco n, in formulâ generali scribatur $\frac{m}{p}$, et erit $\overline{a+b}|^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b^1 + \frac{m \times \overline{m-p}}{1 \times 2 \times p^2} a^{\frac{m-2p}{p}} b^2 + \frac{m \times \overline{m-p} \times \overline{m-2p}}{1 \times 2 \times 3p^3} a^{\frac{m-3p}{p}} b^3 + \frac{m \times \overline{m-p} \times \overline{m-2p} \times \overline{m-3p}}{1 \times 2 \times 3 \times 4p^4} a^{\frac{m-4p}{p}} \times b^4 +$, &c. vel etiam erit $\overline{a+b}|^{\frac{m}{p}} = \overline{P+PQ}|^{\frac{m}{p}} = P^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p} AQ + \frac{m-p}{2p} BQ + \frac{m-2p}{3p} CQ + \frac{m-3p}{4p} DQ +$, &c.

Nam sit radix quæsita $\overline{a+b}|^{\frac{m}{p}}$ æqualis seriei infinitæ $A + BZ + CZ^2 + DZ^3$, &c. erit $\overline{a+b}|^m$ æqualis huic seriei ad dignitatem p evectæ, sumatur ergo series potentiæ $\overline{a+b}|^m$ quæ erit $a^m + ma^{m-1}b + m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2}b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times a^{m-3}b^3$ et conferantur cum terminis dignitatis infinitinomii $A + BZ + CZ^2 + DZ^3$, &c. ad dignitatem p evecti, (n°. 550) invenieturque $A^p = a^m$; $pA^{p-1}BZ = ma^{m-1}b$; $pA^{p-1}CZ^2 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2}B^2Z^2 = m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2}b^2$; $pA^{p-1}DZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} A^{p-2} \times 2BCZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} A^{p-3}B^3Z^3 = m \times \frac{n-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3}b^3$, &c.

Unde invenietur $A = a^{\frac{m}{p}}$, $BZ = \frac{m}{p} \times \frac{a^{m-1}}{a^{m-\frac{m}{p}}} b = \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b$; $CZ^2 = \frac{m \times \overline{m-p}}{1 \times 2 \times p^2} \times a^{\frac{m-2p}{p}} b^2$, &c.

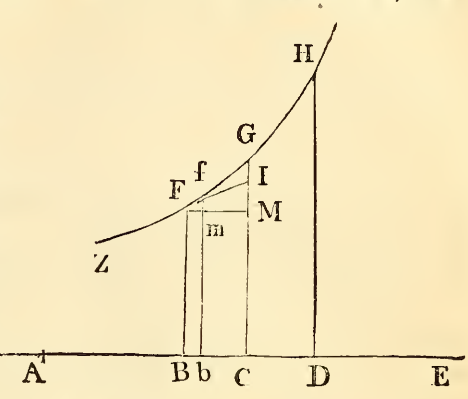
552. *Lemma.* Si in rectâ A E positione datâ, ad quam curva Z F H refertur, capiatur abscissa quævis A B, sitque ordinata correspondens F B æqualis dignitati abscissæ AB^q, in datam quantitatem 1 ductæ, et deindè capiantur intervalla æqualia B C, C D, et agantur ordinatæ C G, D H, ac per punctum F ducatur tangens F I ordinatæ C G occurrens in I, et recta F M parallela lineæ A E, eidem ordinatæ occurrens

in M, ac tandem ordinata C G seu $\overline{A\,B + B\,C}|^{q}$, elevetur ad dignitatem cujus est index q atque ità in seriem infinitam convergentem resolvatur, hujus seriei primus terminus erit semper æqualis ordinatæ F B, insistenti ad initium quantitatis constantis B C; secundus terminus æqualis erit differentiæ inter F B et C I, id est, lineæ M I, et tertius terminus unà cum sequentibus in infinitum æquabitur lineæ G I quæ jacet inter tangentem et curvam. . . . Dem. sit A B = x. F B = y, data B C = O, ducta intelligatur ordinata f b, alteri F B infinitè propinqua quæ lineam F M secet in m, et punctis F, f, coëuntibus erit F m = d x, f m = d y, ac triangula F m f, F M I similia, ideóque d x : d y = O : M I, sed quoniam $y = x^{q}$ (ex hyp.) et proindè $d\,y = q\,x^{q-1}\,d\,x$, est $d\,x : d\,y = 1 : q\,x^{q-1}$; ergò $M\,I = q\,x^{q-1} \times O$ et $C\,I = F\,B + M\,I = x^{q} + q\,x^{q-1} \times O$. Prætereà (ex hyp.) est $G\,C = \overline{x + O}|^{q} = x^{q} + q\,x^{q-1}\,O + \frac{q \times \overline{q-1}}{1 \times 2}\,x^{q-2}\,O^{2} + \frac{q \times \overline{q-1} \times \overline{q-2}}{1 \times 2 \times 3} \times x^{q-3}\,O^{3} +$, &c. in infinitum (548). Quarè erit $G\,I = G\,C - C\,I = \frac{q \times \overline{q-1}}{1 \times 2} \times x^{q-2}\,O^{2} + \frac{q \times \overline{q-1} \times \overline{q-2}}{1 \times 2 \times 3}\,x^{q-3}\,O^{3} +$, &c. in infinitum. Ergò seriei in quam resolvitur $\overline{x + O}|^{q}$, terminus primus x^{q}, æqualis est ordinatæ F B, secundus terminus $q\,x^{q-1}\,O$, æqualis differentiæ inter F B et C I, et tertius terminus unà cum sequentibus in infinitum æqualis lineæ G I. Eadem est demonstratio, si curva Z F H concavitatem lineæ A E obvertat. Q. e. d.

553. *Cor.* 1. Si quantitas O, seu B C, in infinitum minuatur ut fiat = d x, termini omnes in seriæ subsequentes sunt infinitè minores quovis termino antecedente, quod quantitatis O index in singulis terminis unitate crescat, ideóque termini illi subsequentes negligi possunt, et proindè in hac hypothesi $M\,I = d\,y = M\,G$, $G\,I = \frac{q \times \overline{q-1}}{1 \times 2}\,x^{q-2}\,O^{2} = \frac{q \times \overline{q-1}}{1 \times 2} \times x^{q-2}\,d\,x^{2} = \frac{1}{2}\,d\,d\,y$. Nam cum sit $d\,y = q\,x^{q-1}\,d\,x$ et d x, constans, erit sumptis fluxionibus, $d\,d\,y = q \times \overline{q-1}\,x^{q-2}\,d\,x^{2}$.

554. *Cor.* 2. In eâdem hypothesi erit d d d y ut quartus seriei terminus, d d d d y, ut quintus, et ità porro in infinitum. Nam quia est $d\,d\,y = q \times \overline{q-1}\,x^{q-2}\,d\,x^{2}$, erit $d\,d\,d\,y = q \times q - 1 \times q - 2\,x^{q-3}\,d\,x^{3}$, et $d\,d\,d\,d\,y = q \times q - 1 \times q - 2 \times q - 3\,x^{q-4}\,d\,x^{4}$, et ità deinceps. Quartus autem seriei terminus positâ O = d x, est $\frac{q \times q - 1 \times q - 2}{1 \times 2 \times 3}\,x^{q-3}\,d\,x^{3}$. Quintus $\frac{q \times q-1 \times q-2 \times q-3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times x^{q-4}\,d\,x^{4}$; ergò ob datos numeros $1 \times 2 \times 3$ et $1 \times 2 \times 3 \times 4$, &c. patet Corollarium.

555. *Cor.* 3. Eadem omnia vera sunt, si fuerit



ordinata B F seu y æqualis seriei cuivis potentiarum quarumlibet abscissæ A B in datas quantitates ductarum, hoc est $y = e\,x^{h} \mp f\,x^{m} \mp g\,x^{p} +$, &c. Eadem enim demonstratio. Observandum tamen est in hoc casu primum seriei terminum dici in quo quantitas O, seu B C, non extat, secundum terminum in quo quantitas illa est unius dimensionis, tertium in quo extat duarum dimensionum et sic in infinitum, licet in singulis terminis ità definitis plures contineantur quantitates signis + vel — conjunctæ. Exempli causâ: positâ $y = e\,x^{n} + f\,x^{m} = B\,F$, erit $G\,C = e\,(x + O)^{n} + f\,(x + O)^{m} = e\,x^{n} + f\,x^{m} + \frac{m}{1}\,e\,x^{n-1}\,O + \frac{n}{1}\,e\,x^{m-1}\,O +$, &c. in infinitum. Primus seriei terminus est $e\,x^{n} + f\,x^{m}$, secundus $\frac{n}{1}\,e\,x^{n-1} \times O + \frac{m}{1}\,e\,x^{m-1} \times O$ et ità de cæteris.

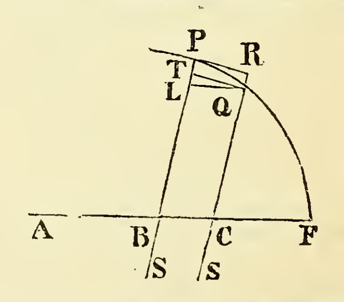
556. *Cor.* 4. Hinc sequitur eadem omnia valere, si fuerit ordinata B F seu y æqualis cuilibet functioni ipsius abscissæ A B, seu x, hoc est y = Q, et Q quantitas ex abscissâ x, ipsiusque potentiis ac aliis quantitatibus datis quomodolibet composita. Nam quantitas illa Q poterit semper vel (per Lemma 548.) ejusque Corollaria vel per divisionem in seriem aliquam resolvi, cujus singuli termini erunt vel ipsius abscissæ x potentiæ in quantitates datas ductæ, vel quantitates omnino datæ, omnis verò quantitas data $c = c\,x^{0}$. Quarè æquatio y = Q, semper reduci poterit in formam æquationis Cor. 3. (555) $y = e\,x^{n} \mp f\,x^{m} \mp g\,x^{p} \mp$ &c. Exempli causâ: sit $y = g + \frac{e\,e}{b + x} + (f\,f + x\,x)^{\frac{1}{2}}$.

Peractâ divisione in infinitum, erit $\frac{e\,c}{b + x} =$

pono. (c) Est igitur vis quæsita ut $\frac{mm - mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut $\frac{mm - mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata parabolam attingat, existente m = 2, et n = 1 : fiet vis ut data 2 B°, ideoque

$\frac{ee}{b} - \frac{eex}{b^2} + \frac{eex^2}{b^3} - \frac{eex^3}{b^4} + \frac{eex^4}{b^5}$ &c. in infinitum; et $\overline{ff + xx}^{\frac{1}{2}} = f + \frac{x^2}{2f} - \frac{x^4}{8f^3} + \frac{x^6}{16f^5}$ &c. in infinitum. Nam in hoc casu erit in formulâ $P^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p} A Q + \frac{m-p}{2p} B Q$ &c. (551) m = 1, p = 2, P = ff, $Q = \frac{x^2}{ff}$, $A = P^{\frac{m}{p}} = ff^{\frac{1}{2}} = f$, $B = \frac{m}{p} \times AQ = \frac{x^2}{2f}$, et sic deinceps, ergò erit $y = g + \frac{ee}{b} + f - \frac{eex}{b} + \left(\frac{ee}{b^3} + \frac{1}{2}f\right) x^2 - \frac{eex^3}{b^4} + \left(\frac{ee}{b^5} - \frac{1}{8f^3}\right) x^4$ &c. in infinitum.

(c) 557. * *Est igitur vis quæsita*, &c. Moveatur corpus in curvâ P Q F, vi tendente ad planum seu basim A F, secundum lineas P B, Q C cum basi A F angulum datum constituentes. Producatur ordinata C Q ut tangenti per P ductæ occurrat in R, et ex puncto curvæ Q ad ordinatam P B agantur Q L parallela A F, et Q T ad P B perpendicularis. Jam si vis centripeta fingatur ad punctum S infinitè distans tendere, coëuntibus punctis P et Q vis illa in puncto P erit (per Cor. 1. Prop. 6.) directè ut $\frac{QR}{SP^2 \times QT}$, hoc est, ob constantem S P, ut $\frac{QR}{QT}$. Porrò ob angulum Q L T datum, et angulum Q T L rectum, datur specie triangulum L Q T, et ideò datâ Q L, datur etiam Q T, ergò datâ B C seu Q L, vis erit ut Q R. Sed si abscissa A B dicatur = A, ordinata B P = B, et B C = O; cum sit (ex hyp.) B ut $A^{\frac{m}{n}}$, erit ordinata C Q, ut $\overline{A + O}^{\frac{m}{n}}$ et (553), Q R, ut tertius terminus seriei in quam resolvitur $\overline{A + O}^{\frac{m}{n}}$, hoc est, (550) ut $\frac{m \times m - n}{1 \times 2 \times n^2} \times A^{\frac{m-2n}{n}} \times OO = \frac{mm - mn}{2n^2} A^{\frac{m-2n}{n}} \times OO$, seu ut $\frac{mm - mn}{n^2} \times A^{\frac{m-2n}{n}}$, ob datam quantitatem $\frac{OO}{2}$. Est igitur vis quæsita ut $\frac{mm - mn}{1 \times 2 \times n^2} \times A^{\frac{m-2n}{n}}$ vel ut $\frac{mm - mn}{nn} \times B^{\frac{m-2n}{m}}$; quia cum sit B ut $A^{\frac{m}{n}}$, erit $B^{\frac{n}{m}}$ ut A, et $B^{\frac{n}{m} \times \frac{m-2n}{n}}$, seu $B^{\frac{m-2n}{m}}$, ut $A^{\frac{m-2n}{n}}$. Itaque si ponatur m = 2, n = 1,



erit B, ut A^2, et curva P F parabola, et $\frac{mm - mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}} = 2B^0$, adeóque vis ut data $2B^0 = 2$. Quod si ponatur m = −1, et n = 1, erit B ut $\frac{1}{A}$ hoc est B × A rectangulum datum, et proindè curva P F hyperbola cujus asymptotus A F, et centrum A; et $\frac{mm - mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}} = 2A^{-3} = \frac{2}{A^3} = 2B^3$, et ideò vis ut cubus ordinatæ B. Sed quoniam hyperbola convexitatem obvertit asymptoto A F, vi illâ corpus a basi A F repeletur.

Si curva P Q F, est ellipsis cujus centrum A, semidiameter A F = C, erit PB^2 seu B^2, ut rectangulum $\overline{AF + AB} \times BF = \overline{C + A} \times \overline{C - A} = CC - AA$, et ponendo B C = O, erit QC^2, ut $CC - AA - 2AO - OO$, fiat $CC - AA = DD$, erit QC^2, ut $DD - 2AO - OO$, et radice per formulam generalem extractâ (550. 551) erit Q C, ut $D - \frac{AO}{D} - \frac{OO}{2D} - \frac{AAOO}{2D^3} - \frac{AO^3}{2D^3}$

dabitur. Datâ igitur vi corpus movebitur in parabolâ, quemadmodum Galilæus demonstravit. Quod si ordinatim applicata hyperbolam attingat, existente $m = o - 1$, et $n = 1$; fiet vis ut $2 A^{-3}$ seu $2 B^3$: ideoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in hyperbolâ. Sed missis hujusmodi propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attigi.

$- \frac{A^3 O^3}{2 D^5}$, &c. tertius seriei terminus est $\frac{O O}{2 D} + \frac{A A O O}{2 D^3} = \frac{\overline{D D + A A} \times O O}{2 D^3} = \frac{C C O O}{2 D^3}$, erit igitur Q R (552. 556) seu vis ut $\frac{C C}{2 D^3}$, hoc est, ob datam quantitatem $\frac{C C}{2}$, ut $\frac{1}{D^3}$, ac proindè quoniam B B est ut C C — A A seu D D, vis erit ut $\frac{1}{B^3}$, hoc est, ut cubus ordinatim applicatæ reciprocè, quod convenit cum solutione Problematis 3. Eodem modo demonstratur vim a plano A F repellentem decrescere in ratione triplicatâ ordinatim applicatæ P B si corpus moveatur in hyperbolâ, cujus diameter una sit in plano A F, altera conjugata in lineâ parallelâ ordinatis P B, Q C, et convexitas plano A F obversa.

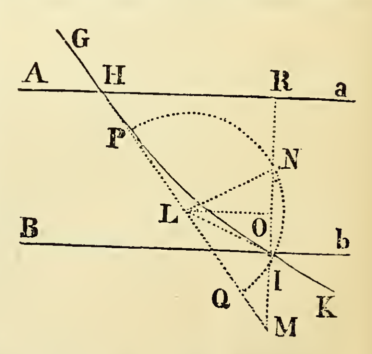
SECTIO XIV.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

Si media duo similaria, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, et corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantiis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ.

Cas. 1. Sunto A a, B b plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius A a ([d]) secundum lineam G H, ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eâque actione describat lineam curvam H I, ([e]) et emergat secundum lineam I K. Ad planum emergentiæ B b erigatur perpendiculum I M, occurrens tum lineæ incidentiæ G H productæ in M, tum plano incidentiæ A a in R; et linea emergentiæ K I producta occurrat H M in L. Centro L intervallo L I describatur circulus, secans tam H M in P et Q, quam M I productam in N; et primò si attractio vel impulsus ponatur uniformis, erit (ex demonstratis Galilæi) ([f]) curva



([d]) 558. * *Secundum lineam G H.* Angulus incidentiæ hic dicitur complementum anguli G H A ad rectum, seu angulus quem linea G H constituit cum rectâ ad planum incidentiæ A a perpendiculariter erectâ in H. Angulus emergentiæ est etiam angulus K I M, quem linea directionis corporis emergentis, efficit cum rectâ I M ad planum emergentiæ B b, perpendiculari in I.

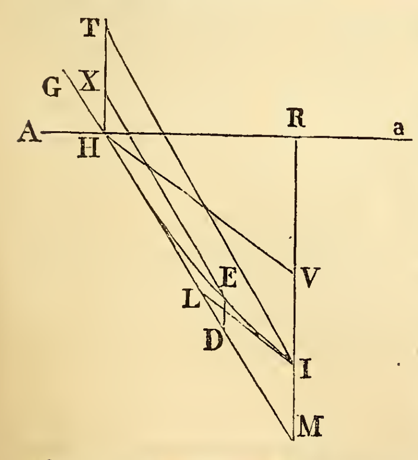
([e]) * *Et emergat secundum lineam.* Patet rectas G H, I K seu corporis in H et I directiones, curvam H I in punctis H, I contingere.

([f]) * *Curva H I parabola,* cujus diameter I R, patet (per not. 40.)

H I parabola (g) cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto et lineâ I M æquale sit H M quadrato; sed et linea H M bisecabitur in L. Unde si ad M I demittatur perpendiculum L O, (h) æquales erunt M O, O R; et additis (i) æqualibus O N, O I, fient totæ æquales M N, I R. Proinde cum I R detur, datur etiam M N; estque rectangulum N M I ad rectangulum sub latere recto et I M, hoc est, ad H M q, in datâ ratione. (k) Sed rectangulum N M I æquale est rectangulo P M Q, id est, differentiæ quadratorum M L q, et P L q seu L I q; et H M q datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem M L q: ergo datur ratio M L q — L I q ad M L q, (l) et convertendo ratio L I q ad M L q, et ratio dimidiata L I ad M L. Sed in omni triangulo L M I, sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ L M R ad sinum anguli emergentiæ L I R. Q. e. d.

Cas. 2. Transeat jam corpus successivè per spatia plura parallelis pla-

(g) * *Cujus hæc est proprietas*, &c. Ductis per punctum H diametro H T, et rectâ H V ad alteram diametrum I R ordinatim applicata, atque ex puncto I ad diametrum H T ordinatâ I T, erit ob parallelas M I, H T (per Theor. 1. de Parabolâ) et parallelas M H, I T (per Lem. 4. de Conic.) M I = H T et I T = M H (per 34. 1. Elem.); sed (per Theor. 1. de Parabolâ)



quadratum ordinatæ T I æquale est rectangulo sub dato latere recto diametri H T et abscissâ H T, ergò rectangulum sub dato latere recto et lineâ M I æquale est H M quadrato; Et quoniam H M parabolam tangit in H estque proindè (per Cor. 1. Lem. 5. de Conic.) I M = V I, et H V parallela L I, erit quoque H L = L M. Q. e. d.

559. Ut latus rectum diametri H T in variis angulis incidentiæ datum sit, oportet corporis parabolam describentis velocitatem in puncto H, et plani incidentiæ A a vim attractricem esse datas. His autem datis, datum esse hoc latus rectum itâ demonstratur. Per punctum X in diametro H T datum, agatur ordinatim applicata X E parabolæ occurrens in E, et per E ducatur E D parallela X H et tangenti H M occurrens in D, ac proindè æqualis datæ X H. Jam verò H X seu D E, est spatium quod corpus vi attractrice describit eodem tempore dato quo motu uniformi projectionis percurrit H D, ideóque datis vi attractrice et velocitate projectionis, data quoque erit linea H D in quovis incidentiæ angulo G H T. Est autem latus rectum diametri H T tertia proportionalis ad abscissam H X, et ordinatam X E seu H D. Ergò datis vi attractrice et velocitate projectionis, datum seu constans est latus rectum diametri H T. Q. e. d.

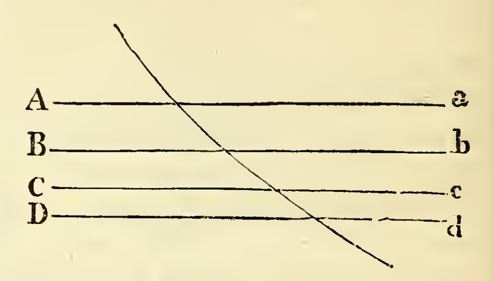
(h) * *Æquales erunt M O, O R.* (Per Prop. 2. lib. 6. Elem.)

(i) * *Æqualibus O N, O I.* Per Prop. 3. lib. 3 Elem.

(k) * *Sed rectangulum N M I æquale est rectangulo P M Q*, (per Cor. 1. Prop. 36. lib. 3. Elem.) *id est, differentiæ quadratorum* $M L^2$ *et* $P L^2$, est enim P M = M L + P L, et Q M = M L — L Q = M L — P L; Quarè $P M \times Q M = M L^2 - P L^2$. (Per Corol. 6. 2i. Elem.)

(l) * *Et convertendo.* Sint enim A et B, quantitates datæ, et $M L^2 - L I^2 : M L^2 = A^2 : B^2$, erit $M L^2 : L I^2 = B^2 : B^2 - A^2$, quæ est ratio data

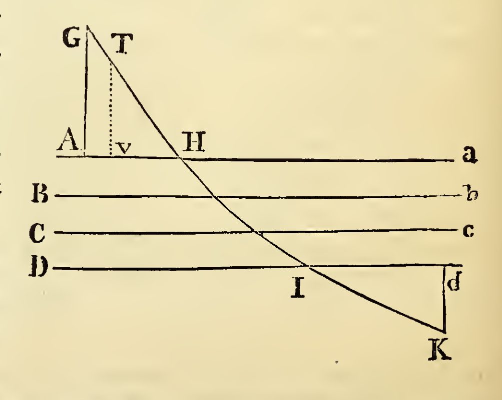
nis terminata, A a b B, B b c C, &c. et agitetur vi quæ sit in singulis separatim uniformis, at in diversis diversa; et per jam demonstrata, sinus incidentiæ in planum primum A a erit ad sinum emergentiæ ex plano secundo B b, in datâ ratione; et hic sinus, qui est sinus incidentiæ in planum secundum B b, erit ad sinum emergentiæ ex plano tertio C c, in datâ ratione; et hic sinus ad sinum emergentiæ ex plano quarto D d, in datâ ratione; et sic in infinitum: (m) et ex æquo, sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo in datâ ratione. Minuantur jam planorum intervalla et augeatur numerus in infinitum, eò ut attractionis vel impulsus actio, secundum legem quamcunque assignatam, continua reddatur; et ratio sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo, semper data existens, etiamnum dabitur. Q. e. d.



PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

Iisdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.

Capiantur A H, I d æquales, et erigantur perpendicula A G, d K occurrentia lineis incidentiæ et emergentiæ G H, I K, in G et K. In G H capiatur T H æqualis I K, et ad planum A a demittatur normaliter T v. Et (per legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum planis A a, B b, C c, &c. perpendi-



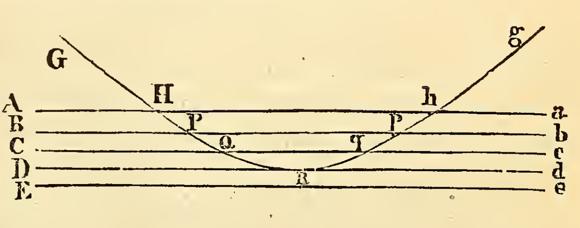
(m) * *Et ex æquo.* Sint quantitates datæ A, B, C, D, &c. Sinus incidentiæ in planum primum S, sinus emergentiæ ex secundo plano, idem qui sinus incidentiæ in secundum planum T, et ità porrò sinus sint S, T, V, X, &c. ponaturque S : T = A · B, T : V = B : C, V : X = C : D, et erit, ex æquo, S : X = A : D.

cularem, alterum iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus, agendo secundum lineas perpendiculares, nil mutat motum secundum parallelas, et propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam A G et punctum H, interque punctum I et lineam d K; (n) hoc est, æqualibus temporibus describet lineas G H, I K. Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut G H ad I K vel T H, (o) id est, ut A H vel I d ad v H, hoc est (respectu radii T H vel I K) (p) sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ. Q. e. d.

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iisdem positis, (q) et quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea, dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, et angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter parallela plana A a, B b, C c, &c. describere arcus parabolicos, ut supra; sintque arcus illi H P, P Q, Q R, &c. Et sit ea lineæ incidentiæ G H obliquitas ad planum primum A a, ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in eâ ratione



quam habet idem sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano D d, in spatium D d e E: et ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideoque linea emergentiæ coincidet cum plano D d. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto R; et quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum E e. Sed nec potest idem per-

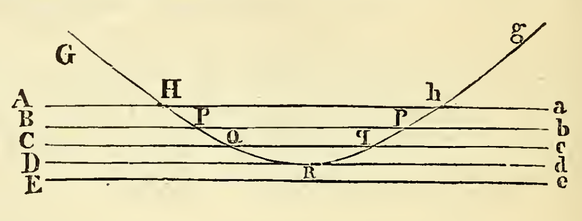
(n) * *Hoc est, æqualibus temporibus.* Quoniam motu composito corpus fertur per lineas G H et I K, eodem tempore describit G H quo A H, et I K quo I d, sed (ex Dem.) tempora quibus conficiuntur intervalla parallela et æqualia A H, I D æquantur, ergò corpus æqualibus temporibus describit lineas G H et I K.

(o) * *Id est ut A H vel I d ad v H.* Per Prop. 2. lib. 6. Elem.

(p) * *Ut sinus emergentiæ.* Est enim angulus v T H anguli T H v, et angulus I K d anguli K I d, complementum ad rectum; et proindè (558) prior est æqualis angulo incidentiæ, posterior est æqualis angulo emergentiæ.

(q) * *Et quod motus antè incidentiam, &c* Ut angulus emergentiæ semper crescat (Prop. 95.) et ipsius proindè complementum ad rectum semper decrescat in transitu corporis per diversa media.

gere in lineâ emergentiæ R d, propterea quod perpetuò attrahitur vel impellitur (r) versus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana C c, D d, describendo arcum parabolæ Q R q, (s) cujus vertex principalis (juxta demonstrata Galilæi) est in R; secabit planum C c in eodem angulo in q, ac prius in Q; dein pergendo in arcubus parabolicis q p, p h,



&c. arcubus prioribus Q P, P H similibus et æqualibus, secabit reliqua plana in iisdem angulis in p, h, &c. ac prius in P, H, &c. emergetque tandem eâdem obliquitate in h, quâ incidit in H. Concipe jam planorum A a, B b, C c, D d, E e, &c. intervalla in infinitum minui et numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; et angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. Q. e. d.

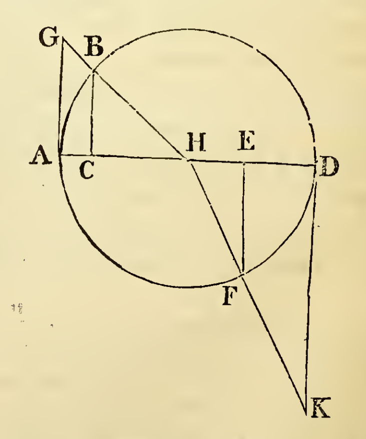
Scholium.

Harum attractionum haud multum dissimiles sunt lucis reflexiones et refractiones, factæ secundum datam secantium rationem, ut invenit Snellius, (t) et per consequens secundum datam sinuum rationem, ut exposuit

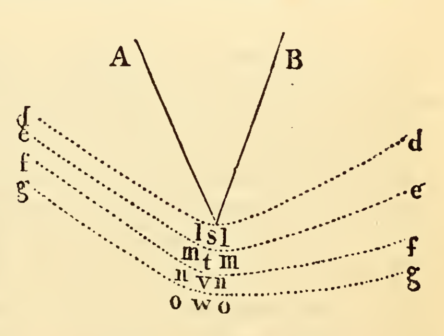
(r) * *Versus medium incidentiæ,* v. gr. C c.

(s) * *Cujus vertex principalis.* Quoniam enim (ut patet ex not. 40.) omnes diametri parabolæ Q R q sunt ad basim Q q perpendiculares, erit Q q ad axem ordinatim applicata, cumque recta D R d ipsi Q q parallela parabolam tangat in R, (40) erit R vertex principalis (per. Lem. 4. de Conic.) et propterea velocitates corporis in locis Q et q a vertice R æquè remotis æquales erunt, et directiones illius ad lineam Q q æque inclinatæ: Insuper velocitas perpendicularis quâ corpus ex solâ vi attractrice ad planum P p urgetur, iisdem gradibus crescit per totum spatium q p, quibus antè decreverat per spatium æquale P Q. Quarè corpus *pergendo in arcubus parabolicis,* &c.

(t) * *Et per consequens.* Lucis radius G H incidat in planum refringens A D, sitque radius refractus H K. Centro H et radio quovis H A, circulus describatur planum secans in A et D radiosque lucis in B et F. Erigantur ad planum perpendicula A G, C B, E F, D K. Villebrordus Snellius, referente Isaaco Vossio in suâ dissertatione de lucis naturâ et proprietate, invenerat secantes G H, H K angulorum G H A, K H D, esse in datâ ratione. Verùm indè sequitur quod Cartesius posteà vulgavit,



Cartesius. Namque lucem successivè propagari et spatio quasi septem vel octo minutorum primorum a sole ad terram venire, (u) jam constat per phænomena satellitum Jovis, observationibus diversorum astronomorum confirmata. Radii autem in aëre existentes (uti dudum Grimaldus, luce per foramen in tenebrosum cubiculum admissâ, invenit, et ipse quoque expertus sum) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt nummorum ex auro, argento et ære cusorum termini rectanguli circulares, et cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; et ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, (x) quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. Et qui transeunt ad majores distantias minus incurvantur; et ad distantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, et tres colorum fascias efformant. In figura designat s aciem cultri vel cunei cujusvis A s B; et g o w o g, f n u n f, e m t m e, d l s l d sunt radii, arcubus o w o, m t m, l s l versus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro distantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aëre extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aëre quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. (z) Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem ra-



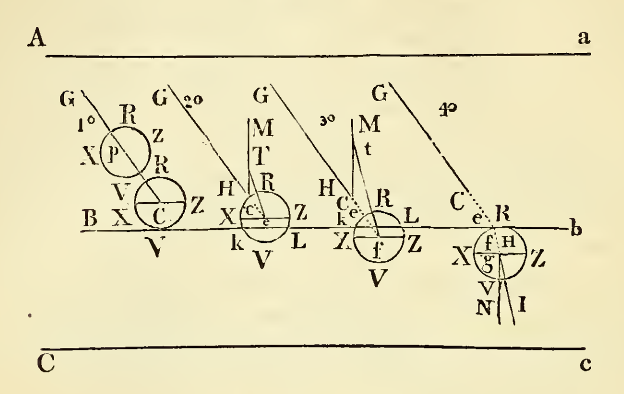
datam quoque esse rationem linearum C H, H E quæ sunt sinus angulorum incidentiæ C B H, et emergentiæ H F E (558). Nam B H : G H = C H : A H (seu B H) et K H : F H (seu B H) = H D (seu B H) : H E, et ex æquo, K H : G H = C H : H E. Quarè datâ ratione G H ad K H, datur quoque ratio H E ad C H.

(u) * *Jam constat per phænomena.* Jupiter cum suis quatuor satellitibus circà solem ceù centrum revolvitur in trajectoriâ quæ tellurem ambitu suo complectitur, undè fit ut perpetuò mutetur Jovis a tellure distantia, quæ, cæteris paribus, minima est, tellure solem inter et Jovem positâ, maxima verò, sole inter Jovem et tellurem locato, atque harum distantiarum differentia orbis magni diametro, seu duplæ distantiæ solis a terrâ æqualis est. Si igitur lucis propagatio instantanea non est, sed successiva, et per orbis magni diametrum sensibili aliquo tempore diffundatur, necesse est ut satellitis ecclipsis, quæ contingit dum Jovis umbram subit, tardiùs a nobis videatur in majori illâ Jovis distantiâ, citiùs in minori, atquè itâ rem se habere Roemerus aliique deindè plures astronomi observarunt. Cæterum alii causæ præter successivam lucis propagationem inæqualitatem illam satellitum tribuendam esse contendit Clariss. Maraldus in comm. Paris. 1707. quod etiam jam antea Magno Cassino visum fuerat. Sed Clarissimus Granjean ejus argumentis respondet in comm. Paris. 1732. horum dissertationes vide sis.

(x) * *Quasi magis attracti.* Alia egregia experimenta vide in Newtoni opticâ initio lib. 3. et quæst. 29.

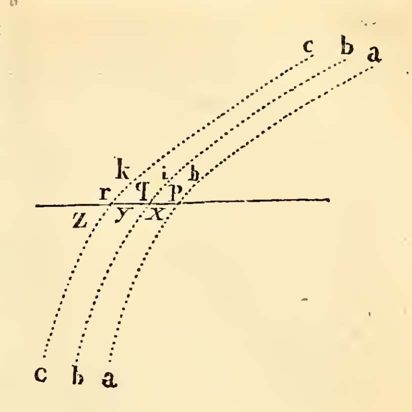
(z) * *Fit igitur refractio et reflexio.* Vide

diorum, factam partim in aëre antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis c k z c, b i y b,



Prop. 8. et 9. Partis 3æ. Lib. Optices Newtoni. Sed ut res clariùs intelligatur, sint media duo contigua, A a b B, B b c C, planis parallelis terminata, et quorum talis sit attractionis lex ut ultrà distantiam p R a medio alterutro evanescat ejus medii attractio. Itaque centro p et radio p R (fig. 1.) describatur circulus vel potiùs sphæra R Z V X quæ planum B b non attingat, corpus p versus omnia hujus sphæræ puncta æqualiter attractum, nullam in partem inflectetur, sed manebit in lineâ rectâ G C, secundum quam moveri supponitur. Si in eâdem rectâ G C, capiatur punctum C, a plano B b remotum distantiâ C V = p R, sitque vis attractiva versùs medium B b c C, major vi attractivâ medii A a b B, in eo ipso loco C corpus a rectâ viâ G C deflectere curvamque lineam describere incipiet. Perveniat (2°.) corpus ex C in e, per curvam C e, et ductâ H M ad plana A a, B b perpendiculari, ac per punctum e, rectâ e T, quæ curvam C e, tangat in e, et perpendiculo H M occurrat in T, erit angulus e T C minor angulo incidentiæ G H M; nam cum segmentum k V L, in hemisphærio X V Z magis trahat versùs planum B b, quam segmentum ipsi æquale in hemispherio X R Z, (ex hyp.) versùs planum A a, manifestum est curvam deorsum inflecti, ideóque tangentum e T a radio incidente G C, versùs superiora M recedere. Similiter ubi corpusculum C est in f (3°.) intrà medium B b c C, magis trahitur versùs planum C c, ab hemispherio X V Z, quam retrahitur versùs planum B b, ab altero hemispherio X R Z, cujus segmentum k R L, minus trahit, quam æquale segmentum in hemispherio X V Z; quarè angulus H t f, quem tangens f t cum perpendiculo H M efficit, adhuc minor est quam angulus H T e (2°.) Sed cum tandem corpusculum C pervenit in g (4°.), locum a plano B b remotum distantiâ maximâ g R = p R, tum corpus p, æqualiter undique attractum (ex hypothesi) semitam non ampliùs mutat, sed rectâ movetur per g I, quæ curvam C e f g tangit in g, estque angulus N g I, quem g I cum g N ad B b perpendiculari constituit, seu angulus emergentiæ minor adhuc angulo H t f (3°.) Oppositum eveniet, si medium B b c C, minùs trahat quam medium A a b B, et refractio in reflexionem mutari poterit. Fit igitur refractio et reflexio non in puncto incidentiæ R (4°.) Sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, ut Newtonus docet. Quod si itaque certissimis experimentis constet radios lucis a corporibus quasi attrahi in minimis distantiis, Newtonus veram hic demonstravit causam illarum lucis affectionum, quibus contingit ut radii incidentes in superficiem corporis resiliant in plano ad eam verticali, sub angulis reflexionis æqualibus angulis incidentiæ, atque ut ex uno medio in aliud diversæ densitatis aut diversæ vis trahentis, obliquè penetrantes refrangantur in plano ad superficiem, quæ duo media dirimit itidem recto, ità ut sinus incidentiæ et emergentiæ datam servent rationem. Satis enim liquet plana linearum G H I et G H R h, in superioribus propositionibus, perpendicularia esse ad plana A a, B b, ut planum parabolæ quam gravia in hypothesi Galilæi describunt perpendiculare est ad horizontem. Quænam verò causa sit attractionis aut tendentiæ vel impulsûs radiorum lucis in corpora: alia quæstio est quam hic agitare minimè necesse est, quâque sepositâ, interim ex certis experimentis mathematicâ demonstratione, ostensa est reflexionis et refractionis lex et causa; quemadmodum semel cognitis (per experientiam) gravitate atque elaterio aëris, rectè quis ascensus et descensus liquorum in tubis vacuis causam atque legem demonstrasse censetur, dum ex iis aëris proprietatibus quarum causas ignorat, hæc phænomena accuratè deduxit. Nam juxtà rec-

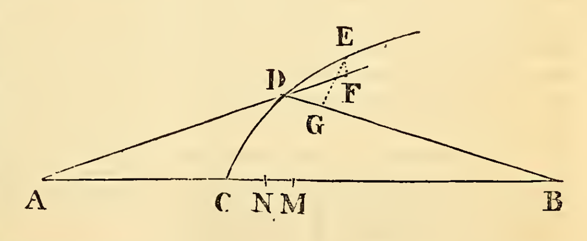
a h x a incidentibus ad r, q, p, et inter k et z, i et y, h et x, incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis et progressum corporum, visum est propositiones sequentes in usus opticos subjungere; interea de naturâ radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed trajectorias corporum trajectoriis radiorum persimiles solummodo determinans.



PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

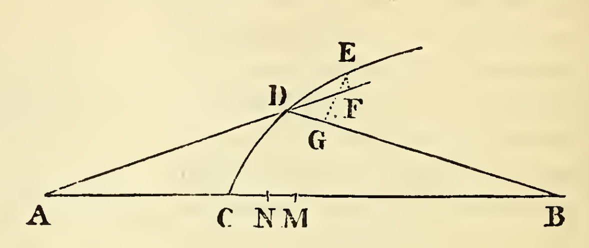
Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit A locus a quo corpuscula divergunt; B locus in quem convergere debent; CDE curva linea quæ circa axem A B revoluta describat superficiem quæsitam; D, E curvæ illius puncta duo quævis; et E F, E G perpendicula in corporis vias A D, D B demissa. Accedat punctum D ad punctum E; et lineæ D F, quâ A D augetur, ad lineam D G, quâ D B



tam philosophandi rationem, in naturæ phænomena primum debemus diligenter inquirere, ut posteà motus corporum eorumque leges et causas accuratius investigare et cognoscere possimus. Cæterum in phænomena reflexionis ac refractionis lucis eorumque causas inquisierunt philosophi ac mathematici celeberrimi, Cartesius cap. 2°. dioptrices per leges generales resolutionemque motuum, et supponendo lumini minorem resistentiam in densioribus quam in rarioribus mediis objici; Leibnitzius in Actis Eruditorum Lipsiensibus an. 1682. pag. 185. hâc factâ hypothesi, quod lumen a puncto radiante ad punctum illustrandum viâ omnium facillimâ perveniat, quâ etiam usus erat anteà Fermatius; Hugenius in tractatu de lumine per naturam undulationis luminis rem totam explicat, et Joannes Bernoullius in Actis Lips. an. 1701. ex æquilibrii fundamento eam ingeniosissimè deduxit.

diminuitur, (y) ratio ultima erit eadem, quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ A D ad decrementum lineæ D B; et propterea si in axe A B sumatur ubivis punctum C, per quod curva C D E transire debet, et capiatur ipsius A C incrementum C M ad ipsius B C decrementum C N in datâ illâ ratione, centrisque A, B, et intervallis A M, B N describantur circuli duo se mutuo secantes in D; (a) punctum illud D tanget curvam quæsitam C D E, eandemque ubivis tangendo determinabit. Q. e. i.

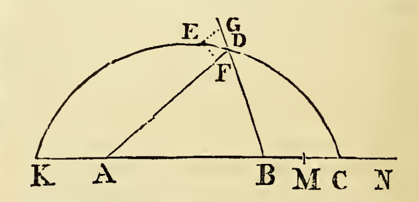


Corol. 1. Faciendo autem ut punctum A vel B, nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti C, (b) habebuntur figuræ illæ omnes,

(y) * *Ratio ultima erit eadem.* Nam lineolâ D E pro radio seu sinu toto usurpatâ, lineolæ D F, D G sunt sinus angulorum D E F, D E G; sed angulus D E F est complementum ad rectum anguli E D F, seu A D C, ideóque æqualis est angulo incidentiæ, et angulus D E G est complementum ad rectum anguli E D G, ideóque æqualis est angulo emergentiæ (558). Ergò lineæ D F ad lineam D G ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ, ideóque data. Et hinc (per Cor. Lem. 4.) datur ratio incrementi totius finiti lineæ A D, ad decrementum totum finitum lineæ D B.

(a) * *Punctum illud D.* Atque eodem modo, assumendo varia incrementa C M, et decrementa C N, puncta diversa lineæ C D E determinabuntur. Si verò centro B et radio quovis describatur circulus, curvam C E secans in E, et lineam A B in N, et indè convolutione superficiei C E N, circà axem C N solidum corpus conficiatur, corpusculum ex D, per lineam D B ad centrum B circuli descripti tendens, non refrangetur, dum ex superficie circulari concavâ E N egreditur, quod corpusculi directio D B, sit ad illam superficiem perpendicularis, atque ita corpusculum semper perveniet ad punctum B.

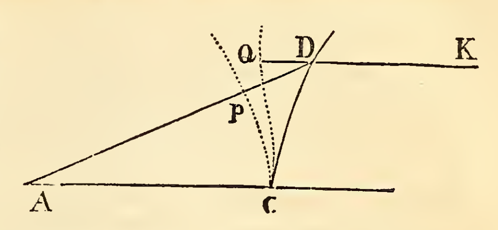
(b) * *Habebuntur figuræ illæ omnes.* Quas enim lineas Cartesius Geometriæ lib. 2°. pag. 50. et seq. dicit A 5, A 6, vel A 7, A 8, eas Newtonus hic vocat C M, C N, et de cætero eadem est utriusque authoris constructio. Undè manifestum est, si punctum C, inter puncta A et B, et punctum N inter C et M, sita sint, primam Cartesii ovalem Newtonianâ constructione describi; si manentibus punctis A, C, B, M, punctum N, inter C et A locetur, 2am. ovalem Cartesianam obtineri; si vero punctum B ad alteras partes puncti C migret ultrà A, et punctum C sit inter A et N, atque M, 3am. Cartesii ovalem haberi, iisdemque positis, si punctum N sit inter C, et A, 4am. ovalem Cartesii delineari. Porrò, si punctum A vel B in infinitum abeat ut radii incidant vel refringantur paralleli, tum per punctum M vel N erigendum erit perpendiculum, quod circulus centro B vel A, et radio B N, vel A M, descriptus secabit in puncto quæsito D, curvæ C D E, quæ erit ellipsis vel hyperbola, ut calculo inito facilè patet, atque hæ sunt figuræ quibus Cartesius cap. 8°. dioptrices usus est.



Eadem est demonstratio, si superficies C D E incidentes radios reflectit, quo casu fit C N = C M, ob angulum incidentiæ æqualem angulo emergentiæ (per Prop. 96.) et curva C D E erit sectio conica, videlicet hyperbola, si punctum C inter A et B situm; ellipsis, si extrà positum sit; Parabola, si ellipseos focus B in infinitum

quas Cartesius in optica et geometria ad refractiones exposuit. Quarum inventionem cum Cartesius celaverit, visum fuit hâc propositione exponere.

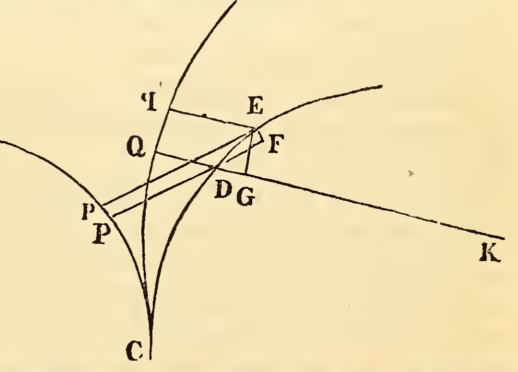
Corol. 2. Si corpus in superficiem quamvis C D, secundum lineam rectam A D, lege quâvis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam D K, et a puncto C duci intelligantur



lineæ curvæ C P, C Q ipsis A D, D K semper perpendiculares: (c) erunt incrementa linearum P D, Q D, atque ideo lineæ ipsæ P D, Q D, incrementis istis genitæ, ut sinus incidentiæ et emergentiæ ad invicem: et contra.

abeat, et circulus, si puncta A et B coëant. Nam si punctum C inter A et B situm sit, et N inter A et C, cum sit A D = A M, et B D = B N (per constr.) rectarum A D, B D differentia data erit, ut potè æqualis A M — B N = A C + C M — B C — C N = A C — B C, ob C M = C N, ideóque curva C D E erit hyperbola cujus foci A et B, (per Theor. 3. de Hyperbolâ.) Si punctum C inter puncta A et B positum non est, ut in hâc figurâ, rectarum A D, B D summa data erit, in hoc enim casu punctum C, est inter N, et M, atque A D + B D = A C — C M + B C + C N = A C + B C. Est igitur C D E ellipsis cujus foci A et B, (Theor. 3. de Ellipsi) quæque foco alterutro in infinitum abeunte mutatur in parabolam et focis coëuntibus mutatur in circulum.

(c) 561. * *Erunt incrementa*, &c. Nam si capiatur arcus quam minimus D E, atque ex puncto E in curvas C P, C Q, et in rectas P D, Q K, demittantur perpendicula E p, E q et E F, E G, coëuntibus punctis E et D, erunt E F, P p et E G, Q q sibi mutuò parallelæ, et proindè P F, p E et Q G, q E, æquales, ideóque D F et D G erunt rectarum P D, Q D incrementa nascentia. Sed, (ex demonstratis suprà) D F est ad D G, ut sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ, quarè incrementa linearum P D,

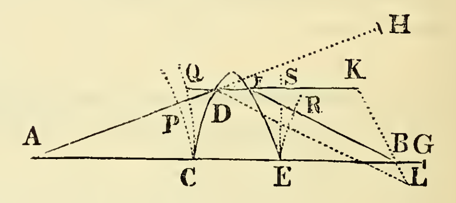


Q D, atque adeò (Cor. Lem. 4.) lineæ ipsæ P D, Q D, (quæ simul nascuntur in puncto C) incrementis istis genitæ, erunt ut sinus incidentiæ et emergentiæ ad invicem, et contrà, si lineæ P D, Q D curvis C P, C Q perpendiculares sint ut sinus incidentiæ et emergentiæ, erunt earum incrementa nascentia in eâdem semper ratione, ac proindè si corpus in superficiem C D secundum lineam P D incidat, emerget secundum lineam Q D seu D K.

PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

Iisdem positis, et circa axem A B *descriptâ superficie quâcunque attractivâ* C D, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam* E F, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta A B secet superficiem primam in C et secundam in E, puncto D utcunque assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eâdem, (d) et sinu emergentiæ e superficie secundâ ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N: produc tum A B ad G, ut sit B G ad C E ut M — N ad N; tum A D ad H, ut sit A H æqualis A G; tum etiam D F ad K, ut sit D K ad D H ut N ad M. Junge K B, et centro D intervallo D H describe circulum occurrentem K B productæ in L, ipsique D L parallelam age B F: et punctum F tanget lineam E F, quæ circa axem A B revoluta describet superficiem quæsitam. Q. e. f.



Nam concipe lineas C P, C Q ipsis A D, D F respectivè, et lineas E R, E S ipsis F B, F D ubique perpendiculares esse, (e) ideoque Q S ipsi C E semper æqualem; et erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) P D ad Q D ut M ad N, (f) ideoque ut D L ad D K (g) vel F B ad F K; (h) et divisim ut D L — F B seu P H — P D — F B ad F D seu F Q — Q D; et compositè ut P H — F B ad F Q, id est (i) (ob æquales P H

(d) * *Et sinu emergentiæ e superficie secunda,* &c. Est enim sinus emergentiæ e superficie secundâ E F, ad sinum incidentiæ in eamdem, ut sinus incidentiæ in superficiem primam C D, ad sinum emergentiæ ex eâdem. Nam si radius incidens A D refrangitur per D F, ob eandem rationem radius F D, incidens in D refrangetur per D A, et qui sinus erat incidentiæ in primo casu, fit sinus emergentiæ in secundo.

(e) * *Ideòque Q S ipsi C E semper æqualem.* Cum enim linea Q S, sit semper perpendicularis utrique lineæ C Q, E S (ex hyp.) ea nec crescit, nec decrescit, ob partes curvarum in Q et S semper parallelas, ut patet.

(f) * *Ideòque ut D L ad D K.* Est enim (per constr.) D K ad D H, ut N ad M, et D L = D H, per const.

(g) * *Vel F B ad F K.* Ob parallelas D L, F B (per constr.)

(h) * *Et divisim.* Cum sit P D : Q D = D H : D K = F B : F K, erit divisim D H : D K, seu P D : Q D = D H — F B : D K — F K = P H — P D — F B : D F, seu Q F — Q D, et compositè P D : Q D = P H — P D + P D — F B, seu P H — F B : Q F — Q D + Q D, seu Q F = M : N.

(i) * *Ob æquales P H et C G.* Nam (per constr.) A H = A G, et quoniam punctum A datum est, estque A P semper perpendicularis ad curvam C P, liquet eam curvam esse circulum cujus centrum A, undè A P = A C, et hinc P H = C G; et simili modo patet esse B R = B E, ob datum punctum B.

et C G, Q S et C E) C E + B G — F R ad C E — F S. Verùm (ob proportionales B G ad C E et M — N ad N) est etiam C E + B G ad C E ut M ad N: [k] ideoque divisim F R ad F S ut M ad N, et propterea per Corol. 2. Prop. XCVII., superficies E F cogit corpus, in ipsam secundum lineam D F incidens, pergere in linea F R ad locum B. Q. e. d.

Scholium. Eâdem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem opticos maxime accommodatæ sunt figuræ sphæricæ. Si perspicillorum vitra objectiva ex vitris duobus sphæricè figuratis et aquam inter se claudentibus conflentur; fieri potest ut a refractionibus aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accuratè corrigantur. Talia autem vitra objectiva vitris ellipticis et hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius et accuratius formari possint, sed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Verùm tamen diversa diversorum radiorum refrangibilitas impedimento est, quò minus optica per figuras vel sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis [l] imperitè collocabitur.

[k] * *Ideòque divisim*, &c. Nam cum sit (ex demonstratis) M : N = C E + B G — F R : C E — F S = C E + B G : C E, erit divisim M : N = F R : F S.

[l] * *Imperitè collocabitur.* Vide primam partem Lib. I. Optices Newtonianæ, ubi egregiis experimentis auctor demonstravit radios diversi coloris esse etiam diversè refrangibiles; unde fit ut focus lentis objectivæ telescopiorum (in quo fit objectorum imago quæ trans vitrum oculare spectatur) non sit unicus, sed focus radiorum violaceorum remotissimus sit ab oculari, focus radiorum rubrorum sit proximus, radii ergo ex illis variis imaginibus procedentes inæqualiter colliguntur a vitro oculari, nisi ejus focus adeo remotus sit ut intervallum inter diversas illas imagines ejus respectu evanescat, sed manente lente objectivâ, aucto foco lentis ocularis diminuitur in eâdem ratione amplificatio objecti; sic ergo quantumvis accuratè colligerentur radii per objectivæ lentis figuram; hæc focorum multiplicitas neutiquam corrigetur nisi dispendio amplificationis objecti: Hæc Theoria Newtonum ad inventionem Telescopiorum Catoptricorum deduxit, quæ Prop. 7. et 8. Lib. 1. Optices ab ipso explicantur, et quæ cum levi mutatione in usum communissimum venêre.

DE

MOTU CORPORUM

LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

(*) *De motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.*

(*) LEMMA

Generales resistentiæ notiones exponens.

1. Non potest corpus in medio fluido moveri atque in illud agere, quin ex fluidi reactione vim seu resistentiam aliquam patiatur. Vis illa resistentiæ, proportionalis est decremento motûs quod dato tempore generat, et illius directio directioni mobilis semper opposita est (per Mot. Leg. 2. et 3.) Quapropter datâ corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum quod dato tempore producit; datâ enim mobilis massâ, motûs decrementum est ut decrementum velocitatis (6. Lib. 1.)

2. Vis resistentiæ quam momento quolibet temporis experitur corpus est ut motûs decrementum directè et temporis momentum inversè. Nam resistentia dato temporis momento est ut motûs decrementum directè (1) et dato motûs decremento est inversè ut momentum temporis quo motûs decrementum generatur. Si enim subduplo vel subtriplo temporis momento, idem motûs incrementum vel decrementum generetur, vis generans dupla aut tripla est.

3. Hinc datâ corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directè et momentum temporis inversè.

4. Quoniam directio vis resistentiæ, directioni mobilis contraria est (1), corpus solâ vi insitâ in medio resistente motum, per rectam lineam continuò fertur, quod etiam evenire debere manifestum est, si corpus vi quâlibet acceleratrice vel retardatrice, secundum vel contrà directionem motûs insiti urgeatur.

5. Resistentia considerari potest tanquam vis retardans et cum vi gravitatis quâ corporum ascendentium motus perpetuò minuitur conferri. Vis enim resistentiæ sicut vis gravitatis infinitè parva est, si conferatur cum vi illâ quâ corpus motu finito cietur, seu quâ spatium finitum finito tempore describit. Nam si resistentiæ quam omni temporis momento patitur corpus, vis esset finita, sivè ejusdem generis cum vi finitâ corporis motu finito acti, infinita multitudo resistentiarum momentanearum finito quovis tempore producta, totum corporis motum finito quolibet exiguo tempore extingueret, quod est contrà hyp., quâ supponimus corporis motum tempore aliquo finito in medio resistente perseverare.

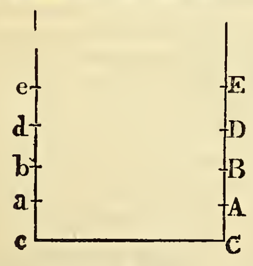
6. Hinc corporis in medio resistente moti velocitas finita per spatium infinitè parvum, atque etiam tempore infinitè parvo æquabilis censeri potest, neglecto nimirum infinitè parvo velocitatis decremento.

7. Jam verò resistentia corporum in fluidis, cæteris paribus, oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, et partim ex reactione partium medii, tresque sunt celebriores circà hujus resistentiæ legem hypotheses, quarum mathematicas consequentias Newtonus hoc libro exponit. 1ª. Hypothesis resistentiam ponit velocitati corporis dati proportionalem, secunda velocitatis quadrato, et tertia partim velocitati, et partim velocitatis quadrato. Præterea cùm experimentis sit cognitum partem quamdam resistentiæ fluidorum uniformem esse, considerandæ sunt quatuor aliæ hypotheses, in quarum primâ resistentia fingatur uniformis; in secundâ partim uniformis et partim velocitati proportionalis; in tertiâ partim uniformis et partim ut quadratum velocitatis, et in quartâ denique partim uniformis, partim ut velocitas, et partim ut velocitatis quadratum. Prima ex his quatuor hypothesibus nihil habet difficultatis, cum uniformis resistentia considerari possit tanquam gravitas constans cùm motum ascendentis corporis retardat; quâ de re satis actum est Lib. 1. tres verò quæ se-

quuntur hypotheses non ægrè referri plerumque possunt ad determinationes motuum quas aliæ priores hypotheses (de quibus ab initio actum est) suppeditant. quod deinceps ostendemus.

8. Si medium in quo corpus movetur perfectè fluidum sit, hoc est, partibus constet optimè lævigatis nullâque tenacitate cohærentibus, quæ proindè vi cuicumque illatæ cedant, et cedendo facillimè moveantur inter se, sola ea consideranda est resistentia quæ ex medii reactione ortum ducit, estque illa ut densitas medii et quadratum velocitatis mobilis dati conjunctim. Hæc enim resistentia (per Motûs Leg. 2. et 3. Lib. 1.) est ut quantitas motûs dato tempusculo communicati; sed datâ mobilis velocitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi tempusculo dato movenda, hoc est, ut densitas medii; datâ autem medii densitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda, et ut velocitas quâ quantitas illa fluidi movetur conjunctim, et quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda velocitati mobilis proportionalis est, corpus enim duplo velocius altero, duplo majus spatium in fluido percurret, sicque duplo pluribus particulis occurret. Quare datâ densitate medii, resistentia est ut quadratum celeritatis mobilis, atque adeò si neque fluidi densitas, neque mobilis celeritas data sit, erit resistentia ut medii densitas et quadratum velocitatis conjunctim, atque hæc est resistentia quæ ortum ducit ab inertiâ particularum fluidi quas corpus motum e loco dimovet et quæ in velocioribus motibus sola ferè observatur.

9. Altera resistentia quæ ex tenacitate partium fluidi uniformis nascitur, constans est, aut quod idem est, temporis momento proportionalis, eamque in tardissimis motibus sensibilem faciunt experimenta. Si enim partium fluidi cohæsio sit ubique eadem, vi quâdam determinatâ opus est ut partes illæ separentur, corporique transitum præbeant, quâcumque demum velocitate illud feratur, et ideò vis illa resistentiæ cum vi gravitatis uniformi, quæ corporis ascendentis motum retardat, conferri potest. Nam corpora duo similia et æqualia cum pari velocitate e locis C et c



per lineas C E, c e, ad rectam C c normales projiciantur, et in locis æquè altis A et a, B et b, D et d, &c. æqualem patiantur resistentiam; corpus quidem C resistentiam experiatur a vi gravitatis constante (quæ in locis A, B, D, E, &c. tantùm agat) oriundam, corpus verò c resistentiam ex tenacitate datâ, vi illi gravitatis æquali, in locis tantùm a, b, d, &c. reagente ortam; in spatiis verò intermediis A B et a b, B D et b d, &c. nullum sit motibus obstaculum; dum corpora perveniunt in A et a, æqualem habent velocitatem, et deindè victis æqualibus in A et a obstaculis, pari adhuc velocitate per spatia minimè resistentia A B et a b, feruntur; et simili modo, ob æquales resistentias in locis B et b per spatia B D et b d simul moventur, et ità deinceps eandem semper velocitatem in locis æquè altis habent. Minuantur jam æqualia illa spatia A B et a b, B D et b d, &c. et eorum numerus augeatur in infinitum, ut vis gravitatis et resistentiæ actio vel reactio continua reddatur, et corpora duo eandem ubique resistentiam patientur, et in locis æquè altis eandem velocitatem habebunt. Quarè resistentia quæ ex fluidi tenacitate ortum ducit, potest cum vi gravitatis uniformis comparari, licet medii tenacitas in corpus quiescens (quod quidem vi gravitatis semper urgeretur) agere nullo modo possit.

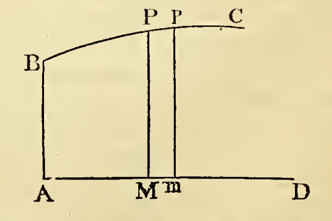
10. In fluidis igitur tenacitate aliquâ præditis, resistentia est partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis (8. 9.)

11. *Lemma.* In quâcunque resistentiæ hypothesi, corporis tam in medio resistente quam in vacuo moti velocitas finita in singulis locis est ut elementum spatii descripti directè et momentum temporis quo describitur inversè. Velocitas enim uniformis est ut spatium quodcunque descriptum directè et tempus quo id spatium describitur inversè. In medio autem sive resistente sive vacuo velocitas per spatium infinitè parvum æquabilis est (6.)

12. *Corol.* 1. Hinc temporis momentum est ut momentum seu elementum spatii directè et velocitas inversè; momentum verò spatii ut velocitas et momentum temporis conjunctim.

13. *Corol.* 2. Si igitur velocitas dicatur v, spatium descriptum s, tempus quo descriptum est t erit $v = \frac{ds}{dt}$, $v\,dt = ds$ et $dt = \frac{ds}{v}$, sumptisque fluentibus $S.\,v\,dt = s$, et $t = S.\,\frac{ds}{v}$.

14. *Corol.* 3. Si ità descripta fuerit curva B P C ut ejus applicatæ M P, m p, axi A D normales, exponant velocitatem v, et abscissæ a



puncto fixo A sumptæ A M, A m tempus t, erectumque sit perpendiculum A B curvæ occurrens in B, area A B P M exponit spatium tem-

pore t descriptum. Sit enim applicata p m, priori P M infinitè propinqua, et erit M m = d t, adeóque areæ A B P M elementum M P p m = v d t = d s (11) et proindè area A B P M = S. v d t = s. Recta A D dicatur linea temporum et curva B P C linea celeritatum. Eodem modo si abscissa A M exponeret spatium descriptum s et applicata M P velocitatem inversam, ità ut esset A M = s, et M P $= \frac{1}{v}$, area A B P M exponeret tempus quo spatium A M descriptum est; esset enim M P p m $= \frac{d\,s}{v} = d\,t$, et hinc area A B P M $= S. \frac{d\,s}{v} = t$.

15. *Lemma.* Si corpus datæ massæ solâ vi insitâ in medio resistente moveatur, *decrementum velocitatis*, erit ut *resistentia* et *momentum temporis* conjunctim. *Incrementum* verò *spatii* erit ut *velocitas et velocitatis decrementum* directè et *resistentia* inversè. Datâ enim corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directè et momentum temporis inversè (2) ideóque decrementum velocitatis est ut resistentia et momentum temporis conjunctim. Quod erat 1um. Sed incrementum spatii est ut velocitas et momentum temporis conjunctim (12) momentum verò temporis est ut decrementum velocitatis directè et resistentia inversè (2); Quarè incrementum spatii est ut velocitas et illius decrementum directè et resistentia inversè. Quod erat 2um.

16. *Corol.* 1. Hinc resistentia est ut velocitas et illius decrementum directè ac spatii incrementum inversè, et velocitas in suum decrementum ducta, est ut resistentia et incrementum spatii conjunctim.

17. *Corol.* 2. Quarè si spatium dicatur s, tempus t, velocitas v, resistentia r, erit $r\,d\,t = -\,d\,v$, et $r\,d\,s = -\,v\,d\,v$.

18. *Lemma.* Si corpus datæ massæ in medio resistente urgeatur vi centripetâ in directione motûs corporis agente; corpore ascendente, erit *velocitatis decrementum* ut *momentum temporis* et *summa vis centripetæ et resistentiæ conjunctim.* Et *velocitas* in *suum decrementum* ducta erit ut *incrementum spatii* et *summa vis centripetæ et resistentiæ* conjunctim.

At corpore descendente, *velocitatis incrementum* erit ut *momentum temporis*, et *differentia inter vim centripetam et vim resistentiæ* conjunctim. Et *velocitas* in *suum incrementum* ducta, erit ut *incrementum* sive elementum *spatii* et *differentia inter vim centripetam ac resistentiam* conjunctim.

Resistentia enim considerari potest tanquam vis continuò retardans (5) et vis centripeta corporis ascendentis motum etiam retardat, ideóque vis tota retardatrix est summa ipsa vis centripetæ et resistentiæ, dum corpus ascendit; sed vis retardatrix in temporis momentum ducta est ut decrementum velocitatis quod producit (2); ergò corpore ascendente, decrementum velocitatis est ut temporis momentum et summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat 1um.

Sed momentum temporis est ut incrementum sive elementum spatii directè et velocitas inversè (12). Quarè si corpus ascendat decrementum velocitatis est ut elementum spatii et summa vis centripetæ ac resistentiæ directè, et velocitas inversè, adeóque velocitas in suum decrementum ducta est ut elementum spatii et summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat 2um.

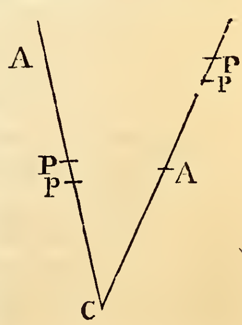
Descendente corpore vis centripeta motum corporis accelerat dum resistentia retardat, et ideò si vis centripeta major sit vi resistentiæ, excessus vis centripetæ suprà resistentiam est vis tota accelerans; Si vis centripeta minor est vi resistentiæ, vis tota retardans erit excessus resistentiæ suprà vim centripetam. Quarè differentia inter resistentiam et vim centripetam in temporis momentum ducta erit in primo casu ut incrementum velocitatis, et in secundo casu, ut illius decrementum. Quod erat 3um. Sed momentum temporis est ut elementum spatii directè et velocitas inversè (12), quarè velocitas in suum elementum (sive incrementum sit sive decrementum) ducta, est ut elementum spatii, et differentia inter vim centripetam ac resistentiam conjunctim. Quod erat 4um.

19. *Corol.* 1. Undè si vis centripeta dicatur g, resistentia r, spatium s, tempus t, velocitas v erit pro corporis ascensu $g\,d\,t + r\,d\,t = -\,d\,v$, et $g\,d\,s + r\,d\,s = -\,v\,d\,v$; et pro corporis descensu, si vis centripeta vi resistentiæ sit major $g\,d\,t - r\,d\,t = d\,v$, et $g\,d\,s - r\,d\,s = v\,d\,v$ at si vis centripeta vi resistentiæ sit minor $r\,d\,t - g\,d\,t = -\,d\,v$, et $r\,d\,s - g\,d\,s = -\,v\,d\,v$.

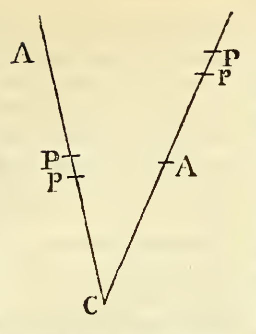
20. *Corol.* 2. Si in his formulis ponatur r = o, mutabuntur illæ in formulas, quibus motus corporis in medio non resistente determinantur. Quâ ratione motus corporis in medio resistente conferri possunt cum ejusdem motibus in medio non resistente.

21. *Corol.* 3. Si corpore descendente, resistentia vi centripetæ æqualis fuerit, corporis celeritas æquabilis manet; nam in formulis $g\,d\,t - r\,d\,t = d\,v$, et $r\,d\,t - g\,d\,t = -\,d\,v$, positâ g = r, fit d v = o, hoc est, velocitatis incrementum vel decrementum nullum.

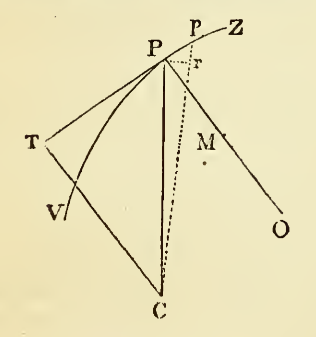
22. *Corol.* 4. Si corpus in lineâ rectâ A C vi centripetâ urgeatur ad punctum datum C, et de loco dato A sursum vel deorsum projiciatur cum velocitate datâ in medio resistente, et spatium A P quod ascendendo vel descendendo describit tempore t dicatur s, data A C dica-

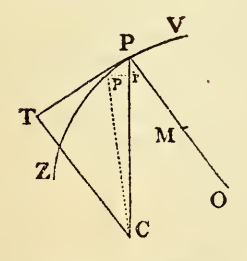


tur b, et tam in ascensu quam in descensu scribatur C P = x, adeóque in ascensu, x — b = s, et d x = d s, in descensu b — x = s, et — d x = d s; si loco d s substituatur ipsius valor in formulis Corol. 1. (19) erunt illæ pro ascensu g d x + r d x = — v d v, et pro descensu g d x — r d x = — v d v, quarum una in alteram abit, mutato signo + vel —, quantitati r præfixo.



23. *Lemma.* Si corpus vi quâlibet centripetâ sollicitatum curvam V P Z in medio resistente aut etiam in vacuo describat, visque centripeta in loco quovis P dividatur in vires duas, quarum altera directionem habeat P O tangenti P T per P ductæ normalem, altera directionem cum





tangente congruentem, quadratum velocitatis corporis in loco P, exponi poterit per factum ex vi normali ductæ in radium circuli curvam V P Z osculantis in P.

Sit P C, totius vis centripetæ directio, P O radius osculi, P p arcus curvæ infinitè parvus qui usurpari potest pro arcu circuli centro O et radio O P descripti. Velocitas corporis in P dicatur v, quæ per arcum P p tam in medio resistente quam in vacuo æqualis est, (6) et totius vis centripetæ pars illa quæ secundum directionem P O agit, seu vis normalis dicatur N et quia vis resistentiæ ut potè semper contraria directioni mobili P T, (1) vim normalem N non afficit, erit vis illa N quâ corpus in arcu P p retinetur in medio resistente æqualis vi centripetæ quâ corpus idem cum eâdem velocitate æquabili v, in medio non resistente circulum describeret cujus centrum O, et radius O P. Corpus autem vi constante N, sollicitatum in vacuo de loco P cadat per radii partem P M ita ut eo lapsu acquirat celeritatem v quâ in medio non resistente circulum describeret cujus centrum est O et radius est O P; sitque P M = s, velocitas eo lapsu acquisita in M erit ergo = v, et erit (20. 19.) N d s = v d v, sumptisque fluentibus N s = $\frac{1}{2}$ v v, et 2 N s = v v. Sed altitudo ex quâ corpus vi constante N sollicitatum in vacuo cadere debet ut velocitatem acquirat æqualem illi cum quâ circulum ipsum describit, est æqualis dimidio radii P O, (119. Lib. 1.) ergo 2 s = P O et 2 N s = v v = N × P O. Q. e. d.

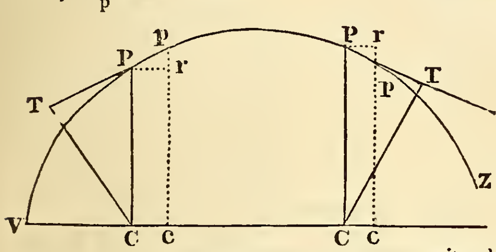
24. *Corol.* 1. Iisdem positis, totius vis centripetæ juxtà directionem P C urgentis ea pars quæ secundum directionem tangentis P T agit, seu vis tangentialis in P dicatur T resistentia ibidem r, arcus V P s, ideoque P p = d s, et si corpus descendit, erit T d s — r d s = v d v (18. 19.) quia vis tangentialis motum accelerat et vis resistentiæ eundem retardat, vis autem normalis nec accelerat nec retardat. Sed si corpus ascendit, erit T d s + r d s = — v d v (18. 19.) vi tangentiali et resistentiâ motum corporis simul retardantibus.

25. *Corol.* 2. Sit C virium centrum, vis tota centripeta in directione P C urgens = g, C P = y, C T tangenti perpendicularis = p, ideoque P T = $\sqrt{y y - p p}$. Ex puncto p, alteri P infinitè propinquo demissum sit ad C P perpendiculum p r, ut sit p r = d y, et triangulum P r p, simile triangulo P T C, et erit P p (d s) : p r (d y) = P C : P T = g : T = $\frac{g d y}{d s}$, ubi observandum est d y, esse affirmativam, quando crescente arcu V P sive s, crescit etiam recta C P, seu y, id est, quando corpus ascendit, et contrà d y esse negativam, dum corpus descendit, adeóque in hoc casu fieri T = — $\frac{g d y}{d s}$. Hi valores vis tangentialis T, substituantur in formulis Corollarii 1. et ambæ in hanc mutabuntur, g d y + r d s = — v d v.

26. *Corol.* 3. Quia P p (d s) : p r (+ d y) = P C (y) : P T ($\sqrt{y y - p p}$) erit d s = ± $\frac{y d y}{\sqrt{y y - p p}}$, (signo superiori pro ascensu et inferiori pro descensu usurpato.) Quarè fiet g d y + r d s = g d y ± $\frac{r y d y}{\sqrt{y y - p p}}$ = — v d v.

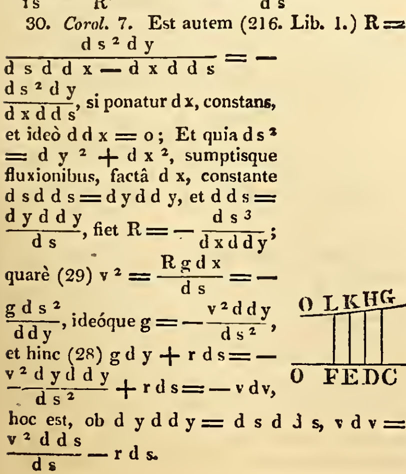
27. *Corol.* 4. Si radius osculi P O dicatur R, est (23) R × N = v², et quia y : p = g : N,

adeóque $\frac{p\,g}{y} = N$, fiet $\frac{R\,p\,g}{y} = v^2$; sed radius osculi $R = \frac{y\,d\,y}{d\,p}$ (214. Lib 1.) quarè erit $\frac{g\,p\,d\,y}{d\,p} = v^2$, et $g = \frac{v^2\,d\,p}{p\,d\,y}$. Substituatur hic valor in formulâ Corollarii 2i. et fiet $g\,d\,y + r\,d\,s = \frac{v^2\,d\,p}{p} + r\,d\,s = -\,v\,d\,v$, et ideò $v\,d\,v + \frac{v^2\,d\,p}{p} = -\,r\,d\,s$.



28. *Corol.* 5. Vis centripetæ directio P C, sibi semper parallela maneat, ut hic assumitur vis gravitatis, et per punctum V. in curvâ V P Z datum, ducatur recta V C directioni gravitatis P C perpendicularis, dicanturque ut suprà $VP = s$, $Pp = ds$, $CP = y$, $pr = dy$, vis tota gravitatis in $P = g$, resistentia r, velocitas corporis ibidem $= v$, et erit ut in Corollario 2°. $g\,d\,y + r\,d\,s = -\,v\,d\,v$.

29. *Corol.* 6. Si in Hypothesi Corollarii 5i. dicantur radius osculi in $P = R$, vis normalis $= N$, abscissa $VC = x$, et $C c$ seu $Pr = dx$, erit ob triangulorum P p r, C P T similitudinem, $Pp : Pr = PC : TC = g : N$, sive $ds : dx = g : N = \frac{g\,d\,x}{d\,s}$; sed (23) $N = \frac{v^2}{R}$, ergò $\frac{g\,d\,x}{d\,s} = \frac{v^2}{R}$, et hinc $v^2 = \frac{R\,g\,d\,x}{d\,s}$.



30. *Corol.* 7. Est autem (216. Lib. 1.) $R = \frac{d\,s^2\,d\,y}{d\,s\,d\,d\,x - d\,x\,d\,d\,s} = -\frac{d\,s^2\,d\,y}{d\,x\,d\,d\,s}$, si ponatur dx, constans, et ideò $d\,d\,x = 0$; Et quia $d\,s^2 = d\,y^2 + d\,x^2$, sumptisque fluxionibus, factâ dx, constante $d\,s\,d\,d\,s = d\,y\,d\,d\,y$, et $d\,d\,s = \frac{d\,y\,d\,d\,y}{d\,s}$, fiet $R = -\frac{d\,s^3}{d\,x\,d\,d\,y}$; quarè (29) $v^2 = \frac{R\,g\,d\,x}{d\,s} = -\frac{g\,d\,s^2}{d\,d\,y}$, ideóque $g = -\frac{v^2\,d\,d\,y}{d\,s^2}$, et hinc (28) $g\,d\,y + r\,d\,s = -\frac{v^2\,d\,y\,d\,d\,y}{d\,s^2} + r\,d\,s = -\,v\,d\,v$, hoc est, ob $d\,y\,d\,d\,y = d\,s\,d\,d\,s$, $v\,d\,v = \frac{v^2\,d\,d\,s}{d\,s} - r\,d\,s$.

31. *Scholion.* In superioribus quinque Lemmatis ipsorumque Corollariis, fere complexi sumus principia omnia, quibus et ad inventionem et ad demonstrationem motuum in mediis resistentibus usi sunt Clariss. viri Newt. in hoc Libro; Varignonius in Monumentis Academiæ Regiæ an. 1707. 1708. 1709. 1710. 1711. Joannes Bernoulli ibid. an. 1711. et in Actis Eruditorum Lips. an. 1713. et 1719. Hermannus Lib. 2. Phoronomiæ et in Commentariis Academiæ Petropolitanæ, ac Eulerus in opere exquisito quod de Mechanicâ scripsit analyticè. Nunc alia nonnulla de logarithmicæ proprietatibus, et de methodo maximorum et minimorum quæ ad doctrinam motuum in mediis resistentibus explicandam spectant, subjungenda sunt.

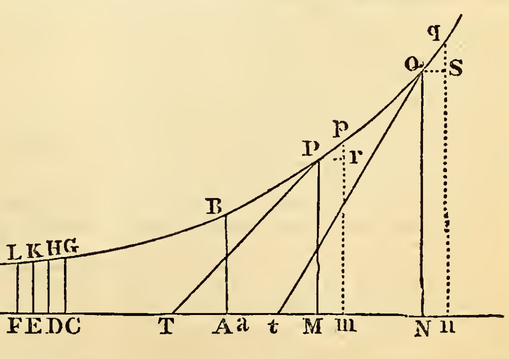
LEMMA

Præcipuas logarithmicæ proprietates exponens.

111. Hugenius de hac ipsâ Newtoniani operis parte loquens, in quâ agitur de corporibus in mediis resistentibus motis, (quam summâ cum voluptate se vidisse testatur) ait se notasse lineam curvam quam logarithmicam aut logisticam nuncupat, summæ utilitatis esse in hoc negotio, et quædam de eâ Theoremata indicat quorum demonstrationem Guido Grandus postea evulgavit; Hujus ergo curvæ proprietates ab initio explicare a scopo nostro alienum non duximus.

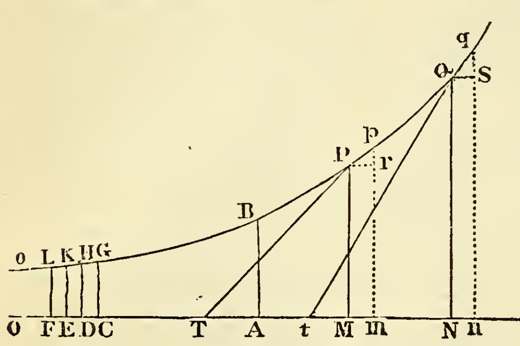
32. *Defin.* Sit linea recta N A O secundum quam feratur perpendicularis M P motu uniformi et sibi parallelo, dum in ea perpendiculari M P mobile P velocitate variabili movetur secundum hanc legem, ut ejus velocitas sit semper proportionalis distantiæ ejus a rectâ N A O, curva ab illo puncto P descripta dicetur logarithmica vel logistica.

Linea N A O secundum quam perpendicularis P M motu uniformi et sibi parallelo fer-



tur, dicitur axis logarithmicæ, et lineæ P M, Q N perpendiculares in axem sunt ejus ordinatæ.

Si quædam ex ordinatis logarithmicæ, ut A B, sit æqualis unitati, punctum axeos A cui insistit censetur abscissarum origo, et abscissæ a parte A M sumptæ, sunt positivæ, a parte A O negativæ et abscissa pertinens ad ordinatam A B sive ad unitatem est ipsum o.



Corol. 1. *Differentiæ quamminimæ ordinatarum logarithmicæ æqualibus tempusculis genitæ, sunt ut illæ ordinatæ.*

In quovis enim puncto logarithmicæ velocitas axi perpendicularis quâ ordinatæ crescunt vel decrescunt, est ordinatæ proportionalis (ex def.), sed durante tempusculo infinitè parvo illa velocitas uniformis est censenda, et æqualibus tempusculis incrementa vel decrementa linearum sunt ut velocitates uniformes quibus generantur, ergo incrementa vel decrementa ordinatarum h. e. earum differentiæ æqualibus tempusculis genitæ, sunt ut illæ ordinatæ.

Corol. 2. *Sint ordinatæ quævis P M, Q N, ducantur duæ aliæ ordinatæ p m, q n ipsis quamproximæ et ab iis æqualiter distantes, p m et q n erunt prioribus ordinatis proportionales:* Velocitas enim quâ ordinata motu sibi parallelo fertur est uniformis, ideóque eodem tempore ordinata P M ad p m perveniet ac Q N ad q n ob æquales distantias, ergo, per Cor. 1. differentiæ ordinatarum P M et Q N dum perveniunt ad p m et q n erunt iis ipsis ordinatis proportionales, sed adjectis vel detractis iis differentiis a lineis P M et Q N fiunt ordinatæ p m, q n, et adjectis vel detractis ex terminis rationis cujusvis, correspondentibus terminis rationis ipsi æqualis non mutatur prior ratio, ergo ordinatæ p m et q n erunt inter se ut P M ad Q N, et etiam alternando P M : p m = Q N : q n.

Corol. 3. *Si sumantur in axe puncta C, D, E, F ad distantias æquales et quamminimas, in iisque punctis erigantur ordinatæ, illæ ordine constituent progressionem geometricam.* Nam quia ex Hyp. ordinatæ G C et H D, H D et K E sunt quamproximæ et æqualiter distantes, est per Corollarium præcedens G C : H D = H D : K E, eadem ratione est H D : K E = K E : L F, sicque deinceps, unde liquet ordinatas G C : H D : K E : L F, &c. esse in progressione geometricâ.

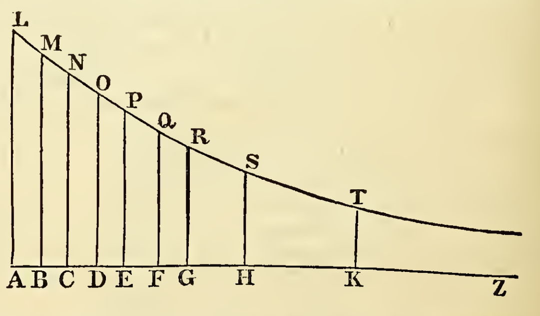
33. *Theor. I. Sumantur in axe logarithmicæ quatuor puncta, ita ut duo priora æque a se mutuò distent ac duo posteriora, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in proportione geometricâ.*

Et si sumantur in axe quotlibet puncta æque distantia ordine continuo, ordinatæ iis insistentes erunt in progressione geometricâ.

Sumantur in axe duo puncta quævis A et E, et alia duo H et K talia ut sit A E = H K, eriganturque in illa puncta ordinatæ A L, E P, H S, K T; dico illas ordinatas fore et proportione geometricâ.

Dividatur tam A E quam H K, in partes infinitè parvas æquales inter se, totidem erunt divisiones in utroque intervallo; erigantur in illa puncta ordinatæ, fient duæ progressiones geometricæ, in quibus totidem erunt termini, et rationes terminorum successivorum æquales erunt, quia ordinatæ in utrâque progressione æqualiter distant; ergo ex æquo, primus terminus A L prioris progressionis erit ad E P ultimum terminum ejus progressionis, ut H S primus terminus alterius progressionis ad ejus ultimum terminum K T. Q. e. d.

Et si sumantur in axe plura puncta æquè distantia ordine continuo sibi succedentia, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in progressione geometricâ: probatur ut in Cor. 3. defin.



Corol. E converso, si in lineâ quâvis sumantur plura puncta, æquè distantia ordine continuo, et in iis erigantur perpendiculares quæ sint in progressione geometrica, logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates transibit.

Sint enim A, D, G, &c. ea puncta æquè distantia dividanturque eorum intervalla in partes æquales quamminimas, totidem erunt in quovis intervallo, assumantur mediæ proportionales in-

ter perpendiculares A L et D O, D O et G R, &c. tot quot sunt divisionum puncta, et in singulis punctis erigantur perpendiculares iis mediis proportionalibus ordine sumptis æquales; Denique curva tangat tam perpendiculares datas A L, D O, G R quam hasce medias, dico eam curvam esse logarithmicam.

Facile enim liquet ex naturâ progressionum, quod cum sit A L : D O = D O : G R, &c. et totidem mediæ proportionales assumantur inter A L et D O, quot assumuntur inter D O et G R, sicque deinceps, formari progressionem continuam constantem ex omnibus illis perpendicularibus tam datis quam inventis, ideò quamlibet ex illis, ut A L, esse ad sibi proximam B M, ut alia quævis D O, est ad proximam P E, unde dividendo, est A L ad suam differentiam a proximâ, ut est etiam D O ad suam differentiam a proximâ, ideóque perpendicularium proximarum differentiæ erunt ubique eis perpendicularibus proportionales; Evanescentibus ergo punctorum in axe sumptorum intervallis, et perpendicularibus ad vicinas æquali ubique celeritate latis et æquali tempusculo (ob æqualitatem intervallorum), velocitates quibus crescunt vel decrescunt perpendiculares erunt iis ipsis perpendicularibus proportionales; Ergo (ex definitione logarithmicæ) ea curva quæ tanget eas perpendiculares erit logarithmica.

34. *Theor. II. Abscissæ axis logarithmicæ, sunt logarithmi ordinatarum in earum extremo insistentium.* Ferantur hinc inde ab origine axis partes æquales quamminimæ, in extremo singularum erigantur ordinatæ, illæ omnes ordinatæ constituent progressionem geometricam inter cujus terminos occurrit unitas, earum verò abscissæ erunt in progressione arithmeticâ propter partium in axe sumptarum æqualitatem, et abscissa quæ unitati respondet est 0; Jam autem cùm termini progressionis arithmeticæ inter quos est 0 ita aptantur terminis progressionis geometricæ ut 0 respondeat unitati et reliqui termini sibi respondeant, tum termini progressionis arithmeticæ sunt logarithmi terminorum correspondentium progressionis geometricæ; Ergo abscissæ logarithmicæ, sunt logarithmi ordinatarum correspondentium.

Corol. 1. *Portio axis quæ intercipitur inter duas ordinatas est logarithmus rationis quæ intercedit inter illas ordinatas.* Quotiens enim duarum quantitatum exprimit rationem quæ inter illas intercedit, et differentia logarithmorum earum quantitatum, est logarithmus quotientis earum, sed abscissæ sunt logarithmi ordinatarum, et portio axis quæ intercipitur inter duas ordinatas est differentia abscissarum sive logarithmorum ad eas ordinatas pertinentium, ergo illa portio est logarithmus quantitatis quæ exprimit rationem quæ inter ordinatas intercedit.

Corol. 2. *Si dentur duarum aut plurium quantitatum logarithmi, et a puncto dato rectæ alicujus sumantur longitudines eis logarithmis æquales, et in earum extremo erigantur perpendiculares quantitatibus quarum sumuntur logarithmi æquales, logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates transibit.*

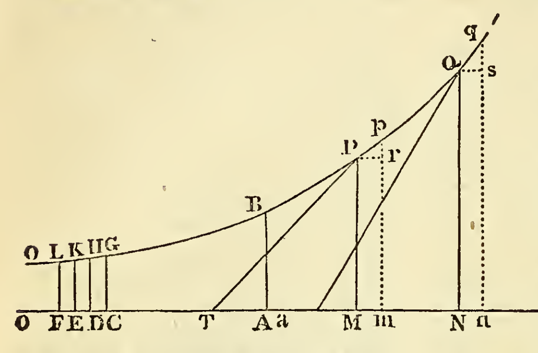
In recta O A N (*vid. fig. prim. pag. succed.*) sumatur punctum A in quod erigatur perpendicularis A B unitati æqualis, sitque A M logarithmus quantitatis cui æqualis est perpendicularis M P, sit A a differentia progressionis arithmeticæ ex quâ desumuntur logarithmi, quæ ideò accuratè continebitur in intervallo A M toties quot sunt termini in progressione geometrica ex qua desumuntur quantitates quarum habentur logarithmi, quærantur tot mediæ proportionales inter A B et M P quot sunt divisionum puncta inter A et M, et in illa puncta erigantur perpendiculares illis mediis proportionalibus ordine æquales, fiet progressio geometrica, quæ est ipsa progressio quantitatum quarum abscissæ lineæ O A N quantitate A a successivè auctæ sunt logarithmi, siquidem in utrâque progressione occurrunt termini A B et M P eodem intervallo in utraque dissiti, sed si in punctis æquidistantibus lineæ cujusvis erigantur perpendiculares in progressione geometricâ, logarithmica aliqua earum vertices tanget (Cor. Theor. I.) Ergo si dentur numeri cum suis logarithmis concipi semper poterit logarithmica cujus abscissæ sint illi logarithmi et cujus ordinatæ sint quantitates quibus respondent.

35. *Theor. III. Axis logarithmicæ est ejus asymptotus ad quam ab unâ parte accedit propius datâ quâvis quantitate numquam tamen eam attingit, et a quâ ab alterâ parte longius recedit datâ quâvis quantitate.*

Sint duæ ordinatæ A B, M P quarum una sit alterius dupla vel plusquam dupla, feratur portio axis A M hinc inde secundum axem sine fine, ordinatæ in ea puncta erecta crescent ab unâ parte, et ab alterâ decrescent in ratione duplâ vel plusquam duplâ (per Cor. Theor. I.) sed ex principiis Archimedeis quantitas crescens in progressione duplâ vel plusquam duplâ omnem quantitatem datam tandem excedet, et ex principiis Euclideis quantitas quævis decrescens in ratione duplâ vel plusquam dupla minor fit quâvis quantitate datâ; Ergo logarithmica longius ab axe recedit, aut propiùs ad eum accedit quâvis quantitate datâ, numquam tamen eum attinget, attingat enim eum si fieri potest in quodam puncto X, ferendo distantiam A M secundum axem, fiet tandem ut cadat proximè citra X, putâ in Y, tum proximè ultra, ut in Z; in puncto Y nondum attinget axem ex Hypothesi, et aliquo intervallo Y V ab eo distabit, sed quia Y Z = A M debebit esse A B : M P = Y V ad ordinatem in Z, quæ ideò dabitur, ac per consequens logarithmica nondum attinget axem in Z, nedum eum attigerit in X. Q. e. d.

36. *Theor. IV. Subtangens logarithmicæ est constans.* Capiantur enim ubivis in axe particulæ æquales quamminimæ M m, N n, erectisque ordinatis M P, m p, et N Q, n q, per puncta P et Q concipiantur tangentes P T, Q t axi occurrentes in T, t; ducantur etiam rectæ P r, Q s, ordinatis m p, n q perpendiculares. Evan-

escentibus ordinatarum distantiis M m, N n, triangulum P p r fit simile triangulo T P M, et triangulum Q q s simile triangulo t Q N, ideóque est p r : P M = P r (sive M m) : M T, et q s : Q N = N n (sive M m) : N t, sed ob dis-



tantias M m, N n æquales est p m : P M = q n : Q N et dividendo est p r : P M = q s : Q N, quare P r (sive M m) : M T = N n (sive M m) : N t, adeóque M T = N t. Q. e. d.

Corol. Hinc cum ordinata sit ad subtangentem constantem ut fluxio ordinatæ ad fluxionem abscissæ, obtinetur logarithmicæ æquatio fluxionalis. Abscissa A M dicatur x, ordinata M P, y, subtangens M T, s, fluxio M m erit d x, p r = d y, cumque sit y : s = d y : d x, est y d x = s d y æquatio ad logarithmicam.

37. *Probl. I. Datâ subtangente et duabus ordinatis logarithmicæ, invenire portionem axis inter eas ordinatas interceptam.*

1us. Casus, major ex illis ordinatis non sit plusquam dupla alterius; major illa ordinata sit L A quæ dicatur y, minor sit G R, differentia earum L A — R G sit b. Portio axis A G inter eas intercepta sit x, divisaque concipiatur in partes æquales infinite parvas A B = d x, earum numerus (qui infinitus censendus est) dicatur n, erit ergo n d x = x; subtangens data sit s, eritque per Corollarium præcedens y : s = (d y : d x = n d y : n d x =) n d y : x; hoc autem modo determinatur valor n d y. Concipiantur erectæ omnes ordinatæ in puncta divisionum portionis axis A G, erunt in progressione geometricâ (per Cor. 3. def. n. 32.) et cum earum differentiæ sint ut illæ ordinatæ (per Cor. 1. def. n. 32.) differentiæ successivæ earum ordinatarum erunt in progressione geometricâ, cujus omnes termini simul sumpti differentiam L A — R G sive b efficient; numerus autem terminorum ejus progressionis erit n, primus terminus d y, secundus invenitur per hanc proportionem L A : M B = d y : $\frac{MB}{LA}dy$ sive (quia M B = y — d y et L A = y) secundus ille terminus erit $\frac{y-dy}{y}dy$, unde juxta methodum summandi progressiones geometricas

est $b = dy \times \dfrac{\dfrac{\overline{y-dy}|^{n}}{y^{n}} - 1}{\dfrac{y-dy}{y} - 1}$

$= -\dfrac{1}{y^{n-1}} \times (\overline{y-dy}|^{n} - y^{n})$

= (valore $\overline{y-dy}|^{n}$ in seriem reducto) $-\dfrac{1}{y^{n-1}} \times (y^{n} - ny^{n-1}dy + n \times \dfrac{n-1}{2}y^{n-2}dy^{2}$, &c. $- y)^{n}$, sive deletis terminis y^{n} et $-y^{n}$, totâque serie per $-y^{n-1}$ divisa est $b = +ndy - \dfrac{nn-n}{2}y^{-1}dy^{2} + \dfrac{n^{3}-3n^{2}-2}{2\times 3}y^{-2}dy^{3}$, &c. sed quoniam n est numerus infinitus, in singulis coefficientibus altissima ejus dignitas sola assumi debet, reliquis terminis neglectis, unde series ad hanc reducitur $b = +ndy - \dfrac{n^{2}y^{-1}dy^{2}}{2} + \dfrac{n^{3}y^{-2}dy^{3}}{2\times 3}$ &c. qui quidem termini finiti sunt, compensatâ dignitate numeri infiniti n per infiniti parvi d y similem dignitatem.

Ex eâ autem serie, per serierum reversionem obtinebitur valor ispsius n d y, sit enim $ndy = Ab + Bb^{2} + Cb^{3} + Db^{4}$ &c.

erit $+ndy = +Ab + Bb^{2} + Cb^{3}$ &c.

$-\dfrac{nndy^{2}}{2y} = \qquad -\dfrac{A^{2}b^{2}}{2y} - \dfrac{2ABb^{3}}{2y}$

$+\dfrac{n^{3}dy^{3}}{2\times 3y^{2}} = \qquad +\dfrac{A^{3}b^{3}}{2\times 3y^{2}}$

Cum ergo hi omnes termini debeant efficere b, fiat primus terminus A b = b erit A = 1, et reliqui omnes termini debebunt esse æquales o,

suppeditabuntque totidem æquationes ad determinandos coefficientes B, C, D, &c. v. gr. est $+ B b^2 - \frac{A^2 b^2}{2 y} = 0$, unde invenitur $B = \frac{1}{2 y}$; est $C b^2 - \frac{2 A B b^3}{2 y} + \frac{A^3 b^3}{2 \times 3 y^2} = 0$, substitutoque valore A et B divisoque per b^3, est $C = \frac{1}{3 y^2}$, sicque de cæteris, unde reperietur $n d y = b + \frac{b^2}{2 y} + \frac{b^3}{3 y^2} + \frac{b^4}{4 y^3}$, &c.

Cum itaque sit y : s = n d y : x, erit $x = s \times \frac{b}{y} + \frac{b^2}{2 y^2} + \frac{b^3}{3 y^3} + \frac{b^4}{4 y^4}$, &c. Q. e. i.

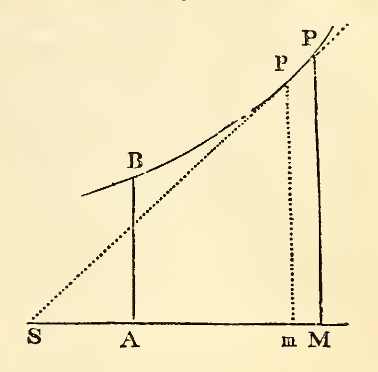
2us. Cas. Quod si ordinata L A sit plusquam dupla ordinatæ T K, quæratur media proportionalis inter L A et T K, cujus si L A non sit plusquam dupla, invenietur intervallum abscissum inter eam et L A, ut prius, eritque dimidia pars intervalli quæsiti A K, erit enim L A ad eam mediam, ut ea media ad T K, unde portio axis inter L A et eam mediam, erit æqualis portioni axis inter eam mediam et T K: si L A ejus mediæ sit plusquam dupla, quæratur nova media inter L A et priorem mediam, intervallum inter hanc et L A erit quarta pars portionis quæsitæ A K. Quod si L A sit adhuc plusquam dupla istius mediæ repetatur operatio donec media inveniatur cujus L A non sit plusquam dupla, ex cujus intervallo, intervalli A K valorem assignare licebit, eo quo prius usi sumus ratiocinio.

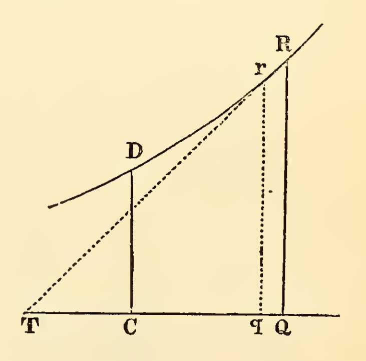
Corol. 1. *Si una ex ordinatis sit unitas, portio axis quæsita* x *erit alterius ordinatæ abscissa, ideóque ejus erit logarithmus*, positivus quidem si ea ordinata sit unitate major, negativus verò si unitate sit minor.

Corol. 2. Si ordinata G R sit unitas, et ordinata L A ejus dupla, et si subtangens logarithmicæ sit æqualis unitati, series abscissam exhibens in hanc mutatur $x = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 8} + \frac{1}{4 \times 16}$, &c. quorum terminorum calculus est facillimus, qui si instituatur, abscissa quæsita invenietur x = .6931472.

38. *Theor. V. Sint duæ diversæ logarithmicæ in utrâque sumantur ordinatæ æquales, abscissæ illis ordinatis correspondentes in utrâque logarithmicâ erunt ut earum logarithmicarum subtangentes, adeóque in constanti ratione.*

Sint duæ logarithmicæ P B, R D prioris subtangens sit M S = s, subtangens alterius sit Q T = t; Ordinatæ P M, R Q in utrâque sumptæ sint æquales dicanturque y; sint ordinatæ B A et D C æquales unitati; abscissa A M dicatur x, et C Q, z; dico fore s : t = x : z. Dividatur A M in partes infinitè parvas d x, quarum numerus (infinitus) dicatur n. In totidem partes d z dividatur C Q, et concipiantur ordinatæ in omnes divisiones erectæ, illæ ordinatæ erunt in progressione geometricâ in utroque intervallo, sitque p m secundus terminus primæ progressionis, et q r secundus terminus progressionis alterius, erit in primâ $P M : B A = P M^{n-1} : p m^{n-1}$, in secunda $R Q : D C = R Q^{n-1} : r q^{n-1}$, ex natura progressionis geometricæ, et quia tres priores termini





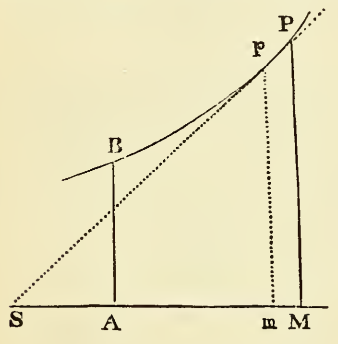
harum proportionum ex hypothesi sunt æquales; æquales etiam erunt $p m^{n-1}$ et $r q^{n-1}$, ideóque p m = r q, et P M — p m = R Q — r q, differentiæ ergo proximarum ordinatarum sunt æquales, dicanturque d y. Est autem in prima logarithmica (per Probl. 1. n. 37.) y : = n d y : n d x sive x, et alternando y : n d y = s : x; in secunda y : t = n d y : n d z sive z, et alt. y : n d y = t : z, est ergo s : x = t : z sive s : t = x : z. Q. e. d.

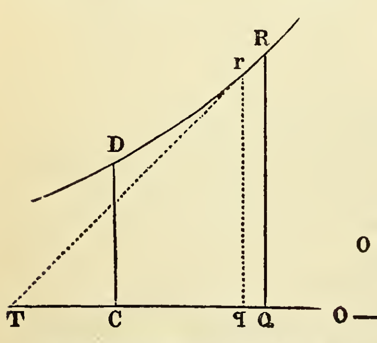
Corol. 1. Hinc liquet quod (manente unitate) logarithmicæ quarum eædem erunt subtangentes, in omnibus erunt æquales, quippe si sumantur in iis æquales ordinatæ abscissæ etiam æquales erunt.

Corol. 2. Logarithmicæ vero diversæ speciei dicentur, quarum subtangentes erunt diversæ; et logarithmi diversæ speciei dicentur, ubi eisdem quantitatibus logarithmi diversi respondebunt, unde etiam logarithmicæ ad quas pertinen diversæ illæ logarithmorum species, habebunt diversas subtangentes (per hoc Theor.) ideóque erunt diversæ speciei.

Corol. 3. *Datis logarithmis cujusvis speciei, logarithmi alîus speciei eisdem numeris respondentes inveniri possunt, si dentur subtangentes utriusque speciei;* Hinc si dentur logarithmi quorum subtangens est unitas (qui hyperbolici dicuntur), sitque data subtangens alîus speciei .4342944 multiplicentur logarithmi dati per hunc numerum, habebunturque eorumdem numerorum logarithmi in hac alterâ specie, ut liquet ex hoc Theor. Ideóque in posterum per hanc expressionem L. x, intelligemus logarithmum hyperbolicum quantitatis x, qui si multiplicetur per quantitatem quamlibet ut a, a L. x exprimet logarithmum x ex eâ specie depromptum quæ habet a pro subtangente, est enim 1 : a = L. x ad eum logarithmum qui ergo erit a L. x.

39. *Probl. II. Datâ ordinatâ logarithmicæ et ejus abscissâ, invenire ejus subtangentem, dummodo alterius cujuslibet logarithmicæ subtangens sit data.*





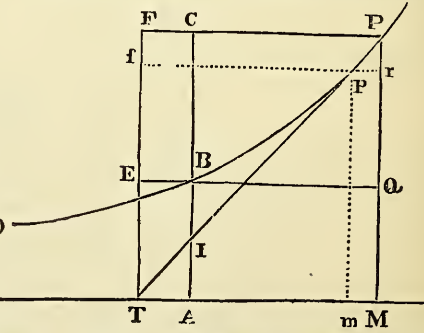
Data sit subtangens logarithmicæ F B, logarithmicæ verò R D data sit abscissa C Q et ordinata Q R, quæritur hujus logarithmicæ subtangens: Quæratur primùm abscissa quæ in logarithmica P B responderet ordinatæ æquali Q R, per Probl. I. sitque ea A M, fiatque ut A M ad C Q ita subtangens data ad quæsitam.

Exempl. In tabulis logarithmorum, logarithmus numeri 2. est .3010300. si ergo concipiatur logarithmica cujus abscissæ sint logarithmis tabularum æquales, et cujus ordinatæ sint æquales numeris eis logarithmis correspondentibus, quæraturque ejus logarithmicæ subtangens; inveniatur in altera logarithmica cujus subtangens est unitas abscissa respondens ordinatæ quæ sit unitatis dupla (per Cor. 2. Prob. I.) quæ est .6931472. fiatque ut .6931472. ad .3010300. ita unitas ad subtangentem logarithmicæ tabularum quæ invenietur .4342944.

Corol. Hinc dato logarithmo alicujus numeri desumpto ex logarithmica cujus subtangens data est, habebitur ejus numeri logarithmus in tabulis, dicendo ut subtangens data ad .4342944. ita logarithmus datus ad ejusdem numeri logarithmum in tabulis.

40. *Probl. III. Sit quantitas variabilis, cujus logarithmus etiam variabilis est, ex ejus quantitatis variabilis fluxione, fluxionem ejus logarithmi determinare.* Concipiatur logarithmica ad quam pertinet species logarithmi quæ assumitur; sit a ejus subtangens, sitque y variabilis proposita, quæ consideretur ut ejus logarithmicæ ordinata, sitque x ejusdem logarithmicæ abscissa ei ordinatæ y respondens, erit per naturam logarithmicæ (n 36.) $y\,d\,x = a\,d\,y$ et $d\,x = \frac{a\,d\,y}{y}$, sed x est logarithmus ordinatæ y, ergo d x est ejus differentia, ergo $d\,L.\,y = \frac{a\,d\,y}{y}$ hoc est, differentia logarithmi est differentia variabilis propositæ divisa per ipsam variabilem, et ducta in constantem quæ sit subtangens logarithmicæ ad quam pertinet species logarithmi assumpti.

Et e converso, si habeatur hæc fluxio $\frac{a\,d\,y}{y}$, ejus fluens est logarithmus ipsius quantitatis y ex eâ logarithmicâ desumptus cujus subtangens est a.



41. *Theor. V. Spatium logarithmicum A B P M duabus ordinatis A B, P M arcu B P et abscissâ A M comprehensum, æquale est rectangulo subtangentis et differentiæ ordinatarum.*

Ductâ enim per punctum P tangente P T, compleatur rectangulum T F P M, agatur per B recta E Q, parallela T M, secans T F in E et M P in Q; per m ordinata m p alteri M P infinitè propinqua, et per p recta f r parallela T M, occurrens T F in f et M P in r; His po-

sitis (ob triangula P r p, P M T similia) erit P r : p r = P M : M T, seu P F, ideóque rectangulum M m p r æquale erit rectangulo P F f r. Quarè si area logarithmica A B P M divisa intelligatur in rectangula innumera ut M p, rectangulum E F P Q divisum erit in totidem rectangula ut F r correspondentibus M p, æqualia, et proindè area logarithmica A B P M æqualis est rectangulo E F P Q. Q. e. d.

Hinc *spatium logarithmicum A B P M est ut ordinatarum A B, P M differentia P Q,* ob datam subtangentem T M (36.)

Trilineum verò logarithmicum B P Q = P Q × M T — A M × B A; et producta A B ut rectæ F P occurrat in C, erit trilineum logarithmicum B P C = A C × C P — C B × M T.

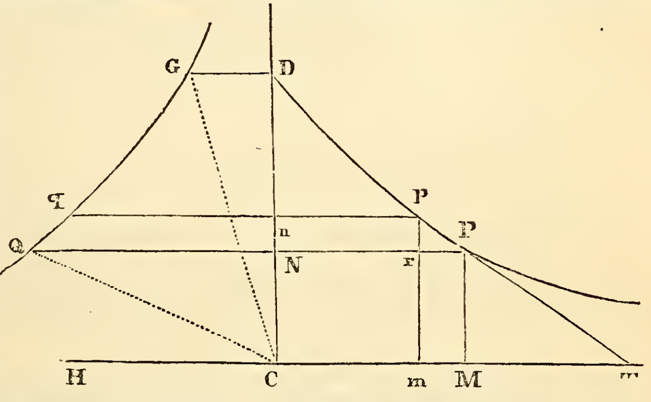
42. *Corol.* 1. *Hinc spatium logarithmicum infinitè protensum O O P M, quâ parte logarithmica ad asymptotum M O continuò accedit, duplum est trianguli P T M.* Nam ob distantiam infinitam M O evanescit ordinata A B, fitque spatium O o P M, æquale rectangulo T F P M, sub ordinatâ PM et subtangente M T contento.

43. *Corol.* 2. *Tangens P T (producta si opus est) secet ordinatam A B in I, et spatium logarithmicum B P C erit ut B I inter logarithmicam et tangentem intercepta.* Nam ob triangulorum T F P, I C P, similitudinem, est T F ad F P, (seu A C ad M T) ut C I ad C P, et ideò A C × C P = M T × C I. Quarè (41) rilineum B P C = A C × C P — M T × C B = M T × C I — M T × C B = M T × B I. Est igitur, ob datam M T, trilineum B P C ut B I.

44. *Theor. VI. Asymptotis orthogonalibus C H, C D descripta sit hyperbola Q q G, et per punctum D in asymptoto C D datum, logarithmica D p P axem habens C H productum; per punctum D agatur ad hyperbolam ordinata D G, et per punctum alterum quodvis N ordinata N Q quæ producta logarithmicæ occurrat in P, erit area hyperbolica N Q G D, ad dignitatem hyperbolæ seu ad rectangulum C D × D G, in ratione rectæ N P ad subtangentem logarithmicæ.*

Agatur enim altera q p ipsi Q P infinitè propinqua, ex punctis p, P demittantur ad axem C T perpendiculum p m secans Q P in r et perpendiculum P M; P T tangat logarithmicam in P; erit ob triangula p r P, P M T similia, p r (seu N n) : P r = P M (seu C N) : M T, et (ex naturâ hyperbolæ per Theor. 4. de Hyp. Lib. 1.) N Q : D G = C D : C N; ideóque per compositionem rationum et ex æquo N Q × N n : P r × D G = C D : M T; Quarè ob datas C D et M T, summa omnium rectangulorum N Q × N n, in quæ dividi potest area N Q G D, hoc est, hæc area ipsa est ad rectangulum sub data G D, et summâ omnium P r, seu totâ rectâ N P, ut C D ad M T, proindéque N Q G D × M T = N P × G D × C D, et hinc N Q G D : G D × C D = N P : M T. Q. e. d.

45. *Corol. Hinc* (ob datas M T, G D, C D) *area hyperbolica N Q G D et proindè sector*

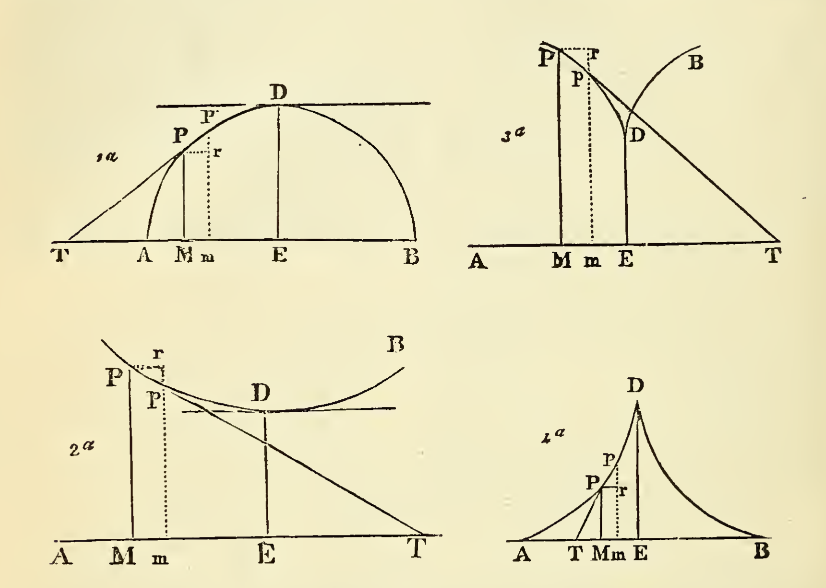


C G Q ipsi æqualis (377. Lib. 1.) *est ut recta N P productio ordinatæ Q N, inter asymptotum hyperbolæ C D et logarithmicam intercepta.*

46. *Scholium.* Cum Ill. Marchio Polenus in Epistolâ ad Hermannum Patavii an. 1729. editâ, itâ facilem et expeditam logarithmicæ descriptionem organicam, pro ingenii sui sagacitate invenerit, ut curva illa sectionibus conicis haud difficilius construatur, cumque logarithmica per lineas rectas id præstet quod hyperbola per sectores vel quadrilatera sua, in problematum constructionibus quæ per areas hyperbolicas absolvuntur, loco hyperbolæ non malè usurparetur logarithmica; quamvis si problema ad merum calculum reducatur, æquè benè possint usurpari spatia hyperbolica, quam abscissæ logarithmicæ. Quomodo autem constructiones quæ per spatia hyperbolica fiunt, ad logarithmicam transferantur, pluribus exemplis ostendemus deinceps.

De Maximis et Minimis.

47. *Theor. Si quantitas variabilis,* (quam exponat recta P M curvæ P D B ordinata) *ad certum usque terminum D continuò crescat et posteà decrescat, vel contrà, decrescat primùm et deindè crescat.* Actaque sit altera ordinata p m priori P M infinitè propinqua, et per punctum P recta P r abscissæ A P parallela secans p m in r, *ratio incrementi vel decrementi evanescentis p r ordinatæ P M, ad incrementum evanescens M m abscissæ A M in puncto D ubi ordinata M P omnium maxima vel minima evadit, infinita est vel nulla.*



Per punctum P ducatur P T tangens curvam in P, et abscissæ occurrens in T, et propter similitudinem triangulorum p r P, P M T, erit p r ad P r, seu M m ut P M ad M T. Sed si coincidente puncto P cum D, tangens P T evadat abscissæ A E parallela et proindè M P fiat maxima vel minima ordinata E D ut in figurâ 1ª. et 2ª. punctum T in infinitum abit, et ideò ratio P M ad M T seu ratio p r ad M m nulla est. Contrà verò si coincidente P cum D, tangens P T cum ordinatâ maximâ vel minimâ D E conveniat, ut in figurâ 3. et 4. evanescit subtangens M T et ratio P M ad M T, sive p r ad M m infinita evadit.

48. *Corol.* 1. Ut ex datâ æquatione inter abscissam A M et ordinatam M P, inveniatur valor abscissæ A E cui maxima vel minima applicata E D ordinatur, sumenda est æquationis fluxio, et ratio fluxionis ordinatæ ad fluxionem abscissæ, seu ratio p r ad M m, eaque vel infinito vel nihilo æquanda est, aut quod idem est, factâ M m constante, fluxio ordinatæ vel infinito vel nihilo æqualis supponenda.

49. *Corol.* 2. Si quantitas variabilis cujus maximum vel minimum quæritur non sit ordinata curvæ, potest illa supponi æqualis ordinatæ curvæ alicujus in datam quantitatem ductæ, uti si proposita esset quantitas variabilis $a x^2 - x^3$ in quâ a data est, x indeterminata, poneretur $a x^2 - x^3 = b b y$, quæ est æquatio ad curvam cujus abscissa est x, et ordinata y, et hinc, sumptis fluxionibus, foret $2 a x d x - 3 x^2 d x = b b d y$, et $2 a x - 3 x^2 = \frac{b b d y}{d x} = o$ adeóque $2 a x - 3 x x = o$ et $x = \frac{2}{3} a$. Si itaque loco x substituatur $\frac{2}{3}$ a in quantitate propositâ, obtinebitur maximum ejus $\frac{4}{9} a^3 - \frac{8}{27} a^3 = \frac{4}{27} a^3$. Idem inventum fuisset brevius, si nullâ factâ suppositione, fluxio variabilis propositæ videlicet $2 a x d x = 3 x^2 d x$, nihilo fuisset æquata.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentiâ amissus est ut spatium movendo confectum.

Nam cum motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc [a] est, ut itineris confecti particula, erit, componendo, motus toto tempore amissus ut iter totum. Q. e. d.

Corol. Quare si corpus, gravitate omni destitutum, in [b] spatiis liberis sola vi insitâ moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: [c] dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motûs illius partem amissam.

LEMMA I.

Quantitates differentiis suis proportionales sunt continuè proportionales.

Sit A ad A — B ut B ad B — C et C ad C — D, &c. et convertendo fiet A ad B ut B ad C et C ad D, &c. Q. e. d.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si corpori resistitur in ratione velocitatis, et idem solâ vi insitâ per medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione geometricâ, et spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; et si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut veloci-

[a] * *Hoc est, ut itineris confecti particula* (12) ob datum temporis momentum (ex hyp.)

[b] * *In spatiis liberis*, id est, in quibus nullum aliud est obstaculum præter medii resistentiam velocitati proportionalem.

[c] * *Dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest*, hoc est, usque ad motus exstinctionem. (Ostendetur autem infra, in nota f, infinitum tempus requiri ut motus omnis extinguatur, quando resistitur motui in ratione velocitatis.) Cùm ergo motus ad exstinctionem usque amissus, sit ipse motus totus, et motus amissi sint ut spatia movendo confecta (per Theor.) erit motus totus ad motûs partem amissam post datum spatium descriptum, ut spatium ad exstinctionem usque motûs descriptum ad illud datum spatium. Unde liquet spatium quod corpus ad motûs usque extinctionem describit finitum esse, cùm datam habeat rationem ad spatium finitum.

tas: ([d]) erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, et propterea (per Lem. I. Lib. II.) continuè proportionales. ([e]) Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continuâ, qui per saltum capiuntur omisso passim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter se iisdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, et propterea eæ quoque rationes compositæ inter se eædem sunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, sunt in progressione geometricâ. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ; et augeatur earum numerus in infinitum, eò ut resistentiæ impulsus reddatur continuus; et velocitates in principiis æqualium temporum, semper continuè proportionales, erunt in hoc etiam casu continuè proportionales. Q. e. d.

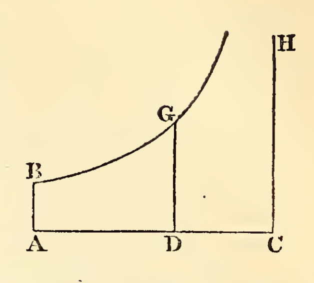
Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ (per Prop. I. Lib. II.) et propterea etiam ut totæ. Q. e. d.

Corol. Hinc si asymptotis rectangulis A C, C H describatur hyperbola B G, sintque A B, D G ad asymptoton A C perpendiculares, et exponatur tum corporis velocitas tum resistentia medii, ipso motus initio,

([d]) * *Erit decrementum velocitatis.* (15) ut resistentia ob datum temporis momentum, ideóque (per hyp.) ut velocitas.

([e]) 50. *Proinde si ex æquali,* &c. Linea recta A Z in particulas æquales A B, B C, C D, &c. divisa, exponat tempus, et perpendicula A L, B M, C N, &c. exponant velocitates ipsis singulorum temporum A B, B C, C D, &c. initiis; erunt (ex Dem.) velocitates illæ in continuâ progressione geometricâ decrescente. Proindè si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, ut A E, E H, H K, &c. erunt velocitates A L, E P, H S, &c., ipsis temporum initiis ut termini qui e progressione geometricâ per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum B M, C N, &c. et F Q, G R, &c. numero. Componuntur autem horum terminorum A L, E P, H S, &c. rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis; nimirum ratio A L ad E P, componitur ex rationibus A L ad B M, B M ad C N, &c. quæ tum magnitudine, tum numero æquales sunt rationibus E P ad F Q, F Q ad G R, &c. ex quibus componitur ratio E P ad S H, et ità porrò. Quarè ratio A L ad E P æqualis est rationi E P ad H S, et hæc æqualis rationi H S ad K T. Manifestum autem est (33) curvam L M N S T, ad quam terminantur perpendicula omnia A L, B M, C N &c. esse logarithmicam.

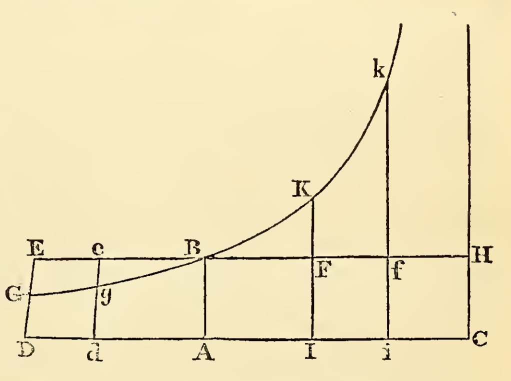
per lineam quamvis datam A C, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam D C: exponi potest tempus per aream A B G D, et spatium eo tempore descriptum per lineam A D. (f) Nam si area illa per motum puncti D augeatur uniformiter ad modum temporis, decrescet recta D C in ratione geometricâ ad modum velocitatis, et (g) partes rectæ A C æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eâdem ratione.



PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

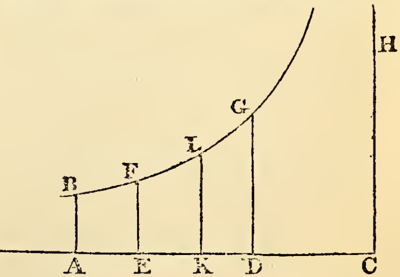
Corporis, cui, dum in medio similari rectâ ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum B A C H, et resistentia medii initio ascensus per rectangulum B A D E sumptum ad contrarias partes rectæ A B. Asymptotis rectangulis AC, CH, per punctum B describa-



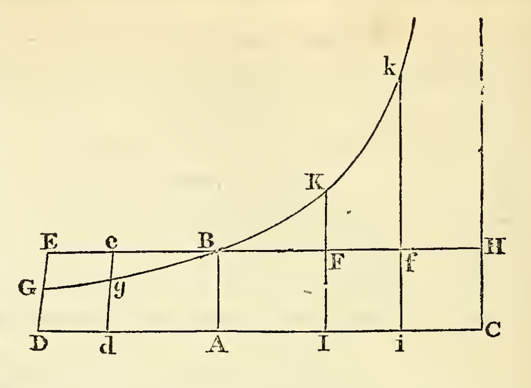
(f) * *Nam si area illa per motum puncti D* sive ordinatæ D G *augeatur uniformiter ad modum temporis*, exhibeatque proindè tempus, *decrescet recta D C, in ratione geometricâ* (380. Lib. I.) *ad modum velocitatis*, et ideò velocitatem poterit exponere (per Cas. 1. Dem.) et quia recta A C exponit velocitatem ipso motûs initio, et D C, velocitatem residuam elapso tempore A B G D erit A D ut velocitas amissa, atque ideò ut spatium descriptum (per Prop. I. hujus). Quia verò coincidentibus punctis D et C, area A B G D infinita evadit, manifestum est tempore infinito finitum spatium A C describi.

(g) * *Et partes rectæ A C æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eâdem ratione*, &c. Nam si area A B G D ductis ordinatis F E, L K in partes æquales A B F E, E F L K, K L G D divisa sit, erunt lineæ C A, C E, C K, C D in progressione geometricâ decrescente (380. Lib. I.) hoc est C A : C E = C E : C K = C K : C D, et dividendo A E : E K = E K : K D = C A : C E. Decrescunt ergo partes rectæ A C in ratione velocitatis. Exponent igitur rectæ A E, E K,



K D, &c., spatia temporibus A B F E, E F L K, K L G D, descripta, et tota recta A D spatium toto tempore A B G D descriptum.

tur hyperbola secans perpendicula D E, d e in G, g: et corpus ascendendo tempore D G g d describet spatium E G g e, tempore D G B A spatium ascensus totius E G B; tempore A B K I spatium descensus B F K, atque tempore I K k i spatium descensus K F f k; et velocitates corporis (resistentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt A B E D, A B e d, nulla, A B F I, A B f i respectivè; atque maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit B A C H.



(h) Resolvatur enim rectangulum B A C H in rectangula innumera A k, K l, L m, M n, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; et erunt nihil, A k, A l, A m, A n, &c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypothesin) ut resistentiæ medii principio singulorum temporum æqualium. (i) Fiat A C ad A K vel A B H C ad A B k K ut vis gravitatis ad resistentiam in principio temporis secundi, deque vi gravitatis subducantur resistentiæ, et manebunt A B H C, K k H C, L l H C, M m H C, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque ideo (per Motûs Legem II.) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula A k, K l, L m, M n, &c. et (k) propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progressione geometricâ. Quare si rectæ K k, L l, M m, N n, &c. productæ occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ A B q K, K q r L, L r s M, M s t N, &c. (l) æquales, ideóque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. (m) Est autem area A B q K (per Corol. 3. Lem. VII.

(h) * *Resolvatur enim*, &c. Demonstratio quæ sequitur est pro corporis descensu.

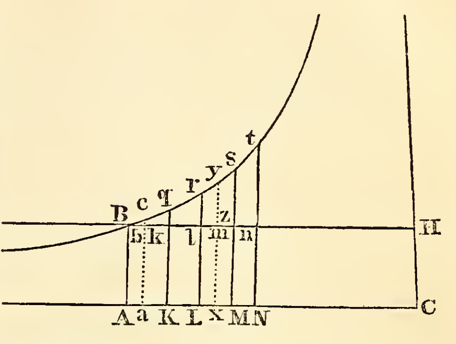
(i) * *Fiat A C ad A K*, &c. Cùm enim sit A K k B, proportionalis resistentiæ principio temporis secundi, si fiat A K k B ad A B H C seu A K ad A C, ut resistentia illa ad gravitatem, rectangulum A H exponet vim gravitatis datam; et simili modo, cum sit A l, ad A k, ut resistentia initio temporis tertii ad resistentiam initio temporis secundi, erit, ex æquo perturbatè A l ad A H, seu A L ad A C, ut resistentia in principio temporis tertii ad gravitatem, et ità deinceps. Quoniam verò gravitas motum corporis cadentis accelerat quem resistentia retardat, de vi gravitatis auferenda est vis resistentiæ ut habeatur vis absoluta quâ corpus deorsum urgetur.

(k) * *Et proptereà.* Rectangula A B H C, K k H C, L l H C, &c. differentiis suis A k K l, &c., proportionalia, erunt in progressione geometricâ (per Lem. I. Lib. II.)

(l) * *Æquales.* (380) Lib. I.

(m) *Est autem area A B q K (per Corol. 3 Lem. VII. et Lem. VIII. Lib. I.) ad aream*

et Lem. VIII. Lib. I.) ad aream B k q ut K q ad $\frac{1}{2}$ k q seu A C ad $\times$ $\frac{1}{2}$ A K, hoc est, ut vis gravitatis ad resistentiam in medio temporis primi.



Et (n) simili argumento areæ q K L r, r L M s, s M N t, &c. sunt ad areas q k l r, r l m s, s m n t, &c. ut vires gravitatis ad resistentias in medio temporis secundi, tertii, quarti, &c. Proindè cùm areæ æquales B A K q, q K L r, r L M s, s M N t, &c. sint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ B k q, q k l r, r l m s, s m n t, &c. resistentiis in mediis singulorum temporum, hoc est (per hypothesin) velocitatibus, atque (o) ideo descriptis spatiis analogæ. Sumantur analogarum summæ, et erunt areæ B k q, B l r, B m s, B n t, &c. spatiis totis descriptis analogæ; necnon areæ A B q K, A B r L, A B s M, A B t N, &c. temporibus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis A B r L, describit spatium B l r, et tempore L r t N

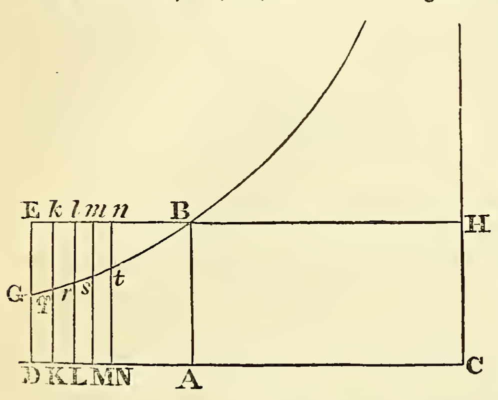
B k q ut K q ad $\frac{1}{2}$ k q seu ut A C ad $\frac{1}{2}$ A K. Etenim per ea Lemmata has areas pro rectilineis sumi posse constat, erigatur in medio partis A K perpendicularis a c ad hyperbolam usque, facile constabit ex elementis trapezium A B q K fore ad triangulum B k q ut tota ea perpendicularis a c (pro quâ K q sumi poterit) ad portionem ejus b c intrà triangulum comprehensam, quæ erit (ex const. et 2â. 6ti. Elem.) $= \frac{1}{2}$ k q, est verò ex natura hyperbolæ ea perpendicularis a c ad A B, ut A C ad C a sive A C $- \frac{1}{2}$ A K et dividendo, est ea perpendicularis a c ad a c $-$ a b sive b c quæ est $\frac{1}{2}$ k q ut A C ad A C $-$ A C $+ \frac{1}{2}$ A K sive $\frac{1}{2}$ A K; Ergo area A B q K est ad aream B q k ut A C ad $\frac{1}{2}$ A K, sive ut rectangulum A B C H ad rect. $\frac{1}{2}$ A B k K, seu *ut vis gravitatis* quam exponit rectang. A H ad *resistentiam in medio temporis primi* quam exponit rectang. A k, cùm enim sit A K ut velocitas toto primo tempore acquisita, erit $\frac{1}{2}$ A K ut velocitas in medio temporis primi acquisita; resistentiæ autem sunt velocitatibus analogæ.

(n) *Et simili argumento areæ.* Sumptis enim istis areis pro trapeziis rectilineis: ducantur perpendiculares x z y in medio partium A K, K L, L M, M N ad hyperbolam usque, et (ex Elementis) facile constabit quod area tota singuli trapezii (v. gr. r L M s) est ad ejus areæ portionem supra B H positam (nempe r l m s) ut linea tota x y per medium trapezii ducta ad ejus partem z y supra B H, sed ex naturâ hyperbolæ est ea perpendicularis x y ad A B sive x z, ut A C ad abscissam C x illi perpendiculari respondentem (quæ est C L $- \frac{1}{2}$ L M), et dividendo, est ea perpendicularis x y ad ejus partem z y supra B H, ut A C ad A x portionem abscissæ inter A et eam perpendicularem (hoc est, in exemplo assumpto, ut A C ad A L $+ \frac{1}{2} \times$ L M). Ergo area tota singuli trapezii ad ejus areæ portionem supra B H, ut A C ad A x portionem abscissæ inter A et medium partis cujusvis assumptæ, sive (assumpta communi altitudine A B) ut rectangulum A H, ad rectangulum sub A B et lineâ inter A et medium partis assumptæ comprehensa; sed illud est ut vis gravitatis, hoc ut velocitas ac proinde ut resistentia in medio temporis cui respondet pars assumpta, ergo alternando, area singuli trapezii est ad vim gravitatis ut portio trapezii supra B H ad resistentiam sive ad velocitatem in medio temporis cui respondet trapezium, sed areæ totæ trapeziorum sunt ubique æquales, et vis gravitatis semper eadem, constans ergo est eorum ratio; ergo, portiones trapeziorum super B H, ut r l m s sunt sicut resistentiæ sive ut velocitates, adeóque ut spatia singulis tempusculis quibus respondent descripta.

(o) * *Atquè ideò descriptis spatiis analogæ.* Spatia enim singulis temporibus descripta sunt ut velocitates per Prop. II. hujusce libri.

spatium r l n t. Q. e. d. Et (p) similis est demonstratio motûs expositi in ascensu. Q. e. d.

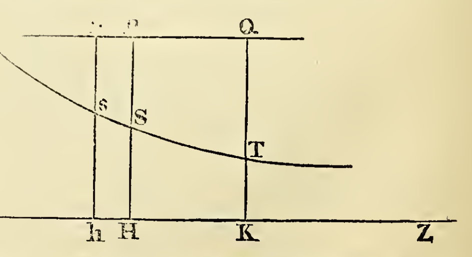
(p) *Et similis est demonstratio.* Resolvatur enim rectangulum D B in rectangula innumera D k, K l, L m, M n, &c. quæ sint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta, et erunt, nihil, D k, D l, D m, D n, &c.



ut velocitates totæ amissæ in principio singulorum temporum æqualium. Quia igitur totum rectangulum D B, exponit (per hyp.) velocitatem corporis et resistentiam medii velocitati proportionalem initio ascensus, rectangula A E, A k, A l, A m, A n, &c. exponent velocitates residuas, resistentiasque medii initio singulorum temporum æqualium. Fiat A C, ad A K, sive rectang. A H ad rectang. A k, ut vis gravitatis ad resistentiam principio temporis secundi, et vi gravitatis addatur resistentia (quod gravitas et resistentia corporis ascendentis motum retardent) et erunt D E H C, K k H C, L l H C, M m H C, &c., ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum retardatur, atque ideò (per Mot. Leg. 2. vel per not. 18.) ut decrementa velocitatum, id est, ut rectangula D k, K l, L m, M n, &c., et propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progressione geometricâ. Quarè si rectæ K k, L l, M m, N n, &c., occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ D G q k, k q r L, L r s M, M s t N, &c. æquales, ideóque tum temporibus, tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ.

Erigatur in medio partis D K perpendicularis usque ad E B, erit area D G q K ad aream G E k q ut pars ejus perpendicularis ad hyperbolam ordinata ad ejus partem reliquam usque ad E B, sed (per Theor. IV. de Hyperbola,) ea ordinata ad hyperbolam est ad A B sive ad totam perpendicularem, ut A C ad ejus ordinatæ abscissam, ideóque dividendo, est ea ordinata ad perpendicularis partem reliquam usque ad lineam E B, sive est area D G q K ad aream G E k q ut A C ad portionem abscissæ inter A et perpendicularem, et assumptâ communi altitudine A B, ut rectangulum A H ad rectangulum sub A B et portione abscissæ inter A et perpendicularem, ideóque area D G q K ad aream G E k q ut vis gravitatis ad resistentiam sive velocitatem residuam in medio temporis primi, cùmque vis gravitatis sit ubique eadem et areæ D G q K, q K L r, ubique æquales, areæ G E k q, k q r l, &c. erunt semper ut resistentiæ in singulis temporibus sive ut velocitates, ideóque ut spatia singulis tempusculis descripta, ac per consequens areæ totæ G E n t, erunt ut spatia toto tempore G D N t descripta, dum areæ A B N n erunt ut velocitates in fine eorum temporum residuæ.

51. Si asymptoto A Z descripta sit logarithmica quævis L S T, ad asymptotum versus Z accedens, et ordinata A L exponat velocitatem corporis initio motûs, abscissæque A H, A K, exponant tempora; erunt (50) ordinatæ H S, K T, ut velocitates residuæ elapsis temporibus A H, A K, et ideò ductâ per punctum L rectâ L Q, asymptoto A Z parallelâ, et ordinatas productas H S, K T secante in P, Q, erunt P S, Q T ut velocitates amissæ, atquè etiam ut spatia descripta, temporibus A H, A K, vel L P, L Q. Ductâ ordinatâ, h s, alteri H S, infinitè propinquâ, spatium velocitate uniformi A L, tempusculo h H descriptum in vacuo, erit ad spatium eodem tempore cum velocitate H S, confectum in medio resistente, ut rectangulum H P × H h, ad rectangulum S H × H h, seu aream H S s h (12) et ideò si totum tempus A H in particulas innumeras ut h H divisum sit, erit spatium cum velocitate A L, in vacuo descriptum toto tempore A H, ad spatium eodem tempore percursum in medio resistente ut rec-



tangulum A P ad aream logarithmicam A L S H; sed area A L S H, æqualis est rectangulo subtangentis logarithmicæ in P S, (59) et ideò si

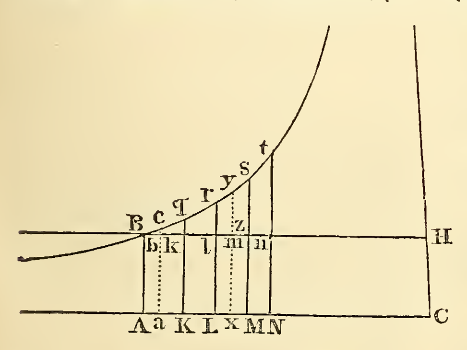
Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut vis data gravitatis, quâ corpus illud perpetuò urgetur, ad vim resistentiæ, quâ ([q]) in fine temporis illius impeditur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progressione arithmeticâ, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu, atque etiam earundem differentia in descensu ([r]) decrescit in progressione geometricâ.

Corol. 3. ([s]) Sed et differentiæ spatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur, decrescunt in eâdem progressione geometricâ.

assumpta sit A L subtangenti æqualis, est area A L S H, æqualis rectangulo A L × P S; Quarè in hâc hypothesi, erit spatium prius ad posterius ut L P, ad P S.

([q]) * *In fine temporis illius impeditur.* Est enim velocitas dato tempore, A B r L acquisita, ad velocitatem alio quovis tempore A B t N acquisitam, ut rectangulum A l ad rectangulum A n, sivè ut linea data A L, ad lineam A N, (ex dem.), et ideò velocitas corporis cadentis cum areâ A B t N, seu cum tempore continuò crescit. Sed coincidentibus puncto N cum puncto C et ordinatâ N t cum asymptoto C H, area A B t N infinita evadit, hoc est, tempus fit infinitum et velocitas maxima; Quarè velocitas maxima quæ etiam *terminalis* dicitur, est ad velocitatem dato quovis tempore A B r L, acquisitam ut A C ad A L, seu ut rectangulum A H, ad rectangulum A l, hoc est, (ex dem.) ut vis gravitatis ad vim resistentiæ in fine temporis A B r L.



([r]) * *Decrescit in progressione geometricâ.* In ascensu corporis temporibus D G q K, D G r L, D G s M, &c. in arithmeticâ progressione crescentibus, abscissæ C D, C K, C L, &c. in progressione geometricâ decrescunt (380. Lib. I.) sed singulæ abscissæ illæ sunt (ex dem.) ut summa velocitatis maximæ quam exponit linea C A, et velocitatis residuæ quam exponit linea A K vel A L, vel A M, &c., in fine temporis D G q K, vel D G r L, vel D G s M, &c. Quarè tempore aucto in progressione arithmeticâ, summa velocitatis maximæ ac velocitatis in ascensu residuæ decrescit in progressione geometricâ. Simili modo in descensu corporis patet quod crescentibus temporibus (vid. fig. notæ super.) A B q K, A B r L, A B s M, &c., in progressione arithmeticâ, abscissæ C A, C K, C L, C M, &c., decrescunt in progressione geometricâ (380. Lib. I.), sed abscissæ illæ sunt ut differentiæ velocitatis maximæ quam exhibet linea A C et velocitatis acquisitæ quam exponit linea A K, vel A L, vel A M, &c., crescente igitur tempore in progressione arithmeticâ, differentia velocitatis maximæ, et velocitatis dato quovis tempore in descensu acquisitæ, decrescit in progressione geometricâ. Hinc si summa illa in ascensu et differentia in descensu numeris exprimantur, erunt tempora ut eorum numerorum logarithmi.

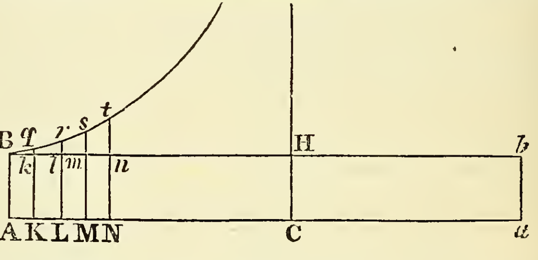
([s]) * *Sed et differentiæ spatiorum.* Nam si in ascensu corporis capiantur tempora D G q K, K q r L, L r s M, M s t N, &c. *(vid. fig. prim. pag. præced.)* æqualia, erit spatium primo tempore descriptum ut G E k q = D K × D E — D G q K; spatium tempore secundo descriptum ut q k l r = K L × D E — K q r L (sive quia K q r L = D G q K) = K L × D E — D G q K, et ità de cæteris. Quarè differentia spatiorum primo et secundo tempore descriptorum est ut D K × D E — K L × D E, id est, ob datam D E, ut D K — K L; et simili argumento differentia spatiorum secundi et tertii temporis est ut K L.— L M; differentia spatiorum tertii et quarti temporis ut L M — M N. Erunt igitur differentiæ spatiorum quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur ut differentiæ D K — K L, K L — L M, L M — M N, &c., sed (ex dem.) termini D K, K L, L M, M N, &c., decrescunt ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C, &c. Ergò differentiæ D K — K L, K L — L M, L M — M N, &c., decrescunt ut D K, K L, L M, M N, &c., seu ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C, &c. Eadem est demonstratio pro descensu.

Corol. 4. Spatium verò a corpore descriptum differentia est duorum spatiorum quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, et (t) alterum ut velocitas, quæ etiam ipso (u) descensûs initio æquantur inter se.

(t) * *Alterum ut velocitas.* Nam spatium tempore quovis A B t N, in descensu descriptum, est ut area B t n, est autem area B t n = A B t N — A B n N, et est A B n N ut velocitas tempore A B t N acquisita.

(u) * *Descensûs initio æquantur.* Descensûs initio est area nascens A B q K æqualis rectangulo A B k K.

52. *Scholium.* Ex demonstratis non solùm corporis ascendentis aut e quiete descendentis motus determinatur, sed etiam motus ejusdem datâ cum velocitate deorsum projecti facilè inveniri potest. Nam velocitas projectionis vel æqualis est velocitati maximæ, quam in figuris superioribus exponit linea A C, sive rectangulum A H, aut velocitate maximâ minor est, aut eâ major. Si 1um. motus corporis deorsum verticaliter projecti æquabilis est, ob resistentiam gravitati æqualem et contrariam. Si 2um. in lineâ A C (vid. fig. Prop. III.) capiatur A L, ad A C, ut velocitas projectionis data ad maximam, sive ut resistentia ad gravitatem, et tempore quovis L r t N, corpus describet, spatium l r t n, et in fine illius temporis habebit velocitatem L l n N, eodem modo ac si e quiete cadendo tempore A B r L, acquisivisset datam projectionis velocitatem A B l L, et deindè in motu perseverasset.

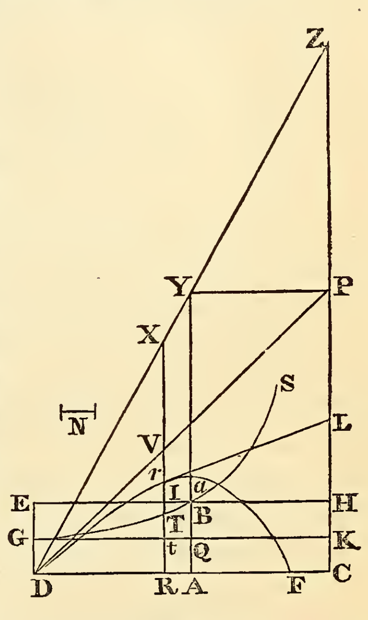


53. Verùm si velocitas projectionis major sit velocitate maximâ quam corpus cadendo acquirere potest, mutanda erit Newtoni constructio. Cæteris enim manentibus ut in constructione pro corporum descensu, producantur rectæ A C, et B H, ad a et b, ut sit rectangulum A B b a ad rectangulum C H b a, ut resistentia tota initio motus ad vim gravitatis: velocitas projectionis exponi poterit per rectangulum A B b a, cùm resistentia sit ipsi semper proportionalis, et corpus descendendo tempore quovis A B t N, describet spatium A B b a × A N + C a × B t n, et velocitatem habebit N n b a, et tempore infinito describet spatium infinitum, velocitatemque habebit æqualem terminali sive maximæ velocitati quam corpus e quiete cadendo acquirere potest. Resolvatur enim rectangulum A H in rectangula innumera A k, K l, L m, M n, &c. quæ sint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta. (cùm enim resistentia gravitatem superet, velocitas decrescit) et erunt, nihil, A k, A l, A m, A n, &c. ut velocitates amissæ, et ideò rectangula a B, a k, a l, a m, a n, &c., ut velocitates residuæ resistentiis proportionales, principio singulorum temporum æqualium. Quoniam verò gravitas motum accelerat quem resistentia retardat, de vi resistentiæ subducatur gravitas C H b a, et manebunt rectangula A B H C, K k H C, L l H C, M m H C, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum æqualium retardatur, atque ideò ut decrementa velocitatum, id est, ut rectangula A k, K l, L m, M n, et propterea per Lem. I. Lib. II. in progressione geometricâ. Quarè (380. Lib. I.) erunt areæ A B q K, K q r L, L r s M, M s t N, &c. æquales, ideóque temporibus semper æqualibus analogæ. Elapso igitur tempore quovis A B t N, corporis velocitas residua erit ut rectangulum N n b a, sive ut recta N a, sed spatia sunt ut velocitas et tempus conjunctim, ergo spatia singulis tempusculis descripta, sunt ut ea velocitas N a ducta in tempus M s t N, id est ut N C × t N × M N + C a × t N × M N = A B H C × M N + C a × M s t N, (ob N C × t N = A B × C A, per Theor. IV. de Hyp.) Quarè (componendo) spatium totum tempore A B t N descriptum, erit ut A B H C × A N + C a × A B t N = A B b a × A N + C a × B t n, ob A B t N = A B × A N + B t n. Q. e. d.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Posito quod vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, resistentiam velocitati proportionalem patientis.

E loco quovis D egrediatur projectile secundum lineam quamvis rectam D P, et per longitudinem D P exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto P ad lineam horizontalem D C (x) demittatur perpendiculum P C, et secetur D C in A, ut (y) sit D A ad A C ut resistentia medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, et vim gravitatis; vel (z) (quod perindè est) ut sit rectangulum sub D A et D P ad rectangulum sub A C et C P ut resistentia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis D C, C P describatur hyperbola quævis G T B S secans perpendicula D G, A B in G et B; et compleatur parallelogrammum D G K C cujus latus G K secet A B in Q. Capiatur linea N in ratione ad Q B quâ D C sit ad C P; et ad rectæ D C punctum quodvis R erecto perpendiculo R T, quod hyperbolæ in T, et rectis E H, G K, D P in I, t et V occurrat; in eo cape V r æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel (a) quod perindè est, cape R r æqualem



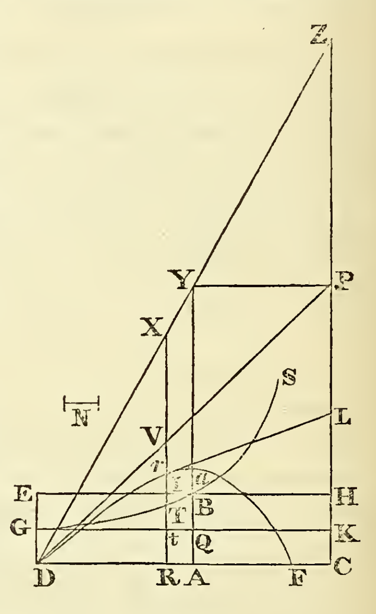
(x) * *Demittatur perpendiculum P C*, et quoniam D P exponit velocitatem projectionis C P exponet velocitatem verticalem, et D C velocitatem horizontalem, per Leg. Motûs Cor. 1. et 2.

(y) * *Ut sit D A ad A C ut resistentia*, &c., aut, quod idem est (per Cor. 1. Prop. III.) ut sit D A ad A C ut velocitas verticalis C P ad velocitatem maximam seu terminalem.

(z) * *Vel (quod perindè est) ut sit rectangulum*, &c. Nam cùm sit D P ad C P ut velocitas tota projectionis ad velocitatem verticalem, ac proindè ex lege resistentiæ ut resistentia tota sub initio ad resistentiam ex motu in altitudinem, et cùm fit D A ad A C ut resistentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis (per hypothesim), erit per compositionem rationum et ex æquo $DA \times DP$ ad $AC \times CP$ ut resistentia tota ex motu projectionis ad vim gravitatis.

(a) * *Vel quod perindè est, cape R r æqualem*, &c. Cùm enim sit (per hyp.) N : Q B = D C : C P, et D C : C P = D R : R V, ob triangula similia D R V, D C P; erit N : Q B = D R : R V, et ideo $RV = \frac{DR \times QB}{N}$. Sed rectangulum G E I t = $Gt \times GE$ =

$\frac{GTIE}{N}$; et projectile tempore D R T G perveniet ad punctum r, describens curvam lineam D r a F, quam punctum r semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo A B, et postea semper appropinquans ad asymptoton P C. Estque velocitas ejus in puncto quovis r ut curvæ tangens r L. Q. e. i.



Est enim N ad Q B ut D C ad C P seu D R ad R V, ideóque R V æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, et R r (id est R V — V r seu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$)([b]) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream R D G T, et (per Legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cùm resistentia sit ut motus, ([c]) distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales et contrarias: ideóque longitudo, a motu ad latus descripta, erit (per Prop. II. hujus) ([d]) ut linea D R, ([e]) altitudo verò (per Prop. III. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$,

$DR \times QB = GTIE + tGT$, et ideo $\frac{GTIE}{N} = \frac{DR \times QB - tGT}{N} = RV - \frac{tGT}{N}$. Quare si capiatur $Vr = \frac{tGT}{N}$, erit $\frac{GTIE}{N} = RV - Vr = Rr$.

([b]) * *Æqualis* $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$ &c. Est enim $\frac{DR \times AB - RDGT}{N} = \frac{DR \times RI - RDGT}{N} = \frac{GTIE}{N} = RV - Vr$.

([c]) * *Distinguetur etiam hæc*, &c. In eâ, quam tractamus, resistentiæ hypothesi motus componere ac dividere licet eodem modo quo componuntur et dividuntur in vacuo; quod in aliis resistentiæ hypothesibus fieri non potest. Cùm enim resistentia velocitati proportionalis est, spatia velocitatibus separatis et conjunctis eodem temporis momento describenda vi resistentiæ minuuntur in eâdem quam habent inter se ratione.

([d]) * *Ut linea D R.* Exponitur enim corporis velocitas horizontalis sub motûs initio per lineam D C. Unde tempus exponi poterit per aream hyperbolicam D R T G, et spatium hoc tempore descriptum per lineam D R, per Cor. Prop. II. hujus.

([e]) * *Altitudo verò*, &c. Cùm enim sit D A ad A C ut resistentia verticalis ad gravitatem (per hyp.); area G T I E, seu ei æqualis $DR \times AB - RDGT$, erit ut altitudo motu verticali descripta (per Prop. III. hujus); et quia (per construct.) est $Rr = \frac{DR \times AB - RDGT}{N}$, ideóque ob datum N, R r ut $DR \times AB - RDGT$, erit altitudo ut R r.

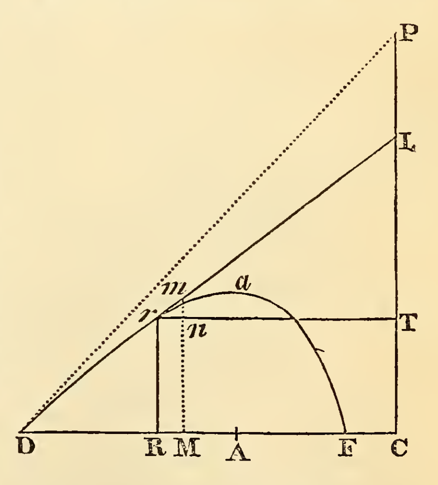
hoc est, ut linea R r. Ipso autem motus initio area R D G T (f) æqualis est rectangulo D R × A Q, ideóque linea illa R r (seu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc est ad D R ut A B — A Q seu Q B ad N, id est, ut C P ad D C; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cùm igitur R r semper sit ut altitudo, ac D R semper ut longitudo, atque R r ad D R sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est ut R r semper sit ad D R ut altitudo ad longitudinem, et propterea ut corpus moveatur in linea D r a F, quam punctum r (g) perpetuò tangit. Q. e. d.

(f) * *Æqualis est rectangulo*, &c. Nam coincidente puncto t cum G, evanescit T t respectu R t seu A Q, fitque area evanescens R D G T æqualis R D G t seu D R × A Q.

(g) 54. *Perpetuo tangit.* Quoniam autem D A est ad A C ut resistentia ex motu verticali sub initio orta ad vim gravitatis, tempus totius ascensûs corporis erit D A B G (per Prop. III. hujus), quo etiam tempore percurrit corpus longitudinem D A, et ideò ad maximam suam altitudinem a perveniet ubi erit in perpendiculo A B a, et postea semper appropinquat ad asymptoton P C (per Cor. Prop. II.) Per punctum quodvis trajectoriæ r agatur r T horizontali D C parallela et verticali C P occurrens in T, verticalis M m ipsi R r infinitè propinqua secet r T in n et tangentem r L seu curvam in m: et quoniam motus corporis in loco r per arcum r m dividi potest in motum horizontalem r n et verticalem n m, erit velocitas horizontalis ad verticalem ut r n ad n m, et ad obliquam secundum tangentem curvæ ut r n ad r m. Sed ob similitudinem triangulorum r n m, r T L, est r n : m n = r T vel R C : T L, et r n : r m = R C : r L. Quare cum R C sit ut velocitas horizontalis corpori in loco r residua ex velocitate D C quam sub initio motus habebat in loco D (per Cor. Prop. II.); erit T L ut velocitas verticalis corpori residua ex velocitate initiali C P, et r L ut velocitas obliqua in arcu r m ex duabus r T et T L composita. Est itaque velocitas et proinde resistentia corporis in puncto quovis trajectoriæ r ut curvæ tangens r L.

55. Hinc per datum trajectoriæ punctum r duci potest tangens r L. Nam velocitas verticalis L T in loco r est ad velocitatem verticalem C P in loco D. ut rectangulum R B ad rectangulum D B (vide figuram textûs) sive ut R A ad D A (per Prop. II.); ideóque $LT = \frac{CP \times RA}{DA}$.

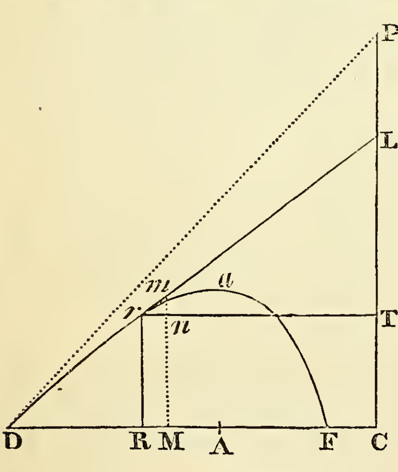
56. Ex superiori constructione facilè deducitur æquatio ad trajectoriam D r a F. Positis enim D P = b, D C = e, C P = f, A C = g, A B = h, R r = y, et D R = x, erit (per Theor. 4um. de Hyperb. Lib. I.) D C (e) : A C (g) = A B (h) : G D $= \frac{gh}{e}$, et R C (e — x) : A C (g) = A B (h) : R T $= \frac{gh}{e-x}$, ideóque Q B = A B — G D $= \frac{eh - gh}{e}$, et areæ hyperbolicæ R D G T elementum nascens R T × d x $= \frac{ghdx}{e-x}$, ac proinde area R D G T $= gh.\ S.\ \frac{dx}{e-x}$. Præterea (per constr.) est



C P (f) : D C (e) = Q B $\frac{(eh-gh)}{e}$: N $= \frac{eh-gh}{f}$, et Rr $= y = \frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Est et D R × A B = h x. Quare erit $y = \frac{fx}{e-g} - \frac{fg}{e-g} \times S \frac{dx}{e-x}$. Est etiam (per constr.) D A seu e — g ad A C seu g ut resistentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis, et ideò per Cor. I. Prop. III. ut *velocitas*

Corol. 1. Est igitur R r æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideóque si producatur R T ad X ([h]) ut sit R X æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$; id est, si compleatur parallelogrammum A C P Y, jungatur D Y secans C P in Z, et producatur R T donec occurrat D Y in X; erit X r æqualis $\frac{RDGT}{N}$, et propterea tempori proportionalis.

verticalis, quam exponit recta C P seu f, ad *velocitatem terminalem*; et ideò si velocitas terminalis exponatur per lineam a, habebitur $a = \frac{fg}{e-g}$. Unde fit $y = \frac{ax}{g} - a.\ S.\ \frac{dx}{e-x}$ et sumptis fluxionibus $dy = \frac{adx}{g} - \frac{adx}{e-x}$. Si ponatur R C sive $e - x = z$, erit $-dx = dz$, et $-\frac{adx}{e-x} = \frac{adz}{z}$, ideóque $-a.\ S.\frac{dx}{e-x} =$



$a.\ S.\ \frac{dz}{z} = a.\ L.\ z = a.\ L.\ \overline{e-x}$ (40.) Quare erit $y = \frac{ax}{g} + a.\ L.\ \overline{e-x} + Q$ const. Et quia evanescente y, evanescit quoque x, invenitur constans $Q = -a.\ L.\ e$, et hinc $y = \frac{ax}{g} + a.\ L.\ \overline{e-x} - a.\ L.\ e = \frac{ax}{g} - a.\ L.\ \frac{e}{e-x}$. Est enim $L.\ e - L.\ \overline{e-x} = L.\ \frac{e}{e-x}$, et signis mutatis $L.\ \overline{e-x} - L.\ e = -L.\ \frac{e}{e-x}$.

57. Ex hac æquatione alia deducitur inter D V et V r. Si enim dicantur $DV = v$ et $Vr = z$, erit ob triangula D C P, D R V similia, $DP\ (b) : DV\ (v) = DC\ (e) : DR\ (x) = \frac{ev}{b}$, et ideò $e - x = \frac{eb - ev}{b}$ et $\frac{e}{e-x} = \frac{b}{b-v}$; similiter erit $DC\ (e) : CP\ (f) = DR\ \left(\frac{ev}{b}\right) : VR = \frac{fv}{b}$, ideóque $y = Rr = VR - Vr = \frac{fv}{b} - z$. Quare habebitur $\frac{fv}{b} - z = \frac{aev}{bg} - a.\ L.\ \frac{b}{b-v}$, et $z = \frac{fgv - aev}{bg} + a.\ L.\ \frac{b}{b-v}$. Sed (ex demonstr.) $a = \frac{fg}{e-g}$, atque ideò $ae - ag = fg$, et $fg - ae = -ag$; quare erit etiam $z = a.\ L.\ \frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$.

([h]) * *Ut sit R X æqualis* $\frac{DR \times AB}{N}$, &c. Hoc enim facto, erit R X ad D R ut data A B ad datam N, ideóque locus punctorum X linea recta quæ transit per punctum D, ubi evanescente D R evanescit quoque R X. Coincidente puncto R cum A fit R X seu A Y : D A = A B : N, et (per Theor. IV. de Hyperb.) D C : A C = A B : G D seu A Q; et divisim D C : D A = A B : B Q, per constructionem vero C P : D C = B Q : N, ideóque ex æquo C P : D A = A B : N = A Y : D A, ac proinde A Y = C P. Unde si compleatur parallelogrammum A C P Y, jungaturque D Y secans C P in Z, erit D Z linea recta quam punctum X perpetuò tangit. Quoniam igitur $RX = \frac{DR \times AB}{N}$, et $Xr = RX - Rr = \frac{DR \times AB}{N} - \frac{DR \times AB + RDGT}{N}$; erit $Xr = \frac{RDGT}{N}$, et propterea, ob datam N, X r est ut area R D G T, ideóque ut tempus quo corpus ex loco D pervenit in locum r.

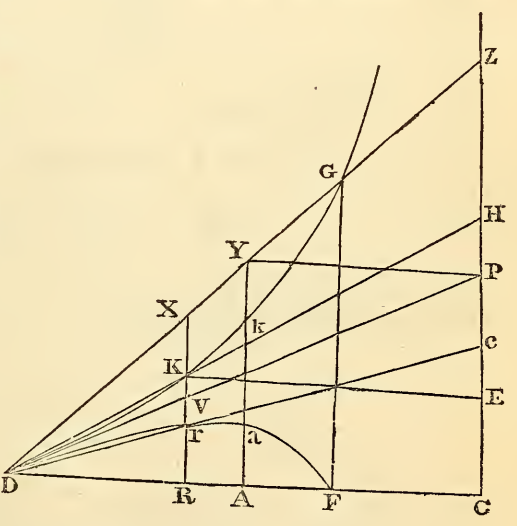
Corol. 2. Unde si capiantur innumeræ C R, vel, quod perindè est, innumeræ Z X in progressione geometricâ; erunt totidem X r [i] in progressione arithmeticâ. Et hinc curva D r a F [k] per tabulam logarithmorum facile delineatur.

(i) * *In progressione arithmeticâ.* Nam (380. Lib. I.) temporibus seu areis R D G T in progressione arithmeticâ crescentibus, abscissæ R C in progressione geometricâ decrescunt, et vice versâ. Quare verticalibus X r, quæ sunt ut areæ R D G T, in progressione arithmeticâ crescentibus, correspondentes abscissæ R C decrescent in progressione geometricâ, et contra. Sed ob triangulorum D R X, D C Z similitudinem, est D C ad D Z ut D R ad D X, et divisim ut R C ad Z X: quare ob datas D C et D Z, est Z X ad R C in dâtâ ratione, et ideò Z X crescit vel decrescit in eâdem ratione cum R C.

(k) 58. *Per tabulam logarithmorum facilè delineatur.* Dicantur enim, ut suprà n. 56. D C $= e$, C P $= f$, A C $= g$, $a = \frac{fg}{e-g}$, D R $= x$, R r $= y$; et erit (56) $y = \frac{ax}{g} - a\,L\,\frac{e}{e-x}$. Ob triangula D A Y, Y P Z similia, est D A seu $e - g$ ad A Y vel C P seu f, ut Y P vel A C seu g ad P Z, ideóque P Z $= \frac{fg}{e-g} = a$. Triangula similia D R X, Y P Z dant etiam Y P seu g ad P Z seu a, ut D R seu x ad R X, et propterea R X $= \frac{ax}{g}$. Unde cùm sit R C $= e - x$, æquatio $y = \frac{ax}{g} - a \times L.\,\frac{e}{e-x}$ fiet R r $=$ R X $-$ P Z $\times$ L. $\frac{DC}{RC}$. Verùm cum P Z. L. $\frac{DC}{RC}$ sit logarithmus rationis D C ad R C in logarithmica cujus subtangens est a sive P Z, dicendo ut subtangens tabularum ad P Z, ita L. $\frac{DC}{RC}$ e talis desumptus ad ejusdem quantitatis logarithmum in logarithmicâ cujus subtangens est P Z. Invenietur itaque P Z $\times$ L. $\frac{DC}{RC}$ ope tabulæ vulgaris logarithmorum, et inde obtinebitur R r ordinata ad trajectoriam D r a F, et sic punctum quodlibet r in illa determinabitur.

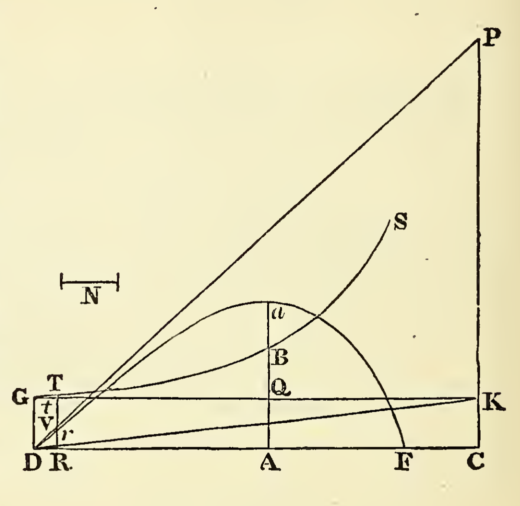
59. Ex his simplicissima deducitur trajectoriæ D r a F per logarithmicam constructio. Iisdem enim positis quæ in Corollario 1° hujus præscripta sunt, asymptoto C Z et subtangente P Z describatur per punctum D logarithmica D K k G secans R X in K. Capiatur X r $=$ R K, seu R r $=$ X K, et punctum r erit in trajectoriâ quæsitâ D r a F. Nam si ex puncto K ducatur ad C Z perpendiculum K E, erit C E seu R K logarithmus rationis D C ad K E vel R C (34), ideóque erit (58) R r $=$ R X $-$ R K $=$ X K, et hinc R K $=$ R X $-$ R r $=$ X r. Q. e. d.

60. Hæc constructio hoc etiam commodi habet, quod statim inveniantur altitudo maxima A a et horizontalis amplitudo D F. Est enim A a $=$ Y k; et si ex puncto G intersectionis logarithmicæ cum lineâ D Z demittatur ad D C perpendiculum G F, erit D F amplitudo Jactûs · nam coincidente X cum G fit X K seu R r $= 0$, et ideò coincidit punctum r cum R in horizontali D C. Pariter punctum r, quo trajectoria D r a F rectam quamlibet D c ex puncto D ad C Z ductam secat, invenitur, si capiatur C H æqualis c Z, jungatur D H logarithmicam secans in K, et ex puncto K demittatur ad D C perpendiculum K R, quod lineam D c secabit in puncto quæsito r; erit enim R K : C H seu Z c $=$ D r : D c $=$ X r : Z c, ideóque X r $=$ R K.

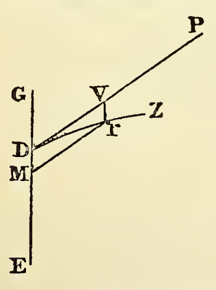


61. Quoniam velocitas projectionis est ad velocitatem terminalem, quæ data est, ut D P ad P Z (58); si manet velocitas projectionis et linea D P, manebit quoque logarithmicæ subtangens P Z; et ideò una eademque logarithmicæ species describendæ trajectoriæ D r a F sufficiet, utcumque mutetur projectionis angulus P D C.

Corol. 3. Si vertice D, diametro D G deorsum productâ, et latere recto quod sit ad 2 D P ut resistentia tota ipso motus initio ad vim gravitatis, parabola construatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco D secundum rectam DP, ut in medio uniformi resistente describat curvam D r a F, ea ipsa erit quâcum exire debet de eodem loco D, secundum eandem rectam D P, ut in spatio non resistente describat parabolam. Nam (l) latus rectum parabolæ hujus, ipso motus initio, est $\frac{D\,V\ quad.}{V\,r}$; (m) et V r est $\frac{t\,G\,T}{N}$ seu $\frac{D\,R \times T\,t}{2\,N}$. Recta autem quæ, si duceretur, hyperbolam G T S tangeret in G, (n) parallela est ipsi D K, ideóque T t est $\frac{C\,K \times D\,R}{D\,C}$, et N erat $\frac{Q\,B \times D\,C}{C\,P}$.



(l) 62. *Latus rectum parabolæ hujus*, &c. Est enim V r spatium infinite parvum quod corpus vi gravitatis descendendo describit in medio resistente, quodque eodem tempusculo dato describeret in medio non resistente (6). Sed corpus in medio non resistente projectum vi gravitatis describeret arcum parabolæ D r, cujus tangens D P, diameter G D E, abscissa D M = V r, ordinata M r æqualis et parallela D V (40. Lib. I.), et (per Theor. 1. de Parabola Lib. I.) rectangulum sub latere recto et abscissâ D M seu V r æquatur quadrato ordinatæ M r seu D V. Quare latus rectum parabolæ hujus ipso motus initio est $\frac{D\,V^2}{V\,r}$.

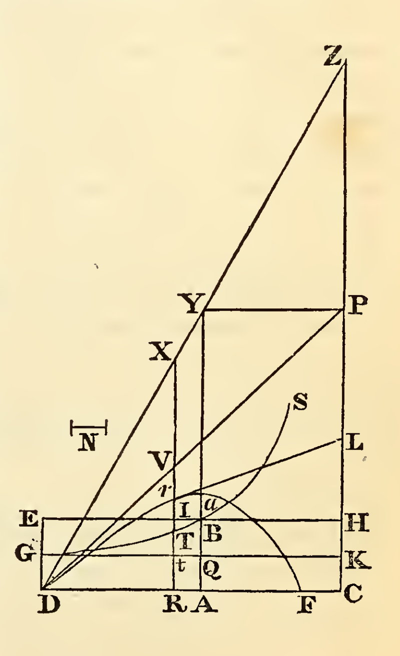


(m) * *Et Vr est* $\frac{t\,G\,T}{N}$ (per constr.) *seu* $\frac{DR \times Tt}{2\,N}$; evanescente enim D R seu G t, triangulum t G T fit $\frac{1}{2}$ G t × T t = $\frac{1}{2}$ D R × T t, et hinc $\frac{t\,G\,T}{N} = \frac{D\,R \times T\,t}{2\,N}$.

(n) * *Parallela est ipsi D K*, ob K C = D G, et subtangentem hyperbolæ æqualem abscissæ D C (per Theor. 1. de Hyp. Lib. I.). Cum autem evanescit G T t, fit T t ad t G seu D R ut ordinata G D seu C K ad subtangentem, sive ad D C, et ideò T t = $\frac{C\,K \times D\,R}{D\,C}$. Et N erat $\frac{Q\,B \times D\,C}{C\,P}$ (per constr.). Quare si loco N et T t, hi valores substituantur in quantitate $\frac{D\,R \times T\,t}{2\,N} = V\,r$, invenietur $V\,r = \frac{D\,R^2 \times C\,K \times C\,P}{2\,D\,C^2 \times Q\,B}$.

Et propterea V r est $\frac{DRq \times CK \times CP}{2 DCq \times QB}$, id est (ob proportionales D R et D C, D V et D P) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2 DPq \times QB}$ et latus rectum $\frac{DV\ quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2 DPq \times QB}{CK \times CP}$, (°) id est (ob proportionales Q B et C K, D A et A C) $\frac{2 DPq \times DA}{AC \times CP}$, ideòque ad 2 D P, ut D P × D A ad C P × A C; (p) hoc est, ut resistentia ad gravitatem. Q. e. d.

Corol. 4. Unde si corpus de loco quovis D, datâ cum velocitate, secundum rectam quamvis positione datam D P projiciatur; et resistentia medii ipso motûs initio detur: inveniri potest curva D r a F, quam corpus idem describet. Nam ex datâ velocitate (q) datur latus rectum parabolæ, ut notum est. Et sumendo 2 D P ad latus illud rectum, ut est vis gravitatis ad vim resistentiæ, datur D P. Dein secando D C in A, ut sit C P × A C ad D P × D A in eâdem illâ ratione gravitatis ad resistentiam, dabitur punctum A. (r) Et inde datur curva D r a F.



Corol. 5. Et contra, si datur curva D r a F, dabitur et velocitas corporis et resistentia medii in locis singulis r. (s) Nam ex datâ ratione C P × A C ad

(°) * *Id est ob proportionales Q B et C K, D A et A C,* &c. Nam (per Theor. IV. de Hyp.) A B est ad G D (sive A Q vel C K) ut D C ad A C, et divisim Q B est ad C K ut D A ad A C, id est $\frac{QB}{CK} = \frac{DA}{AC}$.

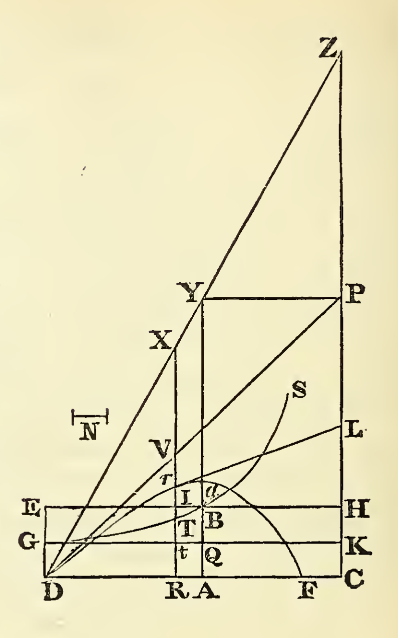
(p) * *Hoc est, ut resistentia ad gravitatem,* per construct. Probl. II.

(q) * *Datur latus rectum parabolæ,* &c. Datâ velocitate secundum directionem tangentis D P, datur tum spatium finitum in medio non resistente tempore dato æquabiliter descriptum, tum ex effectu cognito gravitatis in tempore dato, habetur spatium verticale finitum V r eodem tempore vi gravitatis descriptum, id est, dantur ordinata et abscissa parabolæ, quibus datis datur illius latus rectum (per Theor. I. de Parab.)

(r) * *Et inde datur curva D r a F,* non solum constructione per hyperbolam, sed etiam constructione illâ quæ per logarithmicam absolvitur (59.) Nam inventâ D P, sumenda est logarithmicæ subtangens P Z ad D P in ratione gravitatis ad resistentiam sub initio motûs; et ideò logarithmicæ subtangens P Z erit etiam ad D P ut 2 D P ad latus rectum parabolæ.

(s) * *Nam ex datâ ratione C P × A C ad D P × D A,* id est (per constr.) ratione gravitatis ad re-

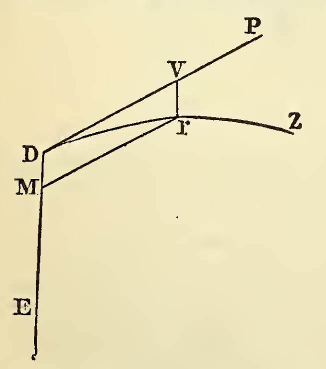
D P × D A, datur tum resistentia medii sub initio motus, tum latus rectum parabolæ: (t) et inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis r L, datur et huic proportionalis velocitas, et velocitati proportionalis resistentia in loco quovis r.



Corol. 6. Cum autem longitudo 2 × D P sit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad resistentiam in D; et ex auctâ velocitate augeatur resistentia in eâdem ratione, (u) at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illâ duplicatâ: (x) patet longitudinem 2 D P augeri in ratione illâ simplici, ideóque velocitati semper proportionalem esse, neque ex angulo C D P mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.

sistentiam totam sub motus initio, dabitur resistentia, ob datam gravitatem (per Hyp.); et quia C P × A C est ad D P × D A ut 2 D P ad latus rectum parabolæ (per Cor. 3.), dabitur illud latus rectum.

(t) * 63. *Et inde datur etiam velocitas sub initio motûs.* Nam dato latere recto parabolæ D r Z, quam grave in medio non resistente

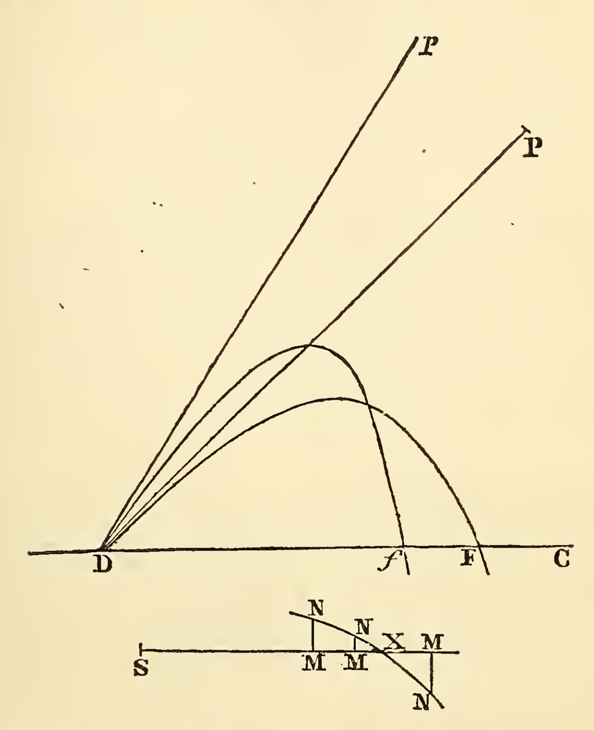


describit, et datâ positione tangentis D P cum diametro D E, parabola describi potest; datur autem in singulis locis velocitas corporis gravis parabolam datam describentis: Sit enim abscissa D M verticali V r æqualis et parallela, et ordinata M r etiam æqualis et parallela tangenti D V; datur tum velocitas quam corpus grave e puncto V cadendo per altitudinem datam V r habet in r, tum tempus quo altitudinem illam describit, et hinc datur tempus idem quo motu uniformi describit spatium datum D V (40. Lib. I.), ideóque datur velocitas uniformis per tangentem D P, quæ est ipsa velocitas projectionis in D.

(u) * *At latus rectum parabolæ augeatur.* Nam cum velocitas secundum tangentem D V uniformis supponatur (40. Lib. I.); Si, dato tempore quo describitur D V, velocitas illa crescat, crescet D V in eadem ratione, manente spatio verticali V r hoc eodem tempore dato descripto; sed latus rectum parabolæ D r Z est $\frac{DV^2}{Vr}$ (per Cor. 3.) et quantitas $\frac{DV^2}{Vr}$ manente V r, crescit ut D V². Quare latus rectum parabolæ D r Z augetur in ratione duplicatâ velocitatis.

(x) * *Patet longitudinem 2 D P, &c.* Gravitas dicatur G, resistentia initio motûs R, latus rectum parabolæ, ut suprà, $\frac{DV^2}{Vr}$; et erit 2 D P : $\frac{DV^2}{Vr}$ = G : R, ideóque 2 D P = $\frac{G \times DV^2}{R \times Vr}$, hoc est, datis V r et G, 2 D P est ut $\frac{DV^2}{R}$, et quia R est ut velocitas, seu ut D V, erit etiam

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi curvam D r a F ex phænomenis quamproximè, et inde colligendi resistentiam et velocitatem quâcum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia et æqualia

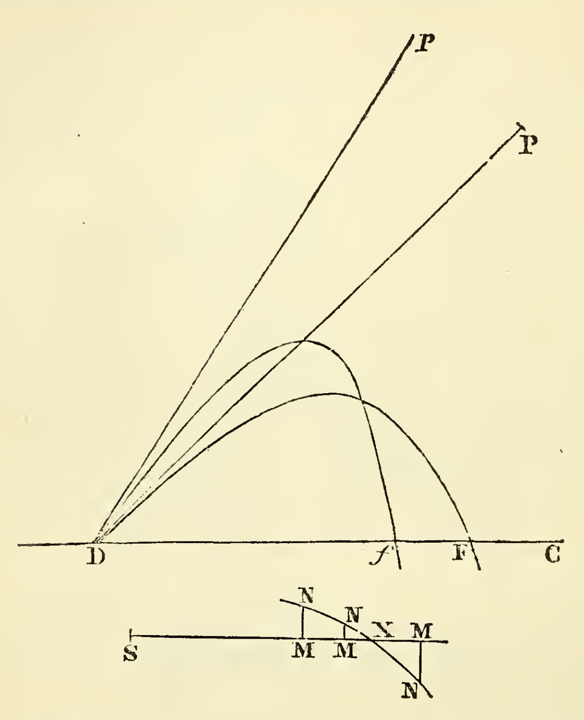


eâdem cum velocitate, de loco D, secundum angulos diversos C D P, C D p et cognoscantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum D C. Tum, assumptâ quâcunque longitudine pro D P vel D p, fingatur quod resistentia in D sit ad gravitatem in ratione quâlibet, et exponatur ratio illa per longitudinem quamvis S M. (y) Deinde per computationem, ex longitudine illâ assumptâ D P, inveniantur longitudines D F, D f, ac de

2 D P ut D V, sive ut velocitas (per notam superiorem).

(y) 64. *Deinde per computationem.* Datâ enim D P longitudine et positione, dantur C P et D C, et datâ ratione resistentiæ in D ad gravitatem dantur D A et A C per constructionem problematis istius: His autem datis, curva D r a F (vide figuras superiores) describi potest, et hinc invenitur amplitudo horizontalis D F constructione per hyperbolam vel per logarithmicam (59.) Si autem rem voluerimus calculo tractare, uti poterimus æquatione $y = \frac{ax}{g} - a. L. \frac{e}{e - x}$ (63) in qua ut sit x = D F, ponenda est y = o, et æquatio fiet $\frac{ax}{g} = L. \frac{e}{e - x}$, ex quâ per regressum serierum, vel per alias approximationes invenietur x per g et e, seu D F per A C et D C.

ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventâ, (z) auferatur ratio eadem per experimentum inventa, et exponatur differentia per perpendiculum M N. Idem



fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem S M, et colligendo novam differentiam M N. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ S M, et negativæ ad alteram; et per puncta N, N, N agatur curva regularis N N N secans rectam S M M M in X, (a) et erit S X vera ratio resistentiæ ad gravitatem,

(z) 65. *Auferatur ratio eadem per experimentum inventa;* et si nihil est residui, recte assumpta fuit ratio resistentiæ ad gravitatem; si quid residui fuerit, *exponatur differentia per M N.* Nam si recte assumpta fuit ratio resistentiæ ad gravitatem, curva D r a F per constructionem vel per computationem descripta similis est trajectoriæ quam corpus in medio resistente reverâ describit, et hinc homologarum in illis curvis linearum debet esse ratio data. Determinatur enim trajectoria vera ex velocitate et angulo projectionis æquali P D C vel p D C, atque ex ratione resistentiæ ad gravitatem datam; et curva per constructionem delineata determinatur per longitudinem assumptam D P vel D p, quæ velocitatem datam semper potest exhibere, per angulum P D C vel p D C, et per rationem linearum D A, A C, seu rationem resistentiæ ad gravitatem, si recte assumpta fuit: quare differentia tota inter veram trajectoriam et curvam hoc modo per constructionem descriptam est in magnitudine linearum homologarum, quarum ratio est eadem in utrâque curvâ. Curvæ igitur illæ similes sunt.

(a) 66. *Et erit S X vera ratio resistentiæ ad gravitatem.* Nam ubi M N seu differentia rationum $\frac{Ff}{DF}$, quæ per computationem et per experimentum inventæ sunt, nulla est, ratio re-

quam invenire oportuit. (b) Ex hac ratione colligenda est longitudo D F per calculum; et longitudo quæ sit ad assumptam longitudinem D P, ut longitudo D F per experimentum cognita ad longitudinem D F modo inventam, erit vera longitudo D P. Quâ inventâ, habetur tum curva linea D r a F quam corpus describit, tum corporis velocitas et resistentia in locis singulis.

Scholium.

Cæterum, resistentiam corporum esse in ratione velocitatis, (†) hypothesis est magis mathematica quam naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, resistentiæ corporum sunt in duplicatâ ratione velocitatum. (c) Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideóque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicatâ ratione major; estque resistentia (per Motûs

sistentiæ ad gravitatem recte assumpta fuit (65). Quare cum S M assumptam illam rationem exponat, et evanescat M N ubi S M fit S X, patet in hoc casu rationem resistentiæ ad gravitatem recte exponi per lineam S X. Itaque si innumeræ abscissæ S M assumptæ fuissent, et innumeræ ordinatæ N M per experimenta determinatæ, curva quam punctum N perpetuò tangit, rationem accuratam resistentiæ ad gravitatem determinaret per ejus intersectionem X cum lineâ S M; ideóque si multa fiunt tentamina, sicque plura obtineantur puncta N, et per ea ducatur curva regularis N N X N, illa quam proxime punctum X quæsitum determinabit; methodum autem ducendi curvam regularem per plura puncta data mox in Scholio sumus tradituri.

(b) * *Ex hac ratione colligenda est,* &c. Sit, exempli causâ, ratio assumpta resistentiæ ad gravitatem 1 ad 10, seu $S M = \frac{1}{10}$; inventa autem sit $S X = 2 S M = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; erit resistentia ad gravitatem ut 1 ad 5. Ex hac ratione et assumptâ longitudine D P colligenda est longitudo D F seu amplituda jactûs (64); et quoniam inventâ verâ ratione resistentiæ ad gravitatem, trajectoria per calculum vel per constructionem inventa similis est trajectoriæ quam corpus in medio resistente, reverâ describit (65), erit amplitudo D F per calculum inventa ad amplitudinem D F per experimentum cognitam, ut assumpta longitudo D P ad veram longitudinem D P pro trajectoriâ in medio resistente descriptâ. Hâc autem longitudine inventâ, habetur (per Cor. 4.) tum curva linea D r a F quam corpus reipsâ describit, tum corporis velocitas et resistentia in locis singulis (per Cor. 5.)

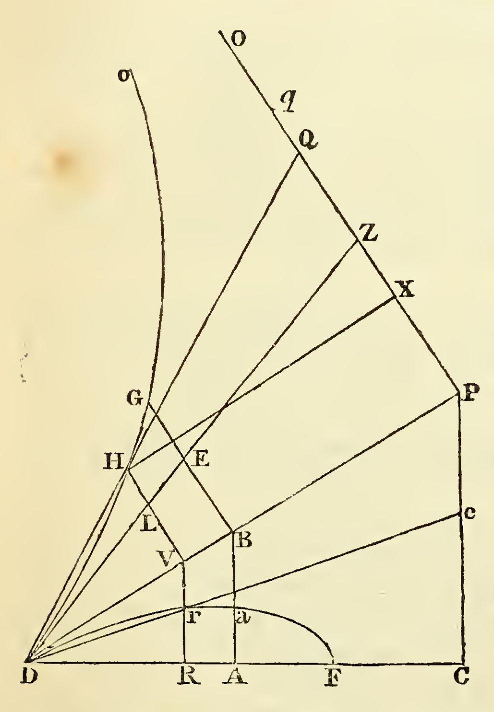
(†) 67. Ex supra demonstratis determinari possent motus corporis in medio quod resistit partim uniformiter, partim in ratione velocitatis. Et quidem si corpus solâ vi insitâ in hoc medio feratur, pars illa resistentiæ quæ est uniformis, tanquam vis constans gravitatis quâ corporis ascendentis motus retardatur, consideranda est, et in superioribus constructionibus pro corporis ascensu, non gravitas, sed ea resistentia uniformis data per lineam A C, vel per rectangulum A H exponi debet. Si vero corpus in prædicto medio vi gravitatis etiam urgeatur, linea A C gravitatem et resistentiæ partem uniformem simul junctas, si corpus ascendit, et excessum gravitatis supra eam resistentiæ partem uniformem, si corpus descendit, exponet. Qua ratione cæteris manentibus, determinabuntur motus corporis tum solâ vi insitâ moti, tum vi gravitatis urgente ascendentis et descendentis in medio quod resistit partim in ratione datâ, partim in ratione velocitatis, tum etiam corporis projecti.

(c) *Etenim actione,* &c. Hæc patent per demonstrata (8).

68. *Scholium.* Ex æquatione ad curvam D r a F, quam (57) invenimus, deducitur hujus curvæ per logarithmicam satis elegans constructio, quâ usi sunt Varignonius et Hermannus. Eam hic exponemus breviter. Deinde cum in superioris propositionis Corollario ultimo et alibi postea describenda sit curva regularis quæ per data puncta transeat, hoc problema, quod Newtonus in Epistolâ ad Oldenburgum anno 1676. datâ unum fere ex pulcherrimis dici quod solvere desideraverit, solvemus.

Leg. II. et III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hâc lege resistentiæ.

69. Iisdem positis quæ in superiori constructione Newtoni, sit D P = b, D V = v, V r = z, et D P ad a ut velocitas projectionis ad velocitatem terminalem; et erit (57) $z = a. L. \frac{b}{b - v} - \frac{a v}{b}$. Oportet curvam D r a F ex hac æquatione per logarithmicam construere. In rectâ P O ad D P normali capiatur P Z = a,



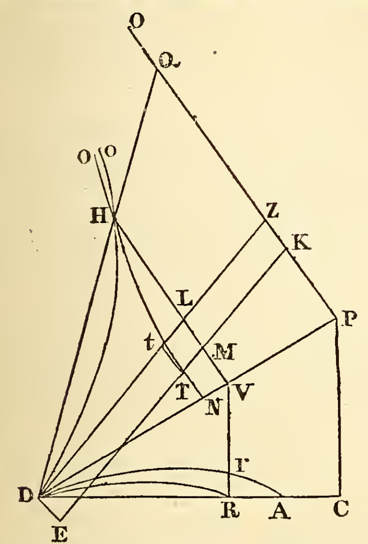
asymptoto P O et subtangente P Z describatur per punctum D logarithmica D H o, cujus D Z erit tangens, et per punctum quodvis V in linea D P agatur V H parallela P O logarithmicæ occurrens in H et tangenti D Z in L, capiaturque verticalis V R pars V r æqualis H L. Punctum r erit in trajectoria quæsitâ D r a F. Nam ducto ex H ad P O perpendiculo H X, erit (per construct.) V P = H X = b — v, P Z = a, et hinc $P X = H V = P Z \times L. \frac{D P}{H X} = a. L. \frac{b}{b - v}$ (34.) Et ob triangula D V L, D P Z similia, D P (b) : P Z (a) = D V (v) : $V L = \frac{a v}{b}$. Quare erit $H V - L V = a. \times L. \frac{b}{b - v} - \frac{a v}{b} = z = V r$. Q. e. d.

70. *Corol.* 1. Si per punctum A Newtoni constructione determinatum erigatur verticalis A B secans D P in B, et per B erigatur ad D P perpendiculum B G secans D Z in E et logarithmicam in G, capiaturque B a æqualis G E, erit A a maxima altitudo jactûs.

71. *Corol.* 2. Punctum r quo trajectoria rectam D c ex D ductam ad P C, secat, invenitur, si in lineæ Z O capiatur Z Q æqualis P c, jungatur D Q logarithmicam secans in H, demittatur ex H ad D P, perpendiculum H V, et ex V ad D C perpendiculum V R, quod rectam D c secabit in puncto quæsito r, atque hinc determinatur etiam horizontalis amplitudo D F, capiendo Z Q æqualem P c, et reliqua perficiendo ut modò diximus. Nam ob parallelas V r et P c, H V et Q P, est P c : V r = P D : D V = D Z : D L = Q Z : H L; sed (per constr.) Q Z = P c : ergo V r = H L, ideóque punctum r est in trajectoria D r a F (69.)

72. Ex demonstratis inveniri potest angulus elevationis P D C, sub quo corpus datâ velocitate D P projectum transibit per punctum r in verticali V R datum. Dicantur D R = c, R r = e, D Z = f, D L = x, H L = V r = z, V R = z + e = y; et ob triangula D L V, D Z P similia erit D Z (f) : D P (b) = D L (x) : $D V = \frac{b x}{f}$, et ob angulum D R V rectum $D V^2 = D R^2 + V R^2$, hoc est, $\frac{b b x x}{f f} = c c + y y$, æquatio ad hyperbolam, cujus diameter transversa est $\frac{2 c f}{b}$, diameter conjugata 2 c, abscissa a centro sumpta x, et ordinata y seu z + e, ut calculo inito liquet. Inde autem deducitur hæc constructio. Per punctum D ducatur infra lineam D P recta D E parallela P Z et æqualis R r, per E agatur E K parallela D Z secans H V in M; et erit L M = D E = R r = e, ideóque H M = z + e = y, atque E M = D L = x, et proinde centrum hyperbolæ est in E; cumque semidiameter transversa sit $\frac{c f}{b} = \frac{D R \times D Z}{D P}$, si capiatur in linea D P pars D N æqualis D R, et per punctum N erigatur ad D P perpendiculum N T, secans E K in T et D Z in t, erit D P ad D Z

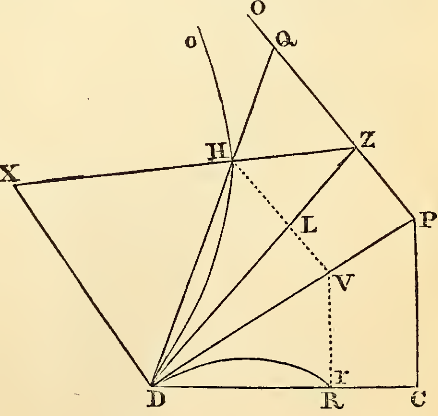
ut D N seu D R ad D t seu E T, ideóque E T $= \frac{D R \times D Z}{D P}$, et propterea E T semidiameter transversa, E M abscissa, et M H ordinata



hyperbolæ T H o, cujus semidiameter conjugata æquatur D R. Hæc itaque hyperbola occursu suo cum logarithmica D H o determinabit punctum H, ex quo si demittatur ad D P perpendiculum H V secans D Z in L, dabuntur D V et H L æqualis V r, ideóque dabitur etiam V R = V r + R r. His autem datis, datur angulus elevationis P D C, cujus sinus est V R, posito sinu toto D V.

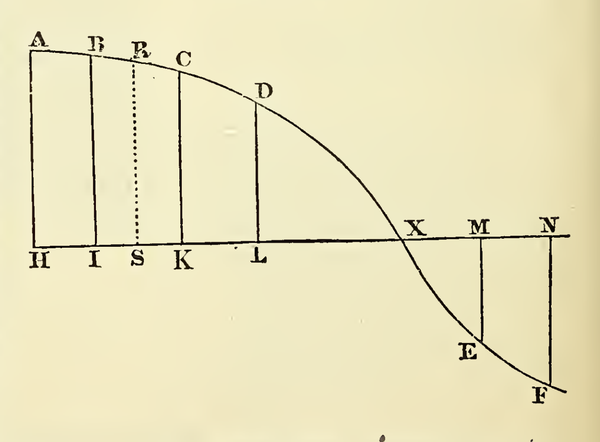
73. Si vero quæratur angulus projectionis P D C, ut corpus per punctum R in horizontali D C datum transeat, fiet R r = e = o, et æquatio ad hyperbolam evadet $\frac{b b x x}{f f} = c c + z z$, ob $y = z + e = z$. In constructione vero coincidet punctum E cum puncto D, et T cum t, cæteris manentibus ut supra. Et quia si per hyperbolæ et logarithmicæ intersectionem H ducatur recta D H secans P O in Q, est Q Z = P C (71.); liquet in eo casu esse Q Z sinum anguli elevationis P D C, existente radio seu sinu toto D P. Observandum porro est, quod si in his constructionibus hyperbola logarithmicam nusquam attingat, problema est impossibile, quod si eam bis secet, anguli duo satisfaciunt. Patet quoque datam semper esse rationem diametrorum hyperbolæ, ubicumque situm sit punctum r, vel R; est enim D R ad $\frac{D R \times D Z}{D P}$ in ratione datâ D P ad D Z.

74. Angulus elevationis P D C maximæ omnium amplitudini horizontali conveniens ita determinatur. Per punctum D ducatur D X ipsi D P perpendicularis quæ sit ad D P ut est D P ad P Z; jungatur Z X logarithmicam secans in H, et ex D per H ducatur recta D H secans P O in Q; erit Q Z sinus anguli quæsiti, existente sinu toto D P. Sit enim D R amplitudo horizontalis maxima = c, D V = v, V R = V r = z, et erit ob angulum D R V rectum $v v - z z = c c$, et sumptis fluxionibus $2 v d v - 2 z d z = 2 c d c = o$ (48), ideóque $v d v = z d z$. Sed (69.) $z = a L \frac{b}{b - v} - \frac{a v}{b} = a L b - a L. \overline{b - v} - \frac{a v}{b}$, et sumptis fluxionibus $d z = \frac{a d v}{b - v} - \frac{a d v}{b} = \frac{a v d v}{b b - b v}$. Quare erit $z d z = \frac{a z v d v}{b b - b v} = v d v$, et ideò $a z = b b - b v$, ac proinde D P (b) : P Z (a) = H L (z) : P V (b — v); verum ob triangulum D V L, D P Z similitudinem est D P : D Z = P V : Z L; unde per compositionem rationum et ex æquo $D P^2 : P Z \times D Z = H L : Z L$, et quia $D P^2 = D X \times P Z$ (per constr.), erit D X : D Z = H L : L Z. Quapropter punctum H per æquationem $a z = b b - b v$ determinatum perpetuo tangit lineam rectam X Z; cumque idem punctum in logarithmica esse oporteat ut determinetur maxima amplitudo D R, si per intersectionem H rectæ X Z et logarithmicæ D H o ducatur recta D Q secans P O in Q, habebitur Q Z sinus anguli P D C (73) maximæ amplitudini D R convenientis. Q. e. d.



75. Jam si oporteat curvam regularem describere per data quotlibet puncta transeuntem, uti possumus generali methodo, quam Newtonus in arithmeticâ universali tradidit, quamque deinde

in problematis 55, 58 et 61. adhibuit. Hæc sunt ipsius verba: Cum curva non datur specie, sed determinanda proponitur, possisque pro arbitrio æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat, et hanc pro eâ designandâ tanquam si daretur assumere, ut ex ejus assumptione quomodocumque perveniatur ad æquationes ex quibus assumpta tandem determinetur. Si itaque curva generis dati per data puncta delineanda sit, assumatur generalis ad curvam illam æquatio cum terminorum coëfficientibus indeterminatis, et curvâ ad rectam aliquam positione datam relatâ, ex singulis punctis datis in rectam illam demittantur perpendiculares aut rectæ aliæ inter se parallelæ, quæ datæ erunt ut et earum abscissæ a dato in rectâ illâ puncto computatæ; deinde in assumptâ æquatione loco abscissæ variabilis x et ordinatæ etiam variabilis y scribantur abscissæ et ordinatæ per puncta data determinatæ, et tot inde obtinebuntur æquationes quot sunt puncta data per quæ curva transire debet, atque ex illis æquationibus, generalis æquationis assumptæ coëfficientes determinabuntur. Hujus methodi exemplum sit solutio Lemmatis V. Lib. III. Principiorum, quod ita propositum est: invenire curvam generis parabolici quæ per data quotcumque puncta transibit; cujus Lemmatis solutionem dedit ibidem Newtonus, sed sine demonstratione quæ tamen ex ejusdem auctoris differentiali methodo collegi potest.



76. I. Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. et ab iisdem ad rectam quamvis positione datam H N demittantur perpendicula quotcumque A H, B I, C K, D L, E M, F N, &c.; positisque abscissâ variabili H S = x, et ordinatâ R S = y, assumatur generalis ad parabolam A B D E F æquatio $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$, &c., sintque A, B, C, D, E, &c. cum suis signis indeterminatæ. Dicantur A H = a, B I = f, C K = g, D L = h, M E = — k, et H I = l, H K = m, H L = n, H M = t, &c. Ponantur 1°. y = a et x = o; 2°. y = f, et x = l; 3°. y = g et x = m; 4°. y = h, et x = n; 5°. y = — k, et x = t atque ita deinceps; et loco y et x seorsim substituantur hi valores in æquatione generali assumota, quæ in has mutabitur:

II. $a = A$

$f = A + Bl + Cl^2 + Dl^3 + El^4 +$, &c.

$g = A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + Em^4 +$, &c.

$h = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 +$, &c.

$-k = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 +$, &c.

Subducantur æquationes inferiores ex superioribus, nimirum secunda ex primâ, tertia ex secundâ, et ita deinceps. Differentia primæ ac secundæ ordinatæ per primum intervallum H I divisa dicatur b, id est, $b = \frac{a - f}{l}$; secundæ ac tertiæ differentia per secundum intervallum I K divisa dicatur 2 b, id est, $2b = \frac{f - g}{m - l}$, et ita de cæteris. Prodibunt æquationes sequentes.

III. $b = \frac{a - f}{l} = -B - Cl - Dl^2 - El^3$

$2b = \frac{f - g}{m - l} = -B - Cl - Cm - Dl^2 - Dlm - Dm^2 - El^3 - El^2m - Elm^2 - Em^3$

$3b = \frac{g - h}{n - m} = -B - Cm - Cn - Dm^2 - Dmn - Dn^2 - Em^3 - Em^2n - Emn^2 - En^3$

$4b = \frac{h + k}{t - n} = -B - Cn - Ct - Dn^2 - Dnt - Dt^2 - En^3 - En^2t - Ent^2 - Et^3$.

Simili modo capiantur adhuc æquationum istarum differentiæ, et dividantur per intervallum inter duas ordinatas interceptum H K, I L, K M, et differentiæ sic divisæ dicantur c, 2 c, 3 c, ut hic factum videtur.

IV. $c = \frac{b - 2b}{m} = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2$.

$2c = \frac{2b - 3b}{n - l} = C + Dl + Dm + Dn + El^2 + Elm + Em^2 + Eln + Emn + En^2$.

$3c = \frac{3b - 4b}{t - m} = C + Dm + Dn + Dt + Em^2 + Emn + En^2 + Emt + Ent + Et^2$.

Harum æquationum differentiæ per intervalla trium ordinatarum H L, I M, divisæ dicantur d, 2 d, et erunt æquationes.

V. $d = \frac{c - 2c}{n} = -D - El - Em - En$

$2d = \frac{2c - 3c}{t - l} = -D - El - Em - En - Et$

Harum tandem æquationum differentia per intervallum quatuor ordinatarum H M divisa dicatur e, et erit

VI. $e = \frac{d - 2d}{t} = E.$

Si plura fuissent puncta data, pluresque ideò fuissent æquationes, eodem modo pergendum esset usque ad differentiam ultimam: quæ hic est differentia quarta, et sic tandem pervenitur ad valorem coëfficientis ultimi termini æquationis generalis assumptæ, et deinde retrogrediendo inveniuntur valores aliarum coëfficientium D, C, B, et A hoc modo.

VII. Quoniam $e = E$, et (V) $d = -D - El - Em - En$, erit $D = -d - el - em - en$; et quia (IV.) est $c = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2$ ideóque $C = c - Dl - Dm - El^2 - Elm - Em^2$ si loco E et D substituantur eorum valores modo inventi, habebitur $C = c + dl + dm + elm + enl + emn$. Et simili modo si in æquatione (III.) $b = -B - Cl - Dl^2 - El^3$, substituantur coëfficientium E, D, C valores, invenietur $B = -b - cl - dlm - elmn$.

VIII. Cum igitur sit (II.) $A = a$, æquatio assumpta $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, in hanc abit $y = a - x.(b + cl + dlm + elmn) + x^2.(c + dl + dm + elm + enl + emn) - x^3.(d + el + em + en) + ex^4 = a - bx - clx + cx^2 - dlmx + dlx^2 + dmx^2 - dx^3 - elmnx + elmx^2 + enlx^2 + emnx^2 - elx^2 - emx^3 - enx^3 + ex^4$, seu $y = a + b.(-x) + c.(-x \times \overline{l - x}) + d.(-x \times \overline{l - x} \times \overline{m - x}) + e.(-x \times \overline{l - x} \times \overline{m - x} \times \overline{n - x}) +$, &c. In quâ æquatione patet terminorum progressus, et quomodo datâ abscissâ H S seu x inveniri compendiosè possit correspondens ordinata S R seu y. Nam si dicantur $-x$ seu $-HS = p$; $-IS \times p$, seu $-x \times \overline{l - x} = q$; $+SK \times q$, seu $-x \times \overline{l - x} \times \overline{m - x} = r$; $+SL \times r$, seu $-x \times \overline{l - x} \times \overline{m - x} \times \overline{n - x} = s$, ita scilicet pergendo ad usque perpendiculum penultimum, quod hic est D L; erit R S seu $y = a + bp + cq + dr + es +$, &c.

IX. Atque hæc ipsa est regula quam Newtonus casu secundo Lemmatis V. Lib. III. sic tradit: collige perpendiculorum A H, B I, C K, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas b, 2 b, 3 b, 4 b, &c.; secundas per intervalla bina divisas c, 2 c, 3 c, 4 c, &c.; tertias per intervalla terna divisas d, 2 d, 3 d, &c.; quartas per intervalla quaterna divisas e, 2 e, &c. Et sic deinceps. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum. Et erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es +$, &c. ubi observandum est, præponenda esse signa negativa terminis H S, I S, &c. qui jacent ad partes puncti S versus A, et signa affirmativa terminis S K, S L, &c. qui jacent ad alteras partes puncti S.

X. Per hanc igitur regulam, assumptâ quâlibet abscissâ H S, invenietur valor ordinatæ correspondentis S R, singulaque parabolæ puncta determinabuntur. Si vero in æquatione ponatur $y = 0$, et deindè quæratur valor abscissæ x, cognoscetur punctum X quo parabola rectam H N intersecat.

77. XI. Si perpendiculorum H A, I B, K C, L D, &c. æqualia sunt intervalla H I, I K, K L, &c.; cæteris ut supra (I) nominibus servatis, positoque intervallo $HI = l = 1$, erunt $HK = m = 2$, $HL = n = 3$, $HM = t = 4$, &c. et perpendiculorum differentiæ per intervalla, per intervalla bina, terna, quaterna, et divisæ erunt (III., IV., V., VI.) quæ secuntur.

Differentiæ primæ per intervalla divisæ, $b = a - f$, $2b = f - g$, $3b = g - h$, $4b = h + k$.

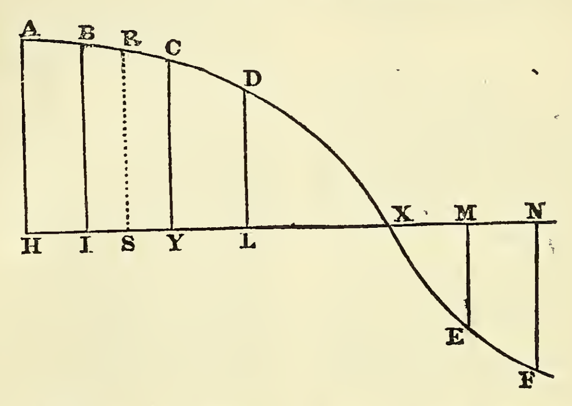
Differentiæ secundæ per intervalla bina divisæ, $c = \frac{a - 2f + g}{2}$, $2c = \frac{f - 2g + h}{2}$, $3c = \frac{g - 2h - k}{2}$.

Differentiæ tertiæ per întervalla terna divisæ, $d = \frac{a - 3f + 3g - h}{6}$, $2d = \frac{f - 3g + 3h + k}{6}$.

Differentiæ quartæ per intervalla quaterna divisæ, $e = \frac{a - 4f + 6g - 4h - k}{24}$.

XII. Ponantur $a - f = \beta$, $a - 2f + g = \varkappa$, $a - 3f + 3g - h = \delta$, $a - 4f + 6g - 4h - k = \varepsilon$; et erit $b = \beta$, $c = \frac{\varkappa}{2}$, $d = \frac{\delta}{6}$, $e = \frac{\varepsilon}{24}$. Quare si hi valores substituantur in æquatione supra (VIII.) inventa, $y = a + b.(-x) + c.(-x \times \overline{l - x}) + d(-x \times \overline{l - x} \times \overline{m - x}) + e.(-x \times \overline{l - x} \times \overline{m - x} \times \overline{n - x}) +$, &c., illa in hanc mutabitur $y = a + \beta(-x) + \frac{\varkappa(-x \times \overline{1 - x})}{2} + \frac{\delta.(-x \times \overline{1 - x} \times \overline{2 - x})}{2 \times 3} + \frac{\varepsilon.(-x \times \overline{1 - x} \times \overline{2 - x} \times \overline{3 - x})}{2 \times 3 \times 4} +$, &c.

Quapropter si in hâc ultimâ æquatione dicantur $-$ H S, seu $-x = p$; $\frac{1}{2}p$ in $-$ I S, seu $\frac{-x \times \overline{1-x}}{2} = q$; $\frac{1}{3}q$ in $+$ S K, seu $\frac{-x \times \overline{1-x} \times \overline{2-x}}{2 \times 3} = r$; $\frac{1}{4}r$ in $+$ S L, seu $\frac{-x \times \overline{1-x} \times \overline{2-x} \times \overline{3-x}}{2 \times 3 \times 4} = s$; et ita pergatur ad usque perpendiculum penultimum, erit $y = a + \beta p + \kappa q + \delta r + \varepsilon s +$, &c. ut Newtonus in casu primo Lemmatis V. Lib. III. determinavit. De hoc problemate lector consulat clarissimos auctores, Hermannum in Appendice ad Phoronomiam, Craigium in Tractatu de Calculo Fluentium, maximè vero Stirling in libro de interpolatione serierum, in quo totam hanc materiam copiosè et sagaciter explicat.



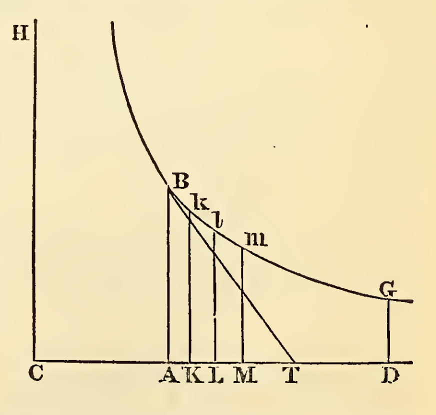
SECTIO II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum.

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicatâ, et idem solâ vi insitâ per medium similare movetur; tempora verò sumantur in progressione geometricâ a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eâdem progressione geometricâ inversè; et quod spatia sunt æqualia, quæ singulis temporibus describuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia medii, (d) et resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ A K, K L, L M, &c. in rectâ C D sumptæ, et erigantur perpendicula A B, K k, L l, M m, &c. hyperbolæ B k l m G, centro C asymptotis rectangulis C D, C H descriptæ, occurrentia in B, k, l, m, &c. (e) et erit A B ad K k ut C K ad C A, et divisim A B — K k ad K k ut A K ad C A, et vicissim A B — K k ad A K ut K k ad C A, ideóque ut A B × K k ad A B × C A. (f) Unde, cùm A K et A B × C A dentur, erit A B — K k ut

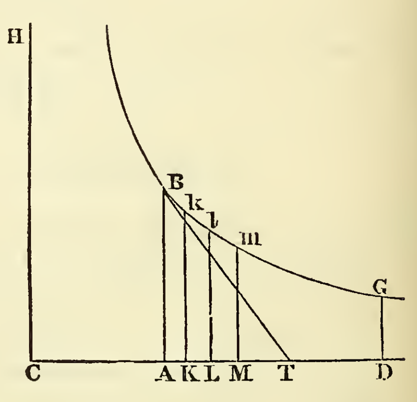


(d) * *Et resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis;* dato nempe temporis momento, (l. 15.).

(e) * *Et erit A B ad K k ut C K ad C A,* (per Theor. IV. de Hyp.).

(f) * *Unde, cùm A K, et A B × C A dentur.* A K quidem (ex Hyp. tempus enim in particulas innumeras æquales dividitur quæ per lineas æquales A K, K L, &c. exponuntur) et A B × C A (per Theor. IV. de Hyp.).

A B × K k; et ultimo, ubi coëunt A B et K k, ut A B q. Et simili argumento erunt K k — L l, L l — M m, &c. ut K k quad. L l quad. &c. Linearum igitur A B, K k, L l, M m quadrata sunt ut earundem differentiæ; et idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum differentiæ, (g) similis erit ambarum progressio. (h) Quo demonstrato, consequens est etiam ut areæ his lineis descriptæ sint in progressione consimili cum spatiis quæ velocitatibus describuntur. Ergo si velocitas initio primi temporis A K exponatur per lineam A B, et velocitas initio secundi K L per lineam K k, et longitudo primo tempore descripta per aream A K k B; velocitates omnes subsequentes exponentur per lineas subsequentes L l, M m, &c. et longitudines descriptæ per areas K l, L m, &c. Et compositè, si tempus totum exponatur per summam partium suarum A M, longitudo tota descripta exponetur per summam partium suarum A M m B. Concipe jam tempus A M ita dividi in partes A K, K L, L M, &c. ut sint C A, C K, C L, C M, &c. in progressione geometricâ; (i) et erunt partes illæ in eâdem progressione, (k) et velocitates A B, K k, L l, M m, &c. in progressione eâdem inversâ, (l) atque spatia descripta A k, K l, L m, &c. æqualia. Q. e. d.



Corol. 1. Patet ergo quod, si tempus exponatur per asymptoti partem quamvis A D, et velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam A B; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam D G, et spatium totum descriptum per aream hyperbolicam adjacentem A B G D;

(g) * *Similis erit ambarum progressio*; et ideò velocitates singulis temporum æqualium A K, K L, L M, &c. initiis exponi possunt per lineas A B, K k, L l, &c.

(h) * *Quo demonstrato, consequens est ut areæ* A B k K, K k l L, L l m M, &c. *sint in progressione consimili cum spatiis quæ velocitatibus* A B, K k, L l, &c., tempusculis A K, K L, L M, &c., *describuntur* (14).

(i) 78. * *Et erunt partes illæ* A K, K L, L M, &c. quæ sunt differentiæ linearum C A, C K, C L, C M, &c. in eâdem progressione. Differentiæ enim cujusvis progressionis geometricæ, sunt in eâdem progressione geometricâ. Nam cum sit C A : C K = C K : C L = C L : C M, &c., erit auferendo antecedentia ex antecedentibus et consequentia ex consequentibus C A : C K = A K : K L = K L : L M, &c.

(k) * *Et velocitates A B, K k, L l, M m, &c., in progressione eâdem inversâ.* Siquidem (per Theor. IV. de Hyp.) est A B ut C A, inversè, K k ut C K inversè.

(l) * *Atque spatia descripta,* A B k K, K k l L, L l m M, &c., æqualia (580. Lib. I.)

necnon spatium, quod corpus aliquod eodem tempore A D, velocitate primâ A B, in medio non resistente describere posset, (m) per rectangulum A B × A D.

Corol. 2. Unde datur spatium in medio resistente descriptum, capiendo illud ad spatium quod velocitate uniformi A B in medio non resistente simul describi posset, ut est area hyperbolica A B G D ad rectangulum A B × A D.

Corol. 3. Datur etiam resistentia medii, statuendo eam ipso motûs initio æqualem esse vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore A C, in medio non resistente, generare posset velocitatem A B. Nam si ducatur B T quæ tangat hyperbolam in B, et occurrat asymptoto in T; (n) recta A T æqualis erit ipsi A C, (o) et tempus exponet, quo resistentia prima uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam A B.

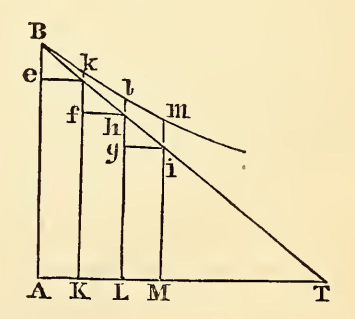
Corol. 4. (p) Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

(m) 79. * *Per rectangulum A B × A D.* Si enim velocitas A B, manet eadem, tempore A K, describet corpus spatium A B × A K, dum in medio resistente describit spatium A B k K, tempore K L velocitate A B describet spatium A B × K L, dùm in medio resistente describit spatium K k l L, et ità deinceps (14. Lib. I.); quare tempore A M velocitate primâ A B in medio non resistente describet corpus spatium A B × (A K + K L + L M) = A B × A M; et tempore A D, spatium A B × A D. Et quoniam ipso motûs initio, est area A B k K, æqualis rectangulo A B × K k, atque spatia in medio resistente et in medio non resistente descripta temporis momento A K, sunt etiam æqualia, liquet spatium in medio resistente descriptum tempore quovis A D, esse ad spatium eodem tempore in medio non resistente descriptum velocitate A B, ut est area hyperbolica A B G D ad rectangulum A B × A D.

80. Ex Corollario primo sequitur tempore infinito spatium infinitum describi in medio quod resistit in ratione quadrati velocitatis. Non enim evanescet G D, hoc est velocitas tota extincta non erit, nisi infinita evadat recta A D, hoc est nisi tempus motus sit infinitum, tuncque infinita fit area A B G D, seu spatium descriptum est infinitum.

(n) * *Recta A T æqualis erit ipsi A C.* (Per Theor. I. de Hyp.)

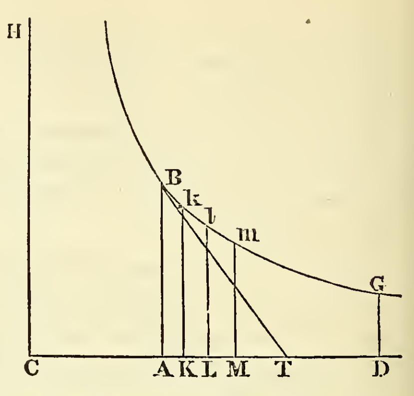
(o) * *Et tempus exponet.* Ordinatæ K k, L l, M m, &c. rectæ B T, occurrant in k, h, i, &c. ex punctis k, h, i, demissa sint ad A B, K k, L l, &c. perpendicula K e, h f, i g, &c. et sumptis temporibus quam minimis A K, K L, L M, æqualibus erunt B e, k f, h g æquales, sed resistentia prima temporis momento A K, tollit velocitatem A B — K k, seu B e, et eadem uniformiter continuata temporis momento K L, sive A K, tolleret etiam velocitatem k f = B e, et temporis momento L M, seu A K, velocitatem g h = B e, atquè ità deinceps; quarè resistentia prima uniformiter continuata tempore A T tolleret velocitatem totam A B,



quia A B æqualis est omnibus differentiis B e, k f, g h, &c. usque ad T; vis autem centripeta quæ tempore A K, producit velocitatem B e, æqualis est vi quæ eodem temporis momento eandem velocitatem B e extinguit, seu æqualis est resistentiæ primæ, et illa vis centripeta uniformis manens toto tempore A T, totam velocitatem A B, produceret, quam resistentia prima uniformis manens eodem tempore extingueret; ergò resistentia prima æqualis est vi uniformi centripetæ quæ in cadente corpore, tempore A T sivè A C, in medio non resistente generare posset velocitatem A B.

(p) * *Et indè datur etiam proportio.* Sunt enim vires centripetæ uniformes ut velocitates

Corol. 5. Et vice versâ, si datur proportio resistentiæ ad datam quamvis vim centripetam; (†) datur tempus A C, quo vis centripeta resistentiæ æqualis generare possit velocitatem quamvis A B: et inde datur punctum B per quod hyperbola asymptotis C H, C D, describi debet; (q) ut et spatium A B G D, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illâ A B, tempore quovis A D, in medio similari resistente describere potest.



quas dato tempore producunt (13. Lib. I.) et ideò erit resistentia prima ad gravitatem ut velocitas quam producit vis centripeta uniformis cui resistentia illa æqualis supponi potest, ad velocitatem quam vis gravitatis eodem tempore generat.

(†) *Datur tempus A C quo vis resistentiæ æqualis generare possit velocitatem A B.* Si enim detur vis quædam centripeta, dabitur tempus quo velocitatem A B generare potest: tempora autem quibus diversæ vires centripetæ eamdem velocitatem generare possunt, sunt inversè ut illæ vires; ergo si datur ratio vis centripetæ cui resistentia est æqualis ad aliam vim datam, dabitur ratio temporis quo hæc vis velocitatem A B generare potest ad tempus quo vis cui resistentia est æqualis eam velocitatem generat, hoc est datur tempus A C.

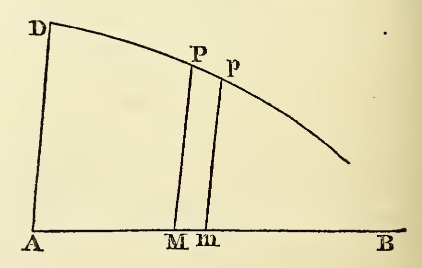
(q) * *Ut et spatium A B G D.* His enim datis, datur tùm area A B G D, tùm rectangulum A B × A D, tùm spatium quod corpus tempore A D, cum datâ velocitate uniformi A B, describeret in medio non resistente, ideóque cum sit A B × A D, ad A B G D, ut spatium tempore A D et velocitate A B in medio non resistente descriptum ad spatium eodem tempore descriptum in medio resistente (per Cor. 2.) hoc spatium dabitur.

81. *Scholium.* Hujus propositionis constructio ad logarithmicam reduci facilè posset, sed id relinquimus lectoris arbitrio, generalis problematis quod sequitur, solutionem analyticam tradituri ut inventionis fons ipse aperiatur.

PROBLEMA.

82. Definire motum corporis solâ vi insitâ lati in medio quod resistit in ratione compositâ ex simplici ratione densitatis medii, et quâvis ratione multiplicatâ celeritatis mobilis.

E loco A egrediatur corpus cum velocitate datâ c et tempore t describat rectam A M = s, sitque ejus velocitas in M = v densitas medii in eodem loco = k, et resistentia r erit (17.) $r\,ds = -v\,dv$. Ponatur resistentia $r = \frac{k v^n}{a^n}$, sitque a quantitas data, et habebitur $\frac{k v^n ds}{a^n} = -v\,dv$, et hinc $k\,ds = -a^n v^{1-n} dv$. Per punctum M, erigatur ad A M, perpendiculum M P quod exponat medii densitatem k in



loco M. sitque D P p curva quam punctum P perpetuò tangit, et erecto altero perpendiculo m p priori M P infinitè propinquo ut sit M m = d s, erit elementum M P p m $= k\,ds = -a^n v^{1-n} dv$, sumptisque fluentibus, area A D P M $= \frac{Q - a^n v^{2-n}}{2-n}$; quia verò evanescente areâ A D P M, evanescit quoque s, et fit v = c, erit $o = \frac{Q - a^n c^{2-n}}{2-n}$, et ideò constans $Q = a^n c^{2-n}$, atque ità A D P M $= \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n}$. Porrò si densitas k, seu P M, est ut functio quævis spatii de-

scripti s sive A M, poterit curva D P p describi, ac proindè in hâc hypothesi dato spatio descripto, dabitur per quadraturam areæ A D P M, velocitas, et contrà datâ velocitate dabitur area A D P M, et hinc dabitur spatium descriptum A M, indè etiam (14. Lib. I.) datâ velocitate aut spatio dabitur tempus t, et contrà.

83. Si $n = 2$, fit $2 - n = o$, et ideò resumenda est æquatio $M P p m = - a^n v^{1-n} d v = - \frac{a^2 d v}{v}$, quæ, sumptis fluentibus, abit in hanc $A D P M = Q - a^2 L. v$, et quia positâ areâ $A D P M = o$, fit $v = c$, erit $Q = a^2 L. c$, ideóque $A D P M = a^2 L. c - a^2 L. v = a^2 L. \frac{c}{v}$. Sit $A D P M = b$, logarithmus numeri $h = 1$, seu $L. h = 1$, erit $b L. h = a^2 L. \frac{c}{v}$, et $\frac{b}{a^2} \times L. h = L. \frac{c}{v}$, seu $L. h^{\frac{b}{aa}} = L. \frac{c}{v}$, ac proindè $h^{\frac{b}{aa}} = \frac{c}{v}$, et $v = \frac{c}{h^{\frac{b}{aa}}}$. Quarè dato spatio, dabitur velocitas et hinc dabitur tempus (14) et contrà.

84. Sit densitas uniformis seu $k = 1$, erit $k d s = d s = - a^n v^{1-n} d v$, sumptisque fluentibus $s = \frac{Q - a^n v^{2-n}}{2-n} = \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n}$. Undè reperitur $v = \frac{[a^n c^{2-n} + (n-2) s]^{\frac{1}{2-n}}}{a^{\frac{n}{2-n}}}$. Invenitur tempus per formulam $d t = \frac{d s}{v} = - \frac{a^n v^{1-n} d v}{v} = a^n v^{-n} d v$. Et sumptis fluentibus, fit $t = \frac{Q - a^n v^{1-n}}{1-n} = \frac{a^n c^{1-n} - a^n v^{1-n}}{1-n}$, quia posito $t = o$, fit $v = c$, et proindè $Q = a^n c^{1-n}$.

85. Si $k = 1$, et $n = 1$, hoc est, si densitas est uniformis et resistentia ut velocitas erit (84) $s = a c - a v$; et quia (ibid.) $d t = - a^n v^{-n} d v = - \frac{a d v}{v}$, erit $t = Q - a L. v = a L. c - a L. v = a L. \frac{c}{v}$, quod posito tempore $t = o$, fiat $v = c$ et proindè $Q = a L. c$.

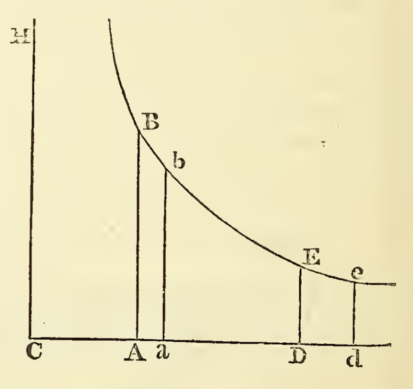
86. Si $k = 1$, et $n = 2$, erit (84) $t = \frac{a^2 c - a^2 v}{c v}$, et quia (ibid.) $d s = - a^n v^{1-n} d v = - \frac{a^2 d v}{v}$, erit $s = Q - a^2 L. v = a^2 \times L. c - a^2 L. v = a^2 L. \frac{c}{v}$.

87. Si in æquatione spatii et velocitatis suprà inventâ, velocitas v, supponatur $= o$, erit $s = \frac{a^n c^{2-n}}{2-n}$, si n est numerus binario minor, at erit $s = \frac{a^n c^{n-2} - a^n v^{n-2}}{(n-2) c^{n-2} v^{n-2}} = \frac{a^n}{(n-2) o} = \infty$, si n est numerus binario major; et (86) erit $s = a^2 L \frac{c}{o} = \infty$, ubi $n = 2$. Quarè si n est numerus positivus binario minor, descripto spatio aliquo finito velocitas omnis extinguitur; at si n binario æqualis est vel major, spatium infinitum conficitur, priusquam velocitas evanescat.

88. Si in æquationibus temporis et velocitatis velocitas v evadat $= o$, erit (84) $t = \frac{a^n c^{1-n}}{1-n}$, si n est numerus unitate minor, at erit $t = \infty$, si n est unitate major, et (85) $t = a L. \frac{c}{o} = \infty$, ubi $n = 1$. Quapropter si numerus positivus n est unitate minor, velocitas tempore finito extinguitur, spatio etiam finito descripto (87). Si n est unitati æqualis vel ipsâ major, velocitas nonnisi tempore infinito extingui potest, et spatium finitum est, si n est numerus binario minor, infinitum verò, si n binario æqualis vel major (87.).

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora sphærica homogenea et æqualia, resistentiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita, et solis viribus insitis incitata, temporibus quæ sunt reciprocè ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, et amittunt partes velocitatum proportionales totis.



Asymptotis rectangulis C D, C H descriptâ hyperbolâ quâvis B b E e secante perpendicula A B, a b, D E, d e, in B, b, E, e, (r) exponantur velocitates initiales per perpendicula A B, D E, et tempora per lineas A a, D d. Est ergo ut A a ad D d ita (per hypothesin) D E ad A B, et ita (t) (ex naturâ hyperbolæ) C A ad C D; et componendo, ita C a ad C d. (u) Ergo areæ A B b a, D E e d, hoc est, spatia descripta æquantur inter se, et velocitates primæ A B, D E sunt ultimis a b, d e, et propterea dividendo partibus etiam suis amissis A B — a b, D E — d e proportionales. Q. e. d.

PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora sphærica quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, temporibus, quæ sunt ut motus primi directè et resistentiæ primæ inversè, amittent partes motuum proportionales totis, et spatia describent temporibus istis et velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

(x) Namque motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ et tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis proportionales, debebit resistentia et tempus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut motus

(r) * *Exponantur velocitates initiales*, &c. Cùm enim corpora duo similia homogenea et æqualia supponantur, eorum motus considerari possunt tanquam motus unius ejusdemque corporis variis celeritatis gradibus acti (ut in Prop. V.) ideóque (per Corol. 1. Prop. V.) velocitates initiales exponi possunt per lineas A B, D E, tempora per lineas A a, D d, velocitates in fine illorum temporum residuæ per lineas a b, d e, et spatia his temporibus descripta per areas hyperbolicas A B b a, D E e d.

(t) * *Ex naturâ hyperbolæ*. (Per Theor. IV. de Hyperb.)

(u) * *Ergò areæ A B b a, D E e d*, (378. Lib. I.)

(x) * *Namque motuum partes amissæ*, &c. (2.)

directè et resistentia inversè. Quare temporum particulis in eâ ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, (y) ideóque retinebunt velocitates velocitatibus suis primis semper proportionales. (z) Et ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia, quæ sunt ut velocitates primæ et tempora conjunctim. Q. e. d.

(a) *Corol.* 1. Igitur si æquivelocibus corporibus resistitur in duplicatâ ratione diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia diametris suis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujusque erit ut ejus velocitas et massa conjunctim, id est, ut velocitas et cubus diametri; resistentia (per hypothesin) erit ut quadratum diametri et quadratum velocitatis conjunctim; et tempus (per hanc Propositionem) est in ratione priore directè et ratione posteriore inversè, id est, ut diameter directè et velocitas inversè; ideóque spatium, tempori et velocitati proportionale, est ut diameter.

(b) *Corol.* 2. Si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione sesquiplicatâ diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia in sesquiplicatâ ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

(y) * *Ideóque retinebunt velocitates* in ratione primâ, ob datas corporum massas (6. Lib. I.)

(z) * *Et ob datam velocitatum rationem* (12.)

89. Tota propositionis hujus demonstratio per analysim hoc modo exponitur. Sit globi cujusvis massa m, velocitas data initio motûs c, in fine temporis t sit v, resistentia data initio motûs r, et quia ejusdem corporis resistentiæ in diversis locis sunt ut velocitatum quadrata (per Hyp.) erit c c, ad v v, ut r, ad resistentiam elapso tempore t, quæ proindè erit $\frac{rvv}{cc}$. Sed (2) resistentia $\frac{rvv}{cc}$ est ut motûs decrementum $-mdv$ directè, et temporis momentum d t, inversè, hoc est, $\frac{rvv}{cc} = -\frac{mdv}{dt}$, et hinc $dt = -\frac{mccdv}{rvv}$, sumptisque fluentibus $t = Q + \frac{mcc}{rv}$. Ponatur $t = o$, et fiet $v = c$, adeóque $Q = -\frac{mc}{r}$, quo valore substituto fit $t = \frac{mcc - mcv}{rv}$. Capiatur tempus t, ut motus primus m c, directè et resistentia prima r, inversè, hoc est t ut $\frac{mc}{r}$, et erit $\frac{mc}{r}$ ut $\frac{mcc - mcv}{rv}$, ideóque m c v, ut m c c — m c v, et dividendo per c, m v ut m c — m v; et compositè fiet m c, ut m c — m v, id est, motus amissus m c — m v ut motus primus m c; et hinc ob datam massam m, erit etiam c, ut c — v, id est, velocitas amissa c — v, ut velocitas prima c; indè etiam erit c, ad c — c + v, seu v, hoc est velocitas prima c, ad residuam v, in ratione datâ. Jam si spatium tempore t descriptum dicatur s, erit (13) $ds = vdt$, et quia v est ut data c, erit d s ut c d t, sumptisque fluentibus ob datam c, fiet s ut c t. Q. e. d.

90. Quoniam spatium s est ut c t, et t ut $\frac{mc}{r}$, erit etiam s ut $\frac{mcc}{r}$; globi cujus massa m diameter sit D, et datâ globi densitate erit massa m, ut volumen (2. Lib. I.) hoc est, ut diametri cubus D^3; quare erit s ut $\frac{D^3cc}{r}$. Si prætereà datâ velocitate c, resistentia r est ut diametri D, dignitas cujus index n, hoc est r ut D^n, et proindè velocitate non datâ, resistentia r, ut $D^n cc$, erit s ut $\frac{D^3cc}{D^ncc}$, seu ut D^{3-n}. Ex quibus patent Corollaria quæ sequuntur.

(a) * *Corol.* 1. Nam in hypothesi Corollarii hujus est $n = 2$, adeóque s ut D.

(b) * *Corol.* 2. In hypothesi Corollarii hujus est $n = \frac{3}{2}$, ideóque s ut $D^{3-\frac{3}{2}}$, seu ut $D^{\frac{3}{2}}$.

Corol. 3. Et universaliter, si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione dignitatis cujuscunque diametrorum: spatia quibus globi homogenei, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D et E; et si resistentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, sint ut D^n et E^n: spatia quibus globi, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} et E^{3-n}. Et propterea globi homogenei describendo spatia ipsis D^{3-n} et E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eâdem ratione ad invicem ac sub initio.

(c) *Corol.* 4. Quod si globi non sint homogenei, spatium a globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim, sub pari velocitate, major est in ratione densitatis, et tempus (per hanc Propositionem) augetur in ratione motus directè, ac spatium descriptum in ratione temporis.

(d) *Corol.* 5. Et si globi moveantur in mediis diversis; spatium in medio, quod cæteris paribus magis resistit, diminuendum erit in ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (per hanc Propositionem) diminuetur in ratione resistentiæ auctæ, et spatium in ratione temporis.

(e) LEMMA II.

Momentum genitæ æquatur momentis laterum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum et coëfficientia continuè ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuscunque in arithmeticâ per multiplicationem, divisionem, et extractionem radicum; in geometriâ per inventionem vel contentorum et laterum, vel extremarum et mediarum proportionalium, sine additione et subductione generatur. Ejusmodi quantitates sunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, et similes. Has quantitates,

(c) * *Corol.* 4. Sit globi m densitas δ, adeóque (2 Lib. I.) massa m ut δD^3, et hinc (90) s ut $\frac{\delta D^3 cc}{r}$. Quarè si ponatur resistentia r, ut $D^n cc$, erit s ut δD^{3-n}, hoc est, spatium s, quod datâ densitate δ, erat ut D^{3-n}, augeri debet in ratione densitatis δ.

(d) * *Corol.* 5. Resistentia r, quæ antè erat ut $D^n cc$, augeatur in ratione quâvis a, seu sit r ut $a D^n cc$, et quia s est ut $\frac{\delta D^3 cc}{r}$, (Cor. 4.) fiet s ut $\frac{\delta D^3 cc}{a D^n cc}$, seu ut $\frac{\delta D^{3-n}}{a}$, spatium igitur diminuendum est in ratione majoris resistentiæ.

(e) * *Lem.* II. Totum istud Lemma num. 137. et sequentibus Lib. I. fusè expositum videat lector.

ut indeterminatas et instabiles, et quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes, hic considero; et earum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis seu affirmativis, ac decrementa pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non sunt momenta, sed quantitates ipsæ ex momentis genitæ. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum: sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes et fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. (f) Lateris autem cuiusque generantis coëfficiens est quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur sensus (g) Lemmatis est, ut, si quantitatum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrescentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli A B fuerit $a B + b A$, et geniti contenti A B C momentum fuerit $a B C + b A C + c A B$: et genitarum dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, et $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2 a A$, $3 a A^2$, $4 a A^3$, $\frac{1}{2} a A^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2} a A^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3} a A^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3} a A^{-\frac{1}{3}}$, $-a A^{-2}$, $-2 a A^{-3}$, et $-\frac{1}{2} a A^{-\frac{3}{2}}$ respectivè. Et generaliter, ut dignitatis cujuscunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m} a A^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ $A^2 B$ momentum fuerit $2 a A B + b A^2$; et genitæ $A^3 B^4 C^2$ momentum $3 a A^2 B^4 C^2 + 4 b A^3 B^3 C^2 + 2 c A^3 B^4 C$; et genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ sive $A^3 B^{-2}$ momentum $3 a A^2 B^{-2} - 2 b A^3 B^{-3}$: et sic in cæteris. Demonstratur vero Lemma in hunc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum A B, ubi de la-

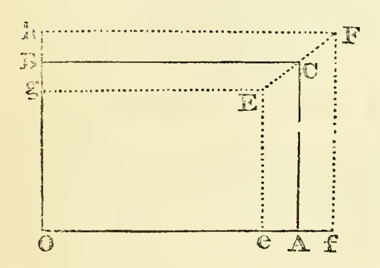
(f) *Lateris autem.* Sic lateris x, in quantitate genitâ $x^n y^m$ positi, coëfficiens est $\frac{x^n y^m}{x}$, seu $x^{n-1} y^m$.

(g) * *Sensus Lemmatis est, ut, si quantitatum* A, B, C *momenta dicantur a, b, c,* ità ut dùm A fit $A + a$, B evadat $B + b$, C evadat $C + c$, &c., *momentum vel mutatio geniti rectanguli A B, erit* $a B + b A$, &c. vel si loco litterarum A, B, C, &c. utamur litteris minusculis x, y, z, &c. quibus variabiles quantitates consuevimus significare, et loco a, b, c, &c. scribamus d x, d y, d z, &c. sensus Lemmatis est momentum seu fluxionem rectanguli x y, esse $y\,dx + x\,dy$, fluxionem solidi x y z, esse $y z\,dx + x z\,dy + x y\,dz$, et genitarum quantitatum x^2, x^3, x^4, $x^{\frac{1}{2}}$, &c. momenta esse $2 x\,dx$, $3 x^2\,dx$, $4 x^3\,dx$, $\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\,dx$, &c. respectivè; et genitæ $x^n y^m$, momentum esse, $n y^m x^{n-1}\,dx + m x^n y^{m-1}\,dy$, &c.

teribus A et B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}$ a et $\frac{1}{2}$ b, fuit A — $\frac{1}{2}$ a in B — $\frac{1}{2}$ b, seu A B — $\frac{1}{2}$ a B — $\frac{1}{2}$ b A + $\frac{1}{4}$ a b; et quam primum latera A et B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit A + $\frac{1}{2}$ a in B + $\frac{1}{2}$ b seu A B + $\frac{1}{2}$ a B + $\frac{1}{2}$ b A + $\frac{1}{4}$ a b. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, (h) et manebit excessus a B + b A. Igitur laterum

(h) * *Et manebit excessus a B + b A.*

1us. *Casus.* Sit rectangulum O A B C sub duabus variabilibus O A, O B continuè crescentibus; sumantur hinc inde ab A partes æquales A e, A f, et à B partes æquales B g, B h, ita ut, si a et b sint quantitates momentis linearum O A, O B proportionales sit e f = a, et g h = b: Compleantur rectangula

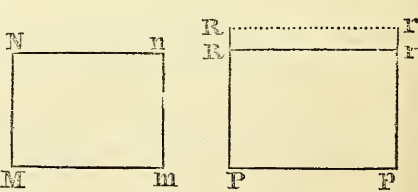


O g E e. O h F f, ducatur F E, quæ transibit per C punctum concursus linearum A C, B C (ob parallelas, et lineas e f et g h similiter, nempe bifariam, sectas in A et B). Dico quod summa trapeziorum E F f e et E F h g æqualis erit momento rectanguli O A C B; obtinetur verò trapeziorum summa, sumendo differentiam rectangulorum O e E G, O f F H, quæ est O f × O h — O e × O g. sive $\overline{OA + Af} \times \overline{OB + Bh} - \overline{OA - Ae} \times \overline{OB - Bg}$, et vocando O A, A; O B, B; A f = A e = $\frac{1}{2}$ a, B h = B g = $\frac{1}{2}$ b differentia rect. erit $\overline{A + \frac{1}{2}a} \times \overline{B + \frac{1}{2}b} - \overline{A - \frac{1}{2}a} \times \overline{B - \frac{1}{2}b} = AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab - AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA - \frac{1}{4}ab = aB + bA$.

Ut verò probetur summam trapeziorum E F e f et E F g h æqualem esse momento rectanguli O A C B, observandum primò. Quòd si lineæ quævis S T, V X, utcumque inæquales, in lineam S V sint perpendiculares jungaturque T X, et in medio lineæ S V erigatur perpendicularis Y Z, erit trapezium S T X V æquale rectangulo S V × Y Z: itaque trapezium E F f e erit æquale rectangulo A C × e f, et trapezium E F h g æquale rectangulo B C × g h. Præterea quoniam e f et g h sunt momentis linearum O A, O B proportionales, hoc est, proportionales velocitatibus quibus lineæ O A, O B crescunt, sive, quod idem est, celeritatibus quibus, dum rectangulum O A C B crescit, lineæ A C, B C antrorsum feruntur, rectangula A C × e f et B C × g h, erunt ut lineæ illæ A C, B C et earum velocitates conjunctim.

Mutatio autem geniti rectanguli O A C B proportionalis est causæ quæ eam producit, ea autem causa est motus linearum variabilium A C, B C quo antrorsum feruntur dum lineæ O A, O B crescunt, et quamvis dum illæ lineæ A C, B C moventur, interim lineæ O A, O B crescant, incrementi hujus nulla habenda est ratio dum rectanguli fluxionem sive incrementum nascens consideramus, etenim in ipso hujus incrementi nascentis ortu illæ productiones linearum O A, O B nihil planè sunt, et cùm primum sunt aliquid jam aliæ A C, B C prioribus majores assumuntur, ergo momentum rectanguli O A C B sive ejus mutationis momentanea causa, ex lineis A C et B C et velocitatibus quibuscum feruntur, determinanda est.

Sint verò rectangula M N n m, P R r p, quorum lineæ M N, P R sint æquales, concipiantur aliæ lineæ hisce etiam æquales quæ ab M N et P R profectæ motu uniformi et paral-



lelo secundum lineas M m et P p ferantur, ita ut eodem tempore ad m n et p r perveniant, manifestum est (per 1. 6i. Elem.) areas M n, P r fore ut lineæ M m, P p, et pariter velocitates linearum ab M N et P R profectarum in eadem fore ratione ideóque areas M n, P r, fore in ratione earum velocitatum. Quod si lineæ N M, P R sint inæquales, areæ erunt ut lineæ illæ M N, P R et earum velocitates conjunctim, et quævis incrementa rectangulorum N M m n, P R r p æquali tempore facta in eadem ratione erunt, ideóque et nascentia incrementa erunt in eâ ratione. Unde tandem sequitur quod incrementum rectanguli O A C B ex motu lineæ A C natum, est ut illa linea A C et ejus velo-

incrementis totis a et b generatur rectanguli incrementum a B + b A. Q. e. d.

Cas. 2. Ponatur A B semper æquale G, et contenti A B C seu G C momentum (per Cas. 1.) erit g C + c G, id est (si pro G et g scribantur A B et a B + b A) a B C + b A C + c A B. Et par est ratio contenti sub lateribus quotcunque. Q. e. d.

Cas. 3. Ponatur latera A, B, C sibi mutuo semper æqualia; et ipsius A^2, id est rectanguli A B, momentum a B + b A erit 2 a A, ipsius autem A^3, id est contenti A B C, momentum a B C + b A C + c A B erit 3 a A^2. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunque A^n est n a A^{n-1}. Q. e. d.

Cas. 4. Unde cùm $\frac{1}{A}$ in A sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A}$ ductum in A, unâ cum $\frac{1}{A}$ ducto in a, (i) erit momentum ipsius 1, id est, nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{A}$ seu ipsius A^{-1} est $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cùm $\frac{1}{A^n}$ in A^n sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n unâ cum $\frac{1}{A^n}$ in n a A^{n-1} erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{n\,a}{A^{n+1}}$. Q. e. d.

Cas. 5. Et cùm $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A, momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in 2 $A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per Cas. 3: ideóque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2\,A^{\frac{1}{2}}}$ sive

citas conjunctim, et quod incrementum ejusdem rectanguli O A C B ex motu lineæ B C natum, est ut illa linea B C et ejus velocitas conjunctim, ideóque totum momentum rectanguli O A C B est summa factorum linearum A C et B C per velocitates quibus feruntur respectivè ductarum, ideóque ut summa rectangulorum A C × e f et B C × g h, sive denique ut summa trapeziorum E F f e, E F h g. Q. e. d.

2us. *Casus.* Facilè hæc applicantur ad eos casus ubi vel ambæ lineæ O A, O B decrescunt, vel unâ crescente altera decrescit, quippe varianda sunt solummodo signa juxta has hypotheses.

Vide aliam hujus casûs demonstrationem (num. 160. Lib. I.)

(i) * *Erit momentum ipsius* 1, *id est nihil.* Ponatur enim $\frac{1}{A}$ = B et erit $\frac{1}{A} \times A$ = A B = 1, sed momentum rectanguli A B est a B + b A (per Cas. 1.) et momentum constantis 1 nullum est; quarè erit a B + b A = o, et hinc b A = − a B = $-\frac{a}{A}$, undè momentum b ipsius B seu $\frac{1}{A}$ est b = $\frac{-a}{A^2} = -a\,A^{-2}$. Similiter si ponatur $\frac{1}{A^n}$ = B, et ideò $\frac{1}{A^n} \times A^n = A^n B = 1$, erit per Cas. 3. et 1. n a A^{n-1} B + b A^n = o et b A^n = − n a A^{n-1} B = $\frac{-n\,a\,A^{n-1}}{A^n} = \frac{-n\,a}{A}$, atquè adeò b, seu momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$, erit $\frac{-n\,a}{A^{n+1}}$. Simil modo patent Casus 5. et 6.

$\frac{1}{2} a A^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideóque $m a A^{m-1}$ æquale $n b B^{n-1}$, et $m a A^{-1}$ æquale $n b B^{-1}$ seu $n b A^{-\frac{m}{n}}$, ideóque $\frac{m}{n} a A^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id est, æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. Q. e. d.

Cas. 6. Igitur genitæ cujuscunque $A^m B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n, unâ cum momento ipsius B^n ducto in A^m, id est $m a A^{m-1} B^n + n b B^{n-1} A^m$; idque sive dignitatum indices m et n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc in continuè proportionalibus, si terminus unus datur, (k) momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos et terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continuè proportionales; et si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut — 2 A, — B, D, 2 E, 3 F.

(l) *Corol.* 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

(m) *Corol.* 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciprocè ut latera.

Scholium.

In epistolâ quâdam ad D. J. Collinium nostratem 10 Decem. 1672. datâ, cùm descripsissem methodum tangentium quam suspicabar eandem

(k) * *Momenta terminorum reliquorum.* Quoniam enim A, B, C, D, E, F, sunt continuè proportionales erit $D : C = C : B = \frac{CC}{D} = CCD^{-1}$ et similiter invenitur $A = \frac{C^3}{D^2} = C^3 D^{-2}$, $E = \frac{D^2}{C}$, $F = \frac{D^3}{CC}$, &c. Quarè ob datum C, cujus nullum est momentum, momenta reliquorum terminorum erunt (per Cas. 3. et 4.) $-2 d C^3 D^{-3}$, $-d C^2 D^{-2}$, d, $\frac{2 d D}{C}$, $\frac{3 d D^2}{CC}$, et multiplicando singulos terminos per $\frac{D}{d}$, manebit proportio terminorum $-2 C^3 D^{-2}$, $-C^2 D^{-1}$, D, $\frac{2 D^2}{C}$, $\frac{3 D^3}{CC}$, hoc est — 2 A, — B, D, 2 E, 3 F. Est autem 2 numerus intervallorum inter terminum A, et terminum datum C, sicut et intervallorum inter E et C, 1 intervallum inter B et C, ac inter C et D, et 3, numerus intervallorum inter C et F. Quarè patet veritas Corollarii.

(l) * *Corol.* 2. Sit A : B = C : D, seu B C = A D, et B C, rectangulum datum erit (per Cas 1.) $a D + d A = 0$, et hinc $a D = -d A$ ideóque $a : -d = A : D$.

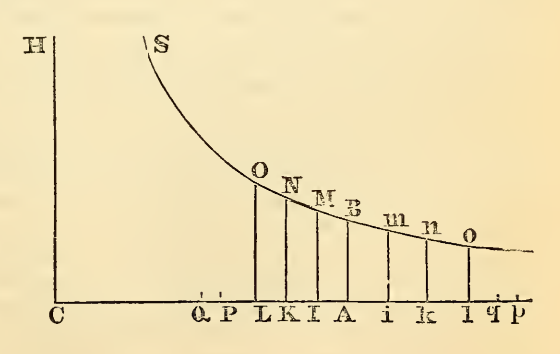
(m) * *Corol.* 3. Sit $A^2 + B^2 = C^2$, et quadratum C^2 sit datum, erit (per Cas. 3.) $2 a A + 2 b B = 0$, ideóque $A a = -b B$, et proinde $a : -b = B : A$. In iis duobus Corollariis necessum est ut variabili unâ crescente, decrescat altera, et idcircò dum momentum unius positivum est, alterius momentum est negativum.

esse cum methodo Slusii tum nondum communicatâ; subjunxi: *Hoc est unum particulare vel Corollarium potius methodi generalis, quæ extendit se citra molestum ullum calculum, non modo* (n) *ad ducendum tangentes ad quasvis curvas sive geometricas sive mechanicas vel quomodocunque rectas lineas aliasve curvas respicientes, verùm etiam ad resolvendum alia abstrusiora problematum genera de* (o) *curvitatibus,* (p) *areis, longitudinibus,* (q) *centris gravitatis curvarum, &c. neque (quemadmodum Huddenii methodus de maximis et minimis) ad solas restringitur æquationes illas quæ quantitatibus surdis sunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri isti quâ æquationum exegesin instituo reducendo eas ad series infinitas.* Hactenus epistola. Et hæc ultima verba spectant ad tractatum quem anno 1671. de his rebus scripseram. Methodi verò hujus generalis fundamentum continetur in Lemmate præcedente. (†)

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectâ ascendat vel descendat, et spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) investigentur vires absolutæ; dico quòd vires illæ absolutæ sunt in progressione geometricâ.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam A C; resistentia per lineam indefinitam A K; vis absoluta in descensu corporis per differentiam K C; velocitas corporis per lineam A P, quæ sit media proportionalis in-



(n) * *Ad ducendum tangentes* (150. 156. Lib. I.) vide Marchionis Hospitalii Analysim infinitè parvorum, ubi methodus illa tangentium fusè et perspicuè exponitur.

(o) * *De curvitatibus.* (216. Lib. I.)

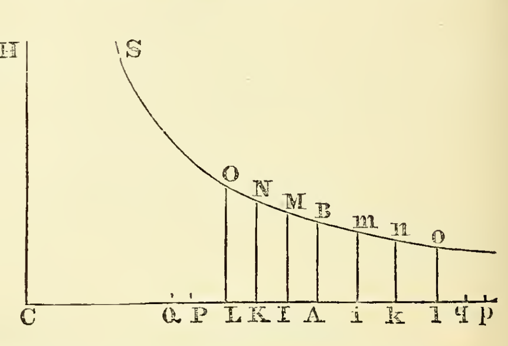
(p) * *Areis, longitudinibus,* &c. Hæc plurimis exemplis, tum 1°. tum 2°. libro contentis manifesta sunt. Vide tractatum Newtoni de quadraturâ curvarum.

(q) * *Centris gravitatis.* (66. Lib. I.)

(†) In præcedentibus editionibus istud scholium hoc modo se habebat.

In litteris quæ mihi cum geometrâ peritissimo G. G. Leibnitio annis abhinc decem intercedebant, cùm significarem me compotem esse methodi determinandi maxima et minima, ducendi tangentes, et similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, et

ter A K et A C, (r) ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ; incrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam K L, et contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam P Q; et centro C asymptotis rectangulis C A, C H describatur hyperbola quævis B N S, erectis perpendiculis A B, K N, L O occurrens in B, N, O. Quoniam A K est ut A P q, erit hujus momentum K L (s) ut illius momentum 2 A P Q: id est, ut A P in K C, nam velocitatis incrementum P Q (per Motûs Leg. II.) proportionale est vi generanti K C. Componatur ratio ipsius K L cum ratione ipsius K N, et fiet rectangulum K L × K N ut A P × K C × K N; hoc est, (t) ob datum rectangulum K C × K N, ut A P. Atqui areæ hyperbolicæ K N O L ad rectangulum K L × K N ratio ultima, ubi coëunt puncta K et L, est æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evanescens est ut A P. Componitur igitur area tota hyperbolica A B O L ex particulis K N O L velocitati A P semper proportionalibus, (u) et propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales A B M I, I M N K, K N O L, &c. et vires absolutæ A C, I C, K C, L C, &c. (x) erunt in progressione geometricâ. Q. e. d. (z) Et simili ar-



literis transpositis hanc sententiam involventibus. (*Datâ æquatione quotcumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, et vice versâ*) eamdem celarem; rescripsit vir clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, et methodum suam communicavit a meâ vix abludentem præterquàm in verborum et notarum formulis, et ideâ generationis quantitatum. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

(r) * *Ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ.* Ob datam A C.

(s) * *Ut illius momentum 2 A P Q.* Cum enim sit A K × A C = A P ² (per constr.) erit A C × K L = 2 A P × P Q (per Cas. 1. et 3. Lem. II.) id est, ob datam A C; K L est ut A P × P Q, et quia velocitatis incrementum P Q, dato temporis momento genitum (per Mot. Leg. II.) proportionale est vi generanti K C, erit K L, ut A P × K C.

(t) * *Ob datum rectangulum* K C × K L (per Theor. IV. de Hyp.)

(u) * *Et propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est;* dato enim temporis momento, spatium descriptum est ut velocitas (12).

(x) * *Erunt in progressione geometricâ.* (379. Lib. I.)

(z) * *Et simili argumento.* Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam A C, resistentia per lineam indefinitam A l, vis absoluta in ascensu corporis per summam C l, velocitas corporis per lineam A p quæ sit media proportionalis inter A l et A C, ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ; decrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam l k, et contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam p q; et describatur ut suprà hyperbola S B o; quoniam A l est ut A p ² erit hujus momentum k l ut illius momentum 2 A p q, id est, ut A p in l C; nam velocitatis decrementum p q (per Mot. Leg. II.) proportionale est vi generanti l C, componatur ratio ipsius k l cum ratione ipsius l o, et fiet rectangulum k l × l o ut

gumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti A, æquales areas A B m i, i m n k, k n o l, &c. constabit quod vires absolutæ A C, i C, k C, l C, &c. sunt continuè proportionales. Ideóque si spatia omnia in ascensu et descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ l C, k C, i C, A C, I C, K C, L C, &c. erunt continuè proportionales. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream hyperbolicam A B N K; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis et resistentia medii per lineas A C, A P et A K respectivè; (a) et vice versâ.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, (b) exponens est linea A C.

Corol. 3. Igitur si in datâ aliquâ velocitate cognoscatur resistentia medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in subduplicatâ ratione, quam habet vis gravitatis (c) ad medii resistentiam illam cognitam.

A p $\times$ l C $\times$ l o, hoc est, ob datum rectangulum l C $\times$ l o, ut A p. Ergo, coëuntibus punctis k, l, area hyperbolica k n o l = k l $\times$ l o, est ut A p. Componitur igitur area tota hyperbolica 2 A B o l ex particulis k n o l velocitati A p semper proportionalibus, et propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales A B m i; i m n k, k n o l, &c. et vires absolutæ A C, i C, k C, l C, &c. erunt in progressione geometricâ. Q. e. d.

(a) * *Et vice versâ.* Simili modo si in ascensu corporis, spatium usque ad motûs extinctionem describendum exponatur per aream hyperbolicam A B n k exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis et resistentia medii per lineas A C, A p, A k.

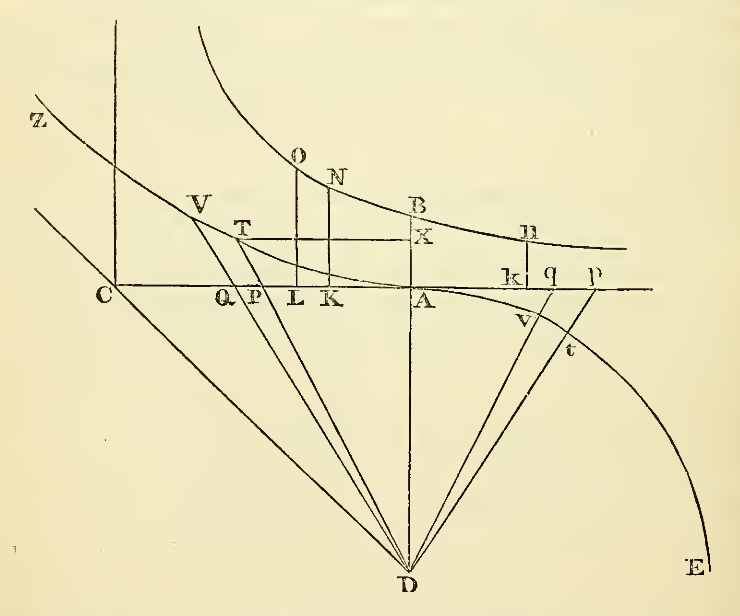
(b) * *Exponens est linea A C.* Fiat enim A P = A C, et quia (per constr.) A P^2 = A K $\times$ A C, erit etiam A K = A C, ideóque coincidente ordinatâ K N, cum asymptoto C H, area hyperbolica A B N K, infinita evadet, et spatium descendendo descriptum huic proportionale erit quoque infinitum, gravitas verò, resistentia et velocitas corporis exponentur per lineam A C, eritque proinde resistentia gravitati æqualis, et propterea velocitas A C maxima.

(c) * *Ad medii resistentiam illam cognitam.* Cùm enim velocitates sint in subduplicatâ ratione resistentiarum (per Hyp.) et resistentia sit gravitati æqualis, ubi velocitas maxima est, (per Cor. 2.) velocitas maxima erit ad velocitatem datam in subduplicatâ ratione gravitatis ad medii resistentiam illam cognitam.

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

Positis jam demonstratis, dico quòd, si tangentes angulorum sectoris circularis et sectoris hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascendendi ad locum summum ut sector circuli, et tempus omne descendendi a loco summo ut sector hyperbolæ.

Rectæ A C, quâ vis gravitatis exponitur, perpendicularis et æqualis ducatur A D. Centro D semidiametro A D describatur tum circuli quadrans A t E; tum hyperbola rectangula A V Z axem habens A X, ver-



ticem principalem A, et asymptoton D C. Ducantur D p, D P, et erit sector circularis A t D ut tempus omne ascendendi ad locum summum; et sector hyperbolicus A T D ut tempus omne descendendi a loco summo: Si modo sectorum tangentes A p, A P, sint ut velocitates.

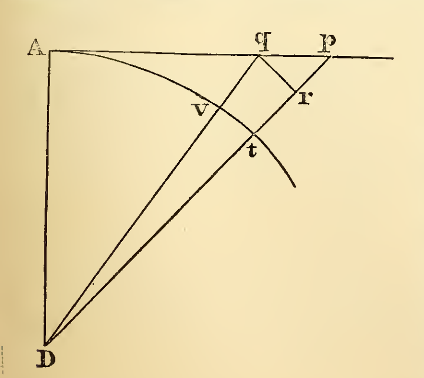
Cas. 1. Agatur enim D v q abscindens sectoris A D t et trianguli A D p momenta, seu particulas quam minimas simul descriptas t D v et q D p. Cum particulæ illæ, ob angulum communem D, sunt (d) in dupli-

(d) * *In duplicatâ ratione laterum.* Nam si ex puncto q ducatur ad D p lineola q r parallela ipsi v t, duo triangula evanescentia D q r, D v t similia sunt et in ratione duplicatâ laterum D q

catâ ratione laterum, erit particula t D v ut $\frac{q\,D\,p \times t\,D\ quad.}{p\,D\ quad.}$, id est, ob datam t D, ut $\frac{q\,D\,p}{p\,D\ quad.}$. Sed p D quad. est A D quad. + A p quad. (e) id est, A D quad. + A D × A k, seu A D × C k; (f) et q D p est $\frac{1}{2}$ A D × p q. Ergo sectoris particula t D v est ut $\frac{p\,q}{C\,k}$, id est, ut velocitatis decrementum quam minimum p q directè, et vis illa C k quæ velocitatem diminuit inversè; (g) atque ideò ut particula temporis decremento velocitatis respondens. Et componendo fit summa particularum omnium t D v in sectore A D t, ut summa particularum temporis singulis velocitatis decrescentis A p particulis amissis p q respondentium, usque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc est, sector totus A D t est ut tempus totum ascendendi ad locum summum. Q. e. d.

Cas. 2. Agatur D Q V abscindens tum sectoris D A V, tum trianguli D A Q particulas quam minimas T D V et P D Q, et erunt hæ particulæ ad invicem ut D T q ad D P q, id est (si T X et A P parallelæ sint) (h) ut D X q ad D A q vel T X q ad A P q, et divisim ut D X q — T X q ad D A q — A P q. (i) Sed ex naturâ hyperbolæ D X q — T X q est A D q, (k) et per hypothesin A P q est A D × A K. Ergo particulæ sunt ad invicem ut A D q ad A D q — A D × A K; id est, ut A D ad A D — A K seu A C ad C K: ideóque sectoris particula T D V est

D v, (per Prop. XIX. Lib. VI. Elem.) et triangulum D q p æquale est triangulo D q r evanescente p r respectu D q; est igitur p D^2



ad t D^2, seu A D^2, ut triangulum q D p ad triangulum t D v, et ideò t D v = $\frac{A\,D^2 \times q\,D\,p}{p\,D^2}$, undè ob datum circuli radium A D, particula t D v est ut $\frac{q\,D\,p}{p\,D^2}$.

(e) * *Id est.* Nam A C × A k, seu A D × A k = A p^2 (per Prop. VIII.) et A D^2 + A D × A k = A D × (A C + A k) = A D × C k.

(f) * *Et q D p est* $\frac{1}{2}$ *A D × p q*, ob A D basi p q productæ normalem.

(g) * *Atquè ideò ut particula temporis decremento velocitatis respondens* (18).

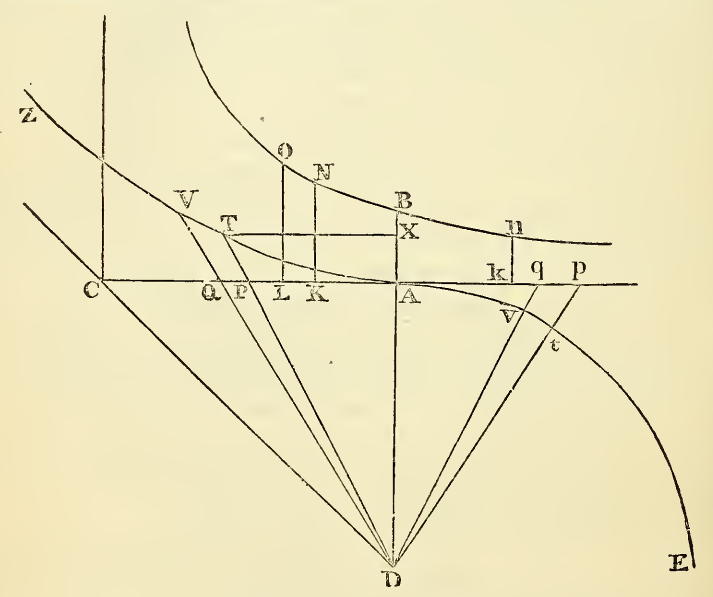
(h) * *Ut D X^2 ad D A^2*, ob triangula D T X, D P A similia (per Prop. II. Lib. VI. Elem.)

(i) * *Sed ex natura hyperbolæ*, &c. Quoniam (per Theor. II. de Hyperb.) rectangulum $\overline{2\,A\,D + A\,X} \times A\,X$, est ad quadratum ordinatæ T X, ut latus transversum est ad latus rectum, hæc verò hyperbola est æquilatera, erit (per Theor. V. de Hyperb.) T X^2 = $\overline{2\,A\,D + A\,X} \times A\,X$. Sed est $\overline{2\,A\,D + A\,X} \times A\,X = D\,X^2 - D\,A^2$ (per Prop. VI. Lib. II. Elem.) ergò T X^2 = D X^2 — D A^2, ac proinde D X^2 — T X^2 = D A^2.

(k) * *Et per hypothesim A P^2 est A D × A k*, seu A C × A k (per Prop. VIII.)

$\frac{PDQ \times AC}{CK}$; atque ideò ([l]) ob datas A C et A D, ut $\frac{PQ}{CK}$, id est, ut incrementum velocitatis directè, utque vis generans incrementum inversè; atque ideò ut particula temporis incremento respondens. Et componendo fit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis A P particulæ P Q generantur; ut summa particularum sectoris A T D, id est, tempus totum ut sector totus. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si A B æquetur quartæ parti ipsius A C, spatium quod corpus tempore quovi cadendo describit, erit ad spatium, quod corpus



velocitate maximâ A C, eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest; ut area A B N K, quâ spatium cadendo descriptum exponitur, ad aream A T D, quâ tempus exponitur. Nam cùm sit A C ad A P ut A P ad A K, erit (per Corol. 1. Lem. II. hujus) L K ad P Q ut 2 A K ad A P, hoc est, ut 2 A P ad A C, et inde L K ad $\frac{1}{2}$ P Q ut A P ad $\frac{1}{4}$ A C vel A B; est et K N ad A C vel A D ([m]) ut A B ad C K; itaque ex æquo L K N O ad D P Q ut A P ad C K. ([n]) Sed erat D P Q ad D T V ut C K ad A C. Ergo rursus ex æquo L K N O est ad D T V ut A P ad A C; hoc est, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem

([l]) * *Ob datas A C et A D.* Est enim $PDQ = \frac{1}{2} AD \times PQ$, et ideò $TDV = \frac{\frac{1}{2} AD \times AC \times PQ}{CK}$.

([m]) * *Ut A B ad C K* (per Theor. IV. de Hyperb.)

([n]) * *Sed erat D P Q ad D T V*, &c. Suprà Cas. 2.

maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cùm igitur arearum A B N K et A T D momenta L K N O et D T V sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ (†) ut spatia simul descripta, ideóque areæ totæ ab initio genitæ A B N K et A T D ut spatia tota ab initio descensus descripta. Q. e. d.

Corol. 2. (°) Idem consequitur etiam de spatio quod in ascensu describitur. Nimirum quòd spatium illud omne sit ad spatium, uniformi cum velocitate A C eodem tempore descriptum, ut est area A B n k ad sectorem A D t.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore A T D cadentis est ad velocitatem, quam eodem tempore in spatio non resistente acquireret, ut triangulum A P D ad sectorem hyperbolicum A T D. Nam velocitas in medio non resistente (p) foret ut tempus A T D, et in medio resistente est ut A P, id est, ut triangulum A P D. (q) Et velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ A T D, A P D.

Corol. 4. (r) Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem,

(†) * *Ut spatia simul descripta* (11).

(°) * *Idem consequitur*, &c. Eadem est prorsus demonstratio, si loco A K et Q P substituantur A k et q p, et ad primum demonstrationis casum attendatur.

91. *Corol.* Velocitas A p corporis in medio resistente ascendentis ad maximam altitudinem A B n k, est ad velocitatem A P corporis in eodem medio e quiete descendentis per æquale spatium A B N K, ut secans anguli A D p ad radium, aut quod idem est, ut tangens A p anguli A D p, ad ejusdem sinum. Quoniam enim (per Hyp.) area A B N K, æqualis est A B n k, erit (380. Lib. I.) C k : A C = A C : C K, et dividendo A k : A C = A K : C K, et alternando, A k : A K = A C : C K = C k (sive A C + A k) : A C, et ideò A k × A C : A K × A C = A C² + A k × A C : A C²; sed (per dem. Prop. VIII.) A C × A k = A p², et A C × A K = A P². Quare A p² : A P² = A C² + A p² seu D p² : A C², et hinc A p : A P = D p : A C, seu A D. Q. e. d.

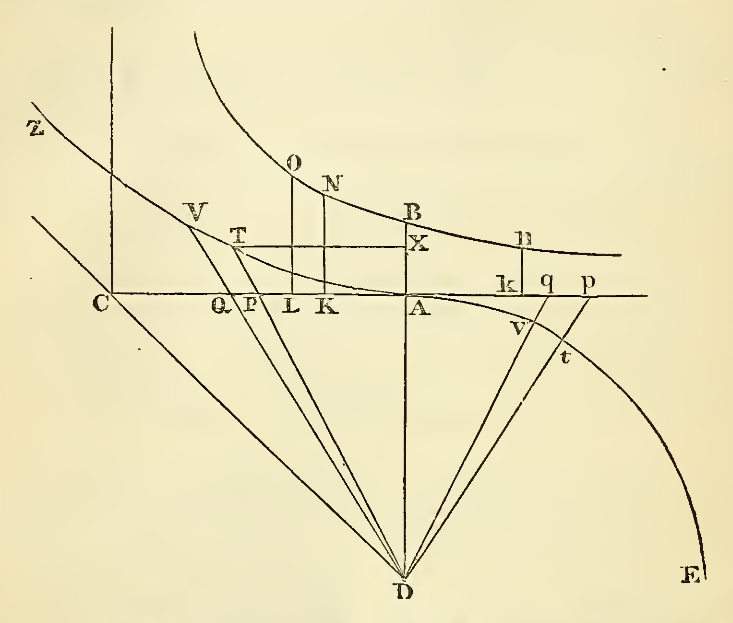
(p) * *Foret ut tempus A T D.* Cresceret enim uniformiter, ideóque ut tempus (25. Lib. I.)

(q) * *Et velocitates illæ initio descensûs æquantur inter se* ob resistentiam respectu gravitatis nullam, ubi velocitas nascitur. Cùm igitur velocitates in medio non resistente sint semper inter se ut areæ A T D, et in medio resistente sint ut triangula A P D, erit velocitas in medio resistente tempore finito A T D acquisita ad velocitatem initio descensûs in eo medio resistente ut triangulum finitum A P D, ad triangulum nascens A P D, et erit velocitas initio descensûs in medio non resistente ad velocitatem in eodem medio tempore finito A T D acquisitam ut area nascens A T D (æqualis areæ nascenti A P D) ad aream finitam A T D; quare (ex æquo) velocitas corporis tempore finito A T D cadentis in medio resistente est ad velocitatem quam eodem tempore in medio non resistente cadendo acquireret ut triangulum A P D ad sectorem hyperbolicum A T D.

(r) * *Eodem argumento.* Nam velocitas in medio non resistente foret ut tempus A t D, et in medio resistente est ut A p, id est, ut triangulum A p D ob datam A D, et velocitates illæ in fine ascensûs ubi evanescunt æquantur inter se, perindè ut areæ evanescentes A t D, A p D; est autem triangulum A p D = $\frac{1}{2}$ A D × A p, et sector circularis A t D, = $\frac{1}{2}$ A D × A t. Quarè A p D est ad A t D, ut A p ad A t.

92. Hinc si velocitas ascensûs A p in medio resistente velocitati maximæ A C æqualis fuerit, erit velocitas A p seu A C, ad velocitatem quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum A C D, ad octantem circuli, sive ut radius ad octavam partem peripheriæ, aut quod idem est, ut quadratum circulo circumscriptum ad circuli aream. Dum enim fit A p = A C, triangulum A p D æquatur triangulo A C D, et sector A t D, octanti circuli, ideóque arcus A t est pars octava peripheriæ, et triangulum A C D est ad sectorem A t D, ut A C ad arcum A t, ac prætereà triangulum A C D, ob A C = A D, est pars octava quadrati circulo circumscripti.

quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum A p D ad sectorem circularem A t D; sive ut recta A p ad arcum A t.



Corol. 5. Est igitur tempus, quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem A P, acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam A C in spatio non resistente cadendo acquirere posset, (s) ut sector A D T ad triangulum A D C: et tempus, quo velocitatem A p in medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, (t) ut arcus A t ad ejus tangentem A p.

(s) * *Ut sector A D T ad triangulum A D C.* Cum enim A P exponat velocitatem tempore A T D in medio resistente acquisitam, sumatur A Y talis ut exponat velocitatem tempore eodem in medio non resistente productam, et erit per Corol. 2. A P ad A Y ut A P D, ad A T D, cumque etiam A C exponat velocitatem maximam, erit A Y ad A C ut tempus quo prior celeritas A Y in medio non resistente acquiri potest, ad tempus quo velocitas maxima A C in medio etiam non resistente acquireretur, et cùm tempus quo celeritas A Y acquiritur, exprimatur per aream A T D, erit A Y ad A C ut A T D ad aream quæ exponet tempus quo velocitas maxima in medio non resistente acquiritur, itaque cùm sit A P : A Y = A P D : A T D et A Y : A C = A T D : ad hanc aream, erit ex æquo A P : A C = A P D, ad hanc aream. sed sumptâ communi altitudine D H est A P ad A C = tri. A P D ad tri. A D C, ergo area quæ exponet tempus quo maxima velocitas in medio non resistente acquiritur, est area A D C. Undè sequitur quòd corpus in medio resistente, velocitatem maximam A C acquirere cadendo non potest nisi tempore infinito. Cùm enim fit A P = A C, coincidit D T cum hyperbolæ A T V asymptoto D C, et sector A D T fit infinitus.

(t) * *Ut arcus A t, ad ejus tangentem A p.* Siquidem (per Cor. 4.) velocitas A p in medio

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendentis datur velocitas maxima (per Corol. 2. et 3. Theor. VI. Lib. II.) (u) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et sumendo sectorem A D T vel A D t ad triangulum A D C in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; (x) dabitur tum velocitas A P vel A p, (y) tum area A B N K vel A B n k, (z) quæ est ad sectorem A D T vel A D t ut spatium quæsitum ad spatium, quod tem-

resistente tempore A t D extinguenda, est ad velocitatem eodem tempore in spatio non resistente extinguendam ut triangulum A p D ad sectorem A t D; et etiam ut tempus quo velocitas A p in spatio non resistente extingueretur ad tempus A t D quo altera velocitas in spatio non resistente extinguitur quod idem est cum eo quo velocitas A p in spatio resistente extinguitur. Quare tempus quo velocitas A p, in spatio non resistente evanesceret est ad tempus A t D quo in spatio resistente extingueretur ut triangulum A p D, ad sectorem A t D, sive tangens A p ad ejus arcum A t. Patet ergò propositum.

93. Hinc tempus quo corpus velocitatem A p in medio resistente ascendendo amittere potest, est ad tempus quo velocitatem maximam A C in spatio non resistente ascendendo amitteret vel descendendo acquireret ut sector circularis A t D, ad triangulum A D C, seu ut arcus A t ad radium A D. Nam in medio non resistente velocitas A p est ad velocitatem A C, ut tempus A p D, quo generatur vel extinguitur velocitas A p, ad tempus quo generatur vel extinguitur velocitas A C, quod proindè erit $\frac{A\,C \times A\,p\,D}{A\,p}$, seu $\frac{1}{2}$ A D $\times$ A C, hoc est, triangulum A D C.

Cum igitur tempus quo velocitas A p, in medio resistente extinguitur, exponatur per sectorem A t D, patet propositum.

94. Tempus quo corpus in medio resistente descendendo acquirit velocitatem A P, vel ascendendo amittit velocitatem A p, est ad tempus quo eandem velocitatem in medio non resistente acquirit vel amittit, ut sector A D T, vel A D t, ad triangulum A D P, vel A D p, respectivè. Etenim (per Cor. 5. et not. 93.) tempus quo in medio resistente generatur velocitas A P, vel extinguitur velocitas A p, est ad tempus quo in spatio non resistente generatur vel extinguitur velocitas maxima A C, ut A D T vel A D t, ad A D C; et tempus quo in spatio non resistente generatur vel extinguitur velocitas A C, est ad tempus quo generatur vel extinguitur in eodem spatio non resistente, velocitas A P vel A p, ut A C ad A P vel A p, et sumptâ communi altitudine D A ut A D C ad A P D vel A p D. Quare (ex æquo) tempus quo in medio resistente generatur velocitas A P, vel extinguitur velocitas A p, est ad tempus quo velocitas eadem in spatio non resistente producitur vel amittitur, ut A D T ad A D P, vel A D p. Q. e. d.

95. Si celeritas A p corporis in medio resistente ascendentis maximæ A C æqualis fuerit, erit A D p = A D C, et sector A D t, circuli octans. Quare tempus quo corpus in medio resistente ascendendo amittere potest velocitatem maximam A C est ad tempus quo eandem in spatio non resistente amitteret, ut circuli octans ad triangulum A D C, hoc est, ut area circuli ad quadratum circumscriptum, seu etiam ut 8a. pars peripheriæ ad radium.

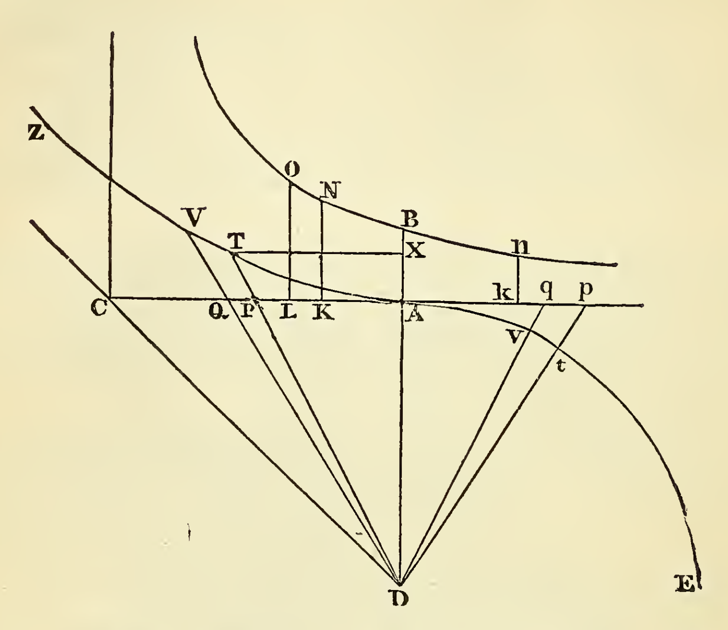
(u) 96. *Indèque datur tempus.* Cum enim vires acceleratrices uniformes, sint ut velocitates quas generant directè et tempora quibus illas generant inversè (13. Lib. I.) datâ vi acceleratrice uniformi quâ corpus in medio quovis sollicitatur, seu datâ vis illius ratione ad notam quamlibet aliam vim v. gr. ad corporum terrestrium gravitatem, datâque simul velocitate quam vis illa acceleratrix produxit, dabitur tempus quo velocitas illa data genita est. Sit enim vis acceleratrix data ad vim notam gravitatis, ut a ad b, velocitas datâ vi illâ acceleratrice tempore x genita c, et velocitas quam vis gravitatis tempore quovis dato t generat C, erit $a : b = \frac{c}{x} : \frac{C}{t}$. Undè invenitur tempus $x = \frac{b\,c\,t}{a\,C}$.

(x) * *Dabitur tum velocitas A P, vel A p.* (Per Cor. 5. et not 92.)

(y) * *Tum area A B N K vel A B n k.* Est enim (ex dem. Prop. VIII.) A C : A P = A P : A K, et A C : A p = A p : A k, et ideò datis A C et A P vel A p dabuntur A K vel A k, et areæ correspondentes A B N K, A B n k, quæ per tabulas logarithmorum inveniri possunt. (384. Lib. I.)

(z) * *Quæ est ad sectorem A D T, vel A D t.* (Per Cor. 1. et 2.)

pore dato, cum velocitate illâ maximâ jam ante inventâ, uniformiter describi potest.



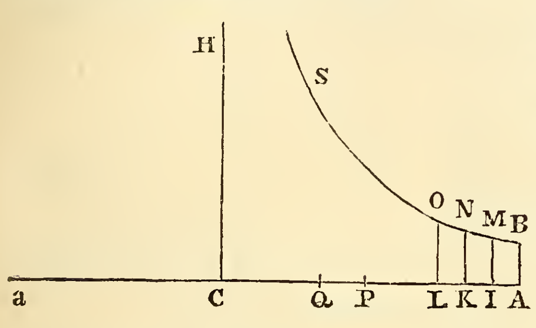
Corol. 7. ([a]) Et regrediendo, ex dato ascensus vel descensus spatio A B n k vel A B N K, dabitur tempus A D t vel A D T.

([a]) 97. *Et regrediendo.* Nimirum capienda est area A B n k, vel A B N K ad triangulum A D C in datâ ratione spatii dati ascensûs vel descensûs ad duplum spatii, quod corpus in medio non resistente cadendo describit ut velocitatem maximam A C acquirat, atque ità dabitur A k vel A K. Et hinc dabitur A p vel A P, seu velocitas; ex his autem dabitur sector A D t vel A D T, seu tempus (per Cor. 5.). Nam spatium quod corpus in medio non resistente cadendo describit ut velocitatem maximam A C acquirat dicatur A, tempus quo spatium illud describitur T, spatium quod in medio resistente describit ut acquirat velocitatem A P, vel amittat velocitatem A p dicatur s, tempus t, et spatium quod corpus tempore illo t et velocitate maximâ A C uniformiter progrediendo describit sit S, et quia (29. Lib. I.) corpus velocitate maximâ A C uniformiter progrediendo, tempore T, describit spatium 2 A, erit (5. Lib. I.) S : 2 A = t : T. Sed (per Cor. 5. et not. 93.) t : T = A D T vel A D t : A D C, ideóque S : 2 A = A D T vel A D t : A D C, et (per Cor. 1. ac 2.) s : S = A B N K vel A B n k : A D T vel A D t, respectivè. Quarè (ex æquo) s : 2 A = A B N K vel A B n k : A D C. Q. e. d.

98. Si corpus cum velocitate quæ æqualis sit maximæ A C, verticaliter projiciatur deorsum, æquabili motu descendet, ob resistentiam gravitati æqualem et contrariam (per Cor. 2. Prop. VIII.) si minori cum velocitate projiciatur, exponatur velocitas illa per lineæ A C partem A P, et motus corporis projecti idem erit ac si e quiete descendendo velocitatem datam A P, jam acquisivisset et deindè pergeret moveri; quare motus projecti in hoc casu ex superioribus facile determinabitur.

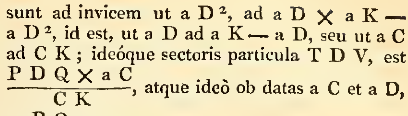
99. Verùm si projectionis velocitas terminali A C major est, constructiones Propositionum VIII. et IX. mutandæ erunt. Et quidem constructio Propositionis 8æ. sic mutanda. Descriptâ inter asymptotos orthogonales A C, C H hyperbolâ quâlibet S O N B, producatur asymptotus A C in a, et exponatur vis gravitatis per datam lineam a C, resistentia initio motûs per lineam a A, resistentia elapso quovis tempore per lineam indefinitam a K. Velocitas corporis per lineam a P quæ sit media proportionalis inter a K et a C, ideóque in subduplicatâ ratione re-

sistentiæ. Decrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam K L et contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam P Q. Quoniam a K est ut a P ^{2}, erit hujus momentum K L, ut illius momentum 2 a P Q, id est, ut a P in K C. Nam velocitatis decrementum P Q, (per Mot. Leg. II.) proportionale est vi generanti K C, quæ est excessus resistentiæ a K, suprà vim gravitatis a C. Compo-



natur ratio ipsius K L cum ratione ipsius K N, et fiet rectangulum K L $\times$ K N ut a P $\times$ K C $\times$ K N, hoc est, ob datum rectangulum K C $\times$ K N, ut a P, ergò rectangulum evanescens K N $\times$ K L, hoc est, area hyperbolica K N O L, est ut a P. Componitur igitur area tota hyperbolica A B O L, ex particulis K N O L, velocitati a P semper proportionalibus, et propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales A B M I, I M N K, K N O L, &c. et vires absolutæ A C, I C, K C, L C, &c. erunt in progressione geometricâ. Si spatium descriptum exponatur per aream hyperbolicam A B N K, exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis et resistentia medii per lineas a C, a P, a K.

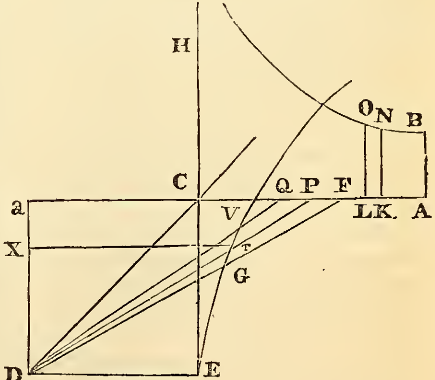
Propositionis 9^{æ} constructio in hanc abit. Cæteris ut in figurâ et constructione superiori manentibus, capiatur a F media proportionalis inter a C et a A, et ideò velocitatem projectionis initialem exponens, completo quadrato a C E D, centro D describatur hyperbola rectangula E G T V, semiaxem transversum habens D E, verticem principalem E, et asymptotum D C. Jungantur D F, D P hyperbolæ occurrentes in G et T, et erit sector hyperbolicus G D T ut tempus descensûs per spatium A B N K. Agatur enim D V Q abscindens tum sectoris G D V tum trianguli F D Q particulas quam minimas T D V, P D Q, et erunt hæ particulæ ad invicem ut D T ^{2} ad D P ^{2}, id est, si T X et a P parallelæ sint, ut D X ^{2} ad D a ^{2}, vel T X ^{2} ad a P ^{2}, et divisim ut T X ^{2} — D X ^{2} ad a P ^{2} — a D ^{2}; sed (ex naturâ Hyperb.) T X ^{2} — D X ^{2} est a D ^{2}, et (per Hyp.) a P ^{2} est a D $\times$ a K; ergò particulæ T D V, P D Q, sunt ad invicem ut a D ^{2}, ad a D $\times$ a K — a D ^{2}, id est, ut a D ad a K — a D, seu ut a C ad C K; ideóque sectoris particula T D V, est



$\frac{P D Q \times a C}{C K}$, atque ideò ob datas a C et a D, ut $\frac{P Q}{C K}$, id est ut decrementum velocitatis directè utque vis generans decrementum inversè, atque ideò ut particula temporis decremento velocitatis respondens, et componendo, fit summa particularum temporis quibus omnes velocitatis F P particulæ P Q extinguuntur, ut summa particularum sectoris G D T, id est, tempus totum ut sector totus. Q. e. d.

100. *Corol.* 1. Quoniam coincidente puncto P cum C, coincidit etiam K cum C, et D T cum asymptoto D C, liquet corporis projecti velocitatem a P nonnisi descripto spatio infinito, elapsoque infinito tempore, fieri posse velocitati terminali a C æqualem.

101. *Corol.* 2. Si dignitas hyperbolæ B N O seu rectangulum C A $\times$ A B, sit $\frac{1}{4}$ a C ^{2}, spatium quod corpus tempore quovis describit, erit ad spatium quod corpus velocitate terminali a C eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area A B N K quâ spatium descriptum exponitur ad aream G D T quâ tempus exponitur. Nam cùm sit a C ad a P, ut a P ad a K, erit (per Cor. 1. Lem. II. Lib. II.) L K



ad P Q ut 2 a K ad a P, hoc est, ut 2 a P ad a C, et indè L K ad $\frac{1}{2}$ P Q, ut a P ad $\frac{1}{4}$ a C. (Ex naturâ Hyperb. et per Hyp.) K N $\times$ C K est C A $\times$ A B, seu $\frac{1}{4}$ a C ^{2}, ideóque K N ad a C seu a D, ut $\frac{1}{4}$ a C ad C K. Itaque (ex æquo) L K N, ad D P Q, ut a P, ad C K; sed erat D P Q, ad D T V, ut C K ad a C, ergò rursus (ex æquo), L K N, est ad D T V,

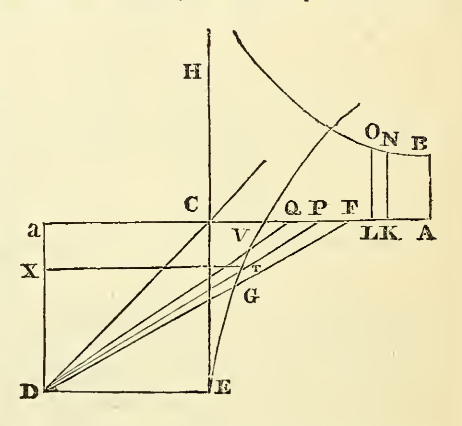
ut a P, ad a C, hoc est, ut velocitas corporis projecti est ad velocitatem maximam quam corpus e quiete cadendo potest acquirere. Cùm igitur arearum A B N K et G D T, momenta L K N et D T V sint ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, ideóque areæ totæ ab initio genitæ A B N K et G D T, ut spatia tota ab initio projectionis descripta.

102. *Corol.* 3. Velocitas a P corporis projecti in fine temporis G T D, est ad velocitatem quam corpus velocitate initiali a F projectum eodem tempore in medio non resistente cadendo haberet, ut triangulum a P D ad summam trianguli a F D et sectoris hyperbolici G T D. Nam velocitatis incrementum tempore G T D in spatio non resistente genitum est ut tempus G T D, et velocitas projectionis ut a F, sive ut triangulum a F D, atque adeò velocitas tota in fine temporis G T D ut G T D + a F D, et velocitas in fine temporis ejusdem G T D in medio resistente est ut a P, id est, ut triangulum a P D, et velocitates illæ initio projectionis æquantur inter se, perindè ut areæ illæ G T D + a F D et a P D, ob sectorem G T D evanescentem, et a P æqualem a F initio descensûs.

103. *Corol.* 4. Tempus quo corpus in medio resistente projectum acquirit velocitatem a P, seu quo amittit velocitatem P F, est ad tempus quo velocitatem maximam a C, in spatio non resistente e quiete cadendo acquirere posset, ut sector G D T ad triangulum a D C. Sit a F + V, recta velocitatem exponens quam corpus in medio non resistente cum velocitate initiali a F projectum elapso tempore G D T haberet, et erit (102) a P ad a F + V, seu multiplicando per $\frac{1}{2}$ a D, a P D ad a F D + $\frac{1}{2}$ a D $\times$ V, ut a P D ad a F D + G T D, ideóque $\frac{1}{2}$ a D $\times$ V = G T D, et V = $\frac{\text{G T D}}{\frac{1}{2}\text{ a D}}$; sed V est velocitas quam corpus e quiete cadendo in medio non resistente acquireret tempore G T D, et velocitates in medio non resistente acquisitæ, sunt ut tempora quibus acquiruntur, ideóque velocitas V seu $\frac{\text{G T D}}{\frac{1}{2}\text{ a D}}$, est ad velocitatem a C, in medio non resistente acquisitam ut tempus G T D ad tempus quo corpus velocitatem a C acquirit; quarè hoc tempus erit $\frac{1}{2}$ a D $\times$ a C, seu per triangulum a D C exponetur.

104. *Corol* 5. Hinc ex dato tempore datur spatium descriptum. Capiatur enim sector G D T ad triangulum a D C, ut tempus datum ad tempus quo corpus in medio non resistente acquirit velocitatem terminalem a C, et dabitur tum velocitas a P, tum area A B N K, quæ est ad sectorem G D T, ut spatium quæsitum ad spatium quod tempore dato cum velocitate illâ terminali a C uniformiter describi potest (101) et regrediendo ex dato spatio A B N K, dabitur tempus G D T, si capiatur area A B N K, ad triangulum a D C in ratione spatii dati ad duplum spatii quod corpus in medio non resistente cadendo describit ut velocitatem terminalem a C acquirat. Id demonstratur ex (not. 103. et 101.) eodem prorsus modo quo factum est (97.)

105. *Scholium.* Superiores constructiones definiendis corporum motibus sufficiunt, licet medii resistentia partim constans partim velocitatis quadrato proportionalis. Nam si corpus solâ vi insitâ moveatur, recta A C, quæ in construc-



tionibus Prop. VIII. et IX. vim gravitatis uniformem exponebat, partem resistentiæ constantem quæ vi alicui centripetæ uniformi æqualis censeri potest, cæteris manentibus, exponet. Sed si corpus in medio prædicto gravitate uniformiter agente sollicitatum rectâ ascendat vel descendat, linea A C, in constructionibus pro ascensu vim gravitatis et partem resistentiæ datam simul exhibebit, in constructionibus verò pro descensu excessum gravitatis suprà partem resistentiæ datam repræsentabit; et linea illa A C, ità determinata vim gravitatis uniformem exponet, quâ corpus urgeretur in medio cujus esset resistentia ut velocitatis quadratum. Si verò pars illa resistentiæ quæ uniformis manet vi gravitatis æqualis fuerit et corpus deorsum projiciatur, idem erit illius motus ac si solâ vi insitâ ferretur in medio quod resisteret in ratione quadrati velocitatis, atquè ideò in hoc casu usurpanda erit constructio Propositionis 5æ. Jam verò omissis constructionibus per logarithmicam quas (ex demonstr. 44. 45.) facile deducere, aut in Monumentis Academiæ Regiæ an. 1709 et etiam in Phoronomiâ Hermanni lector videre poterit, duo quæ sequuntur generalia problemata analyticè solvemus.

PROBLEMA.

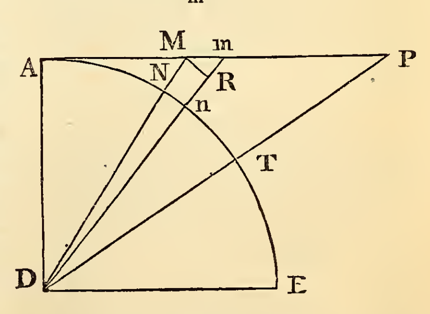
Definire motum corporis, uniformi gravitate urgente, rectâ descendentis vel ascendentis in

medio similari, quod in ratione quâlibet multiplicatâ velocitatis resistit.

106. Sit vis gravitatis = g, velocitas corporis sub initio motûs = c, spatium descriptum = s, tempus quo descriptum est = t, velocitas hoc tempore acquisita vel residua = v, resistentia medii $r = \frac{v^n}{a^{n-1}}$, et *a* quantitas data. Corpore descendente erit (19) $g\,d\,s - \frac{v^n\,d\,s}{a^{n-1}} = v\,d\,v$, ideóque $d\,s = \frac{a^{n-1}\,v\,d\,v}{g\,a^{n-1} - v^n}$, et quia (13) $d\,t = \frac{d\,s}{v}$, erit $d\,t = \frac{a^{n-1}\,d\,v}{g\,a^{n-1} - v^n}$. Simili modo pro corporis ascensu, invenitur $d\,s = \frac{-a^{n-1}\,v\,d\,v}{g\,a^{n-1} + v^n}$ et $d\,t = \frac{-a^{n-1}\,d\,v}{g\,a^{n-1} + v^n}$. Cum igitur in his quatuor æquationibus variabiles separatæ sint, poterunt illæ, saltem concessis figurarum quadraturis, construi.

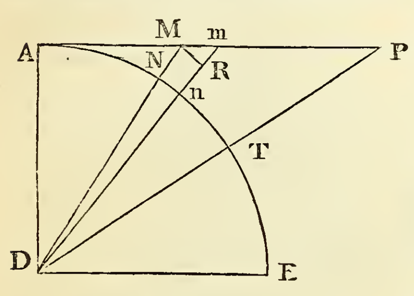
107. Si resistentia velocitati proportionalis fuerit, erit n = 1, et ideò corpore descendente $d\,s = \frac{v\,d\,v}{g - v}$ et divisione numeratoris v d v per $-v + g$ peractâ, est $d\,s = -d\,v + \frac{g\,d\,v}{g - v}$, et sumptis fluentibus $s = Q - v - g \times L.\,\overline{g - v}$. Quia verò ubi evanescit spatium s, fit v = c (per Hyp.) erit constans $Q = c + g\,L.\,\overline{g - c}$, ac proindè $s = c - v + L.\frac{g-c}{g-v}$. Tempus habetur per æquationem $d\,t = \frac{d\,v}{g - v}$ cujus fluens $t = Q - L.\,\overline{g - v} = L.\frac{g - c}{g - v}$. Simili modo pro corporis ascensu invenitur $s = c - v + g\,L.\frac{g + v}{g + c}$, et $t = L.\frac{g + c}{g + v}$.

108. Si resistentia sit ut velocitatis quadratum, erit n = 2 et (106) $r = \frac{v^2}{a}$. Sit b velocitas terminalis, et quia resistentia gravitati æqualis est ubi corpus velocitatem maximam habet, erit $g = \frac{b\,b}{a}$, et $b\,b = a\,g$. Sit e spatium quod corpus vi gravitatis constante g cadendo in medio non resistente describit ut acquirat velocitatem b, et erit $2\,g\,e = b\,b = a\,g$ (23) ideóque $a = 2\,e$. His positis, corpore descendente erit (106) $d\,s = \frac{a\,v\,d\,v}{a\,g - v\,v} = \frac{2\,e\,v\,d\,v}{b\,b - v\,v}$. Ponatur $b\,b - v\,v = x\,x$, et proindè sumptis fluxionibus $v\,d\,v = -x\,d\,x$, atquè ideò $d\,s = -\frac{2\,e\,x\,d\,x}{x\,x} = -\frac{2\,e\,d\,x}{x}$, et sumptis fluentibus $s = Q - 2\,e\,L.\,x = Q - e\,L.\,x^2 = Q - e\,L.\,\overline{b\,b - v\,v}$. Ponatur s = o, et ideò v = c, et indè habebitur $Q = e\,L.\,\overline{b\,b - c\,c}$, ac propterea $s = e\,L.\frac{b\,b - c\,c}{b\,b - v\,v}$. Sit L. h = 1 et erit $s\,L.\,h = e\,L.\frac{b\,b - c\,c}{b\,b - v\,v}$; $\frac{s}{e} \times L.\,h = L.\,h^{\frac{s}{e}} = L.\frac{b\,b - c\,c}{b\,b - v\,v}$, ideóque $h^{\frac{s}{e}} = \frac{b\,b - c\,c}{b\,b - v\,v}$; undè eruitur $v\,v = \frac{b\,b\,h^{\frac{s}{e}} + c\,c - b\,b}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus obtinetur per æquationem (106) $d\,t = \frac{a\,d\,v}{a\,g - v\,v} = \frac{2\,e\,d\,v}{b\,b - v\,v} = \frac{\frac{e}{b}\,d\,v}{b + v} + \frac{\frac{e}{b}\,d\,v}{b - v}$; quod patet, si duæ postremæ fractiones ad communem denominatorem reducantur, et sumptis fluentibus $t = Q + \frac{e}{b} \times L.\,\overline{b + v} - \frac{e}{b}\,L.\,\overline{b - v} = Q + \frac{e}{b} \times L.\frac{b + v}{b - v}$. Ponatur t = o, et ideò v = c, et invenietur $Q = -\frac{e}{b}\,L.\frac{b + c}{b - c}$. Quarè erit $t = \frac{e}{b}\,L.\frac{\overline{b + v} \times \overline{b - c}}{\overline{b - v} \times \overline{b + c}}$. Si corpus e quiete cadat erit c = o, et ideò $s = e\,L.\frac{b\,b}{b\,b - v\,v}$; $v\,v = \frac{b\,b\,h^{\frac{s}{e}} - b\,b}{h^{\frac{s}{e}}}$ et $t = \frac{e}{b}\,L.\frac{b + v}{b - v}$. Si in hâc ultimâ æquatione loco $n^{\frac{e}{s}}$ scribatur m et loco v ipsius valor $b\,\sqrt{1 - \frac{1}{m}}$, habebitur $t = \frac{e}{b} \times \frac{L\,1 + \sqrt{1 - \frac{1}{m}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{m}}}$.



Simili modo ascendente corpore invenietur $s = e\,L\,\frac{b\,b + c\,c}{b\,b + v\,v}$, et $v\,v =$

$\frac{bb + cc - bbh^{\frac{s}{e}}}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus autem reperitur per æquationem $dt = -\frac{adv}{ag + vv} = -\frac{edv}{bb + vv}$. Centro D, radio $DA = b$, describatur circuli quadrans A N E, velocitas c, sub initio ascensûs exponatur per datam tangentem A P, velocitas residua v, per tangentis illius partem A M, et d v per M m, jungantur D P,



D M, D m, circulo occurrentes in T, N, n, et ex puncto M, demissum sit ad D n perpendiculum M R, triangula similia D N n, D M R, dant $DM : DN$ vel $DA = MR : Nn$, et triangula similia m R M, M A D, dant $DM : DA = Mm : MR$, ideóque (ex æquo) $DM^2 : DA^2 = Mm : Nn$, hoc est, $bb + vv : bb = dv : Nn = \frac{bbdv}{bb + vv}$; undè fit $\frac{e \times Nn}{bb} = \frac{edv}{bb + vv}$; et hinc habebitur $dt = -\frac{e \times Nn}{bb}$, sumptisque fluentibus $t = Q - \frac{e \times AN}{bb}$. Ponatur $t = o$, et fiet $AM = AP$, et $AN = AT$, ideóque $Q = \frac{e \times AT}{bb}$. Quarè erit $t = \frac{e \times TN}{bb} = \frac{TN}{2g}$, (ob $bb = 2ge$).

PROBLEMA.

Definire motum corporis in lineâ rectâ A C, vi quâlibet centripetâ ad punctum C tendente sollicitati in medio cujus resistentia est ut densitas medii et dignitas quævis velocitatis corporis conjunctim.

109. Corpus e loco dato A vel a, datâ cum velocitate projectum ascendat per spatium a P vel descendat per spatium A P, dicanturque velocitas projectionis in a vel $A = c$, spatium descriptum a P vel $AP = s$, tempus quo descriptum est $= t$, velocitas corporis in loco $P = v$, vis centripeta ibidem $= g$, densitas medii in eodem loco $= k$, resistentia $r = kv^n$, distantia $CP = x$, et data C a vel $CA = b$, erit (22) pro corporis ascensu, $gdx + kv^n dx = -vdv$, et pro descensu $gdx - kv^n dx = -vdv$, quarum æquationum alterutram resolvere satis est, cum altera in alteram abeat, mutato signo + vel — quantitati k præfixo. Quia verò corpore ascendente est $aP = s = x - b$, et proindè $ds = dx$; at eodem descendente $AP = s = b - x$, et ideò $ds = -dx$, erit pro corporis ascensu (15) $dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx}{v}$, et pro descensu $dt = -\frac{dx}{v}$. His positis breviter exponimus præcipuos casus in quibus superiorum æquationum variabiles separari et æquationes proindè per curvarum quadraturas construi possunt.

110. Si in æquatione generali $gdx \pm kv^n dx = -vdv$, quæ est pro ascensu et descensu simul. Sit g quantitas constans, et densitas k, ut distantiæ dignitas $x^{\frac{1}{2}n}$ reciprocè, hoc est, $k = \frac{1}{ax^{\frac{1}{2}n}}$, variabiles separari possunt. Nam æquatio generalis in hanc mutabitur $gdx \pm \frac{v^n dx}{ax^{\frac{1}{2}n}} = -vdv$. Ponatur $v^2 = xz$, ideóque $v^n = x^{\frac{1}{2}n} z^{\frac{1}{2}n}$, et $vdv = \frac{xdz + zdx}{2}$, et æquatio evadet $gdx \pm \frac{z^{\frac{1}{2}n} dx}{a} = \frac{-xdz - zdx}{2}$, undè eruitur $\frac{dx}{x} = \frac{adz}{2ag + az \pm 2z^{\frac{1}{2}n}}$. In qua variabiles sunt separatæ.

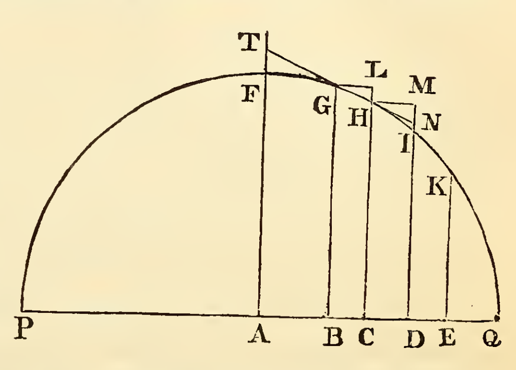
111. Si densitas k constans fuerit, vis centripeta g ut distantia x a centro et resistentia ut velocitas, variabiles separari possunt. Nam si ponatur $g = ax$, k constans et $n = 1$, æquatio generalis fiet $axdx + kvdx = -vdv$, in quâ neglectis coëfficientibus datis a et k, termini omnes sunt homogenei seu ejusdem dimensionis. Ponatur itaque $v = zx$, et proindè $dv = zdx + xdz$, et æquatio evadet $axdz \pm kzxdx = -z^2 xdx - zx^2 dz$, et terminis omnibus per x divisis, iisque ordinatis invenitur $\frac{dx}{x} = -\frac{zdz}{a \pm kz + z^2}$, quæ æquatio, concessâ hyperbolæ vel circuli quadraturâ semper construi potest.

112. Si, cæteris paribus, medii resistentia sit ut quadratum velocitatis, id est, $n = 2$, et densitas medii k visque centripeta g sint ut functiones quælibet distantiæ x, variabiles in superioribus

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, sitque resistentia ut medii densitas et quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas et medii resistentia in locis singulis.

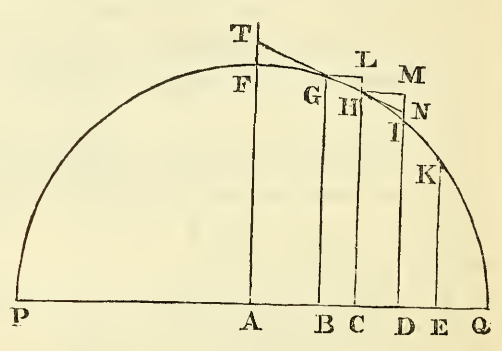
Sit P Q planum illud plano schematis perpendiculare; P F H Q linea curva plano huic occurrens in punctis P et Q; G, H, I, K loca quatuor corporis in hâc curvâ ab F ad Q pergentis; et G B, H C, I D, K E ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demissæ, et lineæ horizontali P Q ad puncta B, C, D, E insistentes; et sint B C, C D, D E distantiæ ordinatarum inter se æquales. A punctis G et H ducantur rectæ G L, H N curvam tangentes in G et H, et ordinatis C H, D I sursum productis occurrentes in L et N, et compleatur parallelogrammum H C D M. (b) Et tempora, quibus corpus describit arcus G H, H I, erunt in sub-



æquationibus (109.) separationem admittunt. In hâc hypothesi æquatio pro corporis ascensu fit $g\,dx + k v^2 dx = - v\,dv$, seu $v\,dv + k v^2 dx = - g\,dx$. Ponatur $k\,dx = \frac{dz}{2z}$ ut sit $2 z v\,dv + v^2 dz = - 2 g z\,dx$, et sumptis fluentibus erit $z v^2 = Q - S.\,2 g z\,dx$, et $v^2 = \frac{Q - S.\,2 g z\,dx}{z}$. Quia verò $k\,dx = \frac{\frac{1}{2} dz}{z}$, erit $S.\,k\,dx = \frac{1}{2} L.\,z$ et $S.\,2k\,dx = L.\,z$. Atque ideò si fuerit $L.\,h = 1$, $h^{S.\,2k\,dx} = z$ undè fit $v^2 = \frac{Q - S.\,2 g\,h^{S.\,2k\,dx}\,dx,}{h^{S.\,2k\,dx}}$ pro corporis ascensu; et pro descensu loco $+ k$, scribendo $- k$ erit $v^2 = \frac{Q - S.\,2 g\,h^{-S.\,2k\,dx}\,dx}{h^{-S.\,2k\,dx}}$ $= Q\,h^{S.\,2k\,dx} - h^{S.\,2k\,dx}\,S.\,2 g\,h^{-S.\,2k\,dx}\,dx$ in quibus æquationibus variabiles sunt separatæ, quia (per Hyp.) quantitates k et g, sunt ut functiones variabilis x. Constans Q determinatur ex eo quod ubi $x = b$, sit $v = c$, tempus verò definitur per æquationem $dt = \frac{dx}{v}$ pro corporis ascensu, et per æquationem $dt = - \frac{dx}{v}$ pro corporis descensu, in quibus æquationibus, si loco v substituatur ipsius valor per x inventus, variabiles erunt separatæ. Sed de his vide Mechanicam Clar. Euleri.

(b) 113. * *Et tempora quibus corpus describit arcus* evanescentes G H, H I, *erunt in subduplicatâ ratione altitudinum L H, N I.* Eodem enim temporis momento quo corpus vi motûs insiti in G, describeret tangentem G L, vi gravitatis uniformi caderet per altitudinem L H qualem in medio non resistente percurreret eo ipso tempore; resistentiæ enim effectus altitudinem

duplicatâ ratione altitudinum L H, N I, quas corpus temporibus illis describere posset, a tangentibus cadendo; (c) et velocitates erunt ut longitudines descriptæ G H, H I directè et tempora inversè. Exponantur tempora per T et t, et velocitates per $\frac{GH}{T}$ et $\frac{HI}{t}$; (d) et decrementum velocitatis tempore t factum exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a resistentiâ corpus retardante, et gravitate corpus accelerante. Gravitas, in corpore cadente et spatium N I cadendo describente, generat velocitatem, quâ duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset, (e) ut Galilæus demonstravit; id est velocitatem $\frac{2\,NI}{t}$: (f) at in corpore arcum H I describente, auget arcum illum solâ longitu-



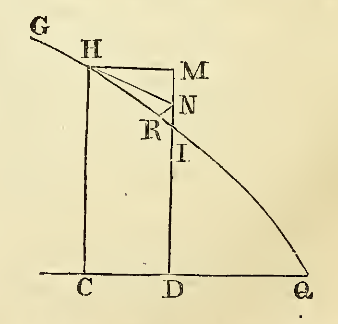
eam minuit quantitate ejus ipsius respectu infinitè parvâ, quæ itaque hic non est spectanda, itaque corpus arcum G H describere censendum est vi compositâ ex vi motus insiti et vi gravitatis. Et simili modo, tempore eodem quo describit arcum H I, vi gravitatis caderet per altitudinem N I. Quare (per Lem. X. Lib. I.) tempora quibus corpus describit arcus G H, H I, seu quibus cadit per altitudines L H, N I, sunt in subduplicatâ ratione harum altitudinem.

(c) * *Et velocitates erunt* (11).

(d) * *Et decrementum velocitatis.* Nam si velocitas per arcum H I, eadem esset ac velocitas per arcum G H, exponeretur per $\frac{GH}{T}$, est autem illa $\frac{HI}{t}$. Quarè si velocitas decrescat, illius decrementum tempore t factum, exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Si verò crescat, exponetur per $\frac{HI}{t} - \frac{GH}{T}$; hoc decrementum vel incrementum oritur a resistentia corpus retardante ejusque motui secundum directionem tangentis H N vel arcûs H I directè contraria (1) et a gravitate mòtum corporis descendentis accelerante, vis enim gravitatis in vires duas videlicet normalem et tangentialem divisa (24) corporis in curvâ descendentis motum per vim tangentialem accelerat quem vis normalis nec accelerat, nec retardat. Quarè si resistentia vi gravitatis tangentiali major est, motus retardatur, si minor acceleratur, si æqualis nec acceleratur nec retardatur.

(e) * *Ut Galilæus demonstravit.* (Vid. dem. not 29. Lib. I.)

(f) * *At in corpore,* &c. Nam solâ vi insitâ, corpus tempore t describeret tangentem H N, et vi gravitatis solâ altitudinem N I, viribus verò



conjunctis describit arcum H I, Quarè gravitas spatium a corpore secundùm directionem H N vel H I, describendum auget solâ longitudine H I — H N. Est autem H I — H N $= \frac{MI \times NI}{HI}$.

dine H I — H N seu $\frac{MI \times NI}{HI}$; ideóque generat tantum velocitatem $\frac{2\,MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, ([a]) et habebitur decrementum velocitatis ex resistentiâ solâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2\,MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cùm gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2\,NI}{t}$; ([b]) resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2\,MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2\,NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2\,MI \times NI}{HI}$ ad 2 N I.

Jam pro abscissis C B, C D, C E ([c]) scribantur — o, o, 2 o. Pro ordinata C H scribatur P, ([d]) et pro M I scribatur series quælibet $Qo + Roo + So^3 +$, &c. Et seriei termini omnes post primum, nempe $Roo + So^3 +$, &c. ([e]) erunt N I, ([f]) et ordinatæ D I, E K, et B G erunt $P - Qo - Roo - So^3 -$, &c. $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$, &c. et $P + Qo - Roo + So^3 -$, &c. respectivè. Et quadrando

Si enim centro H et radio H N, descriptus intelligatur arcus circularis N R, secans H I in R, duo triangula I R N, I M H similia erunt, ob angulum M I H utrique triangulo communem, et angulos I R N, I M H rectos, ideóque æquales, undè erit H I : M I = N I : R I seu H I — H N; et propterea H I — H N $= \frac{MI \times NI}{HI}$. Cum igitur R I sit spatium tempore t vi gravitatis tangentiali descriptum (113) velocitas illa quam vis illa tempore t generat, exponetur (29. Lib. I.) per $\frac{2\,RI}{t} = \frac{2\,MI \times NI}{t \times HI}$.

([a]) * *Et habebitur decrementum velocitatis ex solâ resistentiâ oriundum, nempe* $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2\,MI \times NI}{t \times HI}$, non solùm in eo casu quo resistentia vim gravitatis tangentialem superat, sed etiam in eo casu quo ab istâ superatur. Sit enim velocitatis decrementum ex solâ resistentiâ oriundum V, cùm incrementum velocitatis vi gravitatis tangentiali genitum sit $\frac{2\,MI \times NI}{t \times HI}$, erit in primo casu $V - \frac{2\,MI \times NI}{t \times HI} = \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$ (113), ideóque $V = \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2\,MI \times NI}{t \times HI}$; at in secundo casu erit (113) $\frac{2\,MI \times NI}{t \times HI} - V = \frac{HI}{t} - \frac{GH}{T}$, et proinde $V = \frac{2\,MI \times NI}{t \times HI} + \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$, quæ eadem est expressio ac prius.

([b]) * *Resistentia erit ad gravitatem*, &c. Vires enim acceleratrices vel retardatrices sunt ut velocitatum elementa quæ dato temporis momenta generant aut extinguunt, (13. Lib. I.)

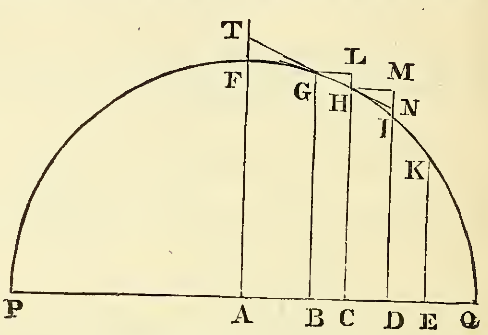
([c]) * *Scribantur — o, o, 2 o.* Si enim abscissæ C D, C E affirmativè capiantur, abscissæ C B, &c. in contrariam partem sumptæ negativè debent exprimi.

([d]) * *Et pro M I scribatur series quælibet.* Nam ordinatarum C H, D N differentia fluxionalis M I exprimi potest per seriem infinitam $Qo + Roo + So^3 +$, &c. in quâ Q, R, S, &c. sunt quantitates finitæ hic generaliter sumptæ et postea in singulis casibus determinandæ, et o est incrementum nascens et constans abscissæ (552, 556. Lib. I.)

([e]) * *Erunt N I*, &c. (552. Lib. I.)

([f]) * *Et ordinatæ*, &c. Est enim D I = D M — M I = C H — M I = $P - Qo - Roc - So^3 -$, &c. (per Hyp.); et quia C E = 2 o, si in valore ordinatæ D I loco o scribatur 2 o, abibit D I in E K = $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$, &c.; et simili modo quia C B = — o, si in valore ordinatæ D I loco + o scribatur — o, fiet D I = B G = $P + Qo - Roo + So^3 -$, &c.

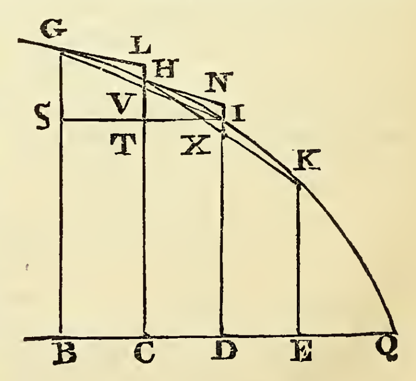
differentias ordinatarum $BG - CH$ et $CH - DI$, et ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipsarum BC, CD, (g) habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 +$, &c. et $oo + QQoo + 2QRo^3 +$, &c. Quorum radices $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, et $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ sunt arcus GH et HI. Præterea si ab ordinatâ CH subducatur semisumma ordinatarum BG ac DI, et ab ordinatâ DI subducatur semisumma ordinatarum CH et EK, (h) manebunt arcuum GI et HK sagittæ Roo et $Roo + 3So^3$. (k) Et hæ sunt lineolis LH et NI proportionales, ideóque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T et t: (l) et inde ratio $\frac{t}{T}$ est $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$ seu $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$;



(g) * *Habebuntur arcuum G H, H I quadrata, &c.* Est enim, ob angulum HMI rectum $HI^2 = HM^2 + MI^2$, et $HM = CD = o$, ac $MI = CH - DI = Qo + Roo + So^3 +$, &c. ideóque $HM^2 = oo$, $MI^2 = Q^2o^2 + 2QRo^3 + R^2o^4 + 2QSo^4 +$, &c.; unde $HI^2 = o^2 + QQo^2 + 2QRo^3 +$, &c. Negliguntur autem termini in quibus est o^4, o^5, &c. quod præ cæteris antecedentibus evanescant et ad rem nihil faciant. Quare extrahendo radicem quadratum fit $HI = o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, neglectis cæteris terminis negligendis: et simili modo invenitur $GH = o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$.

(h) * *Manebunt arcuum G I et H K sagittæ, &c.* Jungatur chorda GI secans CH in V, et ex puncto I demittatur ad BG perpendiculum IS secans CH in T. Erit, ob triangulorum ITV, ISG similitudinem IT ad IS, seu DC ad DB, id est, 1 ad 2, ut TV ad GS, et ideò $GS = 2VT$, et $GB = 2VT + SB = 2VT + DI$, et $GB + DI = 2VT + 2DI$, quare semisumma ordinatarum GB ac DI est $VT + DI$, seu VC, quæ si ab ordinatâ CH subducatur, remanebit arcûs GI sagitta VH. Et simili ratiocino patet arcûs HK sagittam IX æqualem esse differentiæ inter ordinatam DI et semisummam ordinatarum CH et EK.

(k) * *Et hæ sunt lineolis L H et N I proportionales.* Nam coëuntibus punctis B, C, D, E et G, H, I, K figuræ $NHIXH$, $LGHVG$



similes fiunt, et propterea latera homologa HV et IX, LH et NI proportionalia; sunt autem (ex demonstr.) lineolæ LH, NI ut quadrata temporum T, t, quibus describuntur arcus GH, HI.

(l) * *Et inde ratio $\frac{t}{T}$ est, &c.* Nam (ex demonst.) $\frac{t^2}{T^2} = \frac{IX}{HV} = \frac{Roo + 3So^3}{Roo} =$

et $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, G H, H I, M I et N I valores jam inventos, (m) evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cùm 2 N I sit 2 R o o, resistentia jam erit ad gravitatem ut $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad 2 R o o, id est, ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad 4 R R.

Velocitas autem ea est, quâcum corpus de loco quovis H, secundum tangentem H N egrediens, in parabolâ diametrum H C et latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ seu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, (n) deinceps in vacuo moveri potest.

Et resistentia est ut medii densitas et quadratum velocitatis conjunctim, et propterea medii densitas est ut resistentia directè et quadratum velocitatis inversè, (o) id est, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè et $\frac{1+QQ}{R}$ inversè, hoc est, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. Q. e. i.

$\frac{R+3So}{R}$, et ideò $\frac{t}{T} = \sqrt{\frac{R+3So}{R}} = \sqrt{\frac{RR+3SRo}{RR}} = \frac{\sqrt{RR+3SRo}}{R}$; sed $\sqrt{RR+3SRo} = R + \frac{3SRo}{2R}$, neglectis terminis negligendis: quare erit $\frac{t}{T} = \frac{R+\frac{3}{2}So}{R} = 1 + \frac{3So}{2R}$.

(m) * *Evadit* $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Est enim $\frac{t \times GH}{T} = o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}} + \frac{\frac{3}{2}Soo\sqrt{1+QQ}}{R}$, neglecto termino in quo reperitur o^3, qui præ cæteris evanescit. Unde fit $\frac{t \times GH}{T} - HI = \frac{\frac{3}{2}Soo\sqrt{1+QQ}}{R} - \frac{2QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$; sed 2 M I = 2 Q o, et N I = R o o neglectis cæteris seriei terminis evanescentibus, ideóque $2MI \times NI = 2QRo^3$, atque proinde $\frac{2MI \times NI}{HI} = \frac{2QRo^2}{\sqrt{1+QQ}}$, neglecto in valore arcûs H I termino evanescente $\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$. Quare erit $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI} = \frac{3Soo\sqrt{1+QQ}}{2R}$.

(n) * *Deinceps in vacuo moveri potest.* Cùm enim velocitas per arcum H I, seu per tangentem nascentem H N, æquabilis censeri possit (5), et corpus eodem temporis momento quo vi insitâ describeret H N, vi gravitatis uniformi, omissa resistentia quæ hic ut nulla haberi debet (113), cadit per altitudinem N I; arcus nascens H I, quem corpus viribus conjunctis describit, usurpari potest pro arcu parabolæ, cujus est diameter H C (40. Lib. I.), tangens H N ordinatis parallela, et N I parallela et æqualis abscissæ cui responderet ordinata æqualis H N. Quare hujus parabolæ latus rectum erit $\frac{HN^2}{NI}$ (per Theor. I. de parab.), seu (per Lemma VII. Lib. I.) $\frac{HI^2}{NI} = \frac{oo+QQoo}{Roo} = \frac{1+QQ}{R}$, neglectis terminis negligendis. Si itaque corpus in vacuo deinceps moveretur, hanc parabolam describeret (40. Lib. I.)

(o) * *Id est, ut,* &c. Quia enim resistentia est ad gravitatem constantem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad 4 R R, erit resistentia ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$. Velocitas autem est ut $\frac{HI}{t}$, et illius quadratum ut $\frac{HI^2}{t^2}$; et HI^2 est $oo + QQoo$, neglectis negligendis, t^2 verò est ut N I, seu ut R o o (ex demonstr.); adeóque velocitatis quadratum ut $\frac{1+QQ}{R}$. Quare medii densitas erit ut

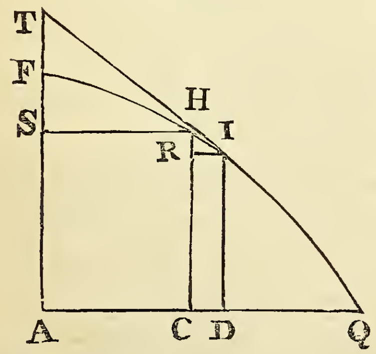
Corol. 1. Si tangens H N producatur utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet A F in T: (p) erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+QQ}$, ideóque in supe-

$\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4R(1+QQ)}$, et ob datum numerum $\frac{3}{4}$, ut $\frac{S.\sqrt{1+QQ}}{R(1+QQ)} = \frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$.

114. Si resistentia esset ut medii densitas et velocitatis V dignitas quælibet V^n conjunctim; cùm sit V^n ut $\frac{HI^n}{t^n}$, sive ut $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$, medii densitas foret ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè et $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$ inversè, id est, directè ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}}}{(1+QQ)^{\frac{n-1}{2}}}$.

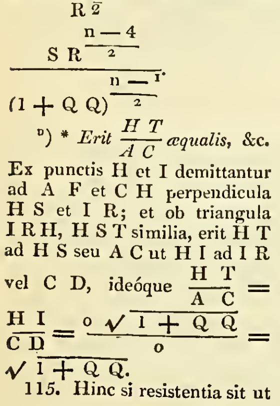
(p) * *Erit* $\frac{HT}{AC}$ *æqualis*, &c. Ex punctis H et I demittantur ad A F et C H perpendicula H S et I R; et ob triangula I R H, H S T similia, erit H T ad H S seu A C ut H I ad I R vel C D, ideóque $\frac{HT}{AC} = \frac{HI}{CD} = \frac{o\sqrt{1+QQ}}{o} = \sqrt{1+QQ}$.

115. Hinc si resistentia sit ut



medii densitas et velocitatis dignitas V^n conjunctim, erit resistentia ad gravitatem, ut 3 S × H T ad 4 R R × A C, velocitatis dignitas n. ut $\frac{HT^n}{AC^n \times R^{\frac{n}{2}}}$, et medii densitas ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}} \times AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$, sive ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$ (114.)

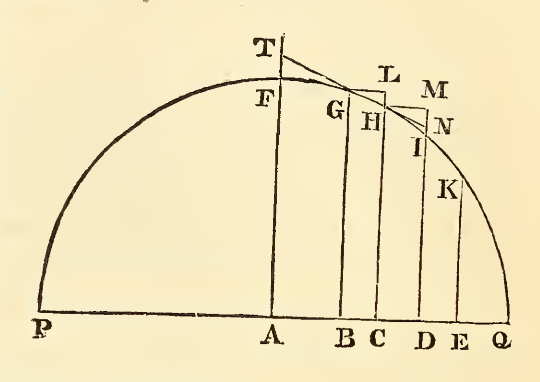
116. Superiores formulæ non solùm pro corporis descensu per arcum F Q, sed etiam pro ejusdem ascensu per arcum P F usurpari possunt. Corpore ascendente per arcum P F a P ad F, eadem fiat quæ pro descensu per arcum F Q constructio; et tempora quibus describuntur arcus G H, H I exponantur per T et t.



Decrementum velocitatis tempore t factum erit $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a resistentiâ et gravitate corporis ascendentis motum simul retardantibus. Gravitas in corpore cadente et spatium N I cadendo describente, generat velocitatem $\frac{2NI}{t}$; at in corpore arcum H I describente, minuit arcum illum solâ longitudine H N — H I seu $\frac{MI \times NI}{HI}$, ideóque extinguit tantum velocitatem tangentialem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Auferatur hæc velocitas a decremento prædicto, et habebitur decrementum velocitatis ex resistentiâ solâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} - \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cùm gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem

rioribus pro $\sqrt{1 + QQ}$ scribi potest. Quâ ratione resistentia erit ad gravitatem ut $3\,S \times HT$ ad $4\,RR \times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, et medii densitas erit ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

Corol. 2. Et hinc, si curva linea P F H Q definiatur per relationem inter basem seu abscissam A C et ordinatim applicatam C H, ut moris est; et valor ordinatim applicatæ resolvatur in seriem convergentem. Problema per primos seriei terminos expeditè solvetur, ut in exemplis sequentibus.



Exempl. 1. Sit linea P F H Q semicirculus super diametro P Q descriptus, et requiratur medii densitas quæ faciat ut projectile in hâc lineâ moveatur.

Bisecetur diameter P Q in A; dic A Q, n; A C, a; C H, e; et C D, o: et (q) erit D I q seu A Q q — A D q = n n — a a — 2 a o — o o, + Q Q o o — 2 Q R o^3; quorum radices $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ et $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ sunt arcus G H et H I. Præterea si ab ordinatâ C H subducatur semisumma ordinatarum B G ac D I, et ab ordinata D I subducatur semisumma ordinatarum C H et E K, manebunt arcuum G I et H K sagittæ R o o et R o o + 3 S o^3. Et hæ sunt lineolis L H, N I proportionales, ideóque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T et t, et inde ratio $\frac{t}{T}$ est, $\sqrt{\frac{R + 3\,So}{R}}$, seu $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$; et $\frac{t \times GH}{T} - HI - \frac{2\,MI \times NI}{HI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, H I, G H, M I et N I valores jam inventos, evadit $\frac{3\,Soo}{2\,R} \times \sqrt{1+QQ}$. Et cùm 2 N I sit 2 R o o, resistentia erit ad gravitatem ut $3\,S\sqrt{1+QQ}$ ad 4 R R. Quemadmodum pro descensu inventum est; et Corollaria eadem quoque manent.

$\frac{2\,NI}{t}$; resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} - \frac{2\,MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2\,NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI - \frac{2\,MI \times NI}{HI}$ ad 2 N I.

Jam si pro abscissis B C, C D, C E scribantur — o, o, 2 o, et pro ordinata C H scribatur P; M I et N I erunt Q o — R o o — S o^3 —, &c., et R o o + S o^3 +, &c. Nam in arcu F Q (vide fig. Newt.) D I, seu C H — M N — N I, erat P — Q o — R o o — S o^3, &c., ideóque M N erat Q o (552. Lib. I.), et N I erat R o o + S o^3; at in arcu P F est D I = C H + M N — N I, proindeque D I = P + Q o — R o o — S o^3, &c., et hinc M I est Q o — R o o — S o^3, &c. et N I est R o o + S o^3. Et si in serie quæ valorem ordinatæ D I exprimit, loco o scribantur abscissæ C E, B C, sive 2 o, — o, habebuntur ordinatæ E K et B G, nempe P + 2 Q o — 4 R o o — 8 S o^3, &c., et P — Q o — R o o + S o^3, &c. respectivè. Et quadrando differentias ordinatarum C H — B G et D I — C H, et ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipsarum B C, C D, habebuntur arcuum G H, H I quadrata o o + Q Q o o + 2 Q R o^3, et o o

(q) * *Erit D I q seu*, &c. Est enim radius

seu $ee - 2ao - oo$, (r) et radice per methodum nostram extractâ, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5}$ —, &c. Hic scribatur nn pro $ee + aa$, et evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ —, &c.

Hujusmodi series distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinitè parva o non extat; secundum, in quo quantitas illa est unius dimensionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium est; et sic in infinitum. (s) Et primus terminus, qui hic est e, denotabit semper longitudinem ordinatæ C H insistentis ad initium indefinitæ quantitatis o. (t) Secundus terminus, qui hic est $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter C H et D N, id est, lineolam M N, quæ abscinditur complendo parallelogrammum H C D M, (u) atque ideò positionem tangentis H N semper determinat; ut in hoc casu capiendo M N ad H M ut est $\frac{ao}{e}$ ad o, seu a ad e. Terminus tertius, qui hic est $\frac{nnoo}{2e^3}$, designabit lineolam I N, quæ jacet inter tangentem et curvam, (x) ideóque determinat angulum contactus I H N seu curvaturam

A I = A Q, et ideò, ob angulum A D I rectum, $DI^2 = AQ^2 - AD^2 = nn - aa - 2ao - oo = ee - 2ao - oo$, ob $CH^2 = ee = AQ^2 - AC^2 = nn - aa$.

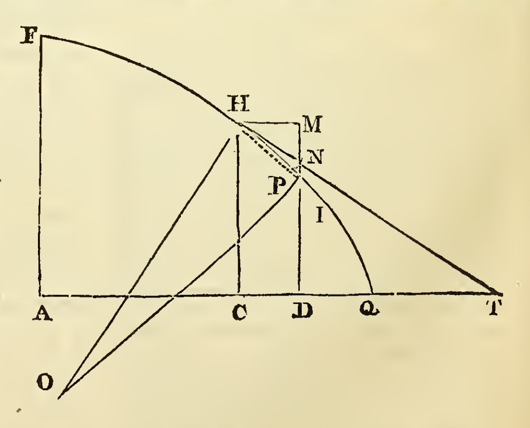
(r) * *Et radice per methodum nostram extractâ*, seu per formulam generalem. (550. Lib. I.)

(s) * *Et primus terminus*. (552. Lib. I.)

(t) * *Secundus terminus*. (ibid.)

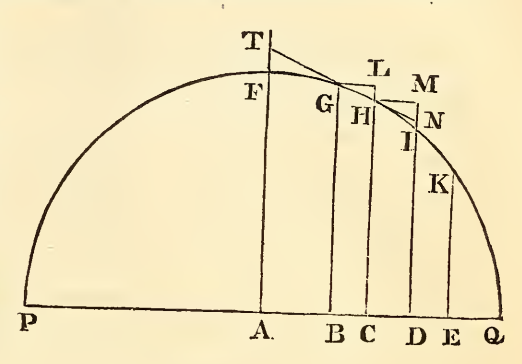
(u) 117. * *Atque ideò positionem tangentis H N semper determinat*. Producatur tangens H N ut diametro A Q occurrat in T; et propter triangulorum H M N, T C H similitudinem, erit C T : H C = H M : M N. Est verò generatim H M = o, et M N = Q o, ac Q coëfficiens secundi termini seriei generalis pro curvâ quâcumque (ex demonstr. Prop. X.); quare si capiatur C T ad H C ut est 1 ad Q habebitur subtangens C T.

(x) 118. * *Ideóque determinat angulum contactûs seu curvaturam*, &c. Sit O centrum circuli curvam F H Q osculantis in H; O H, O I radii, H P I chorda arcûs H I, N P arculus circularis centro H et radio H N descriptus.



Duo triangula I P N, I M H similia erunt, ob angulos ad P et M rectos et angulum ad I utrique triangulo communem; et ideò H I est ad

quam curva linea habet in H. (y) Si lineola illa I N finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium unà cum sequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum, termini subsequentes evadent infinitè minores tertio, ideóque negligi possunt. (z) Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, et sic deinceps. Unde obiter patet usus non contemnendus harum serierum in solutione problematum, quæ pendent a tangentibus et curvaturâ curvarum.



Conferatur jam series $e - \frac{a\,o}{e} - \frac{n\,n\,o\,o}{2\,e^3} - \frac{a\,n\,n\,o^3}{2\,e^5}$ —, &c. cum serie $P - Q\,o - R\,o\,o - S\,o^3$ —, &c. et perinde pro P, Q, R et S scribatur $e, \frac{a}{e}, \frac{n\,n}{2\,e^3}$, et $\frac{a\,n\,n}{2\,e^5}$, et pro $\sqrt{1 + Q\,Q}$ scribatur $\sqrt{1 + \frac{a\,a}{e\,e}}$ (a) seu $\frac{n}{e}$, et prodibit medii densitas ut $\frac{a}{n\,e}$, hoc est (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, seu $\frac{A\,C}{C\,H}$, (b) id est, ut tangentis longitudo illa H T, quæ ad semidiametrum

H M ut N I ad N P, ac proinde N P = $\frac{H\,M \times N\,I}{H\,I}$. Anguli N H I, quem tangens H N cum subtensa H P I constituit, mensura est dimidius arcus H I, et anguli ad centrum H O I mensura est arcus totus H I (ex natura circuli); unde N P seu $\frac{H\,M \times N\,I}{H\,I}$ est ad H N seu H I (Lem. VII. Lib. I.) ut $\frac{1}{2}$ H I ad H O, et ideò radius osculi H O = $\frac{H\,I^3}{2\,H\,M \times N\,I}$. Et quia (ex demonst. Prop. X.) H I = $o\sqrt{1 + Q\,Q}$, H M = o, ac N I = R o o; erit H O = $\frac{(1 + Q\,Q)^{\frac{3}{2}}}{2\,R}$ Sed angulus contactus et curvatura curvæ lineæ F H Q in H est ut radius osculi H O inverse (121. Lib. I.), id est, ut $\frac{2\,R}{(1 + Q\,Q)^{\frac{3}{2}}}$. Quare angulus ille, seu curvatura in H, datis secundo et tertio termino seriei in quam valor ordinatim applicatæ resolvitur, determinabitur.

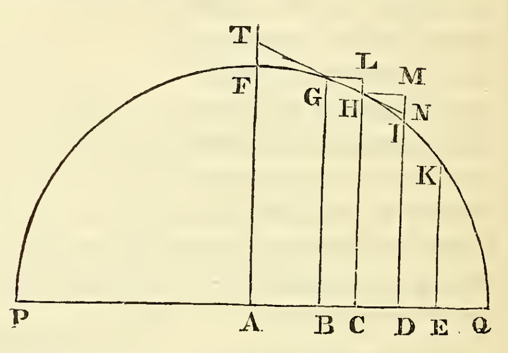
(y) * *Si lineola illa I N*, &c. (552. 553. Lib. I.)

(z) * *Terminus quartus determinat variationem curvaturæ.* Quoniam differentia lineolarum L H et N I quarto seriei termino proportionalis est (554) et per lineolam N I determinatur angulus contactus seu curvatura curvæ in puncto H (118) et per lineolam L H curvatura in puncto G; per harum linearum differentiam seu per quartum seriei terminum determinabitur differentia seu variatio curvaturæ, ductâque aliâ tangente similiter determinabitur variatio variationis, et sic deinceps.

(a) * *Seu* $\frac{n}{e}$. Est enim $1 + \frac{a\,a}{e\,e} = \frac{e\,e + a\,a}{e\,e} = \frac{n\,n}{e\,e}$.

(b) * *Id est, ut tangentis longitudo illa H T*, &c. Jungatur radius A H, et ob angulum rectum quem tangens T H cum radio A H constituit, parallelasque A T, C H, triangulum A H C simile erit triangulo A T H, et inde est T H ad H A, ut A C ad H C, id est, $\frac{A\,C}{H\,C}$ est

A F ipsi P Q normaliter insistentem terminatur: et resistentia erit ad gravitatem ut 3 a ad 2 n, id est, ut 3 A C ad circuli diametrum P Q: (c) velocitas autem erit ut $\surd$ C H. Quare si corpus justâ cum velocitate secundùm lineam ipsi P Q parallelam exeat de loco F, et medii densitas in singulis locis H sit ut longitudo tangentis H T, et resistentia etiam in loco aliquo H sit ad vim gravitatis ut 3 A C ad P Q, corpus illud describet circuli quadrantem F H Q. Q. e. i.



At si corpus idem de loco P, secundum lineam ipsi P Q perpendicularem egrederetur, et in arcu semicirculi P F Q moveri inciperet, sumenda esset A C seu a ad contrarias partes centri A, et propterea signum ejus mutandum esset et (d) scribendum — a pro + a. Quo pacto prodiret medii densitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem densitatem, hoc est, quæ motus corporum accelerat, natura non

ut $\frac{H\ T}{A\ H}$, seu ut H T ob datum radium A H.

(c) * *Velocitas autem erit ut $\surd$ C H.* Nam (ex demonstr. Prop. X.) velocitas est ut $\surd\frac{1+QQ}{R}$, id est, ut $\surd$ 2 e, vel $\surd$ 2 C H ideóque ut $\surd$ C H.

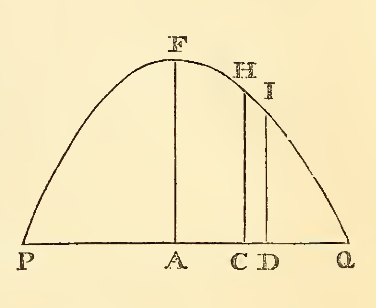
119. Quoniam igitur velocitas est ut $\surd$ C H, medii densitas ut tangens H T, et resistentia ut A C, (quia gravitas et circuli diameter P Q data sunt) corpore perveniente ad punctum Q lineæ horizontalis, velocitas ejus nulla erit, medii densitas infinita, resistentia finita. Si verò ponatur C H negativa, ut corpus infra horizontalem P Q pergat; fiet velocitas ut $\surd$ — C H, quantitas imaginaria; et ideò corpus non potest infra horizontalem P Q descendere. At dum corpus est in F, velocitas ejus est ut $\surd$ A F, medii densitas nulla, et resistentia nulla.

(d) * *Scribendum — a pro + a.* Nam formula quæ densitatem medii exponit, corporis ascensui, et descensui communis est, sicut et aliæ formulæ quæ resistentiam et velocitatem exponunt (116); et idcirco ut quantitas quæ densitatem medii corpore descendente exponit eamdem exponat pro corporis ascensu per eumdem vel similem et æqualem arcum, substituendus est in illâ quantitate valor abscissæ, quæ corpore descendente hic positiva est, ascendente negativa.

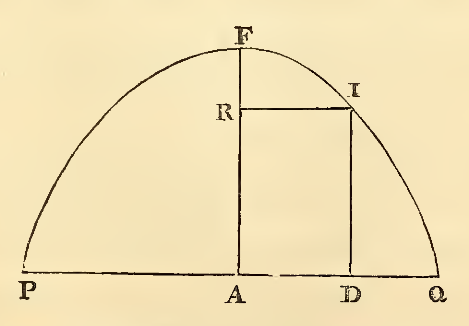
120. Atque hinc generatim colligitur eumdem curvæ arcum, vel similes et æquales utrinque ab axe arcus, non posse ascensu et descensu describi in uno medio densitatis utcumque variabilis, id est, si arcus unus ascensu describi potest, descensu describi non posse, et contra. Nam si in solutione problematis hujusce pro corporis descensu per arcum F Q, origo abscissæ positivæ A C statuatur in A, et pro C B, C D, C E scribantur —o, o, 2 o, erit resistentia ut $\frac{S\surd\overline{1+QQ}}{RR}$. Pro ascensu per eumdem arcum a Q ad F, abscissa eadem A C sumenda erit negativè, cùmque sit o abscissæ fluxio, loco C B, C D, C E scribendum erit o, — o, — 2 o in valoribus linearum M I, N I, D I, E K et B G; et absoluto calculo, ut in eâdem pro descensu solutione, resistentia pro ascensu invenietur proportionalis quantitati $-\frac{S\surd\overline{1+QQ}}{RR}$, quæ negativa est, si prior $+\frac{S\surd\overline{1+QQ}}{RR}$, quæ pro descensu erat, positiva sit; et contra.

admittit: et propterea naturaliter fieri non potest, ut corpus ascendendo a P describat circuli quadrantem P F. Ad hunc effectum deberet corpus a medio impellente accelerari, non a resistente impediri.

Exempl. 2. Sit linea P F Q parabola, axem habens A F horizonti P Q perpendicularem, et requiratur medii densitas, quæ faciat ut projectile in ipsâ moveatur.



([e]) Ex naturâ parabolæ, rectangulum P D Q æquale est rectangulo sub ordinatâ D I et rectâ aliquâ datâ: hoc est, si dicantur recta illa b; P C, a; P Q, c; C H, e; et C D, o; rectangulum $a + o$ in $c - a - o$ seu $a c - a a - 2 a o + c o - o o$ æquale est rectangulo b in D I, ideóque D I æquale $\frac{a c - a a}{b} + \frac{c - 2 a}{b} o - \frac{o o}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c - 2 a}{b}$ o pro Q o, tertius item terminus $\frac{o o}{b}$ pro R o o. Cum verò plures non sint termini, debebit quarti coëfficiens S evanescere, et propterea quantitas $\frac{S}{R \sqrt{1 + Q Q}}$, cui medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nullâ igitur medii densitate movebitur projectile in parabolâ, ([f]) uti olim demonstravit Galilæus. Q. e. i.



([e]) * *Ex natura parabolæ, rectangulum,* &c. Ex puncto I ad axem parabolæ F A demissum sit perpendiculum I R, sitque axis latus rectum $= b$; erit (per Theor. I. de Parab.) $b \times F R = R I^2 = A D^2$, et $b \times F A = A Q^2$. Quare $b \times F A - b \times F R$, seu $b \times R A$, vel $b \times D I = A Q^2 - A D^2 = \overline{A Q + A D} \times \overline{A Q - A D} = P D \times D Q$. Q. e. d.

([f]) * *Uti olim demonstravit Galilæus.* Vide demonstrationem n. 40. Lib. I.

Exempl. 3. Sit linea A G K hyperbola, asymptoton habens N X plano horizontali A K perpendicularem; et quæratur medii densitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hâc lineâ.

Sit M X asymptotos altera, ordinatim applicatæ D G productæ occurrens in V; et ex naturâ hyperbolæ ([g]) rectangulum X V in V G dabitur. ([h]) Datur autem ratio D N ad V X, et propterea datur etiam rectangulum D N in V G. Sit illud b b: et completo parallelogrammo D N X Z; dicatur B N, a; B D, o; N X, c; et ratio data V Z ad Z X vel D N ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit D N æqualis a — o, V G æqualis $\frac{bb}{a-o}$, V Z æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, et G D seu N X — V Z — V G æqualis $c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ ([i]) in seriem convergentem $\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa}o + \frac{bb}{a^3}oo + \frac{bb}{a^4}o^3$, &c. et fiet G D æqualis $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o - \frac{bb}{a^3}o^2 - \frac{bb}{a^4}o^3$, &c. ([k]) Hujus seriei terminus secundus $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ usurpandus est pro Q o, tertius cum signo mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro R o^2, et quartus cum signo etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro S o^3, eorumque coëfficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ et $\frac{bb}{a^4}$ scribendæ sunt in

([g]) * *Rectangulum X V in V G dabitur,* per Theor. IV. de Hyp.

([h]) * *Datur autem ratio D N ad V X,* quæ eadem est cum ratione data M N ad M X, ob parallelas D V, N X.

([i]) * *In seriem convergentem,* divisione in infinitum productâ.

([k]) *Hujus seriei,* &c. Est enim hæc series æqualis seriei P — Q o — R o o — S o^3 —, &c., et singuli illius termini singulis terminis hujus æquantur; id est, $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a}$ est P, seu ordinata quæ per punctum B ad hyperbolam duceretur; $+\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ est — Q o, et ideò $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa} = -'$ Q; sed quia in expressionibus resistentiæ, densitatis, et velocitatis semper reperitur quadratum Q Q, quod idem manet, seu radix illius Q affirmativè sumatur, seu negativè, nihili interest scribere $\frac{bb}{aa} - \frac{m}{n}$, aut $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$ pro Q. Secundus autem seriei terminus $\frac{-bb}{a^3}o^2$ est — R o^2, et ideò, mutatis signis, fit $\frac{bb}{a^3}$ = R; tertius terminus $\frac{-bb}{a^4}o^3$ est — S o^3, atque proinde $\frac{bb}{a^4}$ = S.

regula superiore pro Q, R et S. Quo facto prodit medii densitas ut

$$\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}\ (^l)\ \text{seu}\ \frac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$$

(m) id est si in V Z sumatur V Y æqualis V G, ut $\frac{1}{XY}$. Namque a a et $\frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ sunt ipsarum X Z et Z Y quadrata. (n) Resistentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet 3 X Y ad 2 Y G; (o) et velocitas ea est, quâcum corpus in parabolâ pergeret verticem G, diametrum D G, et latus rectum $\frac{XY\ \text{quad.}}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod medii densitates in locis singulis G sint reciprocè ut distantiæ X Y, quodque resistentia in loco aliquo G sit ad gravitatem ut 3 X Y ad 2 Y G; et corpus de loco A, justâ cum velocitate emissum, describet hyperbolam illam A G K. Q. e. i.

Exempl. 4. Ponatur indefinitè, quod linea A G K hyperbola sit, centro X, asymptotis M X, N X eâ lege descripta, ut constructo rectangulo X Z D N cujus latus Z D secet hyperbolam in G et asymptoton ejus in V, fuerit V G reciprocè ut ipsius Z X vel D N dignitas aliqua DN^n, (p) cujus index est numerus n: et quæratur medii densitas, quâ projectile progrediatur in hâc curvâ.

(l) * *Seu*, numeratore et denominatore in $\frac{a^4}{bb}$ ductis.

(m) * *Id est, si in V Z sumatur*, &c. Est enim $VG = \frac{bb}{a-o} = \frac{bb}{a}$, et $VZ = \frac{m}{n}\overline{a-o} = \frac{m}{n}a$, ubi evanescit B D, seu o. Quare $VY - VZ = ZY = \frac{bb}{a} - \frac{m}{n}a$; et quia $ZX = DN = a$, et $YX^2 = YZ^2 + ZX^2$ erit $YX^2 = aa + \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$; ideóque medii densitas ut $\frac{1}{XY}$.

(n) * *Resistentia autem*, &c. Resistentia est ad gravitatem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad 4 R R, id est, ut $\frac{3bb}{a^4} \times \sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mb^2}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}$ ad $\frac{4b^4}{a^6}$, sive dividendo per $\frac{bb}{a^5}$, ut $3\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}$ ad $\frac{4bb}{a}$, seu ut 3 X Y ad 4 V G = 2 Y G.

(o) * *Et velocitas*, &c. Hujus parabolæ latus rectum est $\frac{1+QQ}{R} = \frac{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}} = \frac{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}{\frac{bb}{a}} = \frac{YX^2}{VG}$. Velocitas autem est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$ adeóque ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$.

(p) * *Cujus index est numerus n*, positivus. Hanc autem hyperbolam, dum producitur, ad

Pro B N, B D, N X scribantur A, O, C respective, sitque V Z ad X Z vel D N ut d ad e, et V G æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, et erit D N æqualis A — O, $VG = \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$, $VZ = \frac{d}{e}\overline{A-O}$, et G D seu N X — V Z — V G æqualis $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$.

(q) Resolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$ in seriem infinitam $\frac{bb}{A^n} + \frac{nbb}{A^{n+1}}O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} \times bbO^3$, &c. ac fiet G D æqualis $C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 - \frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} \times bbO^3$, &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O$ usurpandus est pro Q o, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro Ro^2, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} \times bbO^3$ pro So^3. Et inde medii densitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, (r) in loco quovis

lineas X M, X N etiam productas continuo accedere, easque non nisi in distantiâ infinitâ contingere posse manifestum est. Cùm enim sit V G ut $\frac{1}{DN^n}$, ubi D N = o, hyperbola rectam X N attingit, et distantia V G infinita evadit; et ubi D N infinita fit, V G est nihil, et ideò hyperbola alteram asymptoton X M tangit, in distantia infinita ab asymptoto X N.

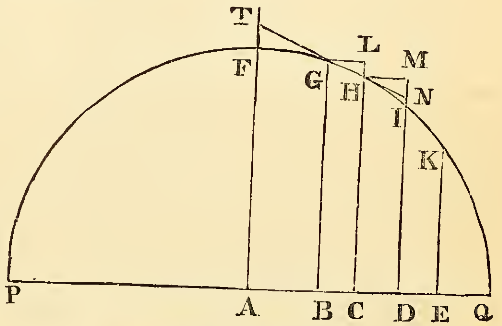
(q) * *Resolvatur terminus ille* $\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$, seu $bb \times \overline{A-O}^{-n}$, in seriem infinitam per formulam generalem (548. Lib. I.), et invenietur $bb \times \overline{A-O}^{-n} = bbA^{-n} + \frac{n}{1}bbA^{-n-1}O + \frac{n \times \overline{n+1}}{1.2} \times bbA^{-n-2}O^2 + \frac{n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2}}{1.2.3}bbA^{-n-3}O^3 +$ &c. $= \frac{bb}{A^n} + \frac{nbbO}{A^{n+1}} + \frac{\overline{nn+n} \times bbO^2}{2A^{n+2}} + \frac{n^3+3n^2+2n}{6A^{n+3}} \times bbO^3 +$ &c.; quo enim modo quo in n. 551. demonstravimus formulam ad potentias, quorum exponentes sunt fracti, applicari posse, eodem ferè modo eam ad potentias quorum exponens negativus est, applicari debere constabit.

(r) * *In loco quovis G fit*, &c. Invenitur enim $\frac{S}{R} = \frac{n+2}{3A}$, et $\sqrt{1+QQ} = \sqrt{1 + \frac{dd}{ee} - \frac{2dnbb}{eA^{n+1}} + \frac{nnb^4}{A^{2n+2}}}$; et ideò, ob datum numerum $\frac{n+2}{3}$, $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ est ut $\frac{1}{\sqrt{AA + \frac{dd}{ee}AA - \frac{2dnbbA}{eA^n} + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}}}$.

G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2 + \frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, ideóque si in V Z capiatur V Y æqualis n × V G, densitas illa est reciprocè ut X Y. Sunt enim A^2 et $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ (s) ipsarum X Z et Z Y quadrata. Resistentia autem in eodem loco G (t) fit ad gravitatem 3 S in $\frac{XY}{A}$ ad 4 R R, id est, ut X Y ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ V G. Et velocitas ibidem ea ipsa est, quâcum corpus projectum in parabolâ pergeret, verticem G, diametrum G D (u) et latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2\,XY\text{ quad.}}{nn+n \text{ in } VG}$ habente. Q. e. i.

Scholium.

Eâdem ratione quâ prodiit densitas medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in Corollario primo, si resistentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet V^n, (x) prodibit densitas medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}|^{n-1}$. (y) Et



(s) * *Ipsarum X Z et Z Y quadrata.* Nam X Z = D N = A (Hyp.), et Z Y = V Y — V Z = n × V G — $\frac{d}{e}$ A = $\frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$; aut Z Y = V Z — V Y = $\frac{d}{e}A - \frac{nbb}{A^n}$, prout Y V major vel minor est quam V Z. Quare cùm sit $XY^2 = XZ^2 + ZY^2$, densitas erit ut $\frac{1}{XY}$.

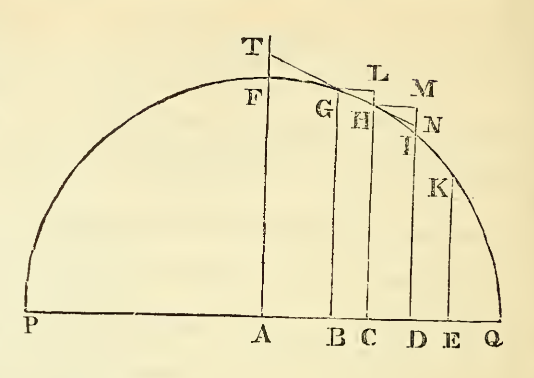
(t) * *Fit ad gravitatem ut,* &c. Quoniam (ex dem.) $\frac{XY}{A} = \sqrt{1+QQ}$, erit $3S\sqrt{1+QQ} = \frac{3S \times XY}{A}$, et inde resistentia ad gravitatem ut $\frac{3S \times XY}{A}$ ad 4 R R, vel ut X Y ad $\frac{4RR \times A}{3S}$; sed $4RR \times A = \frac{\overline{nn+n}|^2 \times b^4}{A^{2n+3}}$ et $3S = \frac{\overline{nn+n} \times \overline{n+2}|bb}{2A^{n+3}}$, ideóque $\frac{4RRA}{3S} = \frac{\overline{2nn+2n} \times bb}{\overline{n+2} \times A^n} = \frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$, ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Quare resistentia est ad gravitatem ut X Y ad $\frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$.

(u) * *Et latus rectum,* &c. Est enim $\frac{XY^2}{A^2} = 1+QQ$, et hinc $\frac{1+QQ}{R} = \frac{2XY^2 \times A^n}{\overline{nn+n} \times bb} = \frac{2XY^2}{\overline{nn+n} \times VG}$, ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Unde velocitas quæ est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, erit ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$, ob datam numerum $\frac{2}{nn+n}$.

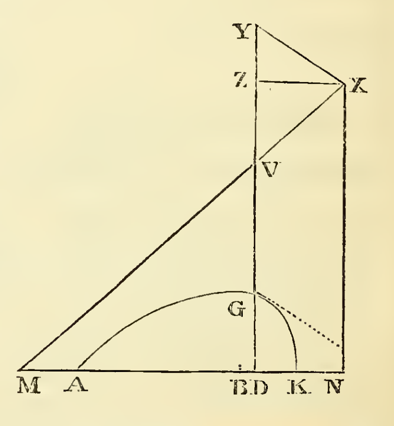
(x) * *Prodibit densitas ut medii ut,* &c. (115.)

(y) * *Et propterea,* &c. Si enim fuerit

propterea si curva inveniri potest eâ lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}|^{n-1}$, vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}|^{n-1}$: corpus movebitur in hâc curvâ in uniformi medio cum resistentia quæ sit ut velocitatis dignitas V^n. Sed redeamus ad curvas simpliciores.



Quoniam motus non fit in parabolâ nisi in medio non resistente, in hyperbolis verò hic descriptis fit per resistentiam perpetuam; perspicuum est quod linea, quam projectile in medio uniformiter resistente describit, propius (z) accedit ad hyperbolas hasce quàm ad parabolam. Est utique linea illa hyperbolici generis, (a) sed quæ circa verticem magis distat ab asymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipsas accedit quàm pro ratione hyperbolarum quas hic descripsi. Tanta verò non est inter has et illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incommodè adhiberi. Et utiliores forsan futuræ sunt hæ, quàm hy-



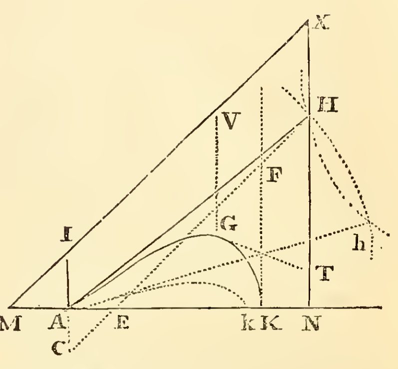
$\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$ in ratione a ad b, erit $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} = \frac{a}{b} \times \frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, et $\frac{S \times AC^{n-1}}{R^{\frac{4-n}{2}} \times HT^{n-1}} = \frac{a}{b}$, id est densitas medii ut quantitas data $\frac{a}{b}$, et proinde uniformis. Est autem (per Cor. 1. Prop. X.) $\frac{HT}{AC} = \sqrt{\overline{1+QQ}}$: quare si data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, data quoque erit ratio quadratorum $\frac{S^2}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{1+QQ}|^{n-1}$, et contra.

(z) * *Accedit ad hyperbolas hasce,* cum iis tamen perfecte convenire nunquam potest, quod in hisce hyperbolis densitas medii reciprocè proportionalis sit rectæ variabili X Y, et præterea non satis manifestum sit curvam, quam projectile in medio uniformi describit in hypothesi resistentiæ velocitatis quadrato proportionalis, habere asymptotum verticalem ut X N: cùm præsertim in hâc resistentiæ hypothesi spatium motu horizontali insito descriptum, semotâ gravitate, infinitum evadat (per Cor. 1. Prop. V.) Verumtamen inveniri possunt hyperbolæ in quibus pro parte illâ exiguâ curvæ A G K, quæ in rebus practicis necessaria est, recta X Y sit quam proximè constans, et proindè medii densitas quam proxime uniformis; quo fit ut curvæ illæ in rebus practicis non incommodè adhibere possint.

(a) * *Sed quæ circa verticem,* &c. Hæc demonstrabuntur infra in notâ (b).

perbola magis accurata et simul magis composita. Ipsæ verò in usum sic deducentur.

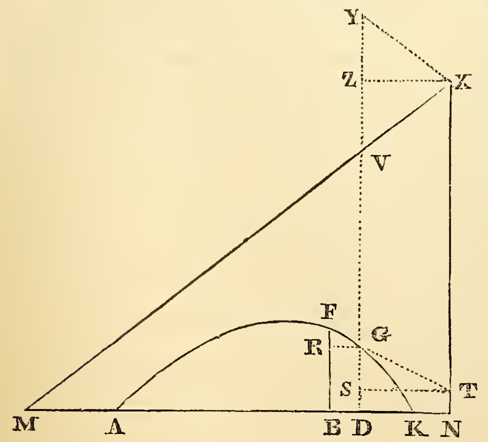
Compleatur parallelogrammum X Y G T, (b) et recta G T tanget hyperbolam in G, ideôque densitas medii in G, est reciprocè ut tangens G T, et velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, resistentia autem ad vim gravitatis ut G T ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in G V.



Proinde si corpus de loco A secundùm rectam A H projectum describat hyperbolam A G K, et A H producta occurrat asymptoto N X in H, actaque A I eidem parallela occurrat alteri asymptoto M X in I: (c) erit medii densitas in A reciprocè ut A H, et corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac resistentia ibidem ad gravitatem ut A H ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in A I. Unde prodeunt sequentes regulæ.

(d) *Reg.* 1. Si servetur tum medii densitas in A, tum velocitas quâcum

(b) * *Et recta G T tanget hyperbolam in G.* Ex puncto G ad ordinatam B F per B ductam,

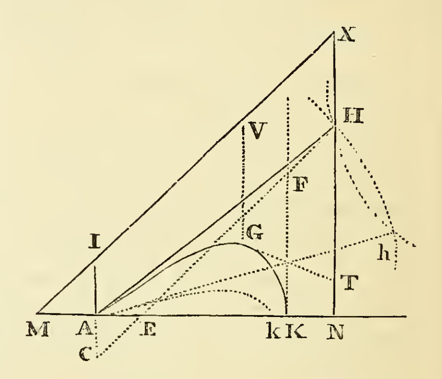


et ex puncto T ad ordinatam D G demissa sint perpendicula G R et T S, sitque G T tangens in G. Erit F R ad R G seu B D, ut G S ad S T, ob triangula similia F R G, G S T. Sed F R est Q o seu $\frac{nbbO}{A^{n+1}} - \frac{d}{e}O$, B D est O, et S T = Z X = A. Quare erit $\frac{nbb}{A^{n+1}} - \frac{d}{e}$ ad 1, seu $\frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$ ad A, ut G S ad Z X seu A. Supra invenimus Z Y $= \frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$. Ergo Z Y = G S; et ideò tangens G T æqualis est et parallela rectæ Y X. Est autem (ex demonstr.) densitas medii in G reciprocè ut Y X: quare densitas medii in G est reciprocè ut tangens G T, velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GT^2}{GV}}$, et resistentia ad gravitatem ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2} \times$ G V.

(c) * *Erit medii densitas,* &c. Coincidente puncto G cum A, tangens G T cum tangente A H congruit, et recta V G cum A I, proindeque *medii densitas in A est reciprocè ut A H, et corporis,* &c.

(d) * *Reg.* 1. Manentibus indice hyperbolæ n et densitate medii in A, manet tangentis longitudo A H quæ densitati reciprocè proportionalis

corpus projicitur, et mutetur angulus N A H; manebunt longitudines A H, A I, H X. Ideóque si longitudines illæ in aliquo casu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo N A H expeditè determinari potest.



(e) *Reg.* 2. Si servetur tum angulus N A H, tum medii densitas in A, et mutetur velocitas quâcum corpus projicitur; servabitur longitudo A H, et mutabitur A I in duplicatâ ratione velocitatis reciprocè.

(f) *Reg.* 3. Si tam angulus N A H, quàm corporis velocitas in A, gravitasque acceleratrix servetur, et proportio resistentiæ in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quâcunque; augebitur proportio A H ad A I in eâdem ratione, manente parabolæ prædictæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$: et propterea minuetur A H in eâdem

est. Manente velocitate quâcum corpus e loco A projicitur, manet linea $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$ quæ est ut velocitas; et ideò cùm data sit A H, datur et A I. Ob parallelas G T, Y X, est $TX = GY = GV + VY = GV + n \times GV$ (Exemp. 4.), et quia coincidente puncto G cum A, fit $GV = AI$, et $TX = HX$; erit $HX = AI + n \times AI$. Quare ob datas quantitates A I et n, datur et H X. Unde si longitudines illæ A H, A I, et H X in aliquo casu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo N A H expedite determinari potest. His enim datis, dantur puncta A, H et I. Per H ducatur X H N recta horizontali A N verticalis, et dabitur punctum N; et quia data est H X, dabitur etiam punctum X; datis verò punctis duobus X et I, dabitur recta X I M cum puncto M ubi horizontalem M N secat. Unde ductâ quâvis rectâ V D ad horizontalem A N normali, si in ea capiatur V G ad A I, ut est AN^n ad DN^n, vel ut XI^n ad XV^n, dabitur punctum G in trajectoria A G K. Est enim (Exemplo 4.) ordinata quævis V G ad alteram ordinatam I A, ut AN^n ad DN^n, seu ut XI^n ad XV^n.

(e) * *Reg.* 2. Servatâ medii densitate in A, servabitur tangentis longitudo A H, quæ est ut densitas inversè. Et quia velocitas in A est ut $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, et velocitatis quadratum ut $\frac{AH^2}{AI}$, id est, ut $\frac{1}{AI}$ ob datam A H; erit A I velocitatis quadrato reciprocè proportionalis.

(f) * *Reg.* 3. Datâ corporis velocitate et gravitate acceleratrice in A, datur longitudo $\frac{AH^2}{AI}$ tum velocitatis quadrato, tum lateri recto parabolæ (Exemp. 4.) proportionalis. Est autem resistentia motrix, si ita loqui fas est, ad gravitatem motricem, ut A H ad $\frac{2nn + 2n}{n + 2} \times AI$ (Exemp. 4.). Quare si proportio resistentiæ motricis in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quæcumque, augebitur proportio A H ad $\frac{2nn + 2n}{n + 2}$ A I, seu, ob datum numerum $\frac{2nn + 2n}{n + 2}$ augebitur proportio A H ad A I in eâdem ratione; et quia longitudo $\frac{AH^2}{AI}$ constans est, ac proinde $\frac{AH}{AI}$ est ut $\frac{1}{AH}$, et A I ut AH^2, necessum est ut A H minuatur in ratione quâ augetur $\frac{AH}{AI}$, et ut A I minuatur in ratione illâ duplicatâ.

ratione, et A I minuetur in ratione illâ duplicatâ. (g) Augetur verò proportio resistentiæ ad pondus, ubi vel gravitas specifica sub æquali magnitudine fit minor, vel medii densitas major, vel resistentia, ex magnitudine diminutâ diminuitur in minore ratione quàm pondus.

(h) *Reg.* 4. Quoniam densitas medii prope verticem hyperbolæ major

(g) 121. * *Augetur verò proportio resistentiæ ad pondus*, &c. Corpus specificè gravius vel levius dicitur, quod sub æquali volumine majus vel minus pondus habet quàm alterum corpus quocum comparatur; et ideò gravitas specifica corporis, volumine dato, est ut ipsius pondus absolutum, id est, datâ gravitate acceleratrice, ut corporis massa (per defin. 7. et not. 3. Lib. I.) At, dato volumine, massa est ut densitas (2. Lib. I.); quare gravitas specifica corporis est ipsius densitati proportionalis. Augetur itaque proportio resistentiæ ad gravitatem motricem seu ad corporis pondus, tum ubi manentibus corporis volumine, figurâ et velocitate ac medii densitate, manenteque proinde resistentiâ, gravitas specifica fit minor; tum ubi, cæteris paribus, medii densitas augetur, quo casu medii resistentia crescit cum densitate, et corporis pondus in fluido densiori et specificè graviori magis sublevati minuitur; tum ubi resistentia ex magnitudine corporis diminutâ, diminuitur in minori ratione quàm pondus. Ex quibus liquet tertiam regulam determinandis motibus corporum variæ magnitudinis et densitatis accommodatam esse.

122. *Lemma.* Datâ curvâ A G K, invenire minimam tangentium G T. Quoniam (ex dem. in Exemp. 4.) $XY^2 = GT^2 = A^2 + \frac{dd}{ee} \times A^2 - \frac{2dnbb}{eB^{n-1}} + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$; hujus quantitatis, in quâ si detur curva A G K, sola est variabilis A, fluxio ponenda est nihilo æqualis (48.). Brevitatis causâ dicantur $1 + \frac{dd}{ee} = f$, $\frac{2dnbb}{e} = 2g$, $nnb^4 = h$, et $A = x$; erit $GT^2 = fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}$; et sumptis fluxionibus, $o = 2fxdx + \overline{n-1} \times 2gx^{-n}dx - 2nhx^{-2n-1}dx$. Dividatur æquatio tota per $2xdx$, et fiet $o = f + \overline{n-1}gx^{-n-1} - nhx^{-2n-2}$; et multiplicando per x^{2n+2}, $fx^{2n+2} + \overline{n-1}gx^{n+1} = nh$, unde eruitur, ut fit in resolutione æquationum secundi gradus, $x^{n+1} = \frac{\sqrt{(n-1)^2gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f}$, et hinc habetur

$$x = \left(\frac{\sqrt{(n-1)^2gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Quare si loco x substituatur, hic ipsius valor in æquatione $GT = \sqrt{fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}}$, obtinebitur minima tangentium. Q. e. i.

123. *Corol.* Si curva A G K sit hyperbola conica, erit index $n = 1$, et ideò $n - 1 = o$, et $x = \sqrt[4]{\frac{h}{f}}$. Unde invenitur $GT^2 = f\sqrt[2]{\frac{h}{f}} - 2g + \frac{h}{\sqrt{\frac{h}{f}}} = 2\sqrt[2]{hf} - 2g = \frac{2bb}{e} \times \sqrt{ee + dd} - \frac{2dbb}{e} = 2bb \times \frac{[\sqrt{ee+dd} - d]}{e}$. Quia vero (Exemp. 4.) $d : e = VZ : XZ = XN : MN$, ac proinde $dd : ee = XN^2 : MN^2$, et componendo $dd + ee : ee = XN^2 + MN^2$, seu $MX^2 : MN^2$, atque adeò $\frac{\sqrt{ee + dd}}{e} = \frac{MX}{MN}$, et $\frac{d}{e} = \frac{XN}{MN}$; erit $\frac{\sqrt{ee + dd} - d}{e} = \frac{MX - XN}{MN}$. Præterea (Exemp. 4.) est $VG = \frac{bb}{DN}$, $AI = \frac{bb}{AN}$, et hinc $2AI \times AN = 2bb$. Erit igitur minimæ tangentium quadratum $GT^2 = \frac{2AI \times AN}{MN} \times \overline{MX - XN}$.

(h) * *Reg.* 4. Quoniam densitas in loco quovis G est reciprocè ut tangens G T, quæ prope verticem hyperbolæ minor est quàm in loco A; manifestum est densitatem medii prope verticem hyperbolæ majorem esse quàm in loco A. Densitas in loco A dicatur K, in loco G per quem ducitur tangentium minima G T, dicatur B; et erit $K : B = GT : AH$, et hinc $K + B : K = GT + AH : GT$, et $\frac{K + B}{2} : K = \frac{GT + AH}{2} : GT$. Esset autem $\frac{K + B}{2}$ densitas mediocris, si tangens A H foret omnium maxima, sicuti G T (Hyp.) est omnium minima; et ideò, ut medii densitas ferè tanquam uniformis haberi posset, augenda esset densitas in A in ratione semisummæ tangentium $\frac{GT + AH}{2}$ ad minimam tangentium G T. Verùm quia tangens A H non est omnium maxima, sed tangentes aliæ ad partes curvæ versus K ductæ majores sunt; densitas in A augenda est in ratione paulo majore quàm semisummæ $\frac{GT + AH}{2}$ ad G T, ut medium tanquam uniforme ferè censeatur. Atque hoc pacto errores oriundi ex eo quod medium in loco A densius supponatur, corrigentur ferè aliis erroribus qui nascuntur ex eo quod in G medium rarius fingatur quam pro ratione curvæ A G K.

est quàm in loco A; ut habeatur densitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium H T ad tangentem A H inveniri, et densitas in A augeri in ratione paulo majore quàm semisummæ harum tangentium ad minimam tangentium G T.

(i) *Reg.* 5. Si dantur longitudines A H, A I, et describenda sit figura A G K: produc H N ad X, ut sit H X ad A I ut $n + 1$ ad 1, centroque X et asymptotis M X, N X per punctum A describatur hyperbola, eâ lege, ut sit A I ad quamvis V G ut XV^n ad XI^n.

(k) *Reg.* 6. Quò major est numerus n, eò magis accuratæ sunt hæ

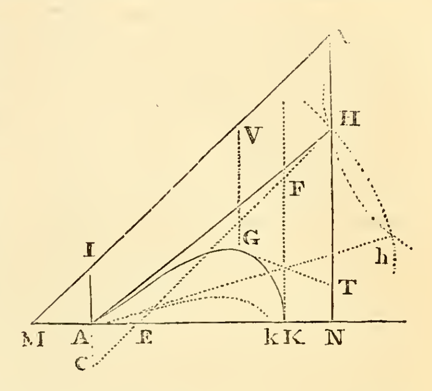
Interim liquet veram trajectoriam quam corpus in medio uniformi describit, circa verticem magis distare ab asymptotis, et in partibus a vertice remotioribus propius ad ipsas accedere quàm pro ratione hyperbolarum in medio non uniformi descriptarum. Nam si e loco A, cum velocitate $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, et directione A H projiciatur corpus in medio cujus densitas uniformis æqualis sit densitati mediocri medii in quo describitur hyperbola A G K; ob majorem medii uniformis densitatem in A, qua corporis velocitas impressa magis minuitur, trajectoria intra hyperbolam continebitur, adeóque prope verticem ab asymptotis magis distabit; et quia prope verticem est magis depressa, in partibus versus K a vertice remotioribus ad asymptotum N X propius accedet quàm hyperbola A G K; cum præsertim in medio uniformi spatium motu horizontali descriptum, semotâ gravitate, infinitum evadat (per Cor. 1. Prop. V.).

(i) * *Reg.* 5. Si dentur longitudines A H, A I cum angulo H A N, et describenda sit figura A G K: ex puncto H ad horizontalem A N demitte perpendiculum H N; produc H N ad X, ut sit H X æqualis facto sub $n + 1$ et A I (demonstravimus enim in notâ ad Reg. 1. esse H X æqualem facto $\overline{n+1} \times AI$) centroque X et asymptotis M X, N X per punctum A describatur hyperbola, eâ lege, ut sit A I ad quamvis V G ut XV^n ad XI^n: est enim (per Hyp. Exemp. 4.) V G ad A I, ut AN^n ad DN^n, seu ut XI^n ad XV^n.

(k) * *Reg.* 6. Quo major est numerus n, eo magis hæ hyperbolæ in ascensu corporis ab A accedunt ad trajectorias in medio uniformi descriptas, et eo minus in descensu ad K accuratæ sunt; et contrà. Nam quò major est numerus n, eò minus tangens G T, quæ densitati reciprocè proportionalis est, in ascensu corporis ab A variatur; et eo magis in descensu ad K mutatur, quippe data sit medii densitas in A cum angulo projectionis H A N, et quantitas $\frac{n+2}{AH}$ densitati in A (Exemp. 4.) proportionalis, data erit, ideóque tangens A H eo longior erit quò major fuerit numerus n; et quia dato angulo H A N, datur specie triangulum rectangulum H N A, ratioque proinde laterum A H, A N, H N etiam datur, liquet quod crescente A H aut numero n, crescant quoque latera A N et H N. Ex demonstratis in Exemplo 4°. corpore ascendente tangentis G T quadratum $GT^2 = DN^2 + [ZV - nVG]^2$, et corpore descendente est $GT^2 = DN^2 + [nVG - ZV]^2$. Ex natura hyperbolæ A G K, est $DN^n : AN^n = AI : VG$, ideóque $nVG = \frac{nAI \times AN^n}{DN^n}$. Ex demonstratione Regulæ 1æ, $HX = \overline{n+1} \times AI$, et proinde $NX = HN + \overline{n+1} \times AI$, et $NX - AI = HN + nAI$. Sed ob triangula X Z V, M N X, M A I similia, Z X seu D N est ad Z V, ut M N ad N X, et ut M A ad A I, et divisim D N est ad Z V, ut A N ad $NX - AI$ seu $HN + nAI$; unde fit $ZV = \frac{DN \times HN + nAI \times DN}{AN}$.

Quarè in corporis ascensu $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{DN \times HN + nAI \times HN}{AN} - \frac{nAI \times AN^n}{DN^n}\right)^2$ et in descensu $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{nAI \times AN^n}{DN^n} - \frac{DN \times HN + nAI \times DN}{AN}\right)^2$. Jam verò si numerus n satis magnus fuerit, lineæ A H, A N, H N tam in ascensu quam in descensu corporis longiores sunt, et in ascensu ab A est fere D N æqualis A N, in descensu verò D N quantum libet minor ipsâ A N. Unde in ascensu ab A est fere $\frac{nAI \times DN}{AN} = nAI$ et ideò $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{DN \times HN}{AN}\right)^2 = DN^2 + HN^2$ ferè. Est autem $AH^2 = AN^2 + HN^2$: quare ratio G T ad A H in ascensu corporis ab A est fere æqualitatis, dum numerus n satis magnus supponitur, ac proinde non multum variatur densitas: in descensu verò ad K, fit D N quantumlibet exigua respectu datæ A N, et ideò quantitas $\frac{nAI \times AN^n}{DN^n}$ vehementer crescit, et hinc tangens G T multum variatur ubi numerus n magnus est. Contra fit, si numerus ille sit admodum exiguus.

hyperbolæ in ascensu corporis ab A, et minus accuratæ in ejus descensu ad K; et contra. Hyperbola conica mediocrem rationem tenet, estque cæteris simplicior. Igitur si hyperbola sit hujus generis, et punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis A N per punctum A transeuntem, quæratur: occurrat producta A N asymptotis M X, N X in M et N, et sumatur N K ipsi A M æqualis.



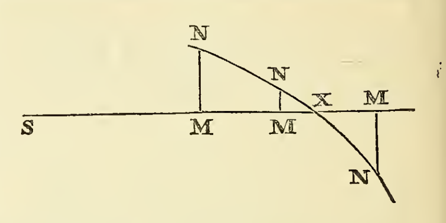
Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc hyperbolam ex phænomenis. Projiciantur corpora duo similia et æqualia, eâdem velocitate, in angulis diversis H A K, h A k, incidantque in planum horizontis in K et k; et notetur proportio A K ad A k. Sit ea d ad e. Tum erecto cujusvis longitudinis perpendiculo A I, assume utcunque longitudinem A H vel A h, (l) et inde collige graphicè longitudines A K, A k, per Reg. 6. Si ratio A K ad A k sit eadem cum ratione d ad e, (m) longitudo A H rectè assumpta fuit. Sin minus cape in

Porro cùm numerus n possit esse quilibet integer vel fractus, et in hyperbola conica sit n æqualis unitati, quæ veluti medium locum tenet inter numeros omnes integros et fractos, satis manifestum est hyperbolam conicam inter superiores omnes et inferiores hyperbolas mediocrem rationem tenere, et quia etiam cæteris simplicior est, posse loco veræ trajectoriæ in medio uniformiter denso adhiberi. Si igitur hyperbola A G K sit hujus generis, et punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis A N, horizontalem vel horizonti obliquam, per punctum A transeuntem, quæratur: occurrat producta A N asymptotis M X, N X, in M et N, et sumatur N K ipsi A M æqualis, et habebitur punctum K (per Theor. I. de conicis.).

(l) * *Et inde collige graphicè*, &c. Datâ enim tangente A H, tum magnitudine tum positione, datur verticalis H N cum puncto N; et quia assumitur etiam A I, et est H X = 2 A I (per dem. Reg. 1æ.) ob n = 1; dabitur hyperbolæ centrum X, et inde ob datum punctum I dabitur asymptotus altera X I M cum puncto M in horizontali M N; et capiendo N K æqualem datæ M A, dabitur punctum K, et hinc longitudo A K obtinebitur. Eodemque modo invenietur altera longitudo A k.

(m) * *Longitudo A H rectè assumpta fuit.* Datâ medii densitate in A cum velocitate corporis sub diversis angulis H A K, h A k projecti, manet perpendiculum A I, et tangens A H æqualis est tangenti A h (per Regulam 1am). Datis tangente A H, angulo H A K et perpendiculo A I, hyperbola A G K describi potest (per Reg. 6am. et notam præced.) et ideò data est tum specie, tum magnitudine. Unde si dentur tantum angulus H A K et ratio tangentis H A ad A I, hyperbola A G K specie tantum dabitur, id est, omnes hyperbolæ, quæ ex his duobus datis describentur, similes erunt. Quare si in hyperbolâ A G K, quæ in chartâ descripta supponitur, tangens assumpta A H sit ad perpendiculum A I, ut tangens hyperbolæ quam corpus sub angulo æquali H A K projectum in medio resistente describit, est ad suum perpendiculum A I; hyperbola A G K in charta descripta similis erit hyperbolæ quæ in medio resistente describitur. Et eodem argumento altera hyperbola, cujus est amplitudo A k, et tangens A h, manente perpendiculo A I, similis erit hyperbolæ illi quam corpus sub angulo æquali h A k, projectum in secundo experimento describit. Quâ propter, ob figurarum in chartâ et in medio resistente descriptarum similitudinem, amplitudines A K, A k erunt inter se ut homologæ amplitudines hyperbolarum quæ in experimentis descriptæ sunt, id est, A K : A k = d : e.

rectâ infinitâ S M longitudinem S M æqualem assumptæ A H, et erige perpendiculum M N æquale rationum differentiæ $\frac{A\,K}{A\,k} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex assumptis pluribus longitudinibus A H invenienda sunt plura puncta N, et per omnia agenda (n) curva linea regularis N N X N, secans rectam S M M M in X. Assumatur demum A H æqualis abscissæ S X, et inde denuo inveniatur longitudo A K; et longitudines, quæ sint ad assumptam longitudinem A I et hanc ultimam A H, ut longitudo A K per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem A K, erunt veræ illæ longitudines A I et A H, (o) quas invenire oportuit. Hisce verò datis dabitur et resistentia medii in loco A, (p) quippe quæ sit ad vim gravitatis ut A H ad $\frac{4}{3}$ A I. Augenda est autem densitas medii per Reg. 4. et resistentia modo inventa, (q) si in eâdem ratione augeatur, fiet accuratior.



Reg. 8. (r) Inventis longitudinibus A H, H X; si jam desideretur positio rectæ A H, secundum quam projectile, datâ illâ cum velocitate emissum incidit in punctum quodvis K: ad puncta A et K erigantur rectæ A C, K F horizonti perpendiculares, quarum A C deorsum tendat, et æquetur ipsi A I seu $\frac{1}{2}$ H X. Asymptotis A K, K F (s) describatur hyperbola, cujus conjugata transeat per punctum C, centroque A et intervallo A H describatur circulus secans hyperbolam illam in puncto H;

(n) * *Curva regularis.* Vide notam 75. Lib. hujus.

(o) * *Quas invenire oportuit.* Cùm enim abscissa S M longitudini assumptæ A H æqualis sit, et rationum differentia $\frac{A\,K}{A\,k} - \frac{d}{e}$ exponatur per ordinatam M N; ubi fit S M = S X et proinde M N = o, est etiam $\frac{A\,K}{A\,k} - \frac{d}{e} = o$, et ideò $\frac{A\,K}{A\,k} = \frac{d}{e}$, atque S X æqualis veræ longitudini assumendæ A H (per not. præced.) Si itaque ex datis perpendiculo A I et verâ longitudine inventâ A H cum angulo H A N quæratur, ut supra, longitudo A K; ob similitudinem figurarum in medio resistente et in charta descriptarum, erit longitudo A K experimento cognita ad longitudinem A K ultimo inventam in charta, ut longitudo A H in medio resistente ad longitudinem A H in chartâ ductam, atque etiam ut perpendiculum A I in medio resistente ad perpendiculum A I in charta assumptum. Quibus inventis, describi poterit hyperbola similis et æqualis hyperbolæ, quam corpus in medio resistente descripsit.

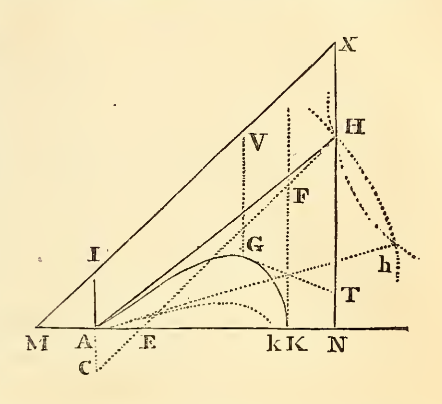
(p) * *Quippe quæ sit ad vim gravitatis,* &c. Ex demonstratis in hoc scholio ante Regulam 1. resistentia est ad gravitatem ut A H ad $\frac{2nn+2n}{n+2} \times$ A I, hoc est, ut A H ad $\frac{4}{3}$ A I, ob n = 1 (per Hyp.)

(q) * *Si in eadem ratione augeatur.* Nam datâ velocitate, resistentia est ut medii densitas.

(r) * *Inventis longitudinibus A H, H X,* &c. Inventis enim (per Reg. 7.) lineis A I et A H, datur linea H X, ut pote quæ æqualis est 2 A I, ob n = 1, (Reg. 5.)

(s) * *Describatur hyperbola.* (346. Lib. I.)

et projectile secundum rectam A H emissum incidet in punctum K. Q. e. i. Nam punctum H, (t) ob datam longitudinem A H, locatur alicubi in circulo descripto. Agatur C H occurrens ipsis A K et K F, illi in E, huic in F; (u) et ob parallelas C H, M X, et æquales A C, A I, erit A E æqualis A M, et propterea etiam æqualis K N. Sed C E est ad A E ut F H ad K N, et propterea C E et F H æquantur. Incidit ergo punctum H in hyperbolam asymptotis A K, K F descriptam, cujus conjugata transit per punctum C, atque ideò reperitur in communi intersectione hyperbolæ hujus et circuli descripti. Q. e. d. Notandum est autem, quòd hæc operatio perinde se habet, sive recta A K N horizonti parallela sit, sive ad horizontem in (x) angulo quovis inclinata: (y) quodque ex duabus intersectionibus H, h duo prodeunt anguli N A H, N A h; et quod in praxi mechanicâ sufficit circulum semel describere, deinde regulam interminatam C H ita applicare ad punctum C, ut ejus pars F H, circulo et rectæ F K interjecta, æqualis sit ejus parti C E inter punctum C et rectam A K sitæ.



(t) * *Ob datam longitudinem A H*, per Reg. 1am.

(u) * *Et ob parallelas C H, M X*, &c. Nam si supponamus H esse punctum quæsitum, per quod ducenda est recta A H, erit (per constr.) H X æqualis et parallela I C, et ideò C H parallela I X seu M X, ac triangula C A E, I A M similia proindeque cum sit C A = A I (per constr.) erit etiam A E = M A = K N, (per Theor. I. de conicis). Sed ob triangula similia C A E, H N E, et ob parallelas K F, N H, est C E : A E = E H : E N = F H : K N. Cum igitur sit A E = K N, erit quoque C E = F H; ac proinde incidit punctum H in hyperbolam (per Theor. I. de Hyp.)

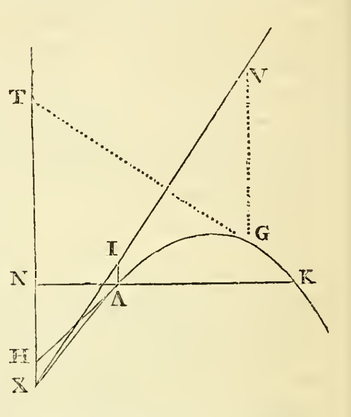
(x) * *In angulo quovis inclinata.* Demonstratio enim lineam M A K N per puncta data A et K ductam horizonti parallelam esse minime supponit, eademque prorsus manet si linea illa ad horizontem inclinata fuerit.

(y) * *Quodque ex duabus intersectionibus.* Quoniam punctum H per intersectionem circuli cum hyperbola determinatur (ex dem.), et circulus hyperbolam in duobus punctis intersecare potest, ex duabus intersectionibus H, h duo prodeunt anguli, seu duæ sunt positiones tangentis A H secundum quam projectile datâ velocitat emissum incidit in punctum K.

124. *Problema.* Inventis longitudinibus A I et A H, maximam altitudinem G D, ad quam corpus sub angulo dato H A N projectum pertingere potest, definire.

Sit, ut in exemplo 3°. (vid. fig. pag. 74.) B N = a, B D = o, N X = c, ratio data V Z ad Z X, seu A I ad A M = $\frac{m}{n}$, V G = $\frac{bb}{a}$, ideóque A I = $\frac{bb}{AN}$, et b b = A I × A N. Et erit (Exemp. 3°.) G D = c − $\frac{m}{n}$ a − $\frac{bb}{a}$ + $\frac{m}{n}$ o − $\frac{bb}{aa}$ o, &c., et $\frac{m}{n}$ o − $\frac{bb}{a}$ o = Q o. Est autem Q o ut ordinatæ G D fluxio, quæ, ut habeatur ordinata omnium maxima, nihilo æquanda est (48): quare erit $\frac{m}{n} = \frac{bb}{aa}$, et a a = $\frac{nbb}{m}$, sive D N² = $\frac{AM \times AI \times AN}{AI}$ = A N × A M. Si ergo capiatur D N media oroportionalis inter A N et A M, ducatur-

Quæ de hyperbolis dicta sunt facilè applicantur ad parabolas. Nam si X A G K parabolam designet quam recta X V tangat in vertice X, sintque ordinatim applicatæ I A, V G ut quælibet abscissarum X I, X V dignitates XI^n, XV^n; agantur X T, G T, A H; quarum X T parallela sit V G, et G T, A H parabolam tangant in G et A: et corpus de loco quovis A, secundum rectam A H productam, justâ cum velocitate projectum, describet hanc parabolam, si modò densitas medii, in locis singulis G, sit reciprocè ut tangens G T. Velocitas autem in G ea erit quâcum projectile pergeret, in spatio non resistente in parabolâ conicâ verticem G, diametrum V G deorsum productam, et latus rectum $\frac{2\,GTq}{nn - n \times VG}$ habente. Et resistentia in G erit ad vim gravitatis ut G T ad $\frac{2nn - 2n}{n - 2}$ V G. Unde si N A K lineam horizontalem de-



que per D ordinata G D, hæc erit omnium maxima. Quoniam verò $\frac{m}{n} = \frac{bb}{aa}$ et proinde $\frac{m}{n}a = \frac{bb}{a}$, erit maxima ordinata G D seu $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} = c - \frac{2bb}{a} = NX - \frac{2AI \times NA}{DN}$. Quare G D ordinata maxima æqualis est differentiæ inter verticalem N X et quartam proportionalem ad D N, A N et 2 A I. Q. e. i.

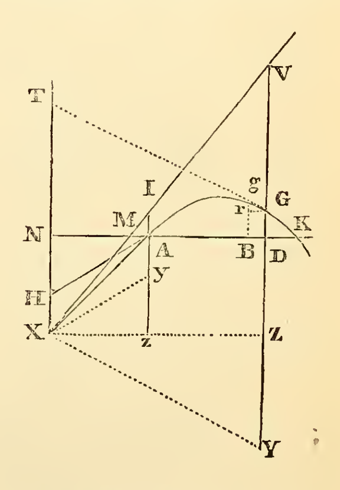
125. *Problema.* Datis longitudinibus A I et A H, angulum projectionis H A N maximæ omnium amplitudini A K convenientem invenire. Dicantur A H $= a$, A I $= b$, H X $=$ 2 A I $= 2b$, A K $= e$, A N $= x$, H N $= y$, et erit $x - e =$ K N $=$ M A $=$ A E, ac $b =$ A I $=$ A C (per Reg. 8.), proindeque E N $=$ A K $= e$. Triangula similia E A C, E N H hanc proportionem suppeditant, A E $(x - e)$: E N (e) $=$ A C (b) : H N (y), et componendo $x : e = b + y : y$, unde habetur $e = \frac{xy}{b + y}$, $x = \frac{be + ey}{y}$, et $xx = ee\frac{[b+y]^2}{yy}$. Est etiam, ob angulum A N H rectum, $aa - yy = xx = ee\frac{[b+y]^2}{yy}$, et hinc $aayy - y^4 = ee[b+y]^2$. Capiatur hujus æquationis fluxio, et amplitudinis maximæ e fluxione nihilo æquatâ (48), erit illa $2a^2ydy - 4y^3dy = 2ee[b+y]dy$, et, dividendo per $2dy$, $aay - 2y^3 = ee \times [b+y]$. Erat autem $e = \frac{xy}{b+y}$, et ideò $ee = \frac{xxyy}{[b+y]^2} = \frac{aayy - y^4}{[b+y]^2}$, ac oroinde $ee(b+y) = \frac{aayy - y^4}{b+y}$. Quare erit $aay - 2y^3 = \frac{aayy - y^4}{b+y}$, sive $aaby + aay^2 - 2by^3 - 2y^4 = aay^2 - y^4$, unde, reductione factâ et divisis terminis per y, eruitur $aab = 2byy + y^3$. Hâc igitur æquatione resolutâ, invenitur y seu H N sinus anguli H A N, existente sinu toto A H. Q. e. d.

126. *Corol.* Manifestum est in æquatione $aab = 2byy + y^3$, quantitatem $2byy$ minorem esse quantitate aab, et proinde quadratum yy, seu HN^2, minus dimidio quadrato $\frac{1}{2}aa$ vel $\frac{1}{2}AH^2$; unde sequitur angulum quæsitum H A N semirecto minorem esse, qui, si medium non resisteret, foret semirectus. Sit medii densitas, adeóque et resistentia, admodum parva, et erit ferè $y = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, atque $aab = 2byy + ayy\sqrt{\frac{1}{2}}$, et hinc $yy = \frac{aab}{2b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}$, ac $y = a\sqrt{\frac{b}{2b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}}$, quàm proximè.

signet, et manente tum densitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus N A H; manebunt longitudines A H, A I, H X, et inde datur parabolæ vertex X, et positio rectæ X I, et sumendo V G ad I A ut XV^n ad XI^n, dantur omnia parabolæ puncta G, (z) per quæ projectile transibit.

(z) *Per quæ projectile transibit.* Producatur V G ut horizontalem N K secet in D, et rectam X Z horizonti parallelam in Z. Pro B N, B D, N X scribantur A, O, c, respectivè; sitque M intersectio linearum X V, N K; et X N ad N M, sive ob triangulorum X N M, V Z X similitudinem, V Z ad Z X vel D N ut d ad e; ideóque $DN = A + O$, et $VZ = \frac{d}{e} \times (A + O)$. Quia vero V G est ut XV^n (per Hyp.), et V X est ad X Z, seu D N, in datâ ratione X N ad N M; erit etiam V G ut DN^n. Ponatur ergo $VG = \frac{DN^n}{bb} = \frac{\overline{A+O}|^n}{bb} = \frac{A^n}{bb} + \frac{nA^{n-1}O}{bb} + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}\frac{A^{n-2}}{bb}O^2 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}\frac{A^{n-3}}{bb}O^3 +$, &c., et erit $GD = VZ - NX - VG = \frac{d}{e} \times A + O - c - \frac{\overline{A+O}|^n}{bb} = \frac{d}{e}A - c - \frac{A^n}{bb} + \frac{d}{e}O - \frac{nA^{n-1}}{bb}O - \frac{(nn-n)A^{n-2}}{2bb}O^2 - \frac{(n^3 - 3nn + 2n)A^{n-3}}{6bb}O^3 -$, &c. Quare erit $Q = \frac{nA^{n-1}}{bb} - \frac{d}{e}$; $R = \frac{\overline{nn-n}A^{n-2}}{2bb}$, et $S = \frac{\overline{n^3-3nn+2n}A^{n-3}}{6bb}$.

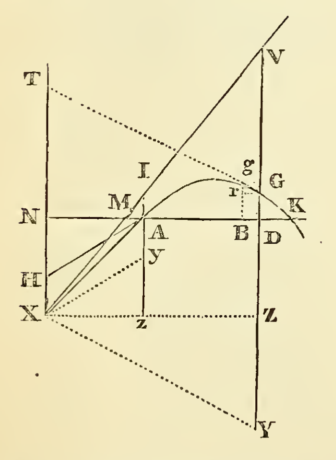
Per punctum B ducatur ordinata B g, ad quam demittatur ex G perpendiculum G r, sitque X Y æqualis et parallela tangenti G T; et ob triangula G r g, X Z Y similia, erit Gr^2 ad Gg^2 ut XZ^2 seu DN^2 ad XY^2 vel GT^2; est autem $Gr^2 = O^2$, $rg^2 = QQOO$, et ideò $Gg^2 = OO \times \overline{1+QQ}$: quare cum sit etiam B N seu D N = A, erit $GT^2 = AA \times \overline{1+QQ}$, $GT = A\sqrt{\overline{1+QQ}}$, et $\frac{GT}{A} = \sqrt{\overline{1+QQ}}$. Per Corol. 1. Prop. X. medii densitas in loco G est ut $\frac{S \times A}{R \times GT}$, et (ex demonstratis) $\frac{S}{R} = \frac{n-2}{3A}$, ideóque $\frac{S \times A}{R \times GT}$ est ut $\frac{n-2}{3GT}$; quare, ob datum numerum $\frac{n-2}{3}$, densitas est reciprocè ut tangens G T. Velocitas in G (per Prop. X.) ea est, quâ cum projectile pergeret, in spatio non resistente, in parabolâ conicâ verticem G, diametrum G D, et latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ habente; et ideò cum sit $\frac{1+QQ}{R} = \frac{GT^2}{A^2R} = \frac{2GT^2}{\overline{nn-n} \times \frac{A^n}{bb}} = \frac{2GT^2}{\overline{nn-n} \times VG}$ (ex dem.), parabolæ latus rectum erit $\frac{2GT^2}{nn-n.\ VG}$. Resistentia in G (per Cor. 1. Prop. X.) est ad vim gravitati



$3S \times GT$ ad $4RR \times DN$, id est, ut G T ad $\frac{4RR \times A}{3S}$; sed $4RR \times A = \frac{\overline{nn-n}^2 \times A^{2n-3}}{b^4}$, et $3S = \frac{\overline{nn-n} \times \overline{n-2}}{2} \times \frac{A^{n-3}}{bb}$, atque ideò $\frac{4RR \times A}{3S} = \frac{nn-2n}{n-2} \times \frac{A^n}{bb} = \frac{2nn-2n}{n-2} \times VG$. Erit igitur resistentia ad gravitatem, ut G T ad $\frac{2nn-2n}{n-2} \times VG$. Velocitas in loco G (per Prop. X.) est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}} = \sqrt{\frac{2GT^2}{nn-n \times VG}}$,

ideóque ob datum numerum $\frac{2}{n\,n - n}$, ut $\frac{G\,T}{\sqrt{V\,G}}$.

Quando igitur corpus est in A, medii densitas est ut $\frac{1}{A\,H}$, et velocitas ut $\frac{A\,H}{\sqrt{A\,I}}$; unde manente tum densitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, et mutato utcumque angulo N A H, manebunt A H, et $\frac{A\,H}{\sqrt{A\,I}}$, ac proinde A I. Quia porro $Z\,Y^2 = X\,Y^2 - X\,Z^2 = G\,T^2 - D\,N^2 = A\,A \times \overline{1 + Q\,Q} - A\,A = A\,A\,Q\,Q$, et ideò $Z\,Y = Q \times A = \frac{n\,A^n}{b\,b} - \frac{d}{e}\,A = n\,V\,G - V\,Z$, atque $Z\,Y + V\,Z = V\,Y = n\,V\,G$; erit in loco A, $I\,y = n \times A\,I$, et hinc $A\,y = X\,H = n\,A\,I - A\,I$.

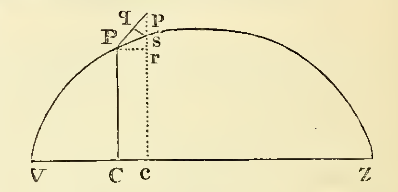


Quare manente A I, manebit etiam H X, ob datum numerum $n - 1$. Inveniantur, uti Regulâ 7â. pro hyperbolâ factum est, longitudines A H, A I et proinde H X; et inde dabitur punctum H, per quod si ducatur T H X ad horizontem perpendicularis, datâ X H, dabitur positio rectæ X I, et sumendo V G ad I A ut $X\,V^n$ ad $X\,I^n$, dabuntur omnia parabolæ puncta G, per quæ projectile transibit.

Problema elegantissimum de inveniendâ trajectoriâ quam corpus in medio juxta duplicatam velocitatum rationem resistente describit, in suis Principiis prætermisit Newtonus. Rem generaliter postea confecerunt clarissimi Mathematici Joannes Bernoullius, Hermannus, et Eulerus, qui trajectoriam a projectili descriptam in medio quod in quâlibet multiplicatâ velocitatum ratione resistit, analyticè invenerunt. Horum vestigiis insistentes, tam elegans problema in nostris commentariis desiderari nolumus.

PROBLEMA.

127. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis V Z, determinare curvam V P p, quam describit projectile in medio uniformi quod in multiplicatâ quâlibet velocitatum ratione resistit.



Ductis ordinatis verticalibus P C, p c infinitè propinquis, et ex puncto P ad p c perpendiculo P r; dicantur vis gravitatis $= g$, velocitas projectilis in loco $P = v$, resistentia ibidem $= r = \frac{v^{2n}}{2\,a}$, ita ut sit a quantitas constans quæ determinabitur ex determinatione resistentiæ, sit tangens P p, arcus $P\,s = d\,s$, $V\,C = x$, $P\,C = y$, et ideò $p\,r = d\,y$, ac C c seu $P\,r = d\,x$; fluxio hæc d x constans supponatur. * Resolvatur actio gravitatis quæ exprimitur per p s in actionem s q curvæ perpendicularem; et actionem p q, curvæ parallelam quæ in ascensu corporis illud retardat in descensu accelerat, erit actio tota gravitatis ad ejus actionem quâ motum in curva retardat in ascensu et accelerat in descensu ut est p s ad p q, et ob similia triangula p q s, P p r, est p s ad p q sicut P p sive P s ad p r, ideóque P s (d s) ad p r (d y) sicut gravitas tota g, ad $\frac{g\,d\,y}{d\,s}$ quæ est actio gravitatis ad retardandum corpus in ascensu, et quia in descensu est $p\,r = -d\,y$, est $\frac{-g\,d\,y}{d\,s}$ actio gravitatis ad accelerandum corpus in descensu; unde tota retardatio corporis tam ex gravitate quam ex resistentia orta, est $r + \frac{g\,d\,y}{d\,s}$ tam in ascensu quam in descensu.

Decrementum autem velocitatis $-d\,v$; est semper ut vis retardans et tempus quo durante ea vis agit conjunctim, idque tempus est semper æquale arcui descripto P s ad velocitatem v applicato, hoc est, temporis incrementum $d\,t = \frac{d\,s}{v}$ unde velocitatis decrementum $-d\,v = \left(r + \frac{g\,d\,y}{d\,s}\right) \times \frac{d\,s}{v} = \frac{r\,d\,s + g\,d\,y}{v}$, et quia ex hypothesi $r = \frac{v^{2n}}{2\,a}$, est $-v\,d\,v = \frac{v^{2n}\,d\,s}{2\,a} - g\,d\,y$; ut autem obtineatur valor v, et d v expressione quæ ad curvam referatur, notandum quòd lineola p s sive $-d\,d\,y$ est spatiolum urgente gravitate tempore d t percursum, ideóque est ut vis gravitatis g per temporis quadratum

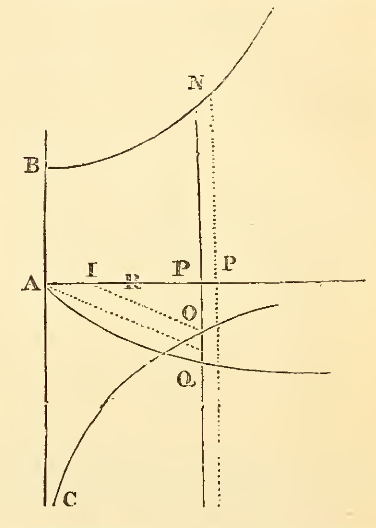
multiplicata, ideóque est $-ddy = gdt^2 = \frac{gds^2}{v^2}$ (cum sit $dt = \frac{ds}{v}$) unde est $v^2 = \frac{gds^2}{-ddy}$ sive $-v^2ddy = gds^2$, et fluxionem utrinque sumendo est $-v^2d^3y - 2vddydv = 2gdsdds$, et cum lineolâ pq designet dds sitque Pp sive Ps (ds) ad Pr (dy) sicut ps ($-ddy$) ad pq (dds) est $dsdds = -dyddy$ unde hæc ultima æquatio fit $-v^2d^3y - 2vddydv = -2gdyddy$ et $-2vddydv = v^2d^3y - 2gdyddy$ et $-vdv = \frac{v^2d^3y}{2ddy} - gdy$, unde cùm inventum etiam fuerit $-vdv = \frac{v^{2n}ds}{2a} - gdy$, est $\frac{v^2d^3y}{ddy} = \frac{v^{2n}ds}{a}$. et valorem inventum $v^2 = \frac{gds^2}{-ddy}$ substituendo, fit tandem $\frac{gds^2d^3y}{-ddy^2} = \frac{g^n ds^{2n+1}}{-addy^n}$ sive reductione factâ $ad^3y = \frac{g^{n-1}ds^{2n-1}}{ddy^{n-2}}$.

Ut autem ex hac æquatione eruatur æquatio inter dx, et dy, et inter x et y, designet p variabiles quascumque quæ in æquatione quæsita ita multiplicant fluxionem dx ut ea sit æqualis dy, sitque $dy = pdx$ et $dy^2 = p^2dx^2$, cum sit $ds^2 = dx^2 + dy^2$ erit $ds^2 = dx^2 + p^2dx^2 = \overline{1+p^2} \times dx^2$, et $ds = dx\sqrt{1+pp}$ unde $ds^{2n-1} = dx^{2n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}$.

Præterea cùm dx constans supponatur erit $dy = pdx$, $ddy = dxdp$, et sumpta fluxione erit et $d^3y = dxddp$. Et si tandem q designet variabiles quæ ita multiplicant fluxionem dx, ut ea fiat æqualis dp, sitque $qdx = dp$ erit $dxdq = ddp$ et $dx^2dq = dxddp = d^3y$, et æquatio proposita in hanc vertetur $adx^2dq =$

$$\frac{g^{n-1}dx^{2n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{\overline{dxdp}|^{n-2}} = \frac{g^{n-1}dx^{n+1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$$

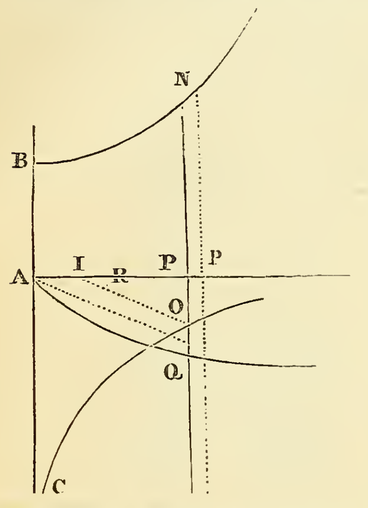
, et diviso utroque termino per dx^2, erit $adq = \frac{g^{n-1}dx^{n-1}\times\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$. Denique loco dx posito ejus valore $\frac{dp}{q}$ erit $adq = \frac{g^{n-1}dp^{n-1}\times\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{n-1}dp^{n-2}}$ sive $adq = \frac{g^{n-1}\times\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{n-1}} \times dp$, hoc est $aq^{n-1}dq = g^{n-1}\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}} dp$, quæ est æquatio fluxionalis inter dp et dq, ex quâ per curvarum quadraturam obtinebitur æquatio inter p et q et inde inter x et y, ut id ipsum nunc exponemus, summando enim terminos æquationis $aq^{n-1}dq = g^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$ habetur $\frac{aq^n}{n} = g^{n-1}\times S.\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, hoc est $q = \sqrt[n]{\frac{ng^{n-1}}{a}} \times S.\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, unde sit curva cujus ab-



scissa qualiscumque AP sit $= p$, sitque ejus ordinata PN semper æqualis $\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}$, erit area $ABPN = S.\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, ducatur ergo ab altera parte P ordinata PO talis ut sit semper æqualis $\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{ng^{n-1}}{a}}\times ABPN}$ erit ea PO æqualis $\frac{1}{q}$, cùmque sit $dx = \frac{dp}{q} = \frac{1}{q} \times dp$, erit (summando) $x = S.\frac{1}{q} \times dp$ sive æqualis area ACPO.

Denique cùm sit $dy = pdx = \frac{pdp}{q} = \frac{p}{q} \times dp$ et summando $y = S.\frac{p}{q} \times dp$ ideò si e puncto P versus originem A sumatur PI æqualis unitati, ductaque IO, ducatur ipsi parallela AQ ab origine curvæ quæ secet PO productam in Q, erit $1 : PO$ (sive $\frac{1}{q}$) $= AP$ (sive p) $: PQ = \frac{p}{q}$, itaque area curvæ APQ

erit S. $\frac{p}{q}$ d p ac per consequens æqualis y, ergo datis curvarum A C P O, et A P Q quadraturis datur ratio x ad y, et ex earum ordinatis ratio d x ad d y: sed ut habeatur origo a quâ sumi debent illarum arearum portiones, sumendum est id punctum in quo P O est ad P Q ut cosinus anguli jactus cum horizonte sub quo corpus



moveri incepit ad ejus anguli sinum, quippe ea fuit ipso motus initio ratio elementorum d x et d y; sique ille cosinus dicatur c, et sinus s, erit in ea origine c : s $= \frac{1}{q} : \frac{p}{q}$, unde si sumatur A R sive p $= \frac{s}{c}$ erit ejus extremitas R origo arearum quarum valor rationem quæsitarum x et y exhibebit. †

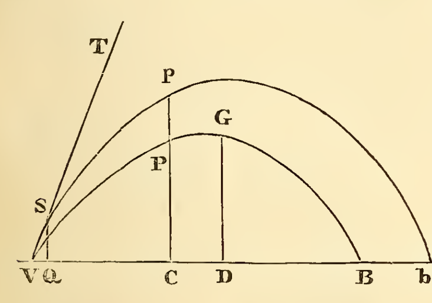
128. *Corol.* 1. Quoniam invenimus $v^2 = \frac{-g\,d\,s^2}{d\,d\,y}$, $d\,s^2 = d\,x^2\,(1 + p\,p)$, et d d y $=$ d x d p; erit $v^2 = \frac{-g\,d\,x\,(1+p\,p)}{d\,p}$; sed d p $=$ q d x; quare erit $v^2 = \frac{-g\,(1+p\,p)}{q}$. Præterea (13) $d\,t = \frac{d\,s}{v} = \frac{d\,x\,\sqrt{1+p\,p}}{v} = \frac{d\,p\,\sqrt{1+p\,p}}{q\,v}$, et $v = \sqrt{\frac{-g\,(1+p\,p)}{q}}$; quare erit $d\,t = \frac{d\,p}{\sqrt{-g\,q}}$, et $t = S.\,\frac{d\,p}{\sqrt{-g\,q}}$. Invenietur itaque tum velocitas corporis in loco P trajectoriæ V P p, tum tempus t quo arcus V P describitur.

129. *Corol.* 2. Si in æquatione generali supra reperta, $a\,d^3\,y = \frac{g^{n-1}\,d\,s^{2n}}{d\,d\,y^{n-2}}$, ponatur n $=$ 1, seu resistentia velocitatis quadrato proportionalis; æquatio in hanc migrabit $a\,d^3\,y = d\,s\,d\,d\,y$; et ponendo d y $=$ p d x, ac d x $= \frac{d\,p}{q}$, invenietur $a\,q = S.\,d\,p\,\sqrt{1+p\,p}$, $x = S.\,\frac{d\,p}{q} = S.\,\frac{a\,d\,p}{S.\,d\,p\,\sqrt{1+p\,p}}$, $y = S.\,\frac{p\,d\,p}{q} = S.\,\frac{a\,p\,d\,p}{S.\,d\,p\,\sqrt{1+p\,p}}$, $v\,v = \frac{-a\,g\,(1+p\,p)}{S.\,d\,p\,\sqrt{1+p\,p}}$, et $t = S.\,\frac{a^{\frac{1}{2}}\,d\,p}{\sqrt{(-g\,S.\,d\,p\,\sqrt{1+p\,p})}}$. Est autem S. d p $\sqrt{1+p\,p}$ area hyperbolæ æquilateræ, cujus abscissa est p et ordinata ducta perpendiculariter ad axem conjugatum $\sqrt{1+p\,p}$, semiaxis verò unitas. Unde invenietur q in p per hujus hyperbolæ aream; at abscissa x obtinebitur per aream curvæ cujus est abscissa p et ordinata $\frac{1}{q}$; et correspondens ordinata y desinietur per aream curvæ, cujus abscissa est p et ordinata $\frac{p}{q}$. Ex quibus manifestum sit veræ trajectoriæ V P Z descriptionem adeò perplexam esse, ut ex illa vix quidquam ad usus philosophicos aut mechanicos accommodatum possit deduci.

130. *Corol.* 3. Quoniam posito n $=$ 1, resistentia medii est $\frac{v^2}{2\,a}$ (127), et ubi resistentia sit gravitati æqualis, id est, ubi v æqualis est velocitati terminali, habetur $\frac{v^2}{2\,a} = g$, et $v^2 = 2\,a\,g$, ideò (30. Lib. I.) a est altitudo ex quâ corpus in medio non resistente vi constante g sollicitatum caderet ut velocitatem terminalem acquirat.

131. *Corol.* 4. Si in hypothesi Corollarii secundi resistentia parva fuerit qualem ferè experitur globus ferreus non parvus magnâ satis velocitate per aëra projectus, trajectoria V P B, quam globus ille in medio resistente describit, non multùm aberrat a parabolâ conicâ V p b, quam eâdem urgente vi gravitatis uniformi g seu 1 describeret. Quia tamen resistentia velocitatem projectionis minuit, ordinata C P, ad trajectoriam V P B, in medio resistente paulò minor erit quam ordinata C p ad parabolam conicam V p b. Porrò si abscissa V C dicatur x ordinata C p dicatur z, amplitudo V b, h et proindè C b, h — x, erit (ex naturâ parabolæ) rectangulum sub abscissis V C $\times$ C b, seu h x — x x, æquale rectangulo ordinatæ C p, vel z in datam quantitatem l, et ideò æquatio erit $z = \frac{h\,x}{l} - \frac{x\,x}{l}$. Cùm igitur ordinata C P (quæ dicatur y) paulò minor sit quam C p, seu z, ponatur $y = \frac{h\,x}{l} - \frac{x\,x}{l} - e\,x^3$, et æquatio ista in quâ est e quantitas exigua, naturam trajectoriæ V P B exponere poterit quam proximè; loco $\frac{h}{l}$, et $\frac{1}{l}$,

scribantur b et c ut æquatio sit $y = bx - cx^2 - ex^3$. Ut jam determinentur coëfficientes b, c, e, capiantur æquationis fluxiones, prima, secunda et tertia, factâ dx constate, erunt illæ $dy = bdx - 2cxdx - 3ex^2dx$; $ddy = -2cdx^2 - 6exdx^2$, $d^3y = -6edx^3$. Coincidentibus punctis V et C, fit $x = o$, et ideò $dy = bdx$, $ddy = -2cdx^2$ et $d^3y = -6edx^3$. Ex æquatione $dy = bdx$, deducitur proportio $dx : dy = 1 : b$; et coincidente C cum V, dx est ad dy ut sinus totus V Q ad tangentem Q S, anguli projectionis T V Q; quare si sinus totus dicatur 1, erit b tangens anguli projectionis, et ideò dato hoc angulo datur b. Si velocitas cum quâ corpus e



loco V projicitur sit v, et f, altitudo ex quâ corpus urgente vi constante g, in spatio non resistente cadendo acquirit velocitatem illam v, erit $2gf = vv$ (18. 19. 20. hujusce Lib.) sed (30) $vv = -\frac{gds^2}{ddy}$, ideóque $2gf = -\frac{gds^2}{ddy}$, et $2f = -\frac{ds^2}{ddy}$; est autem $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + bbdx^2$, et $ddy = -2cdx^2$ in loco V, (ex dem.). Quarè erit $2f = \frac{1+bb}{2c}$, et hinc $c = \frac{1+bb}{4f}$. Cùm igitur quantitates b, et f, datæ sint, data erit c. Invenietur quantitas tertia e, per æquationem $ad^3y = dsddy$ (129) et per æquationes suprà repertas $ds = dx\sqrt{1+bb}$, $ddy = -2cdx^2$, et $d^3y = -6edx^3$; ex quibus eruitur $-6aedx^3 = -2cdx^3\sqrt{1+bb}$, et hinc $e = \frac{c\sqrt{1+bb}}{3a} = \frac{\overline{1+bb}\times\sqrt{1+bb}}{12af}$. Tota igitur æquatio assumpta $y = bx - cx^2 - ex^3$ fit $y = bx - x^2 \times \left(\frac{1+bb}{4f}\right) - x^3 \times \left(\frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}\right)$ in quâ datâ velocitate terminali datur a, (130). Poterit etiam linea a, per experimentum reperiri; nam si e loco V sub angulo dato T V B datâ cum velocitate projiciatur corpus in medio supposito et observetur amplitudo jactûs V B, quæ dicatur A, in æquatione ad trajectoriam V P B, loco x, scribatur A, et loco y, scribatur o, quia ordinata C P, seu y evanescit in B invenietur $o = bA - AA \times \frac{(1+bb)}{4f} - A^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$; undè deducitur $a = AA \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12fb - 3A \times (1+bb)}$.

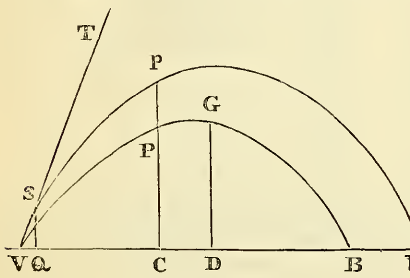
132. *Corol.* 5. Jactûs amplitudo V B, invenitur, factâ $y = o$, undè eruitur $xx \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af} + x \times \frac{(1+bb)}{4f} = b$, et V B $=$ $x = -\frac{3a}{2\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\left(\frac{9a^2}{4+4bb} + \frac{12afb}{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}\right)}$.

133. *Corol.* 6. Maxima jactûs altitudo D G reperitur, sumptâ æquationis ad trajectoriam V P B, fluxione et factâ $dy = o$ (48); fit enim $o = bdx - 2xdx \times \frac{1+bb}{4f} - 3x^2dx \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$ undè deducitur $VD = x = -\frac{a}{\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\frac{aa}{1+bb} + \frac{4afb}{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}}$. Quo valore loco x, in æquatione ad trajectoriam substituto, obtinebitur y, seu maxima altitudo D G.

134. *Corol.* 7. Ut determinetur tangens anguli T V B, sub quo corpus datâ celeritate projectum, per datum punctum P transibit, loco x et y in æquatione ad trajectoriam scribantur datæ V C et V P, atque hinc eruatur valor tangentis b; dicatur V C $= p$, C P $= q$, et erit $q = bp - pp \times \frac{\sqrt{1+bb}}{af} - p^3 \times \frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}$. Si medii densitas infinitè parva esset, altitudo a foret infinita (130), et idcircò $q = bp - pp \times \frac{1+bb}{4f}$. Inveniatur per hanc æquationem valor tangentis b qui dicatur k, et in æquatione superiori loco $(1+bb)^{\frac{3}{2}}$, scribatur $(1+bb) \times \sqrt{2+kk}$ et illa in hanc abibit $q = bp - pp \times \frac{(1+bb)}{af} - p^3 \times \overline{1+bb} \times \frac{\sqrt{1+kk}}{12af}$, quæ cum sit duarum dimensionum facilè suppeditabit valorem ipsius b, quamproximè.

135. *Corol.* 8. Datâ celeritate jactûs, invenitur angulus maximæ omnium amplitudini conveniens, si in æquatione Corollarii 5. in quâ x

exponit quamlibet amplitudinem V B, sumatur tangens b variabilis et sumptis fluxionibus ponatur $dx = o$ (48). Calculo enim inito invenietur $4f \times (1 - 2bb)^2 = 3ab \times (1 - bb) \times \sqrt{1 + bb}$. Quoniam verò tangens anguli projectionis est b, sinus totus 1, et proindè secans $\sqrt{1 + bb}$; si ejusdem anguli sinus dicatur s, erit $\sqrt{1 + bb} : b = 1 : s$, adeóque $1 + bb : bb = 1 : ss$, et dividendo $1 : bb = 1 - ss : ss$, atquè ità $bb = \frac{ss}{1 - ss}$, et $b = \frac{s}{\sqrt{1 - ss}}$. Loco b substituatur $\frac{s}{\sqrt{1 - ss}}$ in æquatione modo inventâ et illa in hanc mutabitur, $4f \times \frac{(1 - 3ss)^2}{(1 - ss)^2} = 3as \times \frac{(1 - 2ss)}{(1 - ss)^2}$, hoc est, $4f \times (1 - 3ss)^2 = 3as \times (1 - 2ss)$. Ex quâ æquatione, si eruatur valor sinûs s dabitur angulus quæsitus. Per approximationem ità potest obtineri. Scribatur in æquatione $3as = 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; nam si trajectoria in medio non resistente describeretur, angulus T V B



foret semirectus, et proindè sinus ejus $\sqrt{\frac{1}{2}}$, cum sit sinus totus $= 1$; et ideò in medio valdè raro est ferè $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$; æquatio igitur erit $4f \times (1 - 3ss)^2 = (1 - 2ss) \times 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; quæ facillimè resolvetur ad instar æquationis duarum dimensionum. Hinc autem invenitur s paulò minor quam $\sqrt{\frac{1}{2}}$; adeóque angulus projectionis semirecto paulò minor.

136. *Corol.* 9. Si medium esset paulò densius, assumenda foret æquatio ad trajectoriam, $y = bx - xx \times \frac{(1 + bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1 + bbb)^{\frac{3}{2}}}{12af} - hx^4$; aut etiam alia plurium terminorum. In illâ autem ità determinatur valor coëfficientis h. Pro coëfficientibus datis $\frac{1 + bb}{4f}$, $\frac{(1 + bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$, scribantur c, e, ut sit æquatio $y = bx - cx^2 - ex^3 - hx^4$, et sumptis ut suprà (131) fluxionibus primis, secundis et tertiis, factâ dx, constante, invenietur (129) $\frac{ad^3y}{dsddy} = 1 = \frac{6ac + 24ahx}{(2c + 6ex + 12hx^2)} \times \frac{1}{\sqrt{1 + bb - 4bcx + 4ccx^2 - 6bex^2, \&c.}} = \frac{6ae + 24ahx}{2c + 6ex \times \sqrt{1 + bb} - \frac{2bcx}{\sqrt{1 + bb}}}$ neglectis terminis ubi x^2 occurrit et extracta radice per formulam Newtonianam. Ut autem hæc quantitas constans sit et æqualis unitati, termini homologi in numeratore $6ae + 24ahx$, et denominatore $2c\sqrt{1 + bb} + 6ex\sqrt{1 + bb} - \frac{4bccx}{\sqrt{1 + bb}}$ ponendi sunt æquales, id est, $6ae = 2c\sqrt{1 + bb}$, et $24ahx = 6ex\sqrt{1 + bb} - \frac{4bccx}{\sqrt{1 + bb}}$. Ex his suppositionibus eruitur $e = \frac{c\sqrt{1 + bb}}{3a} = \frac{(1 + bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$, et $h = e\frac{\sqrt{1 + bb}}{4f} - \frac{bcc}{6a\sqrt{1 + bb}} = \frac{(1 + bb)^2}{48a^2f} - \frac{b \times (1 + bb)^{\frac{3}{2}}}{96aff}$. Quarè æquatio assumpta erit $y = bx - x^2 \times \frac{(1 + bb)}{af} - x^3 \times \frac{(1 + bb)^{\frac{3}{2}}}{12af} - x^4 \times \frac{(1 + bb)^2}{48a^2f} + x^4 b \times \frac{(1 + bb)^{\frac{3}{2}}}{96aff}$. Et eodem modo determinarentur coëfficientes in æquationibus plurium terminorum seu ad parabolas superiorum generum.

137. *Corol.* 10. Si resistentia medii uniformis, partim constans supponeretur et partim velocitatis quadrato proportionalis, posset etiam trajectoria V P B quamproximè definiri. Sit enim resistentiæ pars uniformis $= \frac{1}{2}kg$, et resistentia tota $r = \frac{kg}{2} + \frac{v^2}{2a}$, et erit (28) $gdy + \frac{kgds}{2} + \frac{v^2ds}{2a} = -vdv$ et (30) $v^2 = -\frac{gds^2}{ddy}$ adeóque (127) $vdv = -gdy + \frac{gds^2d^3y}{2ddy^2}$, his valoribus loco v^2 et vdv, in priori æquatione substitutis sit $gdy + \frac{kgds}{2} - \frac{gds^3}{2addy} = gdy - \frac{gds^2d^3y}{2ddv^2}$, ideóque $k = \frac{ds^2}{addy} - \frac{dsd^3y}{ddy^2}$. Jam si resistentia tota r, exigua fuerit, ponatur æquatio ad trajectoriam V P B, $y = bx - cx^2 - \bar{e}x^3$, et factâ dx, constante, capiantur fluxiones primæ, secundæ et tertiæ quæ coincidente puncto C, cum V, erunt $dy = bdx$, $ddy = -2cdx^2$, et $d^3y = -6edx^3$ (131); undè invenitur ut (in Corol. 4. 131.) b, tangens anguli projectionis, existente sinu toto 1, et $c = \frac{1 + bb}{4f}$,

ubi f est altitudo ex quâ corpus urgente vi constante g cadendo in spatio non resistente acquirit jactûs velocitatem. Quantitas e determinabitur per æquationem $k = \frac{d s^2}{a d d y} - \frac{d s d^3 y}{d d y^2}$. Nam si in illâ loco d s, d d y, d ^{3} y, substituantur ipsorum valores $d x \times (1 + b b)^{\frac{1}{2}}$, $-2 c d x$, et $-6 e d x^3$, erit $k = -\frac{(1+b b)}{2 a c} + \frac{3 e \times (1+b b)^{\frac{1}{2}}}{2 c c}$; undè eruitur $e = -\frac{2 k c c}{3 \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}}{3 a}$ $= \frac{k \times (1 + b b)^{\frac{3}{2}}}{24 f f} + \frac{(1 + b b)^{\frac{3}{2}}}{12 a f}$. Quapropter æquatio assumpta in hanc abit $y = b x - \frac{x x \times (1 + b b)}{4 f} - x^3 \times \frac{(1 + b b)^{\frac{3}{2}}}{12 a f}$, $- x^3 k \times \frac{(1 + b b)^{\frac{3}{2}}}{24 f f}$, et quantitates a et k, ex phænomenis poterunt determinari ut suprà (131.)

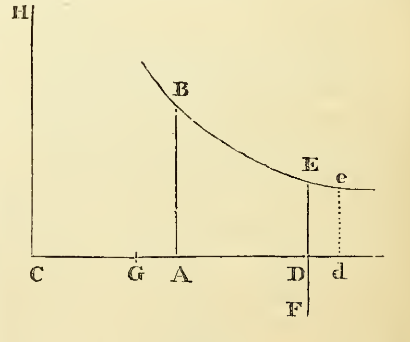
SECTIO III.

De motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

Si corpori resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, et idem solâ vi insitâ in medio similari movetur: sumantur autem tempora in progressione arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progressione geometricâ.

Centro C, asymptotis rectangulis C A D d et C H, describatur hyperbola B E e, et asymptoto C H parallelæ sint A B, D E, d e. In asymptoto C D dentur puncta A, G: et si tempus exponatur per aream hyperbolicam A B E D uniformiter crescentem; dico quod velocitas exponi potest per longitudinem D F, cujus reciproca G D unâ cum datâ C G componat longitudinem C D in progressione geometricâ crescentem.



Sit enim areola D E e d datum temporis incrementum quàm minimum, ([a]) et erit D d reciprocè ut D E, ideóque directè ut C D. Ipsius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod ([b]) (per hujus Lem. II.) est $\frac{Dd}{GDq}$, erit ut $\frac{CD}{GDq}$ seu $\frac{CG + GD}{GDq}$, id est, ut $\frac{1}{GD} + \frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore A B E D per additionem data-

([a]) * *Et erit D d reciprocè ut D E.* Est enim areola evanescens D E e d æqualis rectangulo D E × D d, quod, ob datum temporis incrementum, erit ut quantitas data, et ideò D d, est ut quantitas data divisa per D E, id est, reciprocè ut D E; sed (per Theor. IV. de Hyperb.) datum est rectangulum C D × D E, proindè C D, est reciprocè ut D E; quarè erit D d directè ut C D.

([b]) * *Per hujus Lemma II.* Cas. 4.

rum particularum E D d e uniformiter crescente, decrescit $\frac{1}{\text{G D}}$ in eâdem ratione cum velocitate. ([c]) Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per Hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; et ipsius $\frac{1}{\text{G D}}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{\text{G D}}$ et $\frac{\text{C G}}{\text{G D q}}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{\text{G D}}$, et posterior $\frac{\text{C G}}{\text{G D q}}$ est ut $\frac{1}{\text{G D q}}$: proinde ([d]) $\frac{1}{\text{G D}}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas G D, ipsi $\frac{1}{\text{G D}}$ reciprocè proportionalis, quantitate datâ C G augeatur; summa C D, tempore A B E D uniformiter crescente, ([e]) crescet in progressione geometricâ. Q. e. d.

Corol. 1. Igitur si, datis punctis A, G, exponatur tempus per aream hyperbolicam A B E D, ([f]) exponi potest velocitas per ipsius G D reciprocam $\frac{1}{\text{G D}}$.

([g]) *Corol.* 2. Sumendo autem G A ad G D ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis A B E D, invenietur punctum G. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

([c]) *Nam decrementum velocitatis*, dato temporis momento, *est ut resistentia* (15).

([d]) * $\frac{1}{G D}$, *ob analogum decrementum, est ut velocitas*. Si enim duarum quantitatum fluentium incrementa vel decrementa dato tempusculo producta analoga sint, eorum incrementorum vel decrementorum summæ seu fluentes ipsæ ab eodem initio sumptæ, sunt analogæ (per Cor. Lem. IV. Lib. I.).

([e]) * *Crescet in progressione geometricâ* (380. Lib. I.)

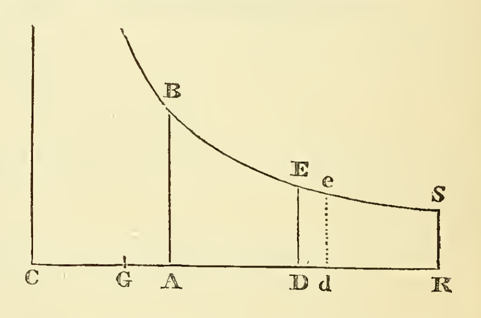
([f]) * *Exponi potest velocitas per ipsius G D reciprocam* $\frac{1}{G D}$. Undè patet velocitatem nonnisi tempore infinito extingui posse, * erit enim $\frac{1}{\text{G D}} = 0$, sive velocitas nulla ubi G D erit infinita, tunc autem area B A D E quæ tempus exprimit infinita etiam est, ex naturâ hyperbolæ.

([g]) * *Corol.* 2. Punctum A ad arbitrium assumitur in asymptoto C R et assumpto etiam quovis puncto D ut area A B E D tempus datum exponat, ità determinandum est punctum G, ut sit G A ad G D, ut velocitatis reciproca sub initio ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis A B E D, quod per Corol. 1. liquet. Invento autem puncto G, ex dato quovis alio tempore quod v. gr. sit ad tempus primò datum ut area A B S R, ad aream A B E D, dabitur velocitas quæ erit reciprocè ut G R, seu quæ erit ad velocitatem sub initio in A, ut G A ad G R datam.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iisdem positis, dico quòd si spatia descripta sumantur in progressione arithmeticâ, velocitates datâ quâdam quantitate auctæ erunt in progressione geometricâ.

In asymptoto C D detur punctum R, et erecto perpendiculo R S; quod occurrat hyperbolæ in S, exponatur descriptum spatium per aream hyperbolicam R S E D; et velocitas erit ut longitudo G D, quæ cum datâ C G componit longitudinem C D in progressione geometricâ decrescentem, interea dum spatium R S E D augetur in arithmeticâ.



([h]) Etenim ob datum spatii incrementum E D d e, lineola D d, quæ decrementum est ipsius G D, erit reciprocè ut E D, ideóque directè ut C D, hoc est, ut summa ejusdem G D et longitudinis datæ C G. Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciprocè proportionali, quo data spatii particula D d e E describitur, ([i]) est ut resistentia et tempus conjunctim, id est directè ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, et inversè ut velocitas; ideóque directè ut summa duarum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quam lineæ G D, est ut quantitas data et quantitas decrescens conjunctim, et propter analoga decrementa, ([k]) analogæ semper erunt quantitates decrescentes; nimirum velocitas et linea G D. Q. e. d.

Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem G D, spatium descriptum erit ut area hyperbolica D E S R.

Corol. 2. Et si utcunque assumatur punctum R, invenietur punctum G capiendo G R ad G D, ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spa-

([h]) * *Etenim ob datum spatii incrementum,* per hypothesim quâ spatia supponuntur in arithmeticâ progressione crescere.

([i]) * *Est ut resistentia et tempus conjunctim.* Velocitatis decrementum est ut resistentia et tempus conjunctim (15), tempus verò est ut incrementum spatii directè et velocitas inversè, adeóque dato spatii incremento ut velocitas inversè. Quarè dato spatii incremento, velocitatis decrementum est ut resistentia directè et velocitas inversè, id est, directè ut summa duarum quantitatum, &c.

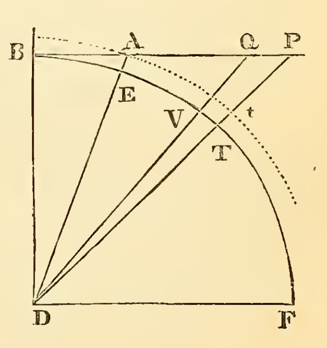
([k]) * *Analogæ semper erunt,* &c. (Per Cor. Lem. IV. Lib. I.).

tium quodvis R S E D descriptum. [1] Invento autem puncto G, datur spatium ex datâ velocitate, et contra.

Corol. 3. Unde cùm (per Prop. XI.) detur velocitas ex dato tempore, et per hanc Propositionem detur spatium ex datâ velocitate; dabitur spatium ex dato tempore: et contra.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

Posito quod corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum rectâ ascendit vel descendit; et quod eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ: dico quod, si circuli et hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, et velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum sectores, rectis a centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: et contra.

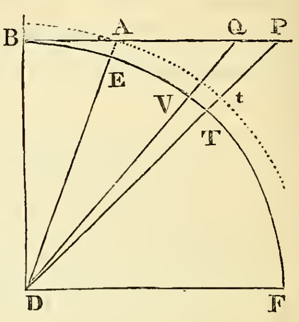


Cas. 1. Ponamus primo quòd corpus ascendit, centroque D et semi-diametro quovis D B describatur circuli quadrans B E T F, et per semi-diametri D B terminum B agatur infinita B A P, semi-diametro D F parallela. In eâ detur punctum A, et capiatur segmentum A P velocitati proportionale. Et cùm resistentiæ pars altera sit ut velocitas, et pars altera ut velocitatis quadratum; sit resistentia

(1) * *Invento autem puncto G*, &c. Si enim velocitas data, sit ad velocitatem sub initio ut G A ad G R, dabitur punctum A, et hinc dabitur area A B S R, seu spatium descriptum. Et contrà dato spatio, sive datâ areâ A B S R, dabitur punctum A, et indè velocitas G A. Ex his autem patet spatium finitum infinito tempore describi; ubi enim punctum D coincidit cum puncto G, velocitas omnis extinguitur, et spatium descriptum exponitur per aream finitam quam ordinata R S abscindit cum alterâ ordinatâ per G ductâ; velocitas verò nonnisi infinito tempore potest evanescere (per Cor. 1. Prop. XI.).

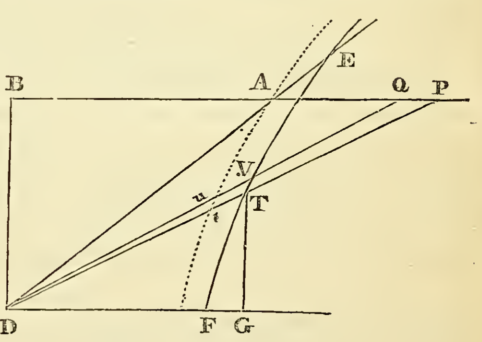
138. *Schol.* Eadem per analysim facilè inveniuntur. Dicantur resistentia r, celeritas initialis c, spatium descriptum s, tempus t, velocitas residua v, ponaturque $r = \frac{av + vv}{b}$, erit (16, 17) $r\,ds = -v\,dv$, seu $av\,ds + vv\,ds = -bv\,dv$, et hinc $ds = -\frac{b\,dv}{a+v}$, atque adeò $s = Q - b \times L.\overline{a+v}$; quia verò ubi $s = o$ fit $v = c$, invenitur constans $Q = b \times L.\overline{a+c}$, et ideò $s = b \times L.\frac{a+c}{a+v}$. Sit $L.h = 1$, et erit $\frac{s \times L.h}{b} = L.\frac{a+c}{a+v}$, ac $h^{\frac{s}{b}} = \frac{a+c}{a+v}$; undè eruitur $v = \frac{a+c}{h^{\frac{s}{b}}} - a$; quarè dato spatio datur velocitas et contrà. Cùm autem sit (15) $dt = \frac{ds}{v} = -\frac{b\,dv}{av+vv} = \frac{b}{a} \times \frac{dv}{a+v} - \frac{b}{a} \times \frac{dv}{v}$, erit $t = Q + \frac{b}{a} \times L.\overline{a+v} - \frac{b}{a} \times L.v = Q + \frac{b}{a} \times L.\frac{a+v}{v}$, et po-

tota ut A P quad. + 2 B A P. Jungantur D A, D P circulum secantes in E ac T, (m) et exponatur gravitas per D A quad. ita ut sit gravitas ad resistentiam in P ut D A q ad A P q + 2 B A P: et tempus ascensus totius erit ut circuli sector E D T.



Agatur enim D V Q, abscindens et velocitatis A P momentum P Q, et sectoris D E T momentum D T V dato temporis momento respondens; et velocitatis decrementum illud P Q erit (n) ut summa virium gravitatis D A q et resistentiæ A P q + 2 B A P, id est (per Prop. XII. Lib. II. Elem.) ut D P quad. Proinde area D P Q, (o) ipsi P Q proportionalis, est ut D P quad. et area D T V, quæ est ad aream D P Q (p) ut D T q ad D P q, est ut datum D T q. Decrescit igitur area E D T uniformiter ad modum temporis futuri, per subductionem datarum particularum D T V, et propterea tempori ascensus totius proportionalis est. Q. e. d.

Cas. 2. Si velocitas in ascensu corporis exponatur per longitudinem A P ut prius, et resistentia ponatur esse ut A P q + 2 B A P, et si vis gravitatis minor sit quam quæ per D A q exponi possit; capiatur B D ejus longitudinis, ut sit A B q — B D q gravitati proportionale, sitque



sito t = o et v = c, fit $Q = -\frac{b}{a} \times L. \frac{a+c}{c}$, adeóque $t = \frac{b}{a} \times L. \frac{a+v}{v} - \frac{b}{a} \times L. \frac{a+c}{c}$, et hinc $t = \frac{b}{a} L. \frac{ac+cv}{av+cv}$, et $h^{\frac{at}{b}} = \frac{ac+cv}{av+cv}$; unde eruitur $v = \frac{ac}{ah^{\frac{at}{b}} + ch^{\frac{at}{b}} - c}$. Dato igitur tempore dabitur velocitas et spatium ac contrà.

(m) * *Et exponatur gravitas per D A q.* Corpore ascendente ratio gravitatis uniformis ad resistentiam vel major est ratione quadrati dati A B² ad quantitatem A P² + 2 B A P, vel minor vel æqualis. In 1°. casu gravitas exponi semper poterit per quadratum secantis A D quæ quantumvis magna assumi potest; in 2°. casu per differentiam A B² — B D² quæ quantumvis parva esse potest; et in 3°. casu per quadratum A B².

(n) * *Ut summa virium* (18).

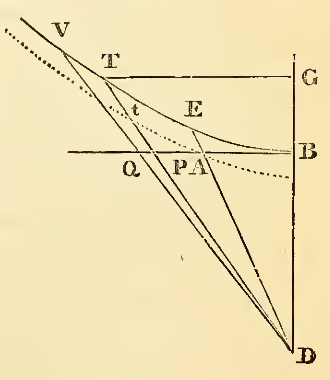
(o) * *Ipsi P Q proportionalis.* Nam area D P Q est ½ B D × P Q, et ideò ob datam ½ B D est ut P Q.

(p) * *Ut D T q ad D P q.* Triangulum evanescens D P Q, non differt a sectore circuli centro D et radio D Q descripti, inter lineas D Q et D P; hic verò sector est ad similem sectorem D T V, ut D P² ad D T², quarè area D T V, est ad aream D P Q, ut D T² ad D P², et permutando, area D T V est ad D T²,

D F ipsi D B perpendicularis et æqualis, et per verticem F describatur hyperbola F T V E, cujus semi-diametri conjugatæ sint D B et D F, quæque secet D A in E, et D P, D Q in T et V; et erit tempus ascensus totius ut hyperbolæ sector T D E.

Nam velocitatis decrementum P Q, in datâ temporis particulâ factum, est ut summa resistentiæ A P q + 2 B A P et gravitatis A B q — B D q, (q) id est, ut B P q — B D q. Est autem area D T V ad aream D P Q ut D T q ad D P q; ideóque, si ad D F demittatur perpendiculum G T, ut G T q seu G D q — D F q ad B D q, utque G D q ad B P q, et divisim ut D F q ad B P q — B D q. Quare cùm area D P Q sit ut P Q, id est, ut B P q — B D q; erit area D T V ut datum D F q. Decrescit igitur area E D T uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per subductionem particularum totidem datarum D T V, et propterea tempori proportionalis est. Q. e. d.

Cas. 3. Sit A P velocitas in descensu corporis, et A P q + 2 B A P resistentia, et B D q — A B q vis gravitatis, existente angulo D B A recto. Et si centro D, vertice principali B, describatur hyperbola rectangula B E T V secans productas D A, D P et D Q in E, T et V; erit hyperbolæ hujus sector D E T ut tempus totum descensûs.

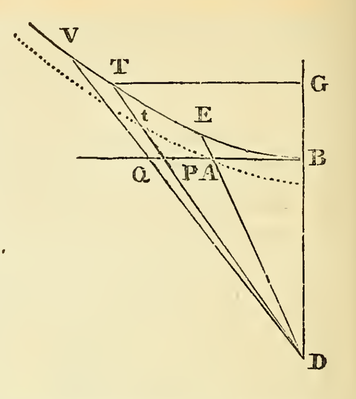


Nam velocitatis incrementum P Q, eique proportionalis area D P Q, est ut excessus gravitatis supra resistentiam, id est, ut B D q — A B q — 2 B A P — A P q seu B D q — B P q. Et area D T V est ad aream D P Q ut D T q ad D P q, ideóque (r) ut G T q seu G D q — B D q ad B P q, utque G D q ad B D q, et divisim ut B D q ad B D q — B P q. Quare cùm area D P Q sit ut B D q — B P q, erit area D T V ut datum B D q. Crescit igitur area E D T uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum D T V, et propterea tempori descensus proportionalis est. Q. e. d.

ut area D P Q ad D P ^{2}. Cùm igitur (ex dem.) area D P Q sit ut D P ^{2}, erit etiam area D T V ut D T ^{2}, seu ut datum quadratum D B ^{2}; ergo, tempore dato, data est area D T V, et ideò temporibus æqualibus *æqualiter decrescit area E D T, ad modum temporis futu-*

(q) * *Id est ut B P q — B D q.* Est enim A P q + 2 B A P + A B q = B P q.

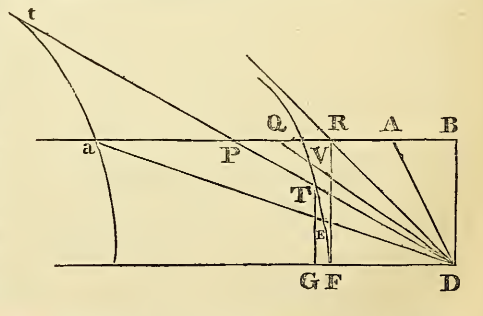
(r) *Ut G T q.* Nam ob similitudinem triangulorum D G T, P B D est D T q ad D P q ut G T q = G D q — B D q (ex conic. vid. not. in Cas. 2. Prop. IX.) ad B D q, *utque G D q ad B D q, et divisim,* &c.



Corol. Si centro D semi-diametro D A per verticem A ducatur arcus A t similis arcui E T, et similiter subtendens angulum A D T: velocitas A P erit ad velocitatem, quam corpus tempore E D T, in spatio non resistente, ascendendo amittere vel descendendo acquirere posset, ut area trianguli D A P ad aream sectoris D A t; ideóque ex dato tempore datur. (s) Nam velocitas, in medio non resistente, tempori, atque ideò sectori huic proportionalis est; in medio resistente est ut triangulum; et in medio utroque, ubi quàm minima est, accedit ad rationem æqualitatis, pro more sectoris et trianguli.

(s) * *Nam velocitas in medio non resistente* (25. Lib I.) *tempori* atque adeò sectori E D T, et proindè *sectori D A t, proportionalis est;* in medio resistente est ut A P, seu ob datam B D ut $\frac{1}{2}$ B D × A P; sivè ut triangulum A D P; et in medio utroque ubi quàm minima est, nempe initio descensûs e quiete vel in fine ascensûs accedit ad rationem æqualitatis ob resistentiam evanescentem, evanescente velocitate, pro more sectoris D A t et trianguli D A P coëuntibus punctis t et P cum puncto A.

139. Quoniam ubi in corporis descensu B P fit = B D, angulus B D P semi-rectus evadit, et recta D P asymptotus hyperbolæ æquilateræ B E T; manifestum est quod corpus e quiete cadendo nonnisi finitam velocitatem infinito tempore possit acquirere. Erit enim velocitas tempore infinito acquisita B D — A B. Si verò corpus verticaliter deorsum datâ cum velocitate projiciatur, vel illa velocitas maximæ seu terminali B D — A B æqualis est, et in hoc casu corpus motu uniformi descendit ob resistentiam gravitati æqualem; vel terminali minor est, et corporis cadentis motus perpetuò acceleratur, donec infinito tempore velocitatem maximam acquirat; vel tandem terminali major est, tumque corporis motus perpetuò retardatur, donec infinito tempore elapso ad velocitatem terminalem reducatur; hoc autem casu sic absolvitur constructio.



Sit A a velocitas datæ projectionis terminali major, A P velocitas perpetuò decrescens, A P² + 2 B A P resistentia, et B D² — A B² vis gravitatis; existente angulo D B A recto; et si capiatur B R = B D, compleaturque quadratum D B R F, ac centro D et vertice principali F describatur hyperbola rectangula F E T V, secans rectas D a, D P et D Q, in E, T, V; tempus descensûs ab initio usquequò residua corpori velocitas sit A P, erit ut sector hyperbolicus D E T; nam velocitatis decrementum P Q, in datâ temporis particulâ factum eique proportionalis area D P Q est ut excessus resistentiæ suprà gravitatem (18), id est, ut A P² + 2 B A P + A B² — B D², seu B P² — B D²; et area D T V est ad aream D P Q, ut D T² ad D P², ideóque ut G T², (seu G D² — B D²) ad B D², et ut G D² ad B P², et divisim, ut B D² ad B P² — B D². Quarè cum area D P Q, sit ut B P² — B D², erit area D T V ut datum B D². Crescit igitur area E D T, uniformiter singulis temporis particulis æqualibus per additionem totidem datarum particularum D T V, et propterea tempori descensûs proportionalis est. Coincidente verò puncto P, cum R, et ideò rectâ D P, cum asymptoto D R, velocitas A P terminali A R seu B D — A B æqualis evadit, et sector D E T infinitus, proindeque tempus etiam infinitum fit. Q. e. d.

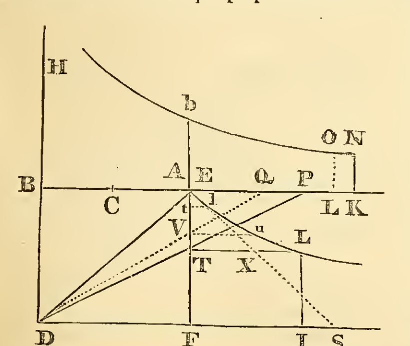
140. Hinc etiam si centro D, semi-diametro D a, per verticem a, ducatur arcus hyperbolicus a t similis arcui E T, et similiter subtendens

Scholium.

(†) Demonstrari etiam posset casus in ascensu corporis, ubi vis gravitatis minor est quàm quæ exponi possit per D A q seu A B q + B D q, et major quàm quæ exponi possit per A B q — B D q, et exponi debet per A B q. Sed propero ad alia.

angulum a D T; velocitas a P, in medio resistente tempore E D T, extincta, erit ad velocitatem quam corpus eodem tempore in spatio non resistente e quiete descendendo acquirere posset, ut area trianguli D a P, ad aream sectoris D a t, ideóque ex dato tempore datur, et hinc datur quoque velocitas residua A P. Nam velocitas in medio non resistente acquisita tempori, atquè ideò sectori D E T, et proindè sectori simili D a t proportionalis est; velocitas in medio resistente extincta, est ut triangulum D a P, et in medio utroque ubi quàm minima est, accedit ad rationem æqualitatis pro more sectoris D a t, et trianguli D a P.

(†) 141. *Demonstrari posset casus in ascensu corporis, ubi vis gravitatis . . . . . exponi debet per A B q.* * Velocitas in ascensu exponatur per A P ut prius, sit resistentia ut A P q + 2 B A P, exponatur vis gravitatis per A B q capiatur B D et D F = B A erectoque perpendiculo F T A



erit tempus ascensus totius ut sector sive triangulum D T A, agatur enim D V Q abscindens et velocitatis momentum P Q et sectoris D T A momentum D T V, velocitatis decrementum P Q est ut summa resistentiæ et gravitatis sive ut A P q + 2 B A P + A B q id est (per 4. 2ⁱ. Elem.) ut B P q; est autem area D T V ad aream D P Q ut D T q ad D P q, sive ob triangula similia D T F, D P B, ut D F q ad B P q, est ergo area D T V ut datum D F q. *Decrescit igitur area D T A ad modum temporis futuri per subductionem particularum D T V, et propterea tempori ascensus totius proportionalis est.* *

Si itaque resistentia ponatur esse ut $AP^2 + 2BAP$, vis autem gravitatis ut AB^2; tempus ascensûs totius erit ut A T et etiam ut $\frac{AP}{BP}$. Nam triangulum D T A, ob altitudinem constantem D F, est ut basis A T et propter triangula similia D T F, A T P est D F : T F = A P : A T; et jungendo terminos secundæ rationis cum terminis primæ est D F + A P (sive B P) : T F + A T (sive B D) = A P : A T, est ergo $AT = \frac{AP \times BD}{BP}$ sive ob datum B D, A T est ut $\frac{AP}{BP}$.

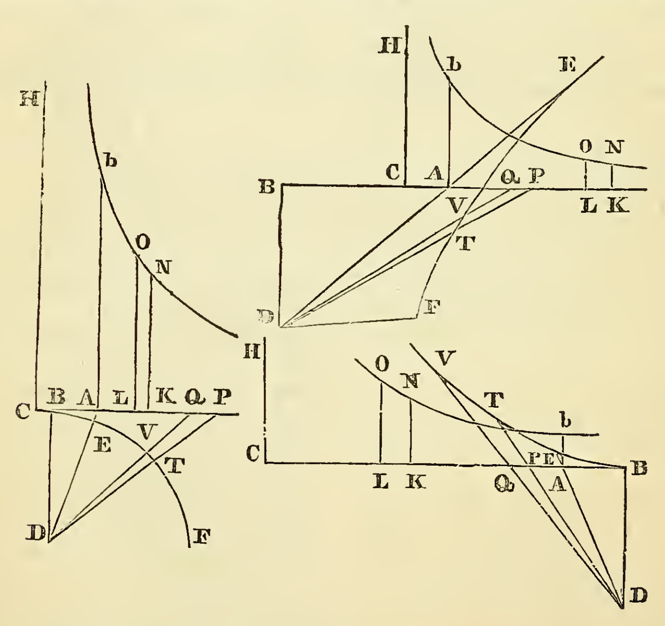
142. In isto casu velocitas A P est ad velocitatem quam corpus tempore D A T sive $\frac{AP}{BP}$ in spatio non resistente ascendendo amittere vel descendendo acquirere posset, ut B P ad A B. Nam velocitas in medio non resistente tempori atquè ideò areæ D A T sive rectæ A T proportionalis est; in medio resistente est ut A P, et in medio utroque ubi quàm minima est, accedit ad rationem æqualitatis; nam cum capiatur B D = A B, ratio linearum A P, A T, in puncto A ubi quàm minima est, accedit ad rationem linearum A F, F D quæ est æqualitatis. Quare velocitas A P, in medio resistente erit ad velocitatem in medio non resistente eodem tempore D A T amissam acquisitam ut A P ad A T, hoc est ob triangula similia A P T, B P D ut B P ad B D vel A B. Q. e. d.

143. Ex formulis quas (19) dedimus facilè intelligitur quomodo ad hoc Theorema X. deveniatur. Nam si dicatur gravitas g, velocitas v, resistentia 2 a v + v v, et tempus t; corpore ascendente erit (16. 17) $g\,dt + 2av\,dt + vv\,dt = -dv$, et ideò $dt = \frac{-dv}{vv + 2av + g}$. Ponatur $v + a = x$, et ideò $dv = dx$, et $vv + 2av = xx - aa$, fiet $dt = \frac{-dx}{xx + g - aa}$. Undè si fuerit $g = aa$, erit $dt = \frac{-dx}{xx}$; si $g - aa = bb$, erit $dt = \frac{-dx}{xx + bb}$. Si $g - aa = -bb$ erit $dt = \frac{-dx}{xx - bb}$. Fluens quantitatis $-\frac{dx}{xx}$, est $\frac{1}{x}$, fluens quantitatis

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, et areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione arithmeticâ; si vires ex resistentiâ et gravitate compositæ sumantur in progressione geometricâ.

Capiatur A C in (fig. tribus ultimis) gravitati, et A K resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti A si corpus descen-



dit, aliter ad contrarias. Erigatur A b, quæ sit ad D B ut D B q ad 4 B A C: et descriptâ ad asymptotos rectangulas C K, C H hyperbolâ b N, erectaque K N ad C K perpendiculari, (t) area A b N K augebitur vel diminuetur in progressione arithmeticâ, (u) dum vires C K in pro-

$\frac{-dx}{xx+bb}$, pendet a quadraturâ sectoris circularis (107), fluens quantitatis $\frac{-dx}{xx-bb}$, a quadraturâ sectoris hyperbolici; atquè hi sunt tres casus pro corporis ascensu; pro descensu verò est (19) $g\,dt - 2\,a\,v\,dt - v\,v\,dt = dv$, et ideò $dt = \frac{dv}{g-2av-vv} = \frac{dx}{g+aa-xx}$ $= \frac{dx}{bb-xx}$, ponendo $v+a=x$ et $g+aa=bb$, fluens autem quantitatis $\frac{dx}{bb-xx}$, pendet a quadraturâ hyperbolæ.

(t) * *Area A b N K augebitur vel,* &c. (380. Lib. 1.).

(u) * *Dum vires C K,* &c. Sunt enim vires acceleratrices vel retardatrices ut C K, siquidem

gressione geometricâ sumuntur. (x) Dico igitur quòd distantia corporis ab ejus altitudine maximâ sit ut excessus areæ A b N K supra aream D E T.

Nam cùm A K sit ut resistentia, id est, ut A P q + 2 B A P; assumatur data quævis quantitas Z, et ponatur A K æqualis $\frac{A P q + 2 B A P}{Z}$; et (per hujus Lemma II.) erit ipsius A K momentum K L æquale $\frac{2 A P Q + 2 B A \times P Q}{Z}$ seu $\frac{2 B P Q}{Z}$, et areæ A b N K momentum K L O N æquale $\frac{2 B P Q \times L O}{Z}$ (z) seu $\frac{B P Q \times B D \text{ cub.}}{2 Z \times C K \times A B}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, (a) sitque gravitas ut A B q + B D q existente B E T circulo (in figurâ primâ) (b) linea A C, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{A B q + B D q}{Z}$, (c) et D P q seu A P q + 2 B A P + A B q + B D q erit A K $\times$ Z + A C $\times$ Z seu C K $\times$ Z; (d) ideóque area D T V erit ad aream D P Q ut D T q vel D B q ad C K $\times$ Z.

Cas. 2. Sin corpus ascendit, et gravitas sit ut A B q — B D q, (e) linea A C (in figurâ secundâ) erit $\frac{A B q - B D q}{Z}$, (f) et D T q erit ad D P q ut D F q seu D B q ad B P q — B D q seu A P q + 2 B A P + A B q — B D q, id est, ad A K $\times$ Z + A C $\times$ Z seu C K $\times$ Z.

in corporis ascensu vis retardatrix est A C + A K, seu summa virium gravitatis et resistentiæ, et in descensu vis acceleratrix est A C — A K = C K seu excessus vis gravitatis supra resistentiam (18).

(x) * *Dico igitur quod distantia corporis ascendentis ab ejus altitudine maximâ* et distantia descendentis a puncto quietis et quo decidit *sit ut excessus*, &c.

(z) * *Seu*, &c. Nam (per Theor. IV. de Hyp.) est L O : A b = C A : C K, et (per constr.) A b : D B = D B^2 : 4 B A $\times$ A C, ideóque (ex æquo) L O : D B = D B^2 : 4 B A $\times$ C K, et hinc L O = $\frac{D B^3}{4 C K \times B A}$. Quarè momentum K L O N = L O $\times$ K L = $\frac{2 B P Q \times L O}{Z} = \frac{B P Q \times B D^3}{2 Z \times C K \times A B}$.

(a) * *Sitque gravitas*, &c. In Cas. 1°. Prop. XIII. gravitas erat ut D A^2 = A B^2 + B D^2.

(b) * *Linea A C*, &c. Est enim in Cas. 1°. Prop. XIII. gravitas ad resistentiam ut A B^2 + B D^2 ad A P^2 + 2 B A P, et (per Hyp.) ut A C ad A K, seu $\frac{A P^2 + 2 B A P}{Z}$. Quarè erit A B^2 + B D^2 ad A P^2 + 2 B A P ut A C ad $\frac{A P^2 + 2 B A P}{Z}$, et hinc habetur A C = $\frac{A B^2 + B D^2}{Z}$, et A C $\times$ Z = A B^2 + B D^2.

(c) * *Et D P q*, &c. Ob angulum D B P rectum, et quia A K $\times$ Z = A P^2 + 2 B A P, atque A C $\times$ Z = A B^2 + B D^2, ut ex superioribus patet.

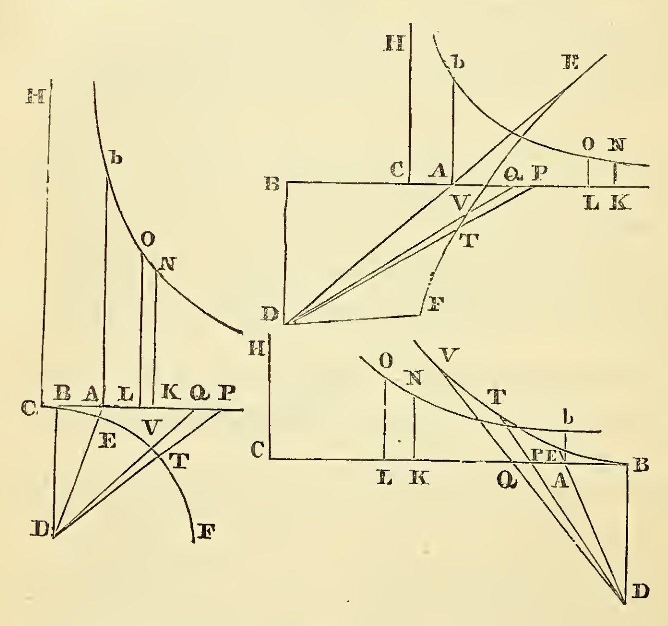
(d) * *Ideóque area D T V*, &c. Nam (ex dem. in 1°. Casu Prop. XIII.) area D T V est ad aream D P Q, ut D T^2 vel D B^2 ad D P^2, et est D P^2 = C K $\times$ Z.

(e) * *Linea A C*, &c. Patet ut in primo casu hujus.

(f) *Et D T q erit ad D P q*. Patet (ex dem. in Cas. 2°. Prop. XIII.)

(g) Ideóque area D T V erit ad aream D P Q ut D B q ad C K × Z.

Cas. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, et propterea gravitas sit ut B D q — A B q, et linea A C (in figurâ tertiâ) æquetur $\frac{B D q - A B q}{Z}$ (h) erit area D T V ad aream D P Q ut D B q ad C K × Z: ut supra.



Cum igitur areæ illæ semper sint in hâc ratione; si pro areâ D T V, quâ momentum temporis sibimet ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, putà B D × m, erit area D P Q, id est, ½ B D × P Q, ad B D × m ut C K × Z ad B D q. Atque inde fit P Q × B D cub. æquale 2 B D × m × C K × Z, et areæ A b N K (i) momentum K L O N superius inventum fit $\frac{B P \times B D \times m}{A B}$. Au-

(g) * *Ideóque area D T V*, &c. Nam (ex dem. in 2°. Cas. Prop. XIII.) area D T V, est ad aream D P Q, ut B D² ad B D² — B P² = B D² — A B² — 2 B A P — A P² = A C × Z — A K × Z = C K × Z.

(h) * *Erit area D T V.* (Ex demonstratis in 3°. Cas. Prop. XIII.) area D T V est ad aream D P Q, ut B D² ad B D² — B P² = B D² — A B² — 2 B A P — A P² = A C × Z — A K × Z = C K × Z.

(i) * *Momentum K L O N superius inventum* est $\frac{B P Q \times B D^3}{2 Z \times C K \times A B} = \frac{B P \times P Q \times B D^3}{2 Z \times C K \times A B}$. Quarè cum sit P Q × B D³ = 2 B D × m × C K × Z, erit K L O N = $\frac{B P \times B D \times m}{A B}$.

feratur areæ D E T momentum D T V seu B D × m, et restabit $\frac{A P \times B D \times m}{A B}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{A P \times B D \times m}{A B}$; et propterea ob datum $\frac{B D \times m}{A B}$ ut velocitas A P, (k) id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo vel descendendo describit. Ideóque differentia arearum et spatium illud proportionalibus momentis crescentia vel decrescentia et simul incipientia vel simul evanescentia, (l) sunt proportionalia. Q. e. d.

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream D E T ad lineam B D, dicatur M; et longitudo alia V sumatur in eâ ratione ad longitudinem M, quam habet linea D A ad lineam D E: spatium, quod corpus ascensu vel descensu toto in medio resistente describit, erit ad spatium in medio non resistente e quiete cadendo eodem tempore describere potest, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{B D \times V^2}{A B}$: ideóque ex dato tempore datur. Nam spatium in medio non resistente est in duplicatâ ratione temporis, (m) sive ut V^2; et ob datas B D et A B ut $\frac{B D \times V^2}{A B}$. (n) Hæc area æqualis est areæ $\frac{D A q \times B D \times M^2}{D E q \times A B}$, (o) et ipsius M momentum est m; et propterea hujus areæ momentum est $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{D E q \times A B}$. Hoc autem momentum est ad momentum differentiæ arearum prædictarum D E T et A b N K, viz. ad $\frac{A P \times B D \times m}{A B}$, ut $\frac{D A q \times B D \times M}{D E q}$ ad $\frac{1}{2}$ B D × A P, (p) sive ut $\frac{D A q}{D E q}$ in D E T ad D A P, ideóque, ubi

(k) * *Id est ut momentum spatii.* Nam dato temporis momento, momentum spatii est ut velocitas (11.).

(l) * *Sunt proportionalia.* (Per Corol. Lem. IV. Lib. I.) Dum autem evanescit A P, seu velocitas, evanescit quoque resistentia A K, cum areâ A b N K, et tempore D T E.

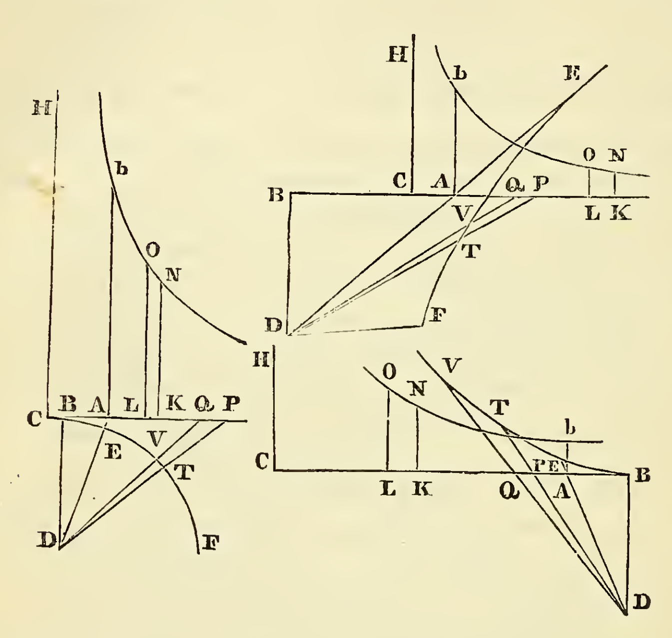
(m) * *Sivè ut V^2.* Nam ob datas B D, D A, D E, longitudo quæ æquatur D E T $\times \frac{D A}{B D \times D E}$ (per Hyp.) est ut area D E T, seu ut tempus. Spatium autem in medio non resistente est in duplicatâ ratione temporis (27. Lib. I.) ideóque ut V^2.

(n) * *Hæc area.* Quoniam (per Hyp.) V : M = D A : D E, erit $V = \frac{D A \times M}{D E}$ et $V^2 = \frac{D A^2 \times M^2}{D E^2}$, adeóque $\frac{B D \times V^2}{A B} = \frac{D A^2 \times B D \times M^2}{D E^2 \times A B}$.

(o) * *Et ipsius M momentum est m.* Cùm enim sit (per Hyp.) $M = \frac{D E T}{B D}$, momentum ipsius M, erit $\frac{D T V}{B D}$, sed superiùs supponebatur D T V = B D × m; quarè momentum ipsius M, est m; et ideò momentum quadrati M^2 est 2 M × m (per Cas. 3. Lem. hujus) et *proptereà* ob datas D A, B D, D E et A B, *hujus areæ momentum*, &c.

(p) * *Sivè ut $\frac{D A q}{D E q}$ in D E T*, &c. Ob

areæ D E T et D A P quam minimæ sunt, (q) in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, et differentia arearum D E T et A b N K, quan-



do omnes hæ areæ quam minimæ sunt, æqualia habent momenta; (r) ideóque sunt æquales. Unde cum velocitatės, et propterea etiam spatia in medio utroque in principio descensûs vel fine ascensûs simul descripta (s) accedant ad æqualitatem; ideóque tunc sint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, et arearum D E T et A b N K differentia; et præterea cùm

$M = \frac{DET}{BD}$, ideóque $M \times BD = DET$, et $\frac{1}{2} BD \times AP = DAP$.

(q) * *In ratione æqualitatis.* Ubi enim areæ D E T et D A P quam minimæ sunt, fit $DET : DAP = DE^2 : DA^2$, ideóque $\frac{DA^2}{DE^2} \times DET = DAP$.

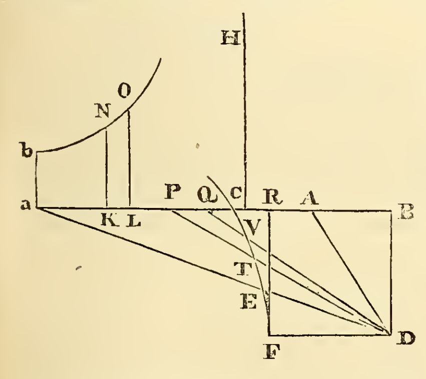
(r) *Ideóque sunt æquales.* Quandò sunt quam minimæ.

(s) *Accedant ad æqualitatem.* Ob resistentiam cum velocitate nascentem vel evanescentem, manente gravitate.

144. Constructione Casûs 3i. Propositionis hujus 14æ. uti possumus ad determinandum motum corporis verticaliter deorsum projecti cum velocitate quæ terminali minor est. Nam si æqualis ipsi fuerit, motus est æquabilis; si verò celeritas projectionis terminali major sit, paulò mutanda erit Casûs tertii constructio. Iisdem enim positis in not. 139. capiatur A C gravitati et A K resistentiæ proportionalis, ità ut sit C inter A et K, quod resistentia gravitate major supponatur. Sit A a velocitas projectionis terminali major; erigatur perpendicularis a b, quæ sit ad D B, ut DB^2, ad $4 AB \times Ca$, et descriptâ ad asymptotos rectangulas C K, C H hyperbolâ b N, erectâque K N ad C K, perpendiculari, area a b N K augebitur in progressione arithmeticâ, dum vires C K in progressione geometricâ minuuntur. Spatium autem tempore D E T descriptum erit ut excessus areæ a b N K, suprà aream D E T; nam ponatur, (ut in de-

spatium in medio non resistente sit perpetuò ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$, et spatium in medio resistente sit perpetuò ut arearum D E T et A b N K differentia: necesse est, ut spatia in medio utroque, in æqualibus quibuscunque temporibus descripta, sint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{AB}$, et arearum D E T et A b N K differentia. Q. e. d.

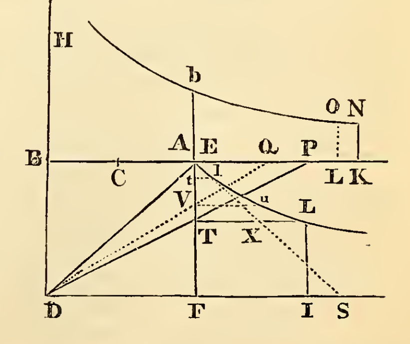
monstratione Prop. XIV.) $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$, et ideò $KL = \frac{2BPQ}{Z}$, atque areæ a b N K momentum K L O N, $= \frac{2BPQ \times LO}{Z} = \frac{BPQ \times DB^3}{2Z \times AB \times CK}$. Cùm gravitas sit ut $BD^2 - AB^2$, erit $AC = \frac{BD^2 - AB^2}{Z}$, et area D T V ad aream D P Q ut BD^2 ad $BP^2 - BD^2$ (136) sive $AP^2 + 2BAP$



$+ AB^2 - BD^2$, sive $AK \times Z - AC \times Z$, vel $CK \times Z$. Si itaque pro areâ constante D T V, scribatur $BD \times m$, erit area D P Q, id est, $\frac{1}{2} BD \times PQ$ ad $BD \times m$, ut $CK \times Z$ ad BD^2, atquè indè fit $PQ \times BD^3 = 2BD \times m \times CK \times Z$, et areæ a b N K momentum K L O N superiùs inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$ auferatur areæ D E T momentum D T V seu $BD \times m$ et restabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum ut velocitas A P, id est, ut momentum spatii quod corpus describit, ideóque differentia arearum ut spatium descriptum.

145. Hinc spatium tempore D E T, velocitate uniformi A a descriptum est ad spatium eodem tempore descriptum in medio resistente ut factum $Aa \times DET$ ad arearum a b N K et D E T differentiam in A B ductam. Nam spatium tempore D E T, velocitate uniformi A a descriptum, est ut $Aa \times DET$ (5. Lib. I.) et spatii hujus momentum est ut $Aa \times DTV$; momentum autem spatii in medio resistente descripti est ut $AP \times DTV$, seu ut velocitas in momentum temporis ducta (12) et quia evanescente D E T, fit $AP = Aa$, hæc momenta $Aa \times DTV$, $AP \times DTV$, initio temporis æqualia sunt, sicut et spatia initio descripta. Sed $AP \times DTV = AP \times BD \times m$ et momentum differentiæ arearum a b N K et D E T; est $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$ (144). Ergo $AP \times DTV$ æquale est momento differentiæ arearum a b N K et D E T per A B ducto, unde manifestum est propositum.

146. Si corporis ascendentis velocitas exponatur per longitudinem A P, et resistentia per A K quæ ponatur esse ut $AP^2 + 2BAP$, ita ut assumptâ datâ quâvis quantitate Z, sit $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$; vis autem gravitatis exponatur per A C, quæ sit semper ut AB^2, ita ut



sit $AC = \frac{AB^2}{Z}$ eademque constructio fiat quæ (not. 141.) * et in A erigatur perpendiculum $Ab = \frac{AB^2}{4CA}$. Denique erecto perpendi-

Scholium.

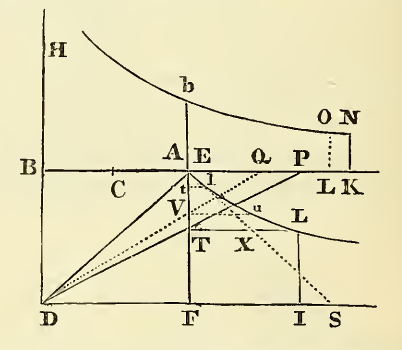
([t]) Resistentia corporum sphæricorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, et partim ex densitate medii. Et resistentiæ

culo in C describatur ad asymptotos rectangulos C K, C H hyperbolâ b N, erectâque K N ad C K perpendiculari, area A b N K diminuetur in progressione arithmeticâ dum vires C K in progressione geometricâ decrescente sumuntur. Et distantia corporis ab ejus altitudine maximâ erit ut excessus areæ A b N K supra triangulum D E T.

Cùm enim sit $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$ erit ipsius A K momentum K L (per Lib. II. Lem. II.) $= \frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z} = \frac{2BPQ}{Z}$ et areæ AbNK momentum KLON $= \frac{2BPQ \times LO}{Z}$, et quia, per naturam hyp. est $CK : CA = Ab \left(\text{sive } \frac{AB^2}{4CA}\right) : LO$, est $LO = \frac{AB^2}{4CK}$, ideóque $KLON = \frac{BP \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$. Est verò area D T V ad aream D P Q ut DT^2 ad DP^2, sive etiam ob triangula similia T D F, B D P, ut DF^2 sive AB^2 ad BP^2, seu $AP^2 + 2BAP + AB^2$ (per 4. 2. El.) hoc est (quia ex hypothesi est, $AP + 2BAP = AK \times Z$, et $AB^2 = CA \times Z$) ad $CK \times Z$.

Hinc si pro area D P Q scribatur ejus valor $\frac{1}{2} BD \times PQ = \frac{1}{2} AB \times PQ$, erit area $DTV = \frac{AB \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$, quæ valorem constantem exprimere debet, quia momentum temporis sibi semper æquale exponit, ejus itaque loco scribatur rectangulum $AB \times m$ in quo m erit momentum constans, est $m = \frac{AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$, erit ergo areæ A b N K momentum superius inventum $\frac{BP \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK} = BP \times m$, igitur differentia momentorum K L O N et D T V, est $BP \times m - AB \times m = AP \times m$ et propterea ob datum m ut velocitas A P, id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo describit, et quo minuitur corporis distantia ab ejus altitudine maximâ. Ideóque differentia arearum et spatium illud proportionalibus momentis decrescentia, simulque evanescentia sunt proportionalia.

Verùm in isto casu facilius quam per methodum Newtonianam obtinetur spatium a corpore ascendente usque ad quietem in medio resistente descriptum, et ejus relatio ad spatium in medio non resistente eodem tempore percurrendum: etenim per punctum A asymptotis D B, D F describatur hyperbola, et ex puncto T ducatur perpendiculum T L ad hyperbolam usque, trilineum A T L erit ut spatium quæsitum. Ducatur L I ad asymptotum perpendicularis, erit $FI = TL$ et $TF = LI$, sed ex natura hyperbolæ est $DF : DI = LI$ (sive TF) : A F, et dividendo $DF : FI$ (sive TL) $= TF : AT$, hoc est alternando $DF : TF = TL : AT$, (sed per 141) est $DF : TF = AP : AT$,



ergo est $AP = TL$, itaque ducta ex V parallela V u, erit V T L u, momentum areæ A T L $= VT \times TL$, est autem V T momentum temporis, et $TL = AP$ ipsa velocitas eo momento, ergo $VT \times TL$ est ut momentum spatii eo momento descripti, ergo tota area A T L est ut spatium descriptum.

Ducatur præterea tangens A S et designet A t ultimum temporis momentum, et ducta t l, trilineum evanescens A T L æquale fiet triangulo A t l, et eo ultimo momento spatia tam in medio resistente quam in non resistente descripta erunt æqualia, ideóque per idem triangulum A t l exprimentur; spatia verò in medio non resistente descripta sunt ut quadrata temporum, ideóque spatium tempore A t in medio non resistente descriptum erit ad spatium tempore A T in eodem medio descriptum sicut $\overline{At}^2$ ad $\overline{AT}^2$, sive ut area trianguli A t l ad aream A T X; spatium verò in medio resistente descriptum tempore A t erit ad spatium tempore A T in eodem medio descriptum ut A t l ad trilineum A T L, unde liquet quod spatium in medio non resistente descriptum, ascendendo ad quietem usque, erit ad spatium in medio resistente descriptum, ut A T X ad A T L, existente velocitate, in medio non resistente, ut T X, et in medio resistente, ut T L.

([t]) * *Resistentia corporum.* (Vid. Lem. num. I.)

partem illam, quæ oritur ex densitate fluidi, diximus esse in duplicata ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, est uniformis, sive ut momentum temporis: ideóque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim vi uniformi seu in ratione momentorum temporis, et partim in ratione duplicatâ velocitatis. Sed sufficit aditum patefecisse ad hanc speculationem in Propositionibus VIII. et IX. quæ præcedunt, et eorum Corollariis. (u) In iisdem utique pro corporis ascendentis resistentiâ uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur, substitui potest resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus solâ vi insitâ movetur; et corpore rectâ ascendente addere licet hanc uniformem resistentiam vi gravitatis; eandemque subducere, quando corpus rectâ descendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, et partim in ratione duplicatâ velocitatis. Et viam aperui in Propositionibus præcedentibus XIII. et XIV. (x) in quibus etiam resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis, substitui potest, vel cum eâdem, ut prius, componi. Sed propero ad alia.

(u) * *In iisdem utique* (105).

(x) * *In quibus etiam resistentia uniformis,* hoc est, si corpus solâ vi insitâ feratur, in constructionibus Prop. XIII. et XIV., quæ sunt pro corporis ascensu, loco gravitatis substituenda est resistentia uniformis quæ oritur ex tenacitate medii; si corpus ascendens vi gravitatis etiam urgeatur, quantitas illa quæ solam gravitatem exponebat, summam gravitatis et resistentiæ uniformis in prædictis constructionibus exponet. Tandem si corpus vi gravitatis descendat, eadem quantitas quæ solam gravitatem exponebat, excessum gravitatis suprà resistentiam uniformem in constructionibus quæ sunt pro descensu repræsentabit (cæteris manentibus.)

SECTIO IV.

De corporum circulari motu in mediis resistentibus (*).

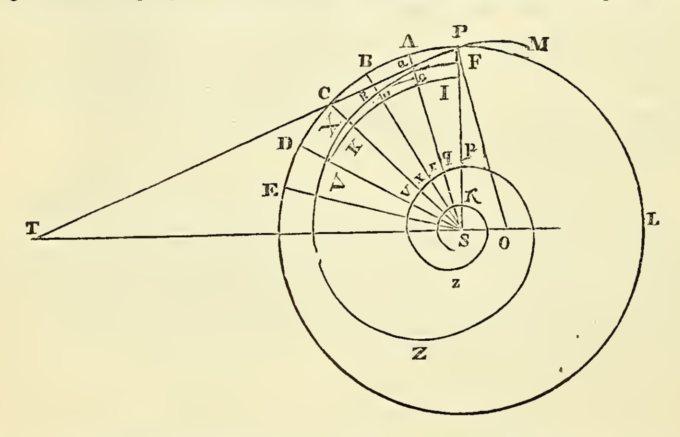
(*) Newtonus in hâc sectione præcipuas supponit logarithmicæ spiralis proprietates, postulat igitur instituti nostri ratio ut de illâ curvâ aliquid præmittamus.

147. Circulus P A E L, centro S, et radio quovis S P descriptus divisus sit in arcus quotlibet æquales P A, A B, B C, C D, &c., sintque radiorum P S, A S, B S, C S, &c., partes P S, Q S, R S, X S, &c. in continuâ progressione geometricâ, puncta P, Q, R, X, &c., erunt in spirali logarithmicâ in quâ proindè si radii Q S, R S, X S, &c., sint numeri, arcus circuli P A, P B, P C, &c., sicut et anguli P S Q, P S R, P S X, &c., erunt ut illorum numerorum logarithmi, prorsùs ut in vulgari logarithmicâ axis partes sunt ut logarithmi ordinatarum correspondentium.

148. Quoniam autem progressio geometrica in infinitum decrescere et crescere potest, manifestum est spiralem logarithmicam utrinquè tam ad centrum S accedendo quàm ab eodem versùs M recedendo per gyros infinitos continuari posse, continuatâ progressione radiorum decrescentium vel crescentium circà centrum S, ad quod idcircò curva decrescentibus radiis proportionalibus, magis magisque accedit, licet numquam illud possit attingere, sive ut loqui amant, licet illud centrum non attingat nisi post infinitas revolutiones.

149. Angulus S Q R, quem radius quilibet S Q, cum curvâ ad easdem partes constituit constans est; si quidem evanescentibus arcubus æqualibus P A, A B, B C, &c., triangula evanascentia P S Q, Q S R, R S X, &c., similia fiunt propter latera circà æquales ad centrum angulos proportionalia (147) et ideò alii anguli homologi S P Q, S Q R, S R X, &c., et P Q S, Q R S, R X S, æquales sunt.

150. Quoniam itaque spira quælibet P Q R Z p, p q r z π, &c., totidem triangulis P Q S et p q S, Q R S et q r S, &c. similibus similiterque positis divisa est, spiræ omnes quæ a radio positione dato S P, ad eundem radium ductæ sunt, inter se similes radiisque correspondentibus proportionales erunt, id est P S : p S = P Q R Z p : p q r z π, &c. Atquè hinc sequitur (147) tam spiras omnes quàm radios ipsis correspondentes ad centrum usque in progressione geometricâ decrescere, sunt enim P S, p S, π S, &c. progressionis geometricæ termini æquidistantes ob æqualem angulorum æqualium P S Q, Q S R, p S q, q S r, &c. numerum in singulis spiris comprehensum, undè radiorum quoque differentiæ P p, p π, &c. in eâdem geometricâ progressione decrescunt.



151. Ductâ rectâ P T spiralem tangente in P, et rectâ P O ad eandem perpendiculari, per centrum S erigatur ad radium S P perpendiculum T S O rectis P T et P O occurrens in T et O, longitudo spiralis P Z p z π S, ad centrum usque S, æquabitur tangenti P T, eritque proindè ad radium S P in datâ ratione P T ad S P, vel O P ad O S. Nam centro S, radiis S Q, S R, S X, S V, &c. infinitè propinquis descripti sint arcus circulares Q F, R G, X H, V K, &c., et ob angulos Q F P, R G Q, X H R rectos, angulosque Q P F, R Q G, X R H, &c. æqua-

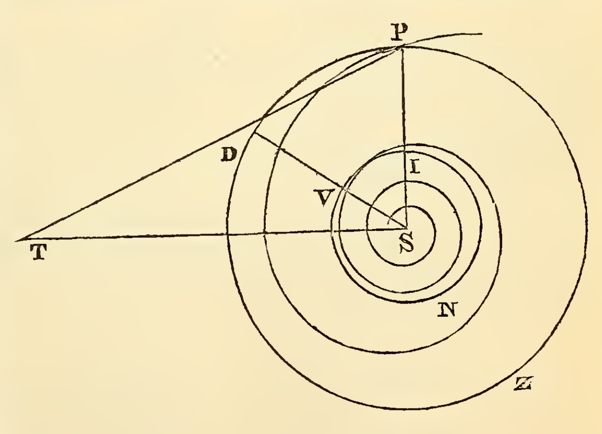
les (149), triangula evanescentia P F Q, Q G R, R H X, &c. similia sunt triangulo P S T, est igitur P T : P S = P Q : P F = Q R : Q G = R X : R H, &c. et composite P T : P S = P Q + Q R + R X, &c. : P F + Q G + R H, &c. id est, ut longitudo spiralis ad totum radium P S. Quarè longitudo spiralis æquatur tangenti P T. Est autem ubique tangens P T ad radium correspondentem P S, in ratione datâ, ob triangulum P T S specie datum (149) et ob triangula T P S, P O S, (per constr.) similia, est etiam O P : O S = P T : P S, seu ut longitudo spiralis ad radium.

152. Hinc quoque patet quòd si centro S et radio quovis V S describatur circulus secans spiralem in V et radium P S, in I, pars spiralis P V erit ad partem P I radii P S, ut tangens P T ad totum radium P S. Quarè si, manentibus circulorum radiis S P, S I, mutetur utcumque angulus T P S, quem spiralis seu ipsius tangens continet cum radio P S, longitudo spiralis tota ad centrum usquè S, sicut et longitudo inter duos circulos radiis S P, et S I descriptos comprehensa, erit ut spiralis tangens P T, seu ut secans anguli T P S. Ostendimus (151) longitudinem spiralis æqualem esse tangenti P T, et partem spiralis P V, inter prædictos circulos contentam, esse ad tangentem P T, in ratione P I ad P S, quæ (per Hyp.) data est; manente autem radio seu sinu toto P S, est P T secans anguli P T S.

153. Dicantur radius constans P S = a, subtangens S T = b, arcus quilibet circuli P C vel P C L P + P C, vel 2 P C L P + P C = x, correspondens spiralis radius S X = y, qui crescente arcu x decrescit, erit ob triangulorum X K V, P S T similitudinem P S : S T = X K : V K, et ob sectores S V K, S D C similes, S K sive S X : S C seu P S = V K : D C, ideóque ex æquo S X : S T = X K : D C; id est, y : b = — d y : d x = $-\frac{b\,d\,y}{y}$, hinc sumptis fluentibus x = Q — b L. y, et quia ubi x = o, fit y = a, erit Q = b L. a, et ideò x = b L. a — b L. y = b L. $\frac{a}{y}$; si itaque datus fuerit radius y cum arcu circulari x, seu angulo P S C dabitur b subtangens anguli spiralis, est enim b = $\frac{x}{L.\frac{a}{y}}$. Si verò datus sit tum arcus x tum subtangens b dabitur radius y; ponatur enim L. h = 1 et erit $\frac{x}{b}$ × L. h = L. $\frac{a}{y}$, adeóque $h^{\frac{x}{b}} = \frac{a}{y}$; $y = \frac{a}{h^{\frac{x}{b}}}$, et hinc aitem $a = y \times h^{\frac{x}{b}}$.

154. Hinc si manentibus radiis S P seu a, et S V vel S I seu y, adeóque et L. $\frac{a}{y}$, mutetur utcumque angulus T P S, quem spiralis cum radio continet, arcus circularis P D vel x, comprehensus inter radios S P et S V D, erit semper ut subtangens spiralis S T, seu b, quæ, manente radio seu sinu toto P S, est ut anguli T P S tangens.

155. Iisdem positis, hoc est, manentibus radiis S P sive a, et S I sive y, et utcumque mutato angulo T P S, numerus revolutionum spiralis inter circulos P D Z P, et I V N I centro S et radiis datis S P, S V vel S I descriptos est ut tangens S T anguli T P S, quem spiralis cum radio continet. Sit enim c circumferentia circuli P D Z P, et n numerus integer vel fractus revolutionum spiralis a puncto P ad punctum V inter circulos P D Z P, et I V N I, erit (153) n c = x = b L. $\frac{a}{y}$; et hinc n = $\frac{b}{c}$ × L. $\frac{a}{y}$. Quarè ob datas c, a et y, (per Hyp.) erit n ut b, id est numerus revolutionum inter circulos datos ut subtangens spiralis S T, seu ut tangens anguli T P S, quem spiralis cum radio continet.

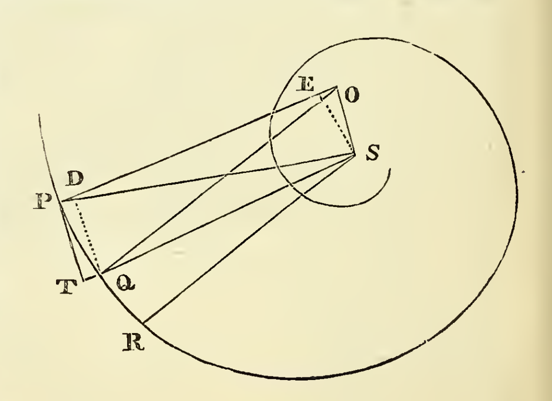


156. Spiralis post infinitos sibi super-impositos gyros comprehendit cum radio P S spatium duplum trianguli P S T. Iisdem enim positis quæ num. 153. cum sit (fig. pag. præced.) P S (a) : S T (b) = X K (— d y) : V K = $-\frac{b\,d\,y}{a}$, erit sector S V K seu S V X = $-\frac{y\,b\,d\,y}{2\,a}$, et sumptis fluentibus, sector S P V = Q — $\frac{b\,y^2}{4\,a}$; quia verò evanescente sectore S P V, fit

LEMMA III.

Sit P Q R *spiralis quæ secet radios omnes* S P, S Q, S R, &c. *in æqualibus angulis. Agatur recta* P T *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *secetque radium* S Q *in* T; *et ad spiralem erectis perpendiculis* P O, Q O *concurrentibus in* O, *jungatur* S O. *Dico quod si puncta* P *et* Q *accedant ad invicem et coëant, angulus* P S O *evadet rectus, et ultima ratio rectanguli* T Q × 2 P S *ad* P Q *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis O P Q, O Q R subducantur anguli æquales S P Q, S Q R, et manebunt anguli æquales O P S, O Q S. Ergo circulus qui transit per puncta O, S, P [y] transibit etiam per punctum Q. Coëant puncta P et Q, et hic circulus in loco coitûs P Q tanget spiralem, [z] ideóque perpendiculariter secabit rectam O P. Fiet igitur O P diameter circuli hujus, et angulus O S P in semicirculo rectus. Q. e. d.



Ad O P demittantur perpendicula Q D, S E, [a] et linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: T Q ad P D ut T S vel P S ad P E, seu 2 P O ad 2 P S; item P D ad P Q ut P Q ad 2 P O; et ex æquo perturbatè T Q ad P Q ut P Q ad 2 P S. Unde fit P Q q æquale T Q × 2 P S. Q. e. d.

y = a, erit $Q = \frac{b\,a^2}{4\,a}$, et hinc $S\,P\,V = \frac{b\,a\,a - b\,y\,y}{4\,a}$. Quarè ubi radius y = o, fiet area $S\,P\,V = \frac{b\,a}{4} = \frac{P\,S \times S\,T}{4} = \frac{1}{2}$ triang. P S T.

(y) * *Transibit etiam per punctum Q.* (Per Prop. XXI. Lib. III. Elem.)

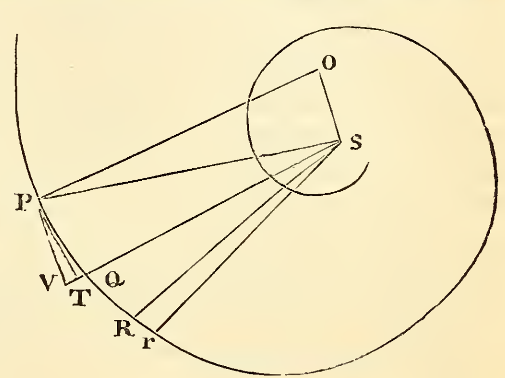
(z) *Ideóque perpendiculariter secabit rectam O P,* quæ (per Hyp.) perpendicularis est ad arcum Q P, fiet igitur O P diameter circuli hujus (per Prop. XIX. Lib. III. Elem.) et angulus O S P in semi-circulo rectus (per Prop. XXXI. Lib. III. Elem.).

(a) * *Et linearum rationes ultimæ.* Quoniam lineæ P T, D Q, E S ad P O normales, sunt parallelæ, erit (per Prop. X. Lib. VI. Elem.) T Q : P D = T S vel P S : P E, et ob similitudinem triangulorum P S O, P E S, P S : P E = P O : P S, seu 2 P O : 2 P S, ideóque T Q : P D = 2 P O : 2 P S. Quia verò radii O P, O Q sunt ad arcum evanescentem P Q perpendiculares, punctum O est centrum, P O radius et 2 P O diameter circuli spiralem osculantis in P (121. Lib. I.) et (per Lem. VII. Lib. I.) P Q hujus circuli arcus vel chordæ; atque adeò (ex naturâ circuli) abscissa P D est ad chordam P Q ut P Q ad diametrum 2 P O. Quare *ex æquo perturbatè*, &c.

PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

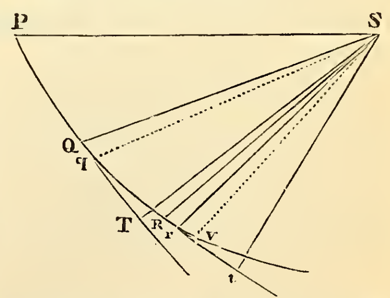
Si medii densitas in locis singulis sit reciprocè ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta in duplicatâ ratione densitatis; dico quod corpus gyrari potest in spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Ponantur quæ in superiore Lemmate, et producatur S Q ad V, ut sit S V æqualis S P. Tempore quovis, in medio resistente, describat corpus arcum quàm minimum PQ, et tempore duplo arcum quàm minimum P R; et decrementa horum arcuum ex resistentiâ oriunda, sive defectus ab arcubus, qui in medio non resistente iisdem temporibus describerentur, ([b]) erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Est itaque decrementum arcûs P Q pars quarta decrementi arcûs P R. ([c]) Unde etiam, si areæ P S Q æqualis capiatur area Q S r, erit decrementum arcûs P Q æquale



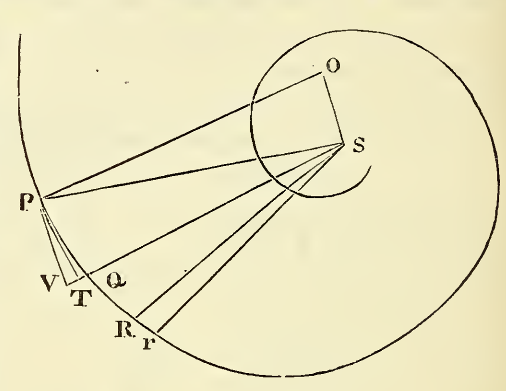
([b]) * *Erunt ad invicem.* Cùm enim resistentia per arcum P R considerari possit tanquam vis retardatrix (4), decrementa arcuum minimorum P Q, P R ex resistentiâ oriunda sunt ut spatia quæ urgente vi acceleratrice resistentiæ æquali corpus describeret iisdem temporibus quibus describit arcus illos P Q, P R; quarè decrementa illa sunt ut quadrata temporum quibus generantur (per Lem. X. Lib. I.).

([c]) * *Undè etiam si areæ.* Corpus eâ velocitate quam habet in loco P, temporibus æqualibus describat arcus quàm minimos P q, q v, in medio non resistente, et arcus P Q, Q R in medio resistente, et erit (ex dem.) 4 Q q = R v, sunt autem areæ P S q et q S v æquales (per Prop. I. Lib. I.) ideóque ob areas P S Q, et Q S r, etiam æquales (per Hyp.) erit P S q — P S Q seu area Q S q æqualis q S v — Q S r, seu r S v — Q S q, et hinc area r S v æqualis est 2 Q S q; sed demissis ex centro S ad tangentes Q T et r t per puncta Q et r ductas perpendiculis S T et S t, area evanescens Q S q est $\frac{1}{2}$ S T $\times$ Q q. et area r S v, est $\frac{1}{2}$ S t $\times$ r v. Quarè S T $\times$ Q q æquatur $\frac{1}{2}$ S t $\times$ r v, et coëuntibus punctis P et v, fit S t = S T atquè adeò Q q = $\frac{1}{2}$ r v, et 2 Q q = r v. Cùm igitur suprà invenerimus 4 Q q = R v, erit 4 Q q — 2 Q q, seu 2 Q q = R v — r v = R r, et ideò Q q = $\frac{1}{2}$ R r. Itaque eodem tempore quo resistentia generat decrementum Q q, seu $\frac{1}{2}$ R r, vis



centripeta quâ corpus a tangente P T (vid. fig. text.) ad punctum Q arcûs P Q retrahitur, generat decrementum T Q, et ideò vis resistentiæ est ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}$ R r ad T Q, (per Cor. 4. Lem. X.) atque hæc omnia generaliter obtinent, quæcumque fuerit tum curva P Q R, cujus proprietates nondum adhibuimus, tum vis centripeta, tum resistentia, tum velocitas corporis.

dimidio lineolæ R r; ideóque vis resistentiæ et vis centripeta sunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}$ R r et T Q quas simul generant. Quoniam vis centripeta, quâ corpus urgetur in P, (d) est reciprocè ut S P q, et (e) (per Lem. X. Lib. I.) lineola T Q, quæ vi illâ generatur, est in ratione compositâ ex ratione hujus vis et ratione duplicatâ temporis quo arcus P Q describitur (nam resistentiam in hoc casu, ut infinitè minorem quàm vis centripeta, negligo) erit $TQ \times SPq$, id est (per Lemma novissimum) $\frac{1}{2} PQq \times SP$, in ratione duplicatâ temporis, (g) ideóque tempus est ut $PQ \times \sqrt{SP}$; (h) et corporis velocitas, quâ arcus P Q illo tempore describitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ seu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc est, in subduplicatâ ratione ipsius S P reciprocè. Et simili argumento, velocitas quâ arcus Q R describitur, est in subduplicatâ ratione ipsius SQ reciprocè. Sunt autem arcus illi PQ et QR (i) ut velocitates descriptrices ad invicem, id est, in subduplicatâ ratione SQ ad S P, sive ut S Q ad $\sqrt{SP \times SQ}$; (k) et ob æquales angulos S P Q, S Q r et æquales areas P S Q, Q S r, est arcus P Q ad arcum Q r ut S Q ad S P. (l) Sumantur proportionalium consequentium differentiæ, et fiet arcus P Q



(d) * *Est reciprocè ut S P q* (per Hyp.).

(e) * *Per Lem. X.* (Cor. 3.)

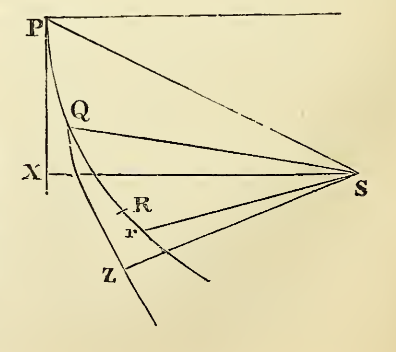
(g) * *Ideóque tempus.* (Neglectâ fractione datâ $\frac{1}{2}$ *est ut*, &c.

(h) * *Et corporis velocitas.* (14).

(i) * *Ut velocitates descriptrices ad invicem* (11), quia arcus illi P Q, et Q R, æqualibus temporibus describuntur (per Hyp.).

(k) * *Et ob æquales angulos.* Ex centro S ad tangentes P X, Q Z demissa sint perpendicula S X, S Z, et areæ æquales P S Q et Q S r, erunt $\frac{1}{2}$ S X $\times$ P Q, et $\frac{1}{2}$ S Z $\times$ Q r, ideóque S X ad S Z ut Q r ad P Q; sed ob angulos rectos ad X et Z, et angulos æquales X P S et Z Q S (per Lem. III.) similia sunt triangula S X P et S Z Q, et ideò S X : S Z = S P : S Q, quare fit Q r : P Q = S P : S Q.

(l) * *Sumantur proportionalium,* &c. Cùm enim sit (per dem.) P Q : S Q = Q R :



ad arcum R r ut S Q ad $S P - \sqrt{S P \times S Q}$, seu $\frac{1}{2}$ V Q. Nam punctis P et Q coëuntibus, ratio ultima $S P - \sqrt{S P \times S Q}$, ad $\frac{1}{2}$ V Q (m) est æqualitatis. Quoniam decrementum arcûs P Q, ex resistentiâ oriundum, sive hujus duplum R r, (n) est ut resistentia et quadratum temporis conjunctim; (o) erit resistentia ut $\frac{R r}{P Q q \times S P}$. Erat autem P Q ad R r, ut S Q ad $\frac{1}{2}$ V Q, et inde $\frac{R r}{P Q q \times S P}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2} V Q}{P Q \times S P \times S Q}$ sive ut $\frac{\frac{1}{2} O S}{O P \times S P q}$. Namque punctis P et Q coëuntibus, S P et S Q coincidunt, et angulus P V Q fit rectus; (p) et ob similia triangula P V Q, P S O, fit P Q ad $\frac{1}{2}$ V Q ut O P ad $\frac{1}{2}$ O S. Est igitur $\frac{O S}{O P \times S P q}$ ut resistentia, (q) id est, in ratione densitatis medii in P et ratione duplicatâ velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{S P}$, et manebit medii densitas in P ut $\frac{O S}{O P \times S P}$. Detur spiralis, (r) et ob datam rationem O S ad O P, densitas medii in P erit ut $\frac{1}{S P}$. In medio igitur cujus densitas est reciprocè ut distantia a centro S P, corpus gyrari potest in hâc spirali. Q. e. d.

Corol. 1. (s) Velocitas in loco quovis P ea semper est, quâcum corpus in medio non resistente eâdem vi centripetâ gyrari potest in circulo, ad eandem a centro distantiam S P.

Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia S P, est ut $\frac{O S}{O P}$, sin distan-

$\sqrt{S P \times S Q}$, et $P Q : S Q = Q r : S P$, erit etiam $Q r : S P = Q R : \sqrt{S P \times S Q}$, unde erit $P Q : S Q = Q r - Q R$ seu $R r : S P - \sqrt{S P \times S Q}$, et hinc $P Q : R r = S Q : S P - \sqrt{S P \times S Q}$.

(m) * *Est æqualitatis.* Est enim $S Q = S P - V Q$, et proindè $S P \times S Q = S P^2 - S P \times V Q$, ideóque extrahendo radicem quadratam (per formulam Lib. I. 551.) fit $\sqrt{S P \times S Q} = S P - \frac{1}{2} V Q - \frac{V Q^2}{8 S P}$ —, &c., in infinitum; cæteri verò termini post secundum negligi possunt, quia coëuntibus P et Q, evanescunt respectu V Q, et ideò erit $\sqrt{S P \times S Q} = S P - \frac{1}{2} V Q$, ac proindè $\frac{1}{2} V Q = S P - \sqrt{S P \times S Q}$.

(n) * *Est ut resistentia et quadratum temporis conjunctim.* (Per Cor. 3. Lem X Lib. I.)

(o) *Erit resistentia*, &c. Nam tempus est ut $P Q \times \sqrt{S P}$ (ex dem.).

(p) * *Et ob similia triangula P V Q, P S O,* angulus P S O (per Lemma novissimum) rectus est et ideò æqualis angulo etiam recto P V Q, et prætereà si ex angulis rectis Q P O et V P S subducatur communis angulus Q P S, remanent æquales V P Q et S P O; quarè triangula P V Q et P S O sunt similia.

(q) * *Id est in ratione*, &c. (per Hyp.)

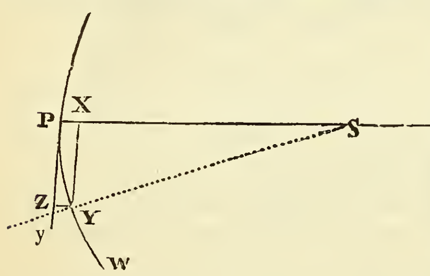
(r) * *Ob datam rationem O S ad O P.* Datâ spirali datur angulus Q P S et hinc in triangulo S P O datur angulus S P O cum isto Q P S rectum faciens, datur etiam rectus P S O (per Lem. III.) atquè ideò trianguli P O S anguli omnes dantur, et proindè datur ratio O S ad O P.

(s) * *Velocitas in loco quovis P*, &c. * Gyretur corpus in medio non resistente in circulo

ia illa non datur, ut $\frac{O S}{O P \times S P}$. (t) Et inde spiralis ad quamlibet medii densitatem aptari potest.

Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis P, est ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}$ O S ad O P. Nam vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2}$ R r et T Q (u) sive ut $\frac{\frac{1}{4} V Q \times P Q}{S Q}$ et $\frac{\frac{1}{2} P Q q}{S P}$ hoc est, ut $\frac{1}{2}$ V Q et P Q, (x) seu $\frac{1}{2}$ O S et O P. (y) Datâ igitur spirali datur proportio resistentiæ

P W radio P S descripto, in eoque retineatur vi centripetâ quæ sit eadem cum illâ qua corpus urgetur in puncto P spiralis (vide fig. textûs). Sumatur in radio P S particula P X æqualis T Q, sive spatio quod generatur per vim centripetam quâ corpus retinetur in spirali in P, ductâque tangente P Z, e puncto Y ducatur per centrum linea S Y y ad tangentem usque, Y y erit spatium quod generatur per vim centripetam quâ corpus in circulo retinetur, sed coëuntibus punctis P et Y, linea y Y fit ultimò parallela



lineæ P S, ideóque y Y fit æqualis particulæ P X, sive T Q. Cùm ergo eadem sit vis centripeta tam in circulo quàm in spirali, et spatia æqualia y Y et T Q ab illâ vi centripeta generentur, æquali tempore utrinque generabuntur, unde eodem tempore quo corpus in spirali in Q pervenerit, eo ipso tempore perveniet in Y in circulo, velocitas ergo in spirali erit ad velocitatem in hoc circulo ut est arcus P Q ad arcum P Y, sed ex naturâ spiralis per Lemma III. est $P Q = \sqrt{T Q \times 2 P S}$, et ex naturâ circuli est $P Y = \sqrt{P X \times 2 P S}$ et ex constructione cùm sit P X = T Q erit $P Y = \sqrt{T Q \times 2 P S}$ ergo P Q = P Y, ergo velocitas in loco quovis spiralis ea est quâcum corpus eâdem vi centripetâ in medio non resistente ad eandem a centro distantiam gyrari potest.

(t) * *Et inde spiralis*, &c. * Fingantur duo media diversæ densitatis, talia tamen ut in singulo medio densitas in locis diversis sit reciprocè ut distantia locorum a centro. Sumptâ verò in utroque æquali a centro distantiâ S P, sit ratio densitatis prioris medii ad densitatem posterioris in eo loco ut a ad b, ea ratio eadem erit in aliâ quâcumque distantiâ a centro, putâ in distantiâ S X. Nam in utroque medio densitas in P erit ad densitatem in X ut $\frac{1}{S P}$ ad $\frac{1}{S X}$; itaque si in priore medio densitas in P fuerit ut a, densitas in X erit ut $\frac{a \times S P}{S X}$, et si in secundo medio densitas in P fuerit ut b densitas in X erit ut $\frac{b \times S P}{S X}$, est verò $\frac{a S P}{S X}$ ad $\frac{b \times S P}{S X}$ ut a ad b, ergo in his duobus mediis densitates erunt ubique in datâ ratione a ad b, in æqualibus a centro distantiis.

Si itaque data sit spiralis quæ in medio priore describitur, inveniri poterit illa quæ in posteriore medio describi posset; nam sumpta distantia quâvis S P, fiat a ad b ut $\frac{O S}{O P}$ ad $\frac{b \times O S}{a \times O P}$ hæc erit ratio quæ in hâc novâ spirali intercedet inter lineas, lineis O S et O P correspondentes, sive quia angulus S in triangulo O S P est rectus, hæc erit ratio inter sinum anguli quem facit linea P S cum perpendiculari ad curvam, et radium; quo sinu dato ejusque angulo, spiralis obtinetur ad hanc medii densitatem aptata.

Ex quibus illustratur quod præcedit in hoc ipso Corollario, si duæ spirales in diversis mediis describantur, mediorum densitates in eadem distantia erunt ut $\frac{O S}{O P}$, sed si distantiæ a centro diversæ sumantur, ratio inversa distantiarum est huic conjungenda, eruntque ideò mediorum densitates ut $\frac{O S}{O P \times S P}$.

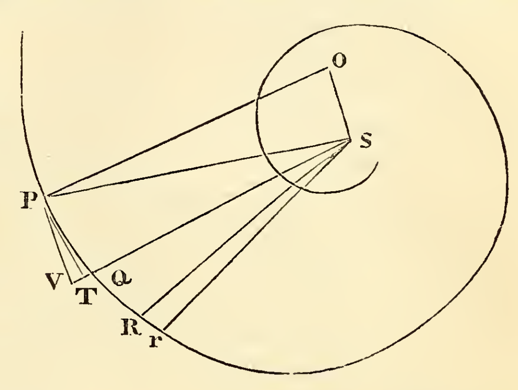
(u) * *Sive ut*, &c. Nam (per dem.) P Q : R r = S Q : $\frac{1}{2}$ V Q, et (per Lem. III.) $T Q = \frac{P Q^2}{2 P S}$, et punctis Q et P coëuntibus, est S Q = S P.

(x) * *Seu* $\frac{1}{2}$ *O S et O P.* Quia triangula P V Q, P S O similia sunt (ex dem.) est $\frac{1}{2}$ V Q : P Q = $\frac{1}{2}$ O S : O P.

(y) * *Datâ igitur spirali.* Nam datâ spirali

ad vim centripetam, et vice versâ ex datâ illâ proportione datur spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hâc spirali, (z) nisi ubi vis resistentiæ minor est quàm dimidium vis centripetæ. (a) Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ, et spiralis conveniet cum lineâ rectâ P S, inque hac rectâ corpus descendet ad centrum eâ cum velocitate, quæ sit ad velocitatem, quâ probavimus in superioribus in casu parabolæ (Theor. X. Lib. I.) descensum in medio non resistente fieri, (b) in subduplicatâ ratione unitatis ad numerum binarium. (c) Et tempora descensûs hic erunt reciprocè ut velocitates, atque ideò dantur.



datur specie triangulum P S O (ex dem.) et indè datur ratio O S ad O P, et vice versâ datâ hâc ratione, datur specie triangulum rectangulum P S O, et hinc datur angulus P O S æqualis angulo Q P S quem spiralis cum radio continet, ideóque datur spiralis. Iis enim datis et assumpto ut libet radio S P, dabitur subtangens spiralis logarithmicæ, seu tangens anguli Q P S, et hinc dato angulo quovis P S R, dabitur radius S R cum puncto R in spirali (153).

(z) * *Nisi ubi vis resistentiæ minor est*, &c. Cùm enim vis resistentiæ sit ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}$ O S ad O P, et ad dimidium vis centripetæ ut $\frac{1}{2}$ O S ad $\frac{1}{2}$ O P, seu ut O S ad O P, sitque trianguli rectanguli P S O (Lem. III.) crus O S minus hypothenusâ O P, manifestum est vim resistentiæ minorem esse dimidiâ vi centripetâ.

(a) * *Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ*, &c. Ideóque O S æqualis O P, et puncto O in infinitum abeunte, fiet O P perpendicularis ad S P, et angulus P O S ipsique æqualis angulus Q P S quem spiralis continet, cum radio P S evanescet, convenietque proindè spiralis cum lineâ rectâ P S.

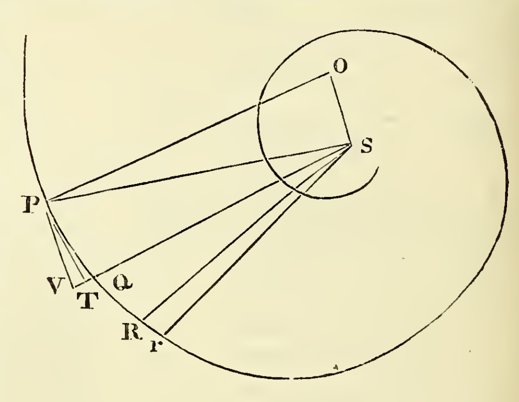
(b) * *In subduplicatâ ratione unitatis.* Nam (in Theor. X. Lib. I.) corporis in medio non resistente rectâ cadentis velocitas in loco quovis P æqualis est velocitati quâ corpus ad distantiam dimidiam a centro, seu ad distantiam $\frac{1}{2}$ S P circulum describere potest, et (per Cor. 1. hujus) corporis in medio resistente spiralem seu rectam P S cum quâ spiralis convenire supponitur describentis velocitas in eodem loco P æqualis est velocitati quâcum corpus in medio non resistente gyrari potest in circulo ad integram distantiam S P. Sed velocitates corporum diversos circulos describentium (in hypothesi quòd vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata radiorum) sunt inter se reciprocè in radiorum ratione subduplicatâ (pro convers. Cor. 6. Prop. IV. Lib. I.) adeóque velocitas in circulo cujus radius S P est ad velocitatem in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$ S P, ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad $\sqrt{1}$, sive ut 1 ad $\sqrt{2}$, erit ergo velocitas corporis in medio resistente per rectam P S descendentis ad velocitatem descendentis in medio non resistente per rectam eandem et in eodem loco P existentis, ut 1 ad $\sqrt{2}$. Q. e. d.

* Observandum verò quòd velocitates initiales utrinque debent esse secundùm legem quæ in reliquo motu obtinet, hoc est velocitas initialis in medio resistente esse debet æqualis celeritati quâ corpus ad eamdem a centro distantiam in medio non resistente circulum describeret, et velocitas initialis in medio non resistente æqualis esse debet velocitati quâ corpus ad dimidiam a centro distantiam in medio non resistente in circulo revolveretur.

Quoniam itaque velocitas corporis in medio non resistente descendentis datur (per Theor. X. Lib. I.) dabitur etiam velocitas in medio resistente descendentis.

(c) * *Et tempora descensûs, hic erunt reciprocè ut velocitates, atquè ideò dantur.* Nam momenta

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro distantiis velocitas ([d]) eadem est in spirali P Q R atque in rectâ S P, et longitudo spiralis ad longitudinem rectæ P S est in datâ ratione, ([e]) nempe in ratione O P ad O S; tempus descensûs in spirali erit ad tempus descensûs in rectâ S P ([f]) in eâdem illâ datâ ratione, proindeque datur.



Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuscunque datis describantur duo circuli; et manentibus hisce circulis, mutetur utcunque angulus quem spiralis continet cum radio P S: numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo in spirali a circumferentiâ ad circumferentiam, complere potest, ([g]) est ut $\frac{PS}{OS}$, sive ut tangens anguli illius quem spiralis continet cum radio P S; ([h]) tempus verò revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id est, ut secans anguli ejusdem, vel etiam reciprocè ut medii densitas.

temporis quibus corpora duo in medio resistente et in eodem non resistente describunt spatium idem quam minimum R v, sunt ut corporum velocitates reciprocè (12) id est ut $\surd$ 2 et 1 directè (per modò demonstrata) adeóque in datâ ratione. Quarè (per Cor. Lem. IV. Lib. I.) tempora tota quibus corpora illa idem spatium quodvis P R describunt, sunt etiam in eâdem datâ ratione $\surd$ 2 ad 1, seu ut velocitates reciprocè. Cùm igitur (per Prop. XXXVI. et XXXVII. Lib. I.) detur tempus quo corpus in medio non resistente cadendo spatium quodlibet describit, dabitur quoque tempus quo corpus in medio resistente spatium quodvis datum cadendo percurrit.

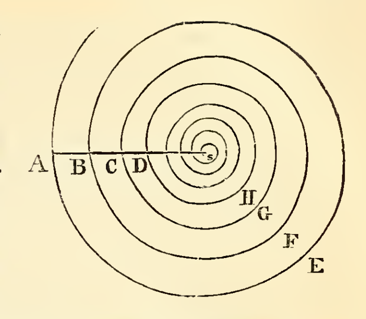
([d]) *Eadem est in spirali.* (Per Cor. 1. hujus.)

([e]) * *Nempè in ratione O P ad O S* (151).

([f]) * 157. *In eâdem illâ ratione.* Spatia enim velocitatibus æqualibus et uniformibus descripta sunt ut tempora quibus describuntur; undè si spiralis P Q R et recta P S, divisæ intelligantur in partes quam minimas totis proportionales, quod fit dum puncta divisionum in spirali et in radio P S a centro S æquidistant (152) tempora quibus partes illæ quam minimæ in spirali et in rectâ P S homologæ describuntur, erunt ut eædem partes, seu in datâ ratione, siquidem velocitas in spirali et in recta P S in iis punctis a centro æquidistantibus sunt æquales eidem, nempe celeritati corporis circa idem centrum ad eandem distantiam in circulo revolventis; ideóque (per Cor. Lem. IV. Lib. I.) totum tempus descensûs in spirali erit ad totum tempus descensûs in rectâ P S per spatia nomologa in datâ illâ ratione longitudinis nempe spiralis ad longitudinem P S, seu in ratione O P ad O S.

([g]) * *Est ut* $\frac{PS}{OS}$ *sivè ut tangens anguli,* &c. (155). Si autem sinus totus sit 1, cum sit O S, ad P S, ut sinus totus ad tangentem anguli P O S, seu anguli æqualis Q P S, erit tangens illa $\frac{PS}{OS}$.

([h]) * *Tempus verò revolutionum earumdem ut* $\frac{OP}{OS}$, *id est, ut secans,* &c. Est enim tempus illud revolutionum inter circulus duos datos, ad tempus descensûs per partem datam rectæ P S inter circulos contentam ut longitudo revolu-

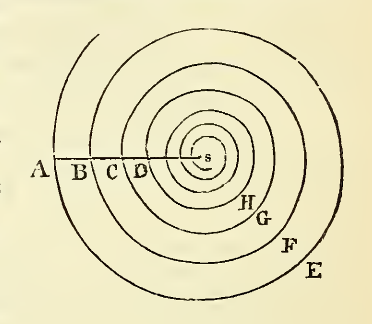


Corol. 7. Si corpus in medio, cujus densitas est reciprocè ut distantia locorum a centro, revolutionem in curvâ quâcunque A E B circa centrum illud fecerit, et radium primum A S in eodem angulo secuerit in B quo prius in A, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem suam primam in A reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum a centro (id est, ut A S ad mediam proportionalem inter A S et B S) (¹) corpus illud perget innumeras consimiles revolutiones B F C, C G D, &c. facere, et intersectioni-

tionum illarum ad partem hanc rectæ P S, circulis duobus interceptam (157); sed mutato utcumque angulo quem spiralis continet cum radio P S longitudo revolutionum inter duos circulos datos comprehensa est ut secans anguli illius (152). Quarè cùm datum sit tempus descensûs per partem datam rectæ P S inter circulos datos contentam, erit tempus revolutionum inter circulos ut secans anguli quem spiralis continet cum radio P S seu ut $\frac{O\,P}{O\,S}$; si enim sinus totus sit 1, erit O S ad O P ut 1 ad secantem anguli P O S seu Q P S, et ideò secans est $\frac{O\,P}{O\,S}$. Porrò datâ rectâ P S, densitas est ut $\frac{O\,P}{O\,S}$ reciprocè (per Cor. 2. hujus). Ergò, &c.

(¹) * *Corpus illud perget*, &c. Centro S et radio dato S A descripta intelligatur spiralis logarithmica quæ primâ revolutione absolutâ, transeat per punctum B datum in radio S A (155.) et spiralis illa suis semper similibus revolutionibus distinguet radium A S in partes A S, B S, C S, D S, &c. continuè proportionales (150). Fingamus etiam quòd iisdem positis quæ (in Prop. XV.) corpus aliquod P in medio justæ densitatis spiralem illam logarithmicam describat, dum corpus aliud Q in alio medio describit curvam A E B F C S et in iisdem a centro S distantiis densitates duorum mediorum erunt in datâ ratione, cum in utroque medio sit (per Hyp. Cor. hujus et per Prop. XV.) densitas in loco A ad densitatem in loco B, ut S B ad S A. Simili modo velocitates corporum P et Q in loco B, erunt in eorumdem velocitates in loco A, (per Prop. XV. et Hyp. Corol. hujus) ideóque in datâ ratione; vires autem centripetæ quibus corpora P et Q urgentur, sunt in utroque medio iisdem in locis eædem (per Hyp.), et tandem ob angulos datos quos tam spiralis logarithmica, quàm curva A E B continet cum radio A S, directiones motuum in utrâque curvâ pares sunt in locis A et B; quarè postquam corpus Q primâ revolutione A E B absolutâ, pervenit in B, per quod punctum transit etiam spiralis logarithmica, eodem modo determinatur ad æmulandum motum corporis P secundam suam revolutionem absolventis, quo determinatum fuerat in loco A ut æmularetur motum corporis ejusdem P primam suam revolutionem perficientis; cùm (per dem.) omnia paria sint in locis B et A videlicet mediorum densitates, corporum velocitates, directiones, viresque centripetæ. Quoniam igitur secunda spiralis logarithmicæ revolutio a puncto B ad punctum C priori a puncto A ad punctum B absolutæ similis est (150), necessum est ut secunda quoque curvæ revolutio B F C priori A E B sit similis; et simili modo ostendetur revolutiones omnes B F C, C G D, &c. et motus corporis Q eas absolventis esse inter se similes. Erunt igitur revolutiones A E B, B F C, C G D, &c. ut radii A S, B S, C S, &c. id est, continuè proportionales, et ob similitudinem motuum in similibus revolutionibus A E B, B F C, &c. si ex centro S ductus intelligatur radius revolutiones illas secans in E, F, G, &c. quæ erunt in revolutionibus A E B, B F C, &c. loca homologa, erit velocitas corporis Q in loco E ad velocitatem ejus in loco A ut velocitas in F ad velocitatem in B, et proinde velocitas in E ad velocitatem in B, ut velocitas in A ad velócitatem in B, id est, (per Hyp. Cor. hujus) ut $B\,S^{\frac{1}{2}}$ ad $A\,S^{\frac{1}{2}}$; sed tempora quibus spatia homologa quam minima in locis E et F describuntur sunt ut spatia illa directè et velocitates inversè (12); quare cum spatia homologa in locis E et F sint ut radii A S et B S, et velocitates ibidem ut $A\,S^{\frac{1}{2}}$ et $B\,S^{\frac{1}{2}}$ inversè (ex dem.) tempus quo spatium minimum revolutionis A E B describitur est ad tempus quo describitur spatium homologum revolutionis similis B F C ut $A\,S \times A\,S^{\frac{1}{2}}$ ad $B\,S \times B\,S^{\frac{1}{2}}$, id est, ut $A\,S^{\frac{3}{2}}$ ad $B\,S^{\frac{3}{2}}$, ideóque in datâ ratione. Undè (per Cor. Lem. IV. Lib. 1.) tempus totum quo corpus Q primam suam revolutionem A E B absolvit est ad tempus quo secundam revolutionem B F C, perficit in eâdem ratione

bus distinguet radium A S in partes A S, B S, C S, D S, &c. continuè proportionales. Revolutionum verò tempora erunt ut perimetri orbitarum A E B, B F C, C G D, &c. directè, et velocitates in principiis A, B, C, inversè; id est, ut $A S^{\frac{3}{2}}$, $B S^{\frac{3}{2}}$, $C S^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continuè proportionalium $A S^{\frac{3}{2}}$, $B S^{\frac{3}{2}}$, $C S^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $A S^{\frac{3}{2}}$; id est, ut terminus ille primus $A S^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $A S^{\frac{3}{2}} - B S^{\frac{3}{2}}$, sive ut $\frac{1}{3}$ A S ad A B quam proximè. Unde tempus illud totum expeditè invenitur.



Corol. 8. Ex his etiam præter propositum colligere licet motus corporum in mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro S, intervallis continuè proportionalibus S A, S B, S C, &c. describe circulos quotcunque, et statue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his circulis, (k) in medio de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in medio pro-

$A S^{\frac{3}{2}}$ ad $B S^{\frac{3}{2}}$. Et simili argumento liquet tempora revolutionum B F C, C G D, &c. esse inter se ut sunt $B S^{\frac{3}{2}}$, $C S^{\frac{3}{2}}$, &c. Cùm igitur revolutionum tempora sicut quantitates $A S^{\frac{3}{2}}$, $B S^{\frac{3}{2}}$, $C S^{\frac{3}{2}}$ $D S^{\frac{3}{2}}$, &c. progressionem geometricam in infinitum decrescentem constituant, tempus totum quo corpus Q, perveniet ad centrum S erit ad tempus revolutionis primæ A E B ut summa omnium continuè proportionalium $A S^{\frac{3}{2}}$, $B S^{\frac{3}{2}}$, $D S^{\frac{3}{2}}$, &c. pergentium, in infinitum, ad terminum primum $A S^{\frac{3}{2}}$; porrò summa illa est ad terminum primum $A S^{\frac{3}{2}}$ ut hic terminus primus ad differentiam duorum priorum, nempè $A S^{\frac{3}{2}} - B S^{\frac{3}{2}}$. Nam scribatur sic terminorum series, $A S^{\frac{3}{2}} : B S^{\frac{3}{2}} = B S^{\frac{3}{2}} : C S^{\frac{3}{2}} = C S^{\frac{3}{2}} : D S^{\frac{3}{2}}$, &c. in infinitum, et ultimo progressionis termino evanescente, erit summa antecedentium, id est, summa omnium terminorum quæ dicatur S ad summam consequentium, seu summam omnium terminorum dempto primo, ut primus ad secundum, hoc est $S : S - A S^{\frac{3}{2}} = A S^{\frac{3}{2}} : B S^{\frac{3}{2}}$; undè habetur dividendo $S : A S^{\frac{3}{2}} = A S^{\frac{3}{2}} : A S^{\frac{3}{2}} - B S^{\frac{3}{2}}$; est autem B S = A S — A B, et ideò $B S^{\frac{3}{2}} = (A S - A B)^{\frac{3}{2}} = A S^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} A S^{\frac{1}{2}} \times A B + \frac{3}{8} \times \frac{A B^2}{A S^{\frac{1}{2}}}$ —, &c. in infinitum (551. Lib. I.). Quapropter si distantia A B minima fuerit, respectu radii A S, fiet $B S^{\frac{3}{2}} = A S^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} A S^{\frac{1}{2}} \times A B$, quàm proximè, neglectis nimirum cæteris terminis ferè evanescentibus; erit igitur $S : A S^{\frac{3}{2}} = A S^{\frac{3}{2}} : \frac{3}{2} A S^{\frac{1}{2}} \times A B = \frac{2}{3} A S : A B$ quam proximè; et hinc dato tempore revolutionis primæ A E B, tempus totum quo corpus pervenit ad centrum expeditè invenitur. Sit, exempli causâ, A S ad A B ut 300000 ad 1, et tempus primæ revolutionis = 1, erit tempus totum = 2000000, quàm proximè.

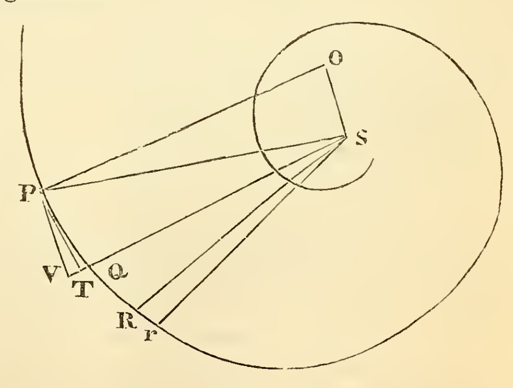
(k) * *In medio de quo egimus.* (In Prop. XV. et Cor. ejus), cujus nimirum densitas est reciprocè ut distantia locorum a centro.

posito, (l) ut medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quàm proximè: sed et in eadem quoque ratione esse secantem anguli quo spiralis præfinita, in medio de quo egimus, secat radium A S, ad secantem anguli quo spiralis nova secat radium eundem in medio proposito: (m) atque etiam ut sunt eorumdem angulorum tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proximè. (n) Si hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possumus quibus modis ac temporibus corpora in medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in spiralibus (o) ad formam ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo spiralium illarum singulas revolutiones iisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum spirali superius descriptâ, (p) intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi spiralibus peragantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si medii densitas in locis singulis sit reciprocè ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta reciprocè ut dignitas quælibet ejusdem distantiæ: dico quod corpus gyrari potest in spirali quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.



Demonstratur eâdem methodo cum Propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciprocè ut distantiæ S P, dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index est n + 1: (q) colligetur ut supra, quòd tempus, quo corpus describit arcum quemvis P Q; erit ut $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; et resis-

(l) * *Ut medii propositi densitas* (per Cor. 6. hujus) supponendo spirales logarithmicas, per puncta A, B, C, D, in utroque medio descriptas.

(m) * *Atquè etiam ut sunt*, &c. Per Cor. 6. hujus.

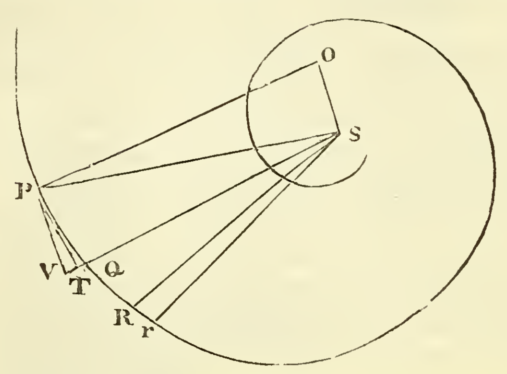
(n) * *Si hæc fiant passim inter circulos binos*, invenietur in medio regulari lex quâ motus continuabitur per circulos omnes, seu, inter circulos omnes, quemadmodum inventis prioribus seriei regularis terminis, cognoscitur lex quâ illa progreditur, *atquè hoc pacto*, &c.

(o) * *Ad formam ovalium accedentibus*, &c. Sunt enim spirales quarum revolutiones singulæ ferè concentricæ sunt et ad formam circulorum accedunt; aliarum revolutiones accedunt ad formam ovalium centro spiralis pro ellipseos vel ovalis foco accepto.

(p) * *Intelligemus etiam* (ut in Cor. 8.) *quomodò*, &c.

(q) * *Colligetur ut supra*, &c. Quæcumque enim sit vis centripeta, illa est ad vim resisten-

tentia in P ut $\frac{R\,r}{P\,Q\,q \times S\,P^{n}}$, sive ut $\frac{\overline{1 - \frac{1}{2}n} \times V\,Q}{P\,Q \times S\,P^{n} \times S\,Q}$, ideóque ut $\frac{\overline{1 - \frac{1}{2}n} \times O\,S}{O\,P \times S\,P^{n+1}}$, hoc est, ob datum $\frac{\overline{1 - \frac{1}{2}n} \times O\,S}{O\,P}$, reciprocè ut



$S\,P^{n+1}$. Et propterea, cùm velocitas sit reciprocè ut $S\,P^{\frac{1}{2}n}$, densitas in P erit reciprocè ut S P.

Corol. 1. (r) Resistentia est ad vim centripetam ut $\overline{1 - \frac{1}{2}n} \times O\,S$ ad O P.

tiæ ut T Q ad $\frac{1}{2}$ R r (per dem. Prop. XV.). Quoniam igitur vis centripeta quâ corpus urgetur in P, est reciprocè ut $S\,P^{n+1}$, et (per Cor. Lem. X. Lib. I.) lineola T Q quæ vi illâ generatur, est in ratione compositâ ex ratione hujus vis et ratione duplicatâ temporis quo arcus P Q describitur; erit $T\,Q \times S\,P^{n+1}$, id est, (per Lem. III.) $\frac{1}{2}P\,Q^{2} \times S\,P^{n}$, in ratione duplicatâ temporis, ideóque tempus est ut $P\,Q \times S\,P^{\frac{n}{2}}$, et corporis velocitas quâ arcus P Q illo tempore describitur ut $\frac{P\,Q}{P\,Q \times S\,P^{\frac{n}{2}}}$, seu $\frac{1}{S\,P^{\frac{n}{2}}}$; et simili argumento velocitas quâ arcus Q R describitur est ut $\frac{1}{S\,Q^{\frac{n}{2}}}$; sunt autem arcus illi P Q et Q R ut velocitates descriptrices ad invicem, id est, in ratione $S\,Q^{\frac{n}{2}}$ ad $S\,P^{\frac{n}{2}}$, et (per dem. Prop. XV.) arcus Q r, est ad arcum P Q ut S P ad S Q; quarè (per compositionem rationum et ex æquo) $Q\,r : Q\,R = S\,P \times S\,Q^{\frac{n}{2}} : S\,Q \times S\,P^{\frac{n}{2}} = S\,Q^{\frac{1}{2}n - 1} : S\,P^{\frac{1}{2}n - 1}$, et sumptis terminorum differentiis $Q\,r : R\,r = S\,Q^{\frac{1}{2}n - 1} : S\,Q^{\frac{1}{2}n - 1} - S\,P^{\frac{n}{2} - 1}$. Quia verò $S\,P = S\,Q + V\,Q$, ideóque (549. Lib. I.) $S\,P^{\frac{1}{2}n - 1} = S\,Q^{\frac{1}{2}n - 1} + \overline{\tfrac{1}{2}n - 1} \times V\,Q \times S\,Q^{\frac{1}{2}n - 2} +$, &c., neglectis reliquis terminis respectu priorum evanescentibus, erit $S\,Q^{\frac{1}{2}n - 1} - S\,P^{\frac{1}{2}n - 1} = (1 - \frac{1}{2}n) \times V\,Q \times S\,Q^{\frac{1}{2}n - 2}$, atque adeò $Q\,r : R\,r = S\,Q : (1 - \frac{1}{2}n)\,V\,Q$. Erat autem $P\,Q : Q\,r = S\,Q : S\,P$; undè (ex æquo) fit $P\,Q : R\,r = S\,Q^{2} : (1 - \frac{1}{2}n)\,V\,Q \times S\,P$, et hinc $R\,r = (1 - \frac{1}{2}n)\frac{V\,Q \times S\,P \times P\,Q}{S\,Q^{2}} = \frac{(1 - \frac{1}{2}n) \times V\,Q \times P\,Q}{S\,Q}$, ob $S\,P = S\,Q$, ubi puncta Q et P coëunt. Quoniam decrementum arcûs P Q ex resistentiâ oriundum, sivè hujus duplum R r, est ut resistentia et quadratum temporis conjunctim, erit resistentia ut $\frac{R\,r}{P\,Q^{2} \times S\,P^{n}}$, id est, ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n)\,V\,Q}{P\,Q \times S\,P^{n} \times S\,Q}$. Sivè ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n)\,O\,S}{O\,P \times S\,P^{n+1}}$ (quia $V\,Q : P\,Q = O\,S : O\,P$ ex dem. Prop. XV.) hoc est, ob datum $\frac{(1 - \frac{1}{2}n)\,O\,S}{O\,P}$ ut $\frac{1}{S\,P^{n+1}}$. Et propterea cùm velocitas (ex dem.) sit ut $\frac{1}{S\,P^{\frac{1}{2}n}}$, si ex resistentiâ auferatur duplicata velocitatis ratio $\frac{1}{S\,P^{n}}$, manebit medii densitas in P, ut $\frac{1}{S\,P}$, seu reciprocè ut S P,

(r) * *Resistentia est ad vim centripetam.* Nam

Corol. 2. Si vis centripeta sit reciprocè ut S P cub. (s) erit $1 - \frac{1}{2}n = o$; ideóque resistentia et densitas medii nulla erit, ut in Propositione nonâ Libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta sit reciprocè ut dignitas aliqua radii S P cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa (t) in negativam mutabitur.

Scholium.

Cæterum hæc Propositio et superiores, quæ ad media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeò parvorum, ut medii ex uno corporis latere major densitas quàm ex altero non consideranda veniat. Resistentiam quoque cæteris paribus densitati proportionalem esse suppono. Unde in mediis, quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque augeri vel diminui, ut resistentiæ vel tollatur excessus vel defectus suppleatur.

vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2}$ R r et T Q, sivè ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n)\, V Q \times P Q}{2 S Q}$ et $\frac{P Q^2}{2 S P}$, hoc est, ut $(1 - \frac{1}{2}n)$ V Q et P Q, seu $(1 - \frac{1}{2}n)$ O S et O P

(s) * *Erit* $1 - \frac{1}{2}n = o$. Cùm enim (per Hyp.) sit $n + 1 = 3$; erit $n = 2$, $\frac{1}{2}n = 1$ et $1 - \frac{1}{2}n = o$.

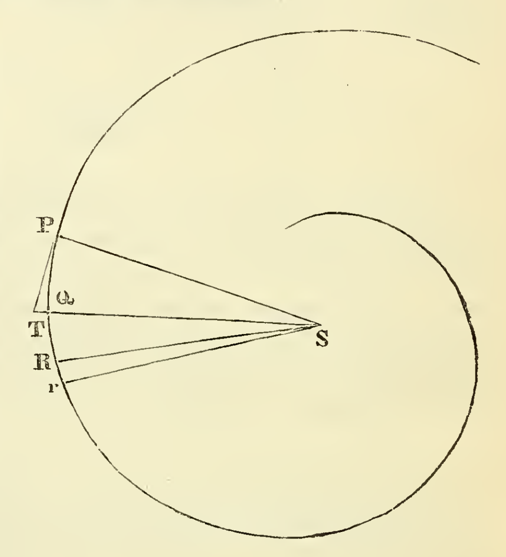
(t) * *In negativam mutabitur.* Tum enim $n + 1$, erit numerus ternario major, et ideò n binario major, et hinc $1 - \frac{1}{2}n$, numerus negativus.

Corol. 4. Medii densitas, si datur distantia S P, est ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n)\, O S}{O P}$; sin distantia illa non datur ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n)\, O S}{O P \times S P}$, seu ob datum numerum $1 - \frac{1}{2}n$, ut $\frac{O S}{O P}$, vel $\frac{O S}{O P \times S P}$.

Corol. 5. Quoniam (per Cor. 1. Prop. XV.) mutato utcumque spiralis angulo, ità ut etiam evanescat, et spiralis cum radio conveniat, velocitas corporis in loco quovis P ea semper est quâcum corpus in medio non resistente eâdem vi centripetâ gyrari potest in circulo ad eandem a centro distantiam S P (per const. 1. Cor. 7. Prop. IV. Lib. I.) liquet (per Cor. 6. Prop. XV. et 152.) tempora descensûs a puncto dato P ad centrum usque S, fore etiam (in Hyp. Prop. XVI.) ut spiralium variarum longitudines; quod observavit Joannes Bernoullius in Actis Eruditorum Lips. an. 1713. ubi hanc materiam eleganter tractat.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IV.

Invenire et vim centripetam et medii resistentiam, quâ corpus in datâ spirali, datâ velocitatis lege, revolvi potest.



Sit spiralis illa P Q R. Ex velocitate, quâ corpus percurrit arcum quàm minimum P Q, dabitur tempus, et ex altitudine T Q, quæ est ut vis centripeta et quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum P S Q et Q S R, differentia R S r, dabitur corporis retardatio, et ex retardatione invenietur resistentia (u) ac densitas medii.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Datâ lege vis centripetæ, invenire medii densitatem in locis singulis, quâ corpus datam spiralem describet.

Ex vi centripetâ invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda medii densitas; (x) ut in Propositione superiore.

(u) * *Ac densitas medii.* Sit, exempli causâ, curva P Q R spiralis logarithmica et velocitas in loco quovis P ut $\frac{1}{SP^{m}}$, erit tempus quo describitur arcus P Q, ut $PQ \times SP^{m}$ (12); vis autem centripeta quæ (per Cor. 4. Lem. X. Lib. I.) est ut lineola T Q directè et quadratum temporis inversè erit ut $\frac{TQ}{QP^{2} \times SP^{2m}}$, id est, (per Lem. III. hujus) ut $\frac{1}{SP^{2m+1}}$. Inventis tempore et velocitate, invenietur (ut in not. ad Prop. XVI.) resistentia ut $\frac{(1-m)\,VQ}{SQ \times PQ \times SP^{2m}}$, sive ut $\frac{(1-m)\,OS}{OP \times SP^{2m+1}}$, et auferendo duplicatam velocitatis rationem $\frac{1}{SP^{2m}}$ erit densitas ut $\frac{(1-m)\,OS}{OP \times SP}$, sive ut $\frac{1}{SP}$.

(x) * *Ut in Propositione superiore.* Sit vis centripeta in P ut $\frac{1}{SP^{n+1}}$ et quoniam T Q est ut vis centripeta et quadratum temporis quo describitur arcus P Q, erit $TQ \times SP^{n+1}$, id est, (per Lem. III.) $PQ^{2} \times SP^{n}$ ut qua-

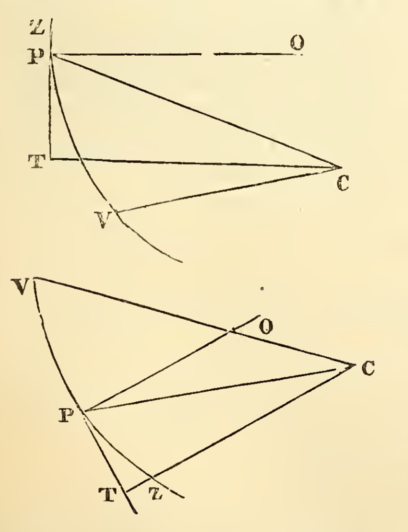
Methodum verò tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propositione decimâ, et Lemmate secundo; et lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate et resistentiâ mediorum, in quibus motus hactenus expositi et his affines peraguntur.

dratum temporis, ideóque tempus ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, et corporis velocitas quâ arcum PQ illo tempore describit ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$ (11); determinatis autem tempore et velocitate, invenietur resistentia et densitas ut in notâ superiore.

PROBLEMA.

Vis centripeta tendens ad datum punctum C sit in loco quovis P ut distantiæ C P dignitas CP^n reciprocè, et medii resistentia sit ut medii densitas et velocitatis dignitas quælibet conjunctim; requiritur tum medii densitas in locis singulis quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ V P Z moveatur, tum corporis velocitas et medii resistentia in locis singulis.

158. Dicantur vis centripeta in loco P, g, resistentia r, medii densitas k, velocitas corporis v, distantia P C, y, radius P O circuli curvam



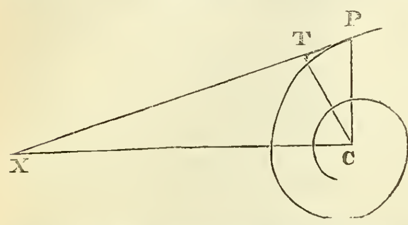
osculantis in P, R, arcus V P, s; perpendiculum C T in tangentem P T ductum p, et a, b, n, m, quantitates datæ, erit (per Hyp.) $g = \frac{a}{y^n}$ et $r = \frac{kv^m}{b}$, sed est semper (27) $vv = \frac{Rpg}{y} = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$. Velocitas igitur per alterutram ex his æquationibus dabitur. Porrò (26.) $r = \frac{-vdv - gdy}{ds} = \frac{-vdv}{ds} - \frac{ady}{y^n ds}$, vel etiam (ibid.) $\pm r = \frac{-vdv \times \sqrt{yy-pp} - gdy \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} = \frac{-vdv \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} - \frac{a\sqrt{yy-pp}}{y^{n+1}}$. Quarè si in alterutrâ harum æquationum loco vdv scribatur ipsius valor, qui reperitur capiendo fluxionem æquationis $vv = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$, obtinebitur resistentia r, seu $\frac{kv^m}{b}$, ejusque valore diviso per $\frac{v^m}{b}$ quod datum est inventâ velocitate v, dabitur medii densitas k. Q. e. i.

159. Exemplo sit spiralis logarithmica. In illâ ob datum angulum T P C datur ratio P C ad C T seu y ad p; sit ergò $c : a = y : p$, et ideò $p = \frac{ay}{c}$; atque $dp = \frac{ady}{c}$, et erit $vv = \frac{apdy}{y^n dp} = \frac{pc}{y^n} = \frac{a}{y^{n-1}}$. Ex his verò habetur $\sqrt{yy-pp} = \frac{y\sqrt{cc-aa}}{c}$, et $vdv = \frac{(1-n)ady}{2y^n}$, undè pro corporis descensu invenitur $r = \frac{(3-n)a\sqrt{cc-aa}}{acy^n}$; et pro ascensu $r = \frac{(n-3)a\sqrt{cc-aa}}{2cy^n}$, ideóque resistentia est reciprocè ut y^n. Cùm autem (per Hyp.) sit $r = \frac{kv^m}{b} = \frac{ka^{\frac{m}{2}}}{by^{\frac{mn-m}{2}}}$, erit densitas k ut $ry^{\frac{mn-m}{2}}$, seu ut $\frac{y^{\frac{mn-m}{2}}}{y^n} = y^{\frac{mn-m-2n}{2}}$, et hinc si ponatur $m = 2$, erit densitas k, ut y^{-1}, seu ut $\frac{1}{y}$, prorsus ut (in Prop. XVI.) demonstratum est.

160. *Corol.* I. Per superiores æquationes

(158.) ex datâ corporis velocitate invenitur tum vis centripeta, tum resistentia et medii densitas. Est enim $g = \frac{vvy}{Rp} = \frac{vvdp}{pdy}$; undè habetur vis centripeta g; datis autem vi centripetâ et celeritate, invenitur tum resistentia r, tum medii densitas k, ut supra (158).

161. Exemplum sit in spirali hyperbolicâ cujus hæc est proprietas ut si per centrum C erigatur ad radium C P, perpendicularis C X tangenti P X per P ductæ occurrens in X sit subtangens illa C X constans. Velocitas sit ut



tangens P X, et resistentia r ut densitas medii et quadratum velocitatis conjunctim, hoc est $r = \frac{kv^2}{b}$, dicaturque C X, c, et ideò $PX = \sqrt{yy+cc}$, atque (per Hyp.) $v = \frac{e\sqrt{yy+cc}}{c}$, et e, quantitas data. Erit ob triangula C P T, X P C similia, P X ($\sqrt{yy+cc}$) : C X (c) = P C (y) : C T (p), et ideò $p = \frac{cy}{\sqrt{yy+cc}}$, $dp = \frac{c^3dy}{\overline{yy+cc}^{\frac{3}{2}}}$, et $\sqrt{yy-pp} = \frac{yy}{\sqrt{yy+cc}}$. Quarè fiet (160) $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{e^2}{y}$; id est, vis centripeta ut distantia PC reciprocè. Quia verò $vv = \frac{ee}{cc} \times (yy+cc)$ erit $vdv = \frac{eeydy}{cc}$ et propterea pro corporis descensu $r = \frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy} + \frac{g\sqrt{yy-pp}}{y} = \frac{eeyy}{cc\sqrt{yy+cc}} + \frac{e^2}{\sqrt{yy+cc}} = \frac{e^2 \times \overline{yy+cc}}{cc\sqrt{yy+cc}} = \frac{e^2}{c^2} \times \sqrt{yy+cc}$, adeóque resistentia ut tangens P X, seu ut velocitas. Cùm igitur sit $r = kv^2 = \frac{ke^2}{cc} \times (yy+cc) = \frac{e^2}{cc} \times \sqrt{yy+cc}$, erit densitas medii $k = \frac{1}{\sqrt{yy+cc}}$, seu reciprocè ut tangens P X sivè reciprocè ut velocitas.

162. *Corol.* 2. Datâ medii densitate et concessis figurarum quadraturis, dabitur vis centripeta et corporis velocitas. Est enim (27. et 160) $vdv + \frac{vvdp}{p} = -rds = \frac{kv^m ds}{b}$ (158) et dividendo per v^m, et multiplicando per p^{2-m}, fit $p^{2-m}v^{1-m}dv + v^{2-m}p^{1-m}dp = -\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, et sumptis utrinque fluentibus habetur, $\frac{1}{2-m} \times p^{2-m} \times v^{2-m} = -S.\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, ideóque $v^{2-m} = (m-2) \times \frac{S.kp^{2-m}ds}{b \times p^{2-m}}$. Quare si densitas medii k, sit ut functio quævis distantiæ P C a centro C, inveniri poterit fluens $S.kp^{2-m}ds$ aut algebraicè aut per figurarum quadraturas, et loco ds, scribi potest $\pm \frac{ydy}{\sqrt{yy-pp}}$ (26). Inventâ autem velocitate v, obtinetur vis centripeta g per æquationem $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{vvy}{Rp}$ (160).

163. *Corol.* 3. Si in superiori Corollario sit m = 2, id est, resistentia ut densitas et quadratum velocitatis conjunctim, erit 2 — m = o, et æquatio $p^{2-m}v^{1-m}dv + v^{2-m}p^{1-m}dp = -\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, in hanc mutabitur $\frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = -\frac{kds}{b}$, undè sumptis fluentibus, habetur $L.v + L.p = -S.\frac{kds}{b}$, et $L.v = -S.\frac{kds}{b} - L.p$, ex quâ æquatione invenitur v, et hinc habetur g ut suprà.

164. *Corol.* 4. Sit in hypothesi Corol. 3. densitas medii k uniformis, velocitas corporis in loco dato v = c, et perpendiculum p in eodem loco = q datæ, erit $L.v = -\frac{ks}{b} - L.p + Q$, et quia in loco V, fit s = o, v = c, p = q, erit Q = L. c + L. q = L. c q. Et hinc $L.v = L\frac{cq}{p} - \frac{ks}{p}$. Ponatur L. h = 1, ut sit $L.v = L.\frac{cq}{p} - \frac{ks}{b} \times L.h = L.\frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$. Undè deducitur $v = \frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$, $vv = \frac{c^2q^2}{p^2h^{\frac{2ks}{b}}}$, et hinc $g = \frac{vvy}{Rp} = \frac{c^2q^2y}{Rp^3h^{\frac{2ks}{b}}}$, vel $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{c^2q^2dp}{p^3h^{\frac{2ks}{b}}dy}$.

165. *Corol.* 5. In his autem omnibus inveniri potest tempus per æquationem $dt = \frac{ds}{v}$, seu $t = S.\frac{ds}{v}$ (13).

166. *Corol.* 6. Datâ vi centripetâ et resistentiâ ac densitate medii, inveniri potest æquatio ad trajectoriam Z P V quam corpus projectile circà centrum virium C describit. Sit, exempli gratiâ, medium uniforme, resistentia ut quadratum velocitatis et vis centripeta $= \frac{a}{y^n}$ et (164.) erit $\frac{a}{y^n} = \frac{c^2 q^2 d p}{p^3 h^{\frac{2ks}{b}} d y}$, ideóque $h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{c^2 q^2 y^n d p}{a p^3 d y}$, et $L. h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{2ks}{b} = L. \frac{c^2 q^2 y^n d p}{a p^3 d y}$; capiantur utrinque fluxiones, factâ d y constante, et fiet (26) $\frac{2kds}{b} \left(= \pm \frac{2kydy}{b\sqrt{yy-pp}}\right) = \frac{ndy}{y} + \frac{ddp}{dp} - \frac{3dp}{p}$ (notum supponimus (40), quantitatis cujusvis logarithmicæ L. z fluxionem esse $\frac{dz}{z}$). Hinc verò habetur $\frac{2ks}{b} = L. y^n + L. dp - 3 L. p - L. \frac{dy.}{Q}$, ubi $\frac{dy}{Q}$, est quantitas constans, ideóque sit $\frac{2ks}{b} = L. y^n + L. \frac{Qdp}{dy} - L. p^3 = L. \frac{Qy^n dp}{p^3 dy}$, et hinc $h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{Qy^n dp}{p^3 dy}$, æquatio ad trajectoriam.

167. *Schol.* Si curva V P Z sit sectio conica cujus umbilicus C axis major c semiaxis minor e, erit (276. Lib. I.) pro ellipsi $pp = \frac{eey}{c-y}$, pro hyperbolâ $pp = \frac{eey}{c+y}$, et pro parabolâ, si latus rectum axis dicatur 4 e, erit (per Lem. XIV. Lib. I.) $pp = ey$. Undè facile est superioris Problematis solutiones ad sectiones conicas transferre. Sit V P Z parabola, vis centripeta $g = \frac{a}{y^n}$, resistentia $r = \frac{kv^2}{b}$, et quæratur tum corporis velocitas tum resistentia et medii densitas in loco quovis P. Quoniam $pp = ey$, erit $2pdp = edy$, $dp = \frac{edy}{2p}$, $\frac{p}{dp} = \frac{2pp}{edy} = \frac{2y}{dy}$; undè fit (158) $vv = \frac{apdy}{y^n dp} = \frac{2a}{y^{n-1}}$; hinc verò habetur $vdv = \frac{(1-n)ady}{y^n}$, atque ideò pro corporis descensu (158) $r = \frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy} + \frac{a\sqrt{yy-pp}}{y^{n+1}} = \frac{(2a-na)\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; et pro ascensu $r = \frac{(na-2a)\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; resistentia igitur est semper ut $\frac{PT}{PC^{n+1}}$; porrò est (per Hyp.) $r = \frac{kv^2}{b} = \frac{2ak}{by^{n+}} = (2a-na) \times \frac{\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$, vel $= (na-2a)\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; quarè erit medii densitas k, ut $\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^2}$, seu ut $\frac{PT}{PC^2}$. Et simili modo in ellipsi et hyperbolâ invenitur medii densitas ut $\frac{PT}{PC^2}$. At in circulo fit $PT = o$, ideóque medii densitas et resistentia nulla. Evanescit quoque resistentia, si $n = 2$, id est, si vis centripeta sit ut quadratum distantiæ reciprocè, quo casu sectiones conicæ, ut Lib. I. demonstratum est, in medio non resistente describuntur. Si n est numerus binario minor, sectiones conicæ per descensum describi possunt; per ascensum verò si n, binario major. Tandem ubi est $n = 1$, hoc est, vis centripeta distantiæ P C, reciprocè proportionalis, velocitas in parabolâ sicut et in spirali logarithmicâ uniformis est.

SECTIO V.

De densitate et compressione fluidorum, deque hydrostaticâ. (*)

Definitio Fluidi.

Fluidum est corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, et cedendo facile moventur inter se.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV

Fluidi homogenei et immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur et undique comprimitur, partes omnes (sepositâ condensationis, gravitatis, et virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, et sine omni motu a pressione illâ orto permanent in locis suis.

Cas. 1. In vase sphærico A B C claudatur et uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejusdem pars nulla ex illâ pressione movebitur. Nam si pars aliqua D moveatur, necesse est ut omnes hujusmodi partes ad eandem a centro distantiam undique consistentes, simili motu

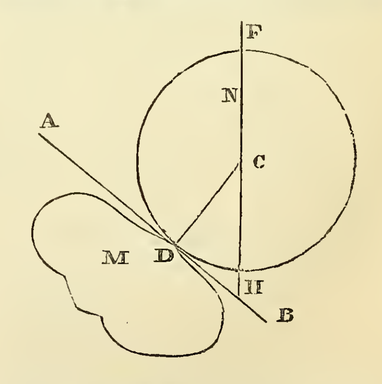
(*) 168. *Hydrostaticâ* est scientia pressionum quas fluida vel ipsorum partes in se mutuò vel in corpora solida exercent.

169. *Fluidum homogeneum* dicitur, cujus densitas est uniformis, adeò ut nimirum æqualis materiæ quantitas sub voluminibus æqualibus ubique per totam fluidi massam contineatur, *fluidum heterogeneum* appellatur cujus densitas uniformis non est.

170. *Gravitas specifica* corporis est ratio ponderis ejusdem ad volumen; itâ ut corpora ejusdem gravitatis specificæ dicantur quæ sub æqualibus voluminibus æquale pondus habent; specificè graviora vel leviora quæ sub æqualibus voluminibus majus vel minus pondus continet; quarè cum densitas sit ratio massæ ad volumen corporis (2. Lib. I.) ubi pondera sunt ut massæ, gravitates specificæ sunt ut densitates.

171. Lemma. *Pressiones quas corpora quævis in se motuò exercent, fiunt juxtà directiones communi plano contingenti perpendiculares, et per punctum contingentiæ eorumdem corporum transeunt.*

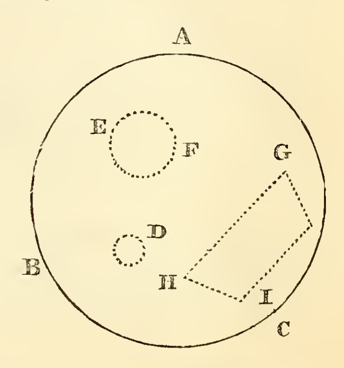
Corpus N vi quâlibet secundum directionem F C urgeatur, tangaturque in D a corpore M; producatur F C ut plano A B quod utrumque corpus contingit in D occurrat in H, ductâ per D rectâ D C ad planum A B perpendiculari, vis quâ corpus N urgetur, exponatur per lineam C H, et hæc (per Leg. Mot. Cor. 2.) resolvi poterit in vires æquipollentes C D et D H. Sed



corpus M minimè premitur vi D H secundum directionem plani contactûs agente; quarè solâ vi C D ad planum A B normali et per punctum contactûs D transeunte premitur. Q. e. d.

simul moveantur; atque hoc ideò quia similis et æqualis est omnium pressio, et motus omnis exclusus supponitur, nisi qui a pressione illâ oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur; contra hypothesin. Non possunt longiùs ab eo recedere, nisi fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra hypothesin. Non possunt servatâ suâ a centro distantiâ moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. Q. e. d.

Cas. 2. Dico jam, quòd fluidi hujus partes omnes sphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim E F pars sphærica fluidi, et si hæc undique non premitur æqualiter, augeatur pressio minor, usque dum ipsa undique prematur æqualiter; et partes ejus, per Casum primum, permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebant in locis suis, per Casum eundem primum, et additione pressionis novæ movebuntur de locis suis, per Definitionem Fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falsò dicebatur quòd sphæra E F non undique premebatur æqualiter. Q. e. d.



Cas. 3. Dico præterea quòd diversarum partium sphæricarum æqualis sit pressio. Nam partes sphæricæ contiguæ se mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motûs Legem tertiam. Sed et, per Casum secundum, undique premuntur eâdem vi. Partes igitur duæ quævis sphæricæ non contiguæ, ([a]) quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque, prementur eâdem vi. Q. e. d.

Cas. 4. Dico jam quòd fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi possunt a partibus sphæricis in punctis quibuscunque, et ibi partes illas sphæricas æqualiter premunt, per Casum tertium et vicissim ab illis æqualiter premuntur, per motûs Legem tertiam. Q. e. d.

Cas. 5. Cùm igitur fluidi pars quælibet G H I in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, et undique prematur æqualiter, partes autem ejus se mutuò æqualiter premant et quiescant inter se; manifestum est quòd

([a]) * *Quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque.* Nam pars illa intermedia duas alias partes sphæricas in punctis contactûs premet; atque ab illis premetur æqualiter, (ex dem.)

fluidi cujuscunque G H I, quod undique premitur æqualiter, partes omnes se mutuò premunt æqualiter, et quiescunt inter se. Q. e. d.

Cas. 6. Igitur si fluidum illud in vase non rigido claudatur, et undique non prematur æqualiter; cedet idem pressioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

Cas. 7. Ideóque in vase rigido fluidum non sustinebit pressionem fortiorem ex uno latere quàm ex alio, sed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum, et sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quàm primum a parte magis pressâ recedere conatur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum; reducetur pressio undique ad æqualitatem, in momento temporis, sine motu locali: et subinde partes fluidi, per Casum quintum, se mutuò prement æqualiter, et quiescent inter se. Q. e. d.

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem fluido ubivis in externâ superficie illatam, mutari possunt, nisi quâtenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intensiùs vel remissiùs sese premendo difficiliùs vel faciliùs labuntur inter se.

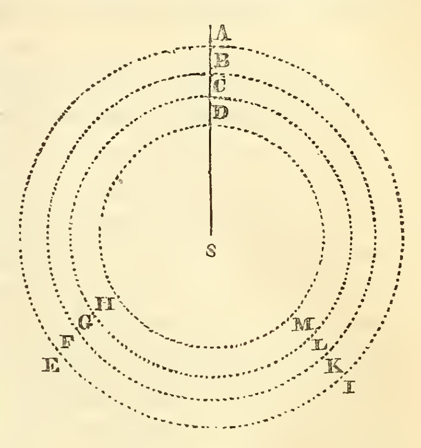
PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

([b]) *Si fluidi sphærici, et in æqualibus a centro distantiis homogenei, fundo sphærico concentrico incumbentis partes singulæ versus centrum totius gravitent; sustinet fundum pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, et altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.*

Sit D H M superficies fundi, et A E I superficies superior fluidi. Superficiebus sphæricis innumeris B F K, C G L distinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter crassos; et concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem orbis cujusque, et æquales esse actiones in æquales partes superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema A E vi simplici gravitatis propriæ, quâ et omnes orbis su-

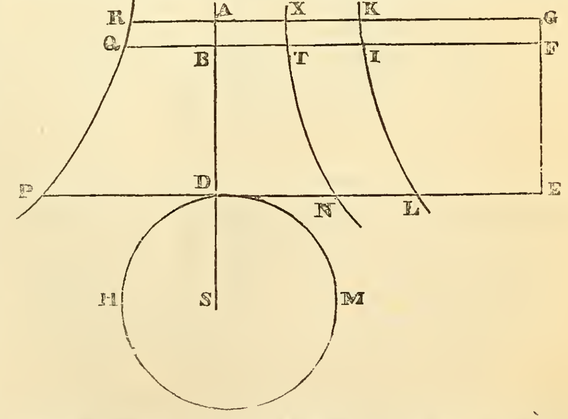
([b]) 172. *Si fluidi sphærici,* &c. Fluidi quiescentis superficies ad gravitatis directionem perpendicularis est ubique, et ideò si vis gravitatis ad centrum unum dirigatur, sphærica est. Si enim superficiei fluidi pars aliqua ad gravitatis directionem inclinata sit, resolvatur vis gravitatis in duas vires quarum una directionem habeat superficiei fluidi perpendicularem, altera parallelam et, (ex Definitione) fluidum secundùm hanc directionem movebitur, contra Hyp. Erit igitur pars quælibet superficiei ad gravitatis directionem perpendicularis: et quoniam nulla est alia superficies, præter sphæricam, quæ hanc habeat proprietatem, ut lineæ omnes ipsi perpendiculares ad centrum unum concurrant, superficies illa fluidi sphærica erit. Q. e. d.

premi partes et superficies secunda B F K (per Prop. XIX.) (c) pro mensurâ suâ æqualiter premuntur. Premitur præterea superficies secunda B F K vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit pressionem duplam. Hâc pressione, pro mensurâ suâ, et insuper vi propriæ gravitatis, id est, pressione triplâ urgetur superficies tertia C G L. Et similiter pressione quadruplâ urgetur superficies quarta, quintuplâ quinta, et sic deinceps. Pressio igitur quâ superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus orbium ad usque summitatem fluidi; et æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc est, gravitati solidi cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (si modo orbium augeatur numerus et minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis a superficie infimâ ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus cylindri præfiniti. Q. e. d. (d) Et simili argumentatione patet Propositio, ubi gravitas decrescit in ra-



(c) * *Pro mensurâ suâ æqualiter premuntur.* Singulæ, nimirum, superficiei secundæ partes, semotâ partium illarum propriâ gravitate, æque premuntur ac partes æquales superficiei supremæ; quod per Prop. XIX. manifestum fit, si spatium, quod illas superficies continet, tanquam vas aliquod consideretur quod fluidum æqualiter undique compressum complectitur.

(d) * *Et simili argumentatione*, &c. Patet ut in superiori demonstratione, quod pondus partium omnium æqualium D, C, B, A in totâ rectâ D A existentium sustineatur a parte D correspondente fundi sphærici D H M. Hoc igitur fundum sustinet pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, et altitudo eadem quæ fluidi incumbentis D A; modo tamen in locis a fundo sphærico D H M et a basi planâ cylindri æquidistantibus, eadem servetur fluidi densitas, eademque vis gravitatis quæ in basim cylindri perpendiculariter tendat ubique.



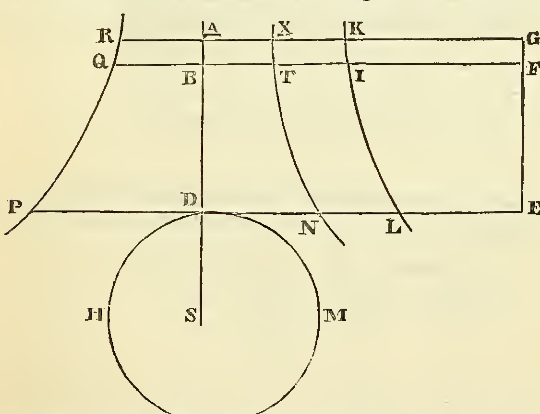
175. Designet D A G E prædictum cylindrum, cujus basis D E æqualis sit fundo sphærico D H M. Per punctum D, et per puncta B et A infinitè propinqua ductæ sint rectæ D E, B F et A G perpendiculares ad A S; in illis perpendicularibus capiantur D L, B I, A K densitatibus fluidi et D N, B T, A X viribus

tione quâvis assignatâ distantiæ a centro, ut et ubi fluidum sursum rarius est, deorsum densius. Q. e. d.

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in Propositione describitur; pondere reliquo a fluidi figurâ fornicatâ sustentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro distantiis eadem semper est pressionis quantitas, (e) sive superficies pressa sit horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; (f) sive fluidum, a superficie pressâ sursum continuatum, surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit obliquè per tortas cavitates et canales, easque regulares vel maximè irre-

gravitatis acceleratricibus in locis D, B, A proportionales, sintque curvæ L I K et N T X loca punctorum L, I, K, et N, T, X. Producatur K A in R, ut sit semper A R rectangulo A X × A K proportionalis, et R Q P curva quam punctum R perpetuo tangit: et pressio fluidi in fundum sphæricum D H M erit ut fundum D H M et area D A R P conjunctim. Nam pressio fluidi cylindrulo B A G F contenti in basim D E est ut quantitas materiæ in vim gravitatis singularum particularum ducta (per Definit. VIII. Lib. I.). Quantitas materiæ cylindro B A G F contenta est ut cylindrus B A G F et densitas conjunctim (2. Lib. I.), id est, ut basis cylindri D E et rectangulum A B × A K. Quare pressio fluidi cylindro B A G F contenti est ut basis D E et solidum A B × A K × A X, seu ut basis D E et rectangulum A B × A R conjunctim. Dividatur tota fluidi altitudo D A in partes innumeras ut A B, et erit pressio fluidi totius in basim cylindri D E vel in fundum sphæricum D H M, ut basis D E vel fundum D H M et area D A R P conjunctim. Q. e. d.



Si vis acceleratrix gravitatis constans sit, curva X T N in rectam lineam mutabitur axi A D parallelam, eritque proinde pressio fluidi in fundum D H M, ut fundum hoc et area D A K L conjunctim; in hâc enim hypothesi, ob datam A K, area D A R P proportionalis est areæ D A K L.

Si vis gravitatis et densitas fluidi constantes sint, curvæ X T N, K I L et R Q P in rectas lineas axi A D parallelas migrant; et ideò pressio fluidi in fundum sphæricum D H M, vel in basim cylindri D E, est ut fundum illud D H M, vel basis D E, et altitudo fluidi A D conjunctim. Si verò conferantur liquores in se homogenei, sed diversæ inter se densitatis, pressiones erunt in ratione compositâ basium, altitudinum et densitatum, modò gravitas acceleratrix constans, sit in utroque liquore æqualis; nam si inæqualis esset, pressiones forent in ratione compositâ basium, altitudinum, densitatum et virium gravitatis.

(e) * *Sive superficies pressa sit horizonti,* &c. * Sumatur quævis particula inter duos orbes concentricos B F K. C G L, illa particula per Casum 5. Prop. XIX. undique æqualiter premitur, ergo per motûs Leg. 3. undique æqualiter premit, substituatur itaque loco particulæ cujusvis hanc contingentis superficies quævis, sive horizontalis, sive perpendicularis, sive obliqua, æqualis erit in eam pressionis quantitas: *ergo in æqualibus a centro distantiis,* &c.

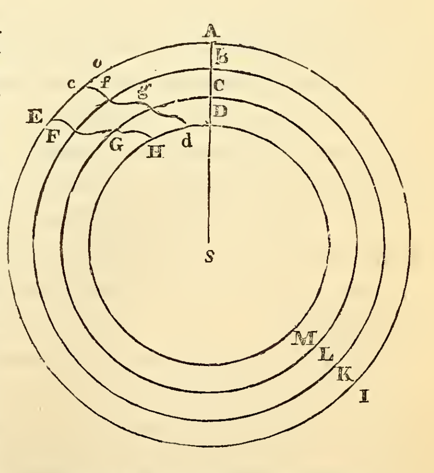
(f) * *Sive fluidum a superficie pressâ,* &c. Si fluidum vase utlibet irregulari E F G H d g f e contineatur, vasis fundum H d sustinebit pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi H d, et altitudo D A eadem quæ fluidi in vase contenti. Iisdem enim positis, quæ in do-

gulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem Theorematis hujus ad casus singulos fluidorum.

Corol. 3. Eâdem demonstratione colligetur etiam (per Prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se; si modò excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ corpus, quod sit condensationis expers, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si sphæricum est, manebit sphæricum, non obstante pressione; si quadratum est, manebit quadratum: idque sive molle sit, sive fluidissimum; sive fluido liberè innatet, sive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis submersi, et par est ratio omnium ejusdem magnitudinis, figuræ et gravitatis specificæ submersorum corporum. Si corpus submersum servato pondere liquesceret et indueret formam fluidi; hoc, si prius ascenderet, vel descenderet, vel ex pressione figuram novam indueret, etiam nunc ascenderet, vel descenderet, vel figuram novam induere cogeretur: id adeò quia gravitas ejus cæteræque motuum causæ permanent. Atqui (per Cas. 5. Prop. XIX.) jam quiesceret et figuram retineret. Ergo ut prius.

monstratione Propositionis hujus, premitur superficies suprema E e vi simplici gravitatis propriæ, quâ et superficies secunda F f pro mensura sua æqualiter premitur. Premitur præterea superficies secunda F f vi propriâ gravitatis, quæ addenda est vi priori. Hâc pressione, pro mensurâ suâ, et insuper vi propriæ gravitatis, urgetur superficies tertia G g; et sic deinceps. Quare patet, ut supra, pressionem quam superficies infima H d subit, æqualem esse ponderi cylindri cujus est altitudo D A et basis fundo H d æqualis.



Manente igitur tum basi H d, tum fluidi altitudine perpendiculari D A, manet fluidi in basim pressio, utcumque mutetur vasis fluidum continentis figura. Atque hinc in vasis communicantibus æquilibrium est, ubi perpendiculares fluidi altitudines supra fundum commune in utroque vase æquantur, dummodo in paribus a centro virium gravitatis S distantiis tam fluidi densitas quàm vis gravitatis servetur eadem. Nam si, manente vi gravitatis acceleratrice, conferantur fluida in se homogenea, sed diversæ inter se densitatis, erit in vasis communicantibus æquilibrium, ubi fluidorum in utroque vase altitudines perpendiculares erunt in ratione densitatum reciprocâ, quia in eo casu fluidorum in basim communem pressiones æquales sunt (173).

Corol. 5. Proinde corpus quod specificè gravius est quàm fluidum sibi contiguum, subsidebit, et quod specificè levius est ascendet, motumque et figuræ mutationem consequetur, quantum excessus ille vel defectus gravitatis efficere possit. Namque excessus ille vel defectus rationem habet impulsus, quo corpus, aliàs in æquilibrio cum fluidi partibus constitutum, urgetur; et comparari potest cum excessu vel defectu ponderis in lance alterutrâ libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis constitutorum duplex est gravitas, altera vera et absoluta, altera apparens, vulgaris et comparativa. Gravitas absoluta est vis tota quâ corpus deorsum tendit: relativa et vulgaris est excessus gravitatis quo corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum et corporum omnium gravitant in locis suis: ideóque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri licet; et pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideóque ex iisdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis suis, id est, inter se collata non prægravant, sed mutuos ad descendendum conatus impedientia permanent in locis suis, perinde ac si gravia non essent. Quæ in aëre sunt et non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quâtenus aëris pondere non sustinentur. Pondera vulgi nihil aliud sunt quàm excessus verorum ponderum supra pondus aëris. Unde et vulgò dicuntur levia, quæ sunt minus gravia, aërique prægravanti cedendo superiora petunt. Comparativè levia sunt, non verè, quia descendunt in vacuo. Sic et in aquâ corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem descendunt vel ascendunt, sunt comparativè et apparenter gravia vel levia, et eorum gravitas vel levitas comparativa et apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ, vel ab eâ superatur. Quæ verò nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendunt, etiamsi veris suis ponderibus adaugeant pondus totius, comparativè tamen et in sensu vulgi non gravitant in aquâ. Nam similis est horum casuum demonstratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonstrantur, obtinent in aliis quibuscunque viribus centripetis.

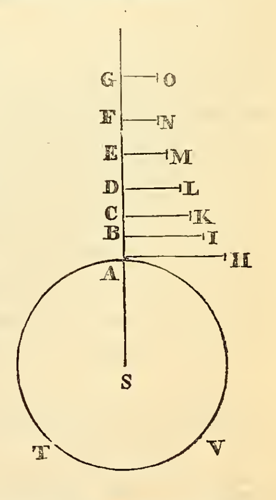
Corol. 8. Proinde si medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propriâ, vel ab aliâ quâcunque vi centripetâ, et corpus ab eâdem vi urgeatur fortius; differentia virium est vis illa motrix, quam in præcedentibus Propositionibus ut vim centripetam consideravimus.

Sin corpus a vi illâ urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifugâ haberi debet.

Corol. 9. Cùm autem fluida premendo corpora inclusa non mutent eorum figuras externas, patet insuper (per Corollarium Prop. XIX.) quod non mutabunt situm partium internarum inter se: proindeque, si animalia immergantur, et sensatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corpora immersa, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quâtenus hæc corpora a compressione condensari possunt. Et par est ratio cujuscunque corporum systematis fluido comprimente circundati. Systematis partes omnes iisdem agitabuntur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quâtenus fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, et partes ejus a vi centripetâ distantiis suis a centro reciprocè proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantiæ illæ sumantur continuè proportionales, densitates fluidi in iisdem distantiis erunt etiam continuè proportionales.

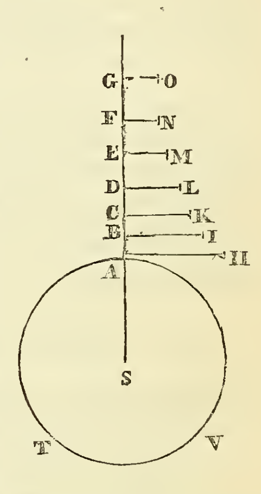


Designet A T V fundum sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, S A, S B, S C, S D, S E, S F, &c. distantias continuè proportionales. Erigantur perpendicula A H, B I, C K, D L, E M, F N, &c. quæ sint ut densitates medii in locis A, B, C, D, E, F; ([g]) et specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. ([h]) vel, quod perinde est, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primùm has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, a B ad C, a C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D,

([g]) 174. *Et specificæ gravitates,* &c. Fluidi enim cujus singulæ particulæ vi gravitatis urgentur gravitas specifica est ut densitas et vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Est enim gravitas specifica ut pondus directè et volumen inversè (170); sed pondus (per Defin. VIII. Lib I.) est ut quantitas materiæ et vis gravitatis acceleratrix conjunctim; quantitas verò materiæ (2. Lib. I.) est ut densitas et volumen conjunctim. Quarè, conjunctis his rationibus, gravitas specifica est ut densitas et vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Q. e. d.

([h]) * *Vel quod perinde est, ut,* &c. Cùm enim (per Hyp.) distantiæ S A, S B, S C, S D

&c. ([i]) Et hæ gravitates ductæ in altitudines A B, B C, C D, &c. conficient pressiones A H, B I, C K, &c. quibus fundum A T V (juxta Theorema XV.) urgetur. Sustinet ergo particula A pressiones omnes A H, B I, C K, D L, ([k]) pergendo in infinitum; et particula B pressiones omnes præter primam A H; et particula C omnes præter duas primas A H, B I; et sic deinceps: ideóque particulæ primæ A densitas A H, est ad particulæ secundæ B densitatem B I ut summa omnium A H + B I + C K + D L, in infinitum, ad summam omnium B I + C K + D L, &c. Et B I densitas secundæ B est ad C K densitatem tertiæ C, ut summa omnium B I + C K + D L, &c. ad summam omnium C K + D L, &c. Sunt igitur summæ illæ differentiis suis A H, B I, C K, &c. proportionales, atque ideò continuè proportionales (per hujus Lem. I.) proindeque differentiæ A H, B I, C K, &c. summis proportionales, sunt etiam continuè proportionales. Quare cùm densitates in locis A, B, C, &c. sint ut A H, B I, C K, &c. erunt etiam hæ continuè proportionales. Pergatur per saltum, et ex æquo in distantiis S A, S C, S E continuè proportionalibus, erunt densitates A H, C K, E M continuè proportionales. Et eodem argumento, in distantiis quibusvis continuè proportionalibus S A, S D, S G, densitates A H, D L, G O erunt continuè proportionales. Coëant jam puncta A, B, C, D, E, &c. eo ut progressio gravitatum specificarum a fundo A ad summitatem fluidi continua reddatur, et in distantiis quibusvis continuè proportionalibus S A, S D, S G, densitates A H, D L, G O, semper existentes continuè proportionales, manebunt etiamnum continuè proportionales. Q. e. d.



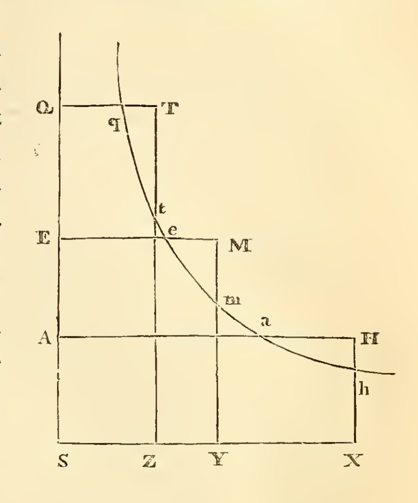
Corol. Hinc si detur densitas fluidi in duobus locis, putà A et E, col-

&c. sint continuè proportionales, earum differentiæ A B, B C, C D, &c. ipsis proportionales erunt.

([i]) * *Et hæ gravitates ductæ*, &c. Nam si pondus quod fundum sphæricum A T V sustinet, exponatur per cylindrum cujus basis æqualis sit superficiei A T V et altitudo eadem quæ fluidi incumbentis, volumen fluidi cylindrici pro altitudine A B erit A T V × A B, ideóque ob datam superficiem A T V, erit volumen illud ut A B, multiplicetur illud per gravitatem specificam et factum erit ut pondus seu pressio; quare cùm (ex demonst.) gravitas specifica sit ut $\frac{A H}{A B}$, pressio fluidi cylindrici, cujus est altitudo A B, erit ut A H, et ita de cæteris.

([k]) 175. * *Pergendo in infinitum.* Quoniam enim (per Hyp.) densitas compressioni proportionalis est, ubi compressio nulla evadit, evanescit quoque densitas, seu, fluidum fit infinitè rarum, ac proinde in infinitum expanditur; cùm ratio voluminis ad materiæ quantitatem infinita evadat (2. Lib. I.).

ligi potest ejus densitas in alio quovis loco Q. Centro S, asymptotis rectangulis S Q, S X describatur hyperbola secans perpendicula A H, E M, Q T in a, e, q, ut et perpendicula H X, M Y, T Z, ad asymptoton S X demissa, in h, m et t. Fiat area Y m t Z ad aream datam Y m h X ut area data E e q Q ad aream datam E e a A; et linea Z t producta abscindet lineam Q T densitati proportionalem. Namque si lineæ S A, S E, S Q sunt continuè proportionales, (l) erunt areæ E e q Q, E e a A æquales, et inde areæ his proportionales Y m t Z, X h m Y etiam æquales, et lineæ S X, S Y, S Z, id est, A H, E M, Q T (m) continuè proportionales, ut oportet. Et si lineæ S A, S E, S Q obtinent alium quemvis ordinem in serie continuè proportionalium, lineæ A H, E M, Q T, ob proportionales areas hyperbolicas, (n) obtinebunt eundem ordinem in aliâ serie quantitatum continuè proportionalium.



(l) * *Erunt areæ E e q Q, E e a A æquales,* per not. 379. Lib. I.

(m) * *Continue proportionales,* (379. Lib. I.)

(n) * *Obtinebunt eumdem ordinem,* &c. * Etenim areæ hyperbolicæ E e a A, Q q a A sunt logarithmi linearum S E, S Q, et pariter areæ Y m t Z, X h t Z sunt logarithmi linearum S Y, S X, (379. 389. Lib. I.) sed cùm areæ Y m t Z, X h t Z sint per constructionem proportionales areis E e a A, Q q a A, illæ areæ Y m t Z, X h t Z per doctrinam logarithmorum (n. 38.) poterunt esse logarithmi linearum S E, S Q; cùm ergo eædem quantitates possint esse logarithmi tam quantitatum S E, S Q, quàm quantitatum S Y, S X, oportet ut istæ quantitates S E. S Y et S Q, S X correspondentia loca occupent in progressionibus geometricis ad quas pertinent.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, et partes ejus a gravitate quadratis distantiarum suarum a centro reciprocè proportionali deorsum trahantur: dico (°) *quòd, si distantiæ sumantur in progressione musicâ, densitates fluidi in his distantiis erunt in progressione geometricâ.*

Designet S centrum, et S A, S B, S C, S D, S E distantias in progressione geometricâ. Erigantur perpendicula A H, B I, C K, &c.

(°) * *Quòd, si distantiæ sumantur in progressione musicâ,* aut, quod idem est, si tales sumantur distantiæ ut earum reciprocæ sint in progressione arithmeticâ.

* Scilicet tres quantitates dicuntur esse in continuâ proportione musicâ sive harmonicâ, si prima sit ad tertiam ut differentia primæ et secundæ ad differentiam secundæ et tertiæ. Et si sit series plurium quantitatum talium ut terminus quivis sit ad subsequentem, ut differentia prioris a termino intermedio, ad differentiam hujus intermedii a posteriore termino, ea series dicitur *progressio musica.*

Corol. 1. *In progressione musicâ factum duorum priorum terminorum est ad factum duorum quorumvis immediatè sibi succedentium ut differentia inter duos primos terminos ad differentiam inter hos ultimos.* Nam sunto termini progressionis musicæ A, B, C, D, E, F, &c. et differentiæ inter singulos M, N, P, Q, R, &c. erit per definitionem hujus progressionis

$A : C = M : N$

$B : D = N : P$

$C : E = P : Q$

$D : F = Q : R$, unde ex compositione rationum patet quod est

$A \times B : E \times F = M : R.$

Corol. 2. *Differentia inter duos primos terminos est ad differentiam inter duos quosvis alios, ut secundus terminus, toties mulctatus differentiâ sua a primo quot sunt termini inter primum et ultimum, ad eum ultimum.*

Nam (iisdem litteris adhibitis quæ in superiore Corollario) cùm ex naturâ progr. sit $A : C = M : N$, sitque $A = B - M$; est $B - M : C = M : N$, ergo in hoc casu, differentia M inter duos primos terminos A et B est ad differentiam N inter B et C ut secundus terminus B semel mulctatus differentiâ suâ a primo, cùm sit unicus terminus inter primum A et ultimum C, ad eum ultimum C.

Cùm ergo sit $B - M : C = M : N$, vicissim $B - M : M = C : N$, et dividendo $B - 2M : M = C - N : N$; cùmque sit $C - N = B$, est $B - 2M : M = B : N$, sed, per defin. progress. est $B : N = D : P$ ergo $B - 2M : M = D : P$ et vicissim $B - 2M : D = M : P$, sunt verò duo termini inter A et D, unde rursus in hoc casu constat Corollarii veritas.

Item cùm sit $B - 2M : D = M : P$ et vicissim $B - 2M : M = D : P$, erit dividendo $B - 3M : M = D - P : P$, cùmque sit $D - P = C$ erit $B - 3M : M = C : P$ cùmque per defin. progr. sit $C : P = E : Q$ erit $B - 3M : M = E : Q$ et vicissim $B - 3M : E = M : Q$, sunt verò inter A et E tres termini: cùmque eadem recurrat semper demonstratio si numerus terminorum progressionis inter primum et ultimum sit n; si secundus terminus dicatur B, differentia a primo M, ultimus terminus sit F, differentia a præcedente R erit, $M : R = B - nM : F$. Q. e. d.

Corol. 3. *In progressione musicâ secundus terminus toties mulctatus suâ differentiâ a primo quot sunt termini inter eum et ultimum est ad ultimum ut factum duorum primorum terminorum progressionis ad factum duorum postremorum.*

Liquet utique ex collatione duorum præcedentium Corollariorum; unde est semper, $B - nM : F = A \times B : E \times F$.

Theor. I. *Quilibet terminus progressionis musicæ est æqualis facto duorum primorum terminorum diviso per secundum terminum toties mulctatum differentiâ suâ a primo quot sunt termini a primo ad eum ultimum terminum.*

Primus terminus est $\frac{A \times B}{B}$, secundus terminus $\frac{A \times B}{A}$ sed $A = B - M$ ergo secundus terminus est $\frac{A \times B}{B - M}$. Pro reliquis terminis habetur semper per Corol. 3. $B - nM : F = A \times B : E \times F$ divisis ergo consequentibus per F, erit $B - nM : 1 = A \times B : E$ unde est $E = \frac{A \times B}{B - nM}$ sed cum n designaret numerum terminorum inter A et F hic exprimit numerum terminorum a primo ad E hoc ultimo annumerato, unde patet Theor. veritas.

Theor. II. *Termini omnes progressionis mu-*

quæ sint ut fluidi densitates in locis A, B, C, D, E, &c. et ipsius [p] gravitates specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, secundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines A B, B C, C D, D E, &c. vel, quod perinde est, in distantias S A, S B, S C, &c. altitudinibus illis proportionales, [q] conficient exponentes pressionum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cùm densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum A H — B I, B I — C K, &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro S, asymptotis S A, S x describatur hyperbola quævis, quæ secet perpendicula A H, B I, C K, &c. in a, b, c, &c. ut et perpendicula ad asymptoton S x demissa H t, I u, K w in h, i, k, et densitatum differentiæ t u, u w, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. seu t p, u q, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id est, ut A a, B b, &c. Est enim, [r] ex naturâ hyperbolæ, S A ad A H vel S t, ut t h ad A a, ideóque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale A a. Et simili

sicæ sunt inter se sicut quantitates quarum reciprocæ constituunt progressionem arithmeticam.

Nam per Theor. prius termini A. B. C. D. E, &c. prog. musicæ sunt $\frac{A \times B}{B}$, $\frac{A \times B}{B - M}$, $\frac{A \times B}{B - 2M}$, $\frac{A \times B}{B - 3M}$, &c. $\frac{A \times B}{B - nM}$. Divisis itaque omnibus per $A \times B$ sunt ut $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{B - M}$, $\frac{1}{B - 2M}$, $\frac{1}{B - 3M}$, $\frac{B}{B - nM}$. Sed hæ sunt reciprocæ quantitatum B, B — M, B — 2 M, B — 3 M, B — n M quæ sunt in progressione arithmeticâ; ergo, &c.

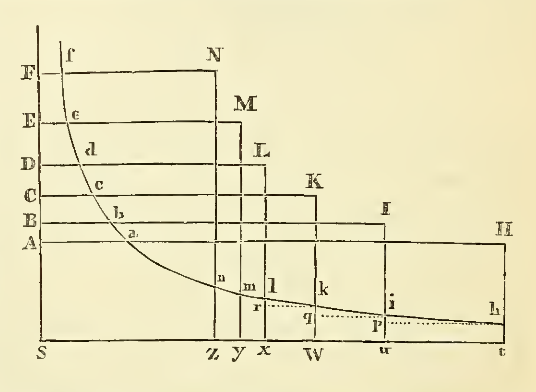
Scholium. Progressio musica potest esse decrescens et omnia ut prius procedent, mutatis signis negativis in positiva.

[p] * *Gravitates specificæ in iisdem locis erunt,* &c. (174.)

[q] * *Conficient exponentes pressionum,* seu quantitates pressionibus proportionales, &c Quod patet ut in demonstratione Prop. XXI

[r] * *Ex naturâ hyperbolæ,* per Theor. IV. de Hyperbola.

argumento est $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale B b, &c. (s) Sunt autem A a, B b, C c, &c. continuè proportionales, et propterea differentiis suis A a — B b, B b — C c, &c. proportionales; ideóque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula t p, u q, &c. ut et summis differentiarum A a — C c vel A a — D d summæ rectangulorum t p + u q vel t p + u q + w r. Sunto ejusmodi termini quàm plurimi, et summa omnium differentiarum, puta A a — F f, erit summæ omnium rectangulorum, puta z t h n, proportionalis. Augeatur numerus terminorum et minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, (t) et rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ z t h n, ideóque huic areæ proportionalis est differentia A a — F f. (u) Sumantur jam distantiæ quælibet, puta S A, S D, S F, in progressione musicâ, et differentiæ A a — D d, D d — F f erunt æquales; et propterea differentiis hisce proportionales areæ t h l x, x l n z æquales erunt inter se, et densitates S t, S x, S z, id est, A H, D L, F N, (x) continuè proportionales. Q. e. d.



Corol. Hinc si dentur fluidi densitates duæ quævis, puta A H et B I, dabitur area t h i u, harum differentiæ t u respondens; et inde invenietur densitas F N, in altitudine quâcunque S F, sumendo aream t h n z ad aream illam datam t h i u ut est differentia A a — F f (y) ad differentiam A a — B b.

(s) *Sunt autem A a, B b, C c, &c. continuè proportionales.* Nam (per Hyp.) S A, S B, S C sunt continuè proportionales, et (per Theor. IV. de Hyp.) A a, B b, C c sunt reciprocè ut S A, S B, S C, ideóque etiam continuè proportionales.

(t) * *Et rectangula evadent æqualia areæ hyperbolicæ z t h n*, per Lemma III. Lib. I.

(u) * *Sumantur jam* distantiæ quælibet, puta S A, S D, S F in progressione musicâ, et earum reciprocæ A a, D d, F f erunt in progressione arithmetica, ideóque differentiæ A a — D d, D d — F f æquales.

(x) * *Continuè proportionales.* (379. Lib. I.)

(y) 176. * *Ad differentiam A a — B b.* Quoniam verò area t h i u est ad aream t h n z ut logarithmus lineæ S t vel A H ad logarithmum lineæ S z seu F N (379 et 380 Lib. I.), densitas F N per tabulas logarithmorum inveniri poterit. Et vice versâ, datâ densitate F N invenietur altitudo S F: nam per Prop. superiorem dabitur A a — F f, et inde dabitur F f, unde invenietur $FS = \frac{SA \times Aa}{Ff}$ (per Theor. IV. de Hyp.). Quia verò fluidi elasticitas, cæteris paribus, vi comprimenti, ideóque densitati (per Hyp.) proportionalis est, patet per hoc Corollarium ex datis altitudinibus inveniri posse elasticitates, et vice versâ.

Scholium.

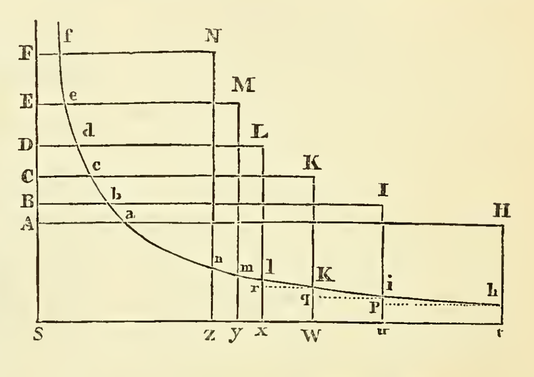
(z) Simili argumentatione probari potest, quòd si gravitas particularum fluidi diminuatur in triplicatâ ratione distantiarum a centro, et quadrato-

(z) 177. * *Simili argumentatione probari potest*, &c. Sit vis centripeta particularum fluidi reciprocè ut distantiæ dignitas, cujus index est n; designet S centrum, et S A, S B, S C, S D, S E distantias in progressione geometricâ. Erigantur perpendicula A H, B I, C K, &c. quæ sint ut fluidi densitates in locis A, B, C, D, E, &c. Et ipsius gravitates specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SA^n}$, $\frac{BI}{SB^n}$, $\frac{CK}{SC^n}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari primam ab A ad B, secundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines A B, B C, C D, D E, &c. vel quod perinde est, in distantias S A, S B, S C, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes pressionum $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, $\frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. Quare cùm densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum A H — B I, B I — C K, &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, $\frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. fiat eadem constructio, quæ supra in Prop. XXII., et densitatum differentiæ t v, u w, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, &c. et rectangula $tv \times th$, $uw \times ui$, &c., seu t p, u q, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI \times ui}{SB^{n-1}}$, &c. id est, ut Aa^{n-1}, Bb^{n-1}, &c. Est enim (per Theor. IV. de Hyp.) $AH \times th$ æquale $SA \times Aa$, et A a reciprocè ut S A, seu directè ut $\frac{1}{SA}$, ideóque $\frac{AH \times th}{SA^{n-1}}$ ut $SA \times Aa \times Aa^{n-1}$, sive ut Aa^{n-1} cum sit $SA \times Aa = 1$, et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB^{n-1}}$ ut Bb^{n-1}, &c sunt autem A a, B b, C c, &c. ideóque Aa^{n-1}, Bb^{n-1}, Cc^{n-1}, &c. continuè proportionales, et propterea differentiis suis $Aa^{n-1} - Bb^{n-1}$, $Bb^{n-1} - Cc^{n-1}$, &c. proportionales, ideóque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula t p, u q, &c. ut et summis differentiarum $Aa^{n-1} - Cc^{n-1}$, vel $Aa^{n-1} - Dd^{n-1}$ summæ rectangulorum $tp + uq$, vel $tp + uq + wr$. Sunto ejusmodi termini quàm plurimi, et summa omnium differentiarum; puta $Aa^{n-1} - Ff^{n-1}$, erit summæ omnium rectangulorum, puta z t h n, proportionalis. Augeatur numerus terminorum et minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, et rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ z t h n, ideóque huic areæ proportionalis est differentia $Aa^{n-1} - Ff^{n-1}$.

Sumantur jam distantiarum quarumlibet, puta S A, S D, S F dignitates SA^{n-1}, SD^{n-1}, SF^{n-1} in progressione musicâ, ideóque earum reciprocæ $\frac{1}{SA^{n-1}}$, $\frac{1}{SD^{n-1}}$, $\frac{1}{SF^{n-1}}$, seu Aa^{n-1}, Dd^{n-1}, Ff^{n-1} in progressione arithmeticâ, et differentiæ $Aa^{n-1} - Dd^{n-1}$, $Dd^{n-1} - Ff^{n-1}$ erunt æquales; et propterea differentiis hisce proportionales areæ t h l x, x l n z æquales erunt inter se, et densitates S t, S x, S z, id est, A H, D L, F N continuè proportionales. Quare si gravitas particularum fluidi diminuatur in ratione quâcumque multiplicatâ distantiarum, cujus exponens sit n, et dignitatum SA^{n-1}, SB^{n-1}, SC^{n-1}, &c. reciproca (nempe $\frac{SA^n}{SA^{n-1}}$, $\frac{SA^n}{SB^{n-1}}$, $\frac{SA^n}{SC^{n-1}}$, &c. in quibus S A data est) sumantur in progressione arithmeticâ; densitates A H, B I, C K, &c. erunt in progressione geometricâ.

Si itaque loco n scribantur numeri 3, 4, 5, 6, &c. in infinitum; et rursus scribantur o, — 1, — 2, — 3, &c. in infinitum, patet veritas scholii in hypothesi densitatis vi comprimenti proportionalis. Quando autem n = o, seu quando gravitas particularum fluidi in omnibus distantiis eadem est, est $\frac{SA^n}{SA^{n-1}} = SA$, $\frac{SA^n}{SB^{n-1}} =$ S B, ideóque si distantiæ sumantur in progressione arithmeticâ, densitates erunt in progressione geometricâ, ideóque distantiæ sunt ut densitatum logarithmi, quia crescentibus distantiis in progressione arithmeticâ, decrescunt densitates in progressione geometricâ. Quia verò *per experimenta constat, quod densitas aëris*, cæteris paribus ac potissimum manente eodem caloris gradu, *sit ut vis comprimens vel accuratè vel saltem quam proximè* in aëre quem experimentis possumus subjicere, vis autem aërem inferiorem comprimens, cæteris etiam paribus, æqualis sit ponderi aëris totius incumbentis, ideóque proportionalis altitudini mercurii in barometro, et præterea particularum aëris gravitas, in minoribus saltem a telluris superficie distantiis, constans censeri possit, patet, quod, cæteris paribus, aëris densitatem, ad hujusmodi distantias minores, metiri possimus per logarithmos. Sed de his plura videre est in Elementis Aërometriæ clar. Wolfii, in Libro II. Phoronomiæ, et in sectione 10. Hydrodynamicæ claris. Danielis Bernoulli.

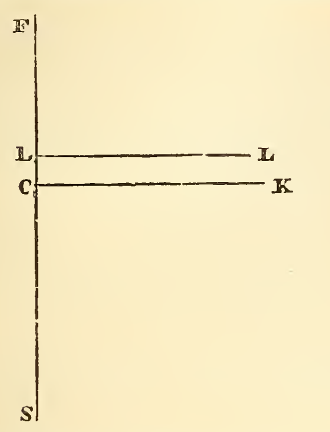
rum distantiarum S A, S B, S C, &c. reciproca (nempe $\frac{\text{S A cub.}}{\text{S A q}}$, $\frac{\text{S A cub.}}{\text{S B q}}$, $\frac{\text{S A cub.}}{\text{S C q}}$) sumantur in progressione arithmeticâ; densitates A H, B I, C K, &c. erunt in progressione geometricâ. Et si gravitas diminuatur in quadruplicatâ ratione distantiarum, et cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{\text{S A q q}}{\text{S A cub.}}$, $\frac{\text{S A q q}}{\text{S B cub.}}$, $\frac{\text{S A q q}}{\text{S C cub.}}$, &c.) sumantur in progressione arithmeticâ; densitates A H, B I, C K, &c. erunt in progressione geometricâ. Et sic in infinitum.



Rursus si gravitas particularum fluidi in omnibus distantiis eadem sit, et distantiæ sint in progressione arithmeticâ densitates erunt in progressione geometricâ, uti vir claris. Edmundus Halleius invenit. Si gravitas sit ut distantia, et quadrata distantiarum sint in progressione arithmeticâ, densitates erunt in progressione geometricâ. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium a fluido occupatum reciprocè ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis leges, ut quòd cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplicata ratio vis eadem cum quadruplicatâ ratione densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ a centro, densitas erit reciprocè ut cubus distantiæ. Fingatur quòd cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, et si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ, densitas erit reciprocè in sesquiplicatâ ratione distantiæ. Fingatur quòd vis comprimens sit in duplicatâ ratione densitatis, et gravitas reciprocè in ratione duplicatâ distantiæ, et densitas erit reciprocè ut distantia. ([a]) Casus omnes percurrere longum esset. Cæterùm per experimenta constat quòd densitas aëris sit ut vis comprimens vel accuratè, vel saltem quàm proximè: et propterea densitas aëris in atmosphærâ Terræ est ut pondus aëris totius incumbentis, id est, ut altitudo mercurii in barometro.

([a]) 178. * *Casus omnes percurrere longum esset;* satius erit generalem formulam tradere, ex quâ singuli casus pro lubitu eruantur. Iisdem igitur, quæ supra, positis, sit distantia varia-

bilis S C = x, altitudo C D = d x, densitas C K = y, vis tota comprimens in loco C = v, vis gravitatis ibidem = g; et erit gravitas specifica in eodem loco ut g y (174), et hæc ducta



in altitudinem evanescentem C D seu d x conficient momentum pressionis g y d x = — d v. Sumitur autem fluxio d v negativè, quod crescente distantia x, pondus incumbens v decrescat.

Sit gravitas g ut $\frac{1}{x^m}$, densitas y ut vis comprimentis dignitas v^n, ideóque $y^{\frac{1}{n}}$ ut v, et sumptis fluxionibus $\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} d y$ ut d v. Loco g et d v substituantur hi valores in æquatione g y d x = — d v, et fiet $\frac{y\, d x}{x^m} = -\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} d y$ seu $-\frac{d x}{x^m} = \frac{1}{n} y^{\frac{1-2n}{n}} d y$. His verò æquationibus non æqualitates, sed proportiones tantum exponimus, et ideò coëfficientes datas negligimus.

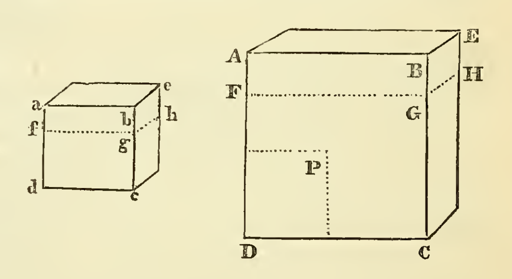
Si in ultimâ æquatione ponatur n = 1, id est, densitas vi comprimenti proportionalis, erit $\frac{d y}{y} = -\frac{d x}{x^m}$. Sumantur quantitates $\frac{1}{x^{m-1}}$ in progressione arithmeticâ; et earum fluxiones, seu differentiæ nascentes $-\frac{(m-1)\, d x}{x^m}$, ideóque et $\frac{-d x}{x^m}$ constantes erunt, et propterea quantitates $\frac{d y}{y}$ etiam datæ; ac proinde densitates y suis differentiis d y proportionales, erunt continuè proportionales, (per Lem. II. Lib. II.). Si in eadem hypothesi ponatur m = 1, fit $\frac{d y}{y} = -\frac{d x}{x}$; unde si capiantur quantitates $\frac{d x}{x}$ constantes, seu distantiæ x in progressione geometricâ, erunt etiam quantitates $\frac{d y}{y}$ constantes, et ideò densitates y in progressione geometricâ. Prorsus ut in Prop. XXI., XXII. et initio scholii hujus demonstratum est. Sumptis fluentibus, æquatio $\frac{1}{n} y^{\frac{1-2n}{n}} d y = -\frac{d x}{x^m}$ hanc abit $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = -\frac{1}{m-1} x^{1-m} + Q$. const. in quâ non potest esse m = 1, nec n = 1, neque n = o, ut patet. Ut autem determinetur valor constantis Q, primum definienda est altitudo S F, ubi densitas y evanescit. Nam si altitudo illa finita est et dicatur = a, positâ y = o, habebitur $Q = \frac{-1}{m-1} a^{1-m}$, et hinc $\frac{1}{1-n} \times y^{\frac{1-n}{n}} = -\frac{x^{1-m} - a^{1-m}}{m-1} = \frac{a^{1-m} - x^{1-m}}{m-1}$, in qua æquatione debet esse $\frac{1-n}{n}$ numerus positivus, seu n numerus positivus unitate minor, ut crescentibus distantiis x, decrescant densitates y, et contra. Si altitudo S F ad quam densitas y evanescit, infinita supponatur, erit constans Q = o, ac proinde æquatio $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m}$. Nam si in æquatione $\frac{1}{1-n} \times y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{x^{1-m} - a^{1-m}}{m-1}$, ponatur y nulla et x infinita, quantitas constans a erit infinita, contra hypothesim.

Jam vero si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ, id est si m = 2, æquatio $\frac{1}{1-n} \times y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m}$ in hanc migrat $\frac{1}{1-n} \times y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{x}$, unde est y ut $x^{\frac{1}{1-n}}$ reciprocè. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu y^4 ut v^3, ideóque y ut $v^{\frac{3}{4}}$, et hinc $n = \frac{3}{4}$; et erit $x^{\frac{1}{1-n}} = x^3$, ac proinde densitas y ut x^3 reciprocè, seu densitas, reciprocè ut cubus distantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, hoc est, y^5 ut v^3, adeóque y ut $v^{\frac{3}{5}}$, et hinc $n = \frac{3}{5}$; et erit y ut $x^{\frac{5}{2}}$ reciprocè, id est, densitas reciprocè in sesquiplicatâ ratione distantiæ. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicatâ ratione densitatis; seu y ut $v^{\frac{1}{2}}$; et hinc erit $n = \frac{1}{2}$, ac proinde y ut x reciprocè, sive densitas est reciprocè ut distantia. Quæ Newtonus in scholio dixerat. Vide Monumenta Academiæ Regiæ Scientiarum anni 1716, ubi hanc materiam tractat Varignonius, quem hic sumus sequuti.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum. Et vice versâ, particulæ viribus quæ sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt fluidum elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.

Includi intelligatur fluidum in spatio cubico A C E, dein compressione redigi in spatium cubicum minus a c e; et particularum, similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, (b) distantiæ erunt ut cuborum latera A B, a b; (c) et mediorum densitates reciprocè ut spatia continentia A B cub. et a b cub. In cubi majoris latere plano A B C D capiatur quadratum D P æquale lateri plano cubi minoris d b; et ex hypothesi, pressio, quâ quadratum D P urget fluidum inclusum, erit ad pressionem, quâ illud quadratum d b urget fluidum inclusum, ut medii densitates ad invicem, hoc est, ut a b cub. ad A B cub.



Sed pressio, quâ quadratum D B urget fluidum inclusum, est ad pressionem, quâ quadratum D P urget idem fluidum, ut quadratum D B ad quadratum D P, hoc est, ut A B quad. ad a b quad. Ergo, ex æquo, pressio quâ quadratum D B urget fluidum, est ad pressionem quâ quadratum d b urget fluidum, ut a b ad A B. Planis F G H, f g h, per media cuborum ductis, distinguatur fluidum in duas partes, (d) et hæ se mutuo prement iisdem viribus, quibus premuntur a planis A C, a c, hoc est, in proportione a b ad A B: ideóque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustinentur, sunt in eâdem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires quas particulæ omnes secundum plana F G H, f g h exercent in omnes, sunt ut vires quas singulæ exer-

(b) * *Distantiæ erunt ut cuborum latera A B, a b*, per Lemma V. Lib. I.

(c) * *Et mediorum densitates, ut*, &c. ob datam in utroque spatio fluidi massam (2. Lib. I.).

(d) * *Et hæ se mutuo prement iisdem viribus*, &c. Pressiones enim in unoquoque spatio sunt ubique æquales; nam cùm fluidum uniforme supponatur, si pressio minor esset in uno loco quàm in alio, statim cederet fluidum magis pressum, atque ita pressio ad æqualitatem restitueretur, ut in Casu 6. Prop. XIX.

cent in singulas. Ergo vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum F G H in cubo majore, sunt ad vires, quas singulæ exercent, in singulas secundum planum f g h in cubo minore, ut a b ad A B, hoc est, reciprocè ut distantiæ particularum ad invicem. Q. e. d.

Et vice versâ, si vires particularum singularum sunt reciprocè ut distantiæ, id est, reciprocè ut cuborum latera A B, a b; summæ virium erunt in eâdem ratione, et pressiones laterum D B, d b ut summæ virium; et pressio quadrati D P ad pressionem lateris D B ut a b quad. ad A B quad. Et, ex æquo, pressio quadrati D P ad pressionem lateris d b ut a b cub. ad A B cub. id est, vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. Q. e. d.

Scholium.

( ) Simili argumento, si particularum vires centrifugæ sint reciprocè in duplicatâ ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata densitatum. Si vires centrifugæ sint reciprocè in triplicatâ vel quadruplicatâ ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si D ponatur pro distantiâ, et E pro densitate fluidi compressi, et vires centrifugæ sint reciprocè ut distantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index est numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index est numerus n + 2: et contra. Intelligenda vero sunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longè ultra diffunduntur

(e) * *Simili argumento*, &c. Sunto D et d particularum distantiæ in spatiis cubicis A C E et a c e quæ sunt ut A B et a b, earumdem vires centrifugæ ut D^n et d^n reciprocè, fluidi densitates E et e, et vires comprimentes erunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ et $e^{\frac{n+2}{3}}$.

Nam cùm summæ virium quas omnes simul particulæ exercent in latera D B, d b, sint ut singularum particularum vires erunt istæ summæ virium ut D^n et d^n reciprocè, seu ut $a\,b^n$ et $A\,B^n$ directè; et pressio quadrati D P ad pressionem quadrati D B ut $a\,b^2$ ad $A\,B^2$; unde ex æquo pressio quadrati D P ad pressionem quadrati d b, hoc est, vis comprimens in spatio A C E ad vim comprimentem in spatio a c e, ut $a\,b^{n+2}$ ad $A\,B^{n+2}$. Sunt autem densitates, sive est E ad e, ut $a\,b^3$ ad $A\,B^3$, et ideò $E^{\frac{n+2}{3}}$ ad $e^{\frac{n+2}{3}}$ ut $a\,b^{n+2}$ ad $A\,B^{n+2}$. Quare vires comprimentes sunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ et $e^{\frac{n+2}{3}}$. Q. e. d.

Et vice versâ, si vires comprimentes sunt ut densitatum dignitates $E^{\frac{n+2}{3}}$, $e^{\frac{n+2}{3}}$, seu ut $a\,b^{n+2}$, $A\,B^{n+2}$; erit pressio quadrati D P ad pressionem quadrati d b in eâdem ratione, et pressio quadrati D B est ad pressionem quadrati D P, ut $A\,B^2$ ad $a\,b^2$; et, ex æquo, pressio quadrati D B ad pressionem quadrati d b, ut $a\,b^n$ ad $A\,B^n$, seu ut d^n ad D^n. Sunt autem vires particularum singularum ut summæ virium, hoc est, ut pressiones laterum D B, d b; quare vires particularum centrifugæ sunt reciprocè ut distantiarum dignitates D^n, d^n. Q. e. d.

Jam si loco n scribantur numeri 2, 3, &c., patet veritas eorum quæ initio scholii dixit Newtonus.

Exemplum habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur ferè in sui generis corporibus sibi proximis. Magnetis virtus per interpositam laminam ferri contrahitur, et in laminâ ferè terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a magnete quam a laminâ trahuntur. Ad eundem modum si particulæ fugant alias suis generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujusmodi particulis componentur fluida de quibus actum est in hâc Propositione. Quod si particulæ cujusque virtus in infinitum propagetur, (f) opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris quantitatis fluidi. An vero fluida elastica ex particulis se mutuo fugantibus constent, quæstio physica est. Nos proprietatem fluidorum ex ejusmodi particulis constantium mathematicè demonstravimus, ut philosophis ansam præbeamus quæstionem illam tractandi.

(f) * *Opus erit vi majori,* &c. Non enim solum vincenda erit per compressionem vis centrifuga particularum proximarum, sed et remotiorum vis erit superanda quæ (ex Hyp.) in infinitum propagatur.

SECTIO VI.

De motu et resistentiâ corporum funependulorum.

([g]) PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione compositâ ex ratione ponderum et ratione duplicatâ temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in datâ materiâ, dato tempore generare potest, est ut vis et tempus directè, et materia inversè. Quo major est vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem secundam manifestum est. ([h]) Jam verò si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideóque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, et arcus illi dividantur in partes æquales; ([i]) cùm tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes corres-

([g]) * *Propositio XXIV.* In hâc Propositione et ejus Corollariis supponitur corpora funependula, quæ comparantur, in cycloidibus aut saltem in exiguis magni circuli arcubus oscillari. * Pondera autem corporum hic duplici de causâ a materiâ ipsorum distinguuntur; primo, quod nondum assumi possit gravitatem agere secundum rationem massarum, cum id ipsum ex isto Theoremate postea deducatur, Cor. 7.; et secundo, in diversis locis gravitas diversa esse potest (ut quidem ex experimentis constat) ideóque corporum duorum in diversis iis locis spectatorum ratio materiæ eadem manebit, non verò ratio ponderum.

([h]) *Jam verò si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera.*

* Nam si pendula ejusdem sint longitudinis, cycloides plane similes et æquales describent: in unaquâque autem cycloide, vires quibus corpora in locis quibusvis D, *(vid. fig. pag. seq.)* vel d accelerantur, sunt ad totum singuli corporis pondus in locis altissimis, ut arcus cycloidis inter loca proposita D, d et puncta infima C, c, ad totas semi-cycloides (Cor. Prop. LII. Lib. I.) Ergo si semi-cycloides sint æquales et loca D et d a perpendiculo æqualiter distent, arcus D C et d c erunt æquales, ideóque vis quâ corpus acceleratur in primâ cycloide in puncto D, erit ad totum ejus corporis pondus, ut vis quâ corpus acceleratur in alterâ cycloide in puncto d, ad totum ejus corporis pondus. Unde vicissim, vis quâ acceleratur primum corpus in puncto D, est ad vim quâ alterum acceleratur in puncto d, ut totum prioris corporis pondus, ad pondus alterius corporis, ideóque *si pendula sint ejusdem longitudinis vires motrices*, &c. Q. e. d.

([i]) *Cum tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes* (æquales) *correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum.*

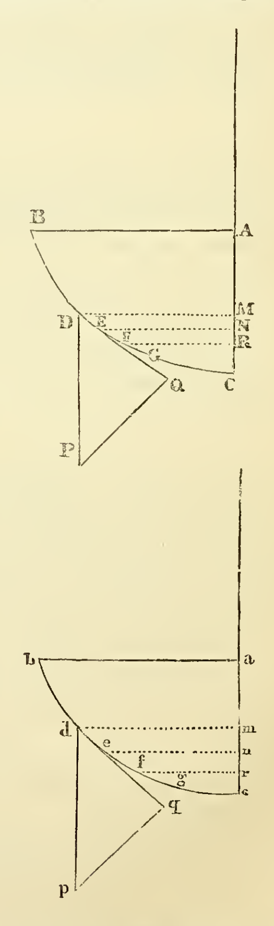
* Sint arcus D C, d c æquales, secenturque in partes æquales infinitè parvas D E, E F, &c.; d e, e f, &c., ex punctis D, E, F et d, e, f, ducantur perpendiculares ad axem, D M, E N, F R; D m, e n, f r; liquet lineolas M N et m n, M R et m r ex hypothesi fore æquales; ex naturâ autem gravitatis, velocitas acquisita in E erit ad velocitatem acquisitam in F ut radix altitudinis M N ad radicem M R, et pariter velocitas acquisita in e, erit ad velocitatem acquisitam in f ut $\surd$ m n ad $\surd$ m r, cum ergo $\surd$ M N $=$ $\surd$ m n et $\surd$ M R $=$ $\surd$ m r velocitas acquisita in E est ad velocitatem acquisitam in F, ut velocitas acquisita in e est ad velocitatem acquisitam in f, et vicissim velocitas acquisita in E. est ad velocitatem acquisitam in e;

pondentes sint ut tempora oscillationum totarum, (†) erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices et tota oscillationum tempora directè et quantitates materiæ reciprocè: ideóque quantitates materiæ ut vires et oscillationum tempora directè et velocitates reciprocè. (§) Sed velocitates reciprocè sunt ut tempora, atque ideò tempora directè et velocitates reciprocè sunt ut quadrata tem-

ut velocitas acquisita in F est ad velocitatem acquisitam in f. Sed quoniam arcus E F et e f F G et f g sunt infinite parvi et æquales, uniformiter describi censendi sunt, et tempora quibus describuntur erunt in ratione reciprocâ velocitatum, ideóque tempus quo describitur E F est ad tempus quo describitur e f, ut velocitas in e ad velocitatem in E, et tempus quo describitur F G est ad tempus quo describitur f g, ut velocitas in f ad velocitatem in F, &c. sed rationes velocitatum in E et e, in F et f, &c. sunt semper æquales inter se, ergo et rationes temporum quæ istarum sunt inversæ sunt æquales inter se; ergo tempora quibus singulæ partes arcus D C describuntur, sunt ad tempora quibus correspondentes partes arcus d c describuntur, in eâdem ratione, ergo omnes antecedentes et omnes consequentes summando, omnia simul tempora quibus percurruntur omnes partes arcus D C, hoc est, totum tempus oscillationis per D C, est ad omnia tempora quibus partes arcus d c percurruntur, hoc est ad totum tempus oscillationis per d c ut tempus unum quo quædam pars arcus D C percurritur, est ad tempus quo pars correspondens arcus d c percurritur. Q. e. d.

(†) *Erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices et tota oscillationum tempora directè et quantitates materiæ reciprocè.* * Ex demonstratione notæ superioris liquet velocitates in correspondentibus partibus esse omnes in eâdem ratione, ideóque ut velocitas acquisita in E ad velocitatem acquisitam in e, sed cùm arcus D E et d e infinitè parvi supponantur, censendum est, vires motrices uniformiter agere, dum illi arcus percurruntur; motus ergo per eas productus crescet tam pro ratione virium ipsarum quàm pro ratione temporis quo arcus illi describuntur sive (ex demonstratis) pro ratione temporum oscillationum integrarum, motus verò ex Def. 2. Lib. I. æstimatur a Newtono ex velocitate et materiâ conjunctim, ergo velocitates productæ in *correspondentibus oscillationum partibus erunt ut vires motrices et tota oscillationum tempora directè et quantitates materiæ inversè.*

(§) * *Sed velocitates sunt reciprocè ut tempora.* * Ex demonstratis (ad notam superiorem [i]) liquet velocitatem acquisitam in E esse ad velocitatem acquisitam in e ut velocitas acquisita in puncto quovis arcus D C ad velocitatem acquisitam in puncto correspondenti arcus d c; ex eâdem demonstratione liquet velocitatem acquisitam in E esse ad velocitatem acquisitam in e, in ratione reciprocâ temporum quibus describuntur arcus E F, et e f; hæc verò tempora esse ut



tempora oscillationum integrarum, unde velocitas acquisita in puncto quovis arcus D C, est ad velocitatem acquisitam in puncto correspondenti arcus d c, in ratione reciprocâ temporum oscillationum totarum. Q. e. d.

porum, et propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices et quadrata temporum, id est, ut pondera et quadrata temporum. (††) Q. e. d.

Corol. 1. Ideóque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciprocè ut quadrata temporum.

Corol. 4. (k) Unde cum quadrata temporum, cæteris paribus, sint ut longitudines pendulorum; si et tempora et quantitates materiæ æqualia sunt, (l) pondera erunt ut longitudines pendulorum.

(††) *Quod erat demonstrandum.* * In demonstratione probatum est quod si describantur arcus æquales D C, d c quantitates materiæ sunt ut pondera et quadrata temporum, sumatur jam arcus b c major vel minor arcu d c sed quantitates materiæ et pondera utrinque maneant eadem quæ prius, et pariter ob isochroneitatem curvæ b d c, tempus oscillationis per b c, æquale erit tempori oscillationis per d c, ideóque quicumque sint arcus descripti si modo maneat penduli longitudo, eademque sit utrinque cyclois, pariter verum erit quod quantitates materiæ sunt ut pondera et quadrata temporum oscillationum.

(k) *Unde cum quadrata temporum cæteris paribus sint ut longitudines pendulorum.* * Fingatur L C, l c inæqualia esse, et arcus D C, d c non sumi æquales ut prius, sed similes, sive proportionales longitudinibus L C, l c, secetur D C in partes æquales inter se, et d c in partes similes, ita ut sit D E ad d e ut L C ad l c ductisque perpendiculis D M, E N, d m, e n, &c. liquet ex similitudine figurarum altitudines M N et m n, M R et m r, &c. esse etiam inter se in ratione L C ad l c, velocitates verò quibus describuntur arcus E F, F G sunt ut $\surd$ M N ad $\surd$ M R, et velocitates quibus describuntur arcus e f, f g sunt ut $\surd$ m n ad $\surd$ m r, sed quia M N et m n, M R et m r, sunt in eâdem ratione ideóque et earum radices, vicissim, velocitas quâ describitur E F est ad velocitatem quâ describitur e f, ut velocitas quâ describitur F G ad velocitatem quâ describitur f g; et sic ordine perpetuo demonstrabitur velocitates quibus successivæ partes correspondentes utriusque curvæ percurruntur fore semper in eâdem ratione; tempora verò quibus arcus similes describuntur sunt directè ut illi arcus et inversè ut velocitates; ergo cum ratio arcuum correspondentium sit semper eadem, nempe ratio L C ad l c, ut et ratio velocitatum quibus percurruntur illi arcus, singula tempuscula quibus describuntur particulæ arcus D C eamdem rationem habebunt ad tempuscula quibus correspondentes particulæ arcus d c percurruntur; ideóque tempora tota oscillationum per D C et d c erunt directè ut longitudines L C et l c, et inversè ut velocitates in punctis quibusvis correspondentibus arcuum D C et d c, putà in punctis infimis C et c, sed quia ex hypothesi quod pondera sunt æqualia et quod quantitates materiæ sunt æquales, velocitates sunt proportionales radicibus quadratis altitudinum, velocitates in punctis C et c erunt ut $\surd$ M C ad $\surd$ m c: sed ex similitudine curvarum et arcuum est m c ad M C sicut l c ad L C, ergo velocitates in punctis C et c sunt ut $\surd$ L C ad $\surd$ l c, ideóque tempora oscillationum integrarum in arcubus D C, d c erunt ut $\frac{\text{L C}}{\surd \text{L C}}$ ad $\frac{\text{l c}}{\surd \text{l c}}$, unde quadrata temporum erunt ut $\frac{\text{L C}^2}{\text{L C}}$ ad $\frac{\text{l c}^2}{\text{l c}}$ sive ut L C ad l c, hoc est ut longitudines pendulorum. Q. e. d.

(l) * *Pondera erunt ut longitudines pendulorum, et universaliter quantitas materiæ pendulæ est ut pondus et quadratum temporis directè et longitudo penduli inversè.* * Sint duo pendula A et B, quæ materiâ, pondere et oscillationum temporibus discrepent, sed æqualis sint longitudinis; ex Theoremate, erit quantitas materiæ pendulæ in A ad quantitatem materiæ pendulæ in B, ut pondus et quadratum temporis oscillationum penduli A conjunctim ad pondus et quadratum temporis oscillationum penduli B conjunctim; sit tertium pendulum C, cujus materia et pondus eadem sint cum materiâ et pondere penduli B, diversa verò sit utriusque longitudo, longitudo penduli C erit ad longitudinem penduli B (sive penduli A, perinde enim est ex hypothesi) ut quadratum temporis in pendulo C ad quadratum temporis in pendulo B, quod itaque æquale erit quadrato temporis in pendulo C, per longitudinem penduli multiplicato et per longitudinem penduli C diviso; unde quantitas materiæ in A erit ad quantitatem materiæ in B sive in C, ut pondus et quadratum temporis in A conjunctim ad pondus in B, sive in C, cum quadrato temporis in C et longitudine penduli A directè et longitudine penduli C inversè: unde liquet quantitatem materiæ in A esse ad quantitatem materiæ in C, ut pondus et quadratum temporis

Corol. 5. (m) Et universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus et quadratum temporis directè, et longitudo penduli inversè.

Corol. 6. Sed et in medio non resistente quantitas materiæ pendulæ est ut pondus comparativum et quadratum temporis directè et longitudo penduli inversè. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in medio quovis gravi, (n) ut supra explicui; ideóque idem præstat in tali medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo.

Corol. 7. (o) Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis; tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, (p) ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

Corpora funependula quibus, in medio quovis, resistitur in ratione momentorum temporis, et corpora funependula quæ in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente moventur, oscillationes in cycloide eodem tempore peragunt, et arcuum partes proportionales simul describunt.

Sit A B cycloidis arcus, quem corpus D tempore quovis in medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in C, ita ut C fit infimum ejus punctum; et erit vis acceleratrix quâ corpus urgetur in loco quovis

in pendulo A directè et ejus longitudo inversè ad pondus et quadratum temporis penduli C directè et ejus longitudinem inversè. Q. e. d. *universaliter.*

Unde si et tempora et quantitates materiæ eadem sunt, pondera sunt ut longitudines pendulorum directè.

(m) * *Et universaliter.* Vide notam superiorem.

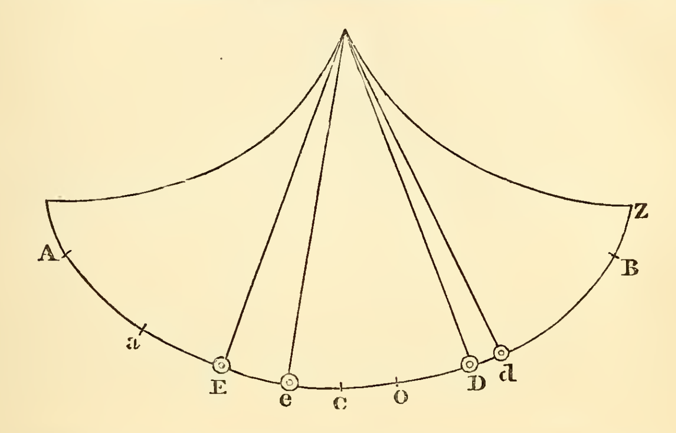
(n) * *Ut supra explicui,* in Cor. 6. et 8. Prop. XX.

(o) * *Et hinc liquet ratio,* &c. Nam ex datis pendulorum longitudinibus, oscillationum temporibus, et ponderibus corporum, datur ratio quantitatum materiæ in illis corporibus (per Cor. V.); et contra.

(p) * *Ad cognoscendam variationem gravitatis.* Ubi enim ejusdem penduli oscillationes tardiores sunt, gravitatis actio, cæteris paribus, minor est, cum in eodem pendulo pondera sint reciprocè ut quadrata temporum (per Cor. 3.). Sed de his plura ad Prop. XX. Lib. III. dicentur. Quanta autem in illis experimentis adhibenda sit diligentia, claris. D. de Mairan eâ quâ solet perspicuitate et elegantiâ exponit in Monumentis Acad. Reg. Scient. an. 1735.

179. Quia numeri oscillationum æqualibus temporibus a diversis pendulis absolvendarum sunt reciprocè ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt (473. Lib. I.), numeri oscillationum æqualibus temporibus peractarum erunt (per Cor. 5. Prop. hujus) in compositâ ratione ex ratione subduplicata directa ponderum et subduplicatis rationibus inversis massarum et longitudinum pendulorum; sive, quoniam pondus est ut factum ex massâ in vim gravitatis acceleratricem, erunt prædicti oscillationum numeri in ratione subduplicata directa virium gravitatis acceleratricum et ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inversâ; ac proinde pendulorum inæqualium, sed eâdem vi gravitatis agitatorum, numeri oscillationum eodem tempore absolvendarum sunt in reciprocâ subduplicatâ ratione longitudinum pendulorum, et numeri oscillationum in duobus pendulis æqualibus erunt in subduplicatâ ratione virium gravitatis. Hæc est regula quam ad comparandas corporum gravitates tradit Joh. Bernoulli in Actis Erudit. Lips. an. 1713.

D vel d vel E (q) ut longitudo arcus C D vel C d vel C E. Exponatur vis illa per eundem arcum; et cum resistentia sit ut momentum temporis, ideóque detur, exponatur eadem per datam arcus cycloidis partem C O, et sumatur arcus O d in ratione ad arcum C D quam habet arcus O B ad arcum C B: et vis quâ corpus in d urgetur in medio resistente, cum sit excessus vis C d supra resistentiam C O, exponetur per arcum O d, ideóque erit ad vim, quâ corpus D urgetur in medio non resistente in loco D, ut arcus O d ad arcum C D; et propterea etiam in loco B ut arcus



O B ad arcum C B. Proinde si corpora duo, D, d exeant de loco B, et his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus C B et O B; (r) erunt velocitates primæ et arcus primo descripti in eâdem ratione. Sunto arcus illi B D, et B d, arcus reliqui C D, O d erunt in eâdem ratione. Proinde vires, ipsis C D, O d proportionales manebunt in eâdem ratione ac sub initio, et propterea corpora pergent arcus in eâdem ratione simul describere. Igitur vires et velocitates et arcus reliqui C D, O d semper erunt ut arcus toti C B, O B, et propterea arcus illi reliqui (s) simul describentur. Quare corpora duo D, d simul pervenient ad loca C et O, alterum quidem in medio non resistente ad locum C, et alterum in medio resistente ad locum O. Cum autem velocitates in C et O sint ut arcus C B, O B; erunt arcus, quos corpora ulterius pergendo simul describunt, (t) in eâdem ratione. Sunto illi C E et O e. Vis quâ corpus

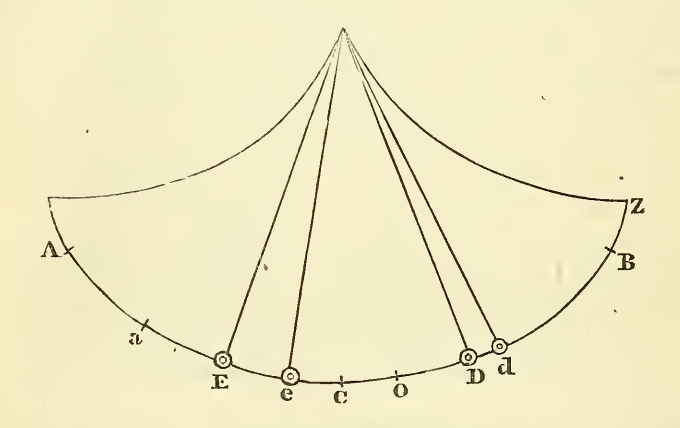
(q) *Ut longitudo arcus*, &c. Per demonstrationem Prop. LI. et Cor. 2. Prop. LII. Lib. I.

(r) * *Erunt velocitates primæ*, &c. Nam, dato temporis momento, velocitates genitæ sunt ut vires (13. Lib. I.) et ut spatia descripta (per Cor. 4. Lem. X. Lib. I.)

(s) * *Simul describentur.* Quia enim est semper C B ad O B, ut C D ad O d; evanescente arcu O d, evanescet etiam arcus C D, seu punctum d cum O, et D cum C simul coincident.

(t) * *In eâdem ratione.* Sunt enim velocitates, ut spatia dato temporis momento descripta, tam in medio resistente quam in medio non resistente (11.)

D in medio non resistente retardatur in E est ut C E, et vis quâ corpus d in medio resistente retardatur in e est ut summa vis C e et resistentiæ C O, id est ut O e; ideóque vires, quibus corpora retardantur, sunt ut arcubus C E, O e proportionales arcus C B, O B; proindeque velocitates, in datâ illâ ratione retardatæ, manent in eâdem illâ datâ ratione. Velocitates igitur et arcus iisdem descripti semper sunt ad invicem in datâ illâ ratione arcuum C B et O B; (u) et propterea si sumantur arcus toti A B, a B in eâdem ratione, corpora D, d simul describent hos arcus,



et in locis A et a motum omnem simul amittent. Isochronæ sunt igitur oscillationes totæ, et arcubus totis B A, B a proportionales sunt arcuum partes quælibet B D, B d vel B E, B e quæ simul describuntur. Q. e. d.

Corol. Igitur motus velocissimus in medio resistente non incidit in punctum infimum C, (x) sed reperitur in puncto illo O, quo arcus totus descriptus a B bisecatur. Et corpus subinde pergendo ad a, iisdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in descensu suo a B ad O.

(u) * *Et propterea.* Si sumatur arcus A C æqualis C B, et deinde arcus a B ad arcum A B in datâ ratione O B ad C B; corpora D et d simul describent hos arcus, et in locis A et a motum omnem simul amittent. Nam cum sit semper arcus C E ad O e ut C B ad O B, seu ut C A ad O a, ubi arcus C E æqualis evadet arcui C A, fiet quoque arcus O e æqualis arcui O a; et quia motus in medio non resistente extinguitur in A, ob C A = C B; in medio resistente extinguetur quoque in a, eo quod velocitates in locis E, e et A, a sint in datâ ratione.

(x) * *Sed reperitur in puncto illo O, quo,* &c. Nam ratio velocitatum in mediis resistente et non resistente est semper eadem in punctis correspondentibus ut in d et D, in O et C, in e et E; sed corporis in medio non resistente oscillantis velocitas maxima est in loco infimo C, et iisdem gradibus retardatur in ascensu, quibus antea accelerabatur in descensu; quare motus velocissimus in medio resistente reperitur in O, et iisdem deinde gradibus retardatur in ascensu, quibus ante accelerabatur in descensu.

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

Corporum funependulorum, quibus resistitur in ratione velocitatum, oscillationes in cycloide sunt isochronæ.

(y) Nam si corpora duo, a centris suspensionum æqualiter distantia oscillando describant arcus inæquales, et velocitates in arcuum partibus correspondentibus sint ad invicem ut arcus toti; resistentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ sint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ resistentiæ, erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa sint ut hæ differentiæ vel summæ, velocitates semper erunt ut arcus toti: igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eâdem ratione. Sed in principio motus, ut corpora incipiunt descendere et arcus illos describere, vires, cum sint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates semper erunt ut arcus toti describendi, et propterea arcus illi simul describentur. Q. e. d.

(y) * *Nam si corpora duo,* exempli causâ B et D, *a centro suspensionis æqualiter distantia, oscillando describant arcus inæquales* B a, D e, *et velocitates in arcuum partibus correspondentibus*, seu in arcuum B a, D e quadrantibus, partibus tertiis, &c., *sint ad invicem ut arcus toti* B a, D e: *resistentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus a gravitate oriundis* (secundum tangentes cycloidis agentibus) *quæ sint ut iidem arcus* B a, D e, *auferantur* dum corpus descendit, *vel addantur* dum corpus ascendit, *hæ resistentiæ; erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa,* dato temporis momento genita, *sint ut hæ differentiæ vel summæ* (18), *velocitates semper erunt ut arcus toti* B a, D e: *igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eâdem ratione. Sed in principio motûs, ubi corpora incipiunt* e locis B, D *descendere et arcus illos* B a, D e *describere,* ideóque ubi resistentia nulla est, *vires sunt arcubus illi proportionales.* Vires igitur, et velocitates, et arcus descripti, ac proinde et arcus describendi, manent semper in datâ ratione. Quare corpora duo simul perveniunt ad punctum infimum C; et eodem modo probatur quod arcus C a, C e simul describant.

Scholium. Newtonus in duabus Propositionibus præcedentibus ostendit cycloidem esse curvam isochronam, (quam alii tautochronam appellant,) non tantùm in medio non resistente, sed etiam in medio quod in ratione momentorum temporis, et in medio quod ratione simplici velocitatis resistit; verum quænam sit curva illa tautochrona in hypothesi resistentiæ velocitatum quadrato proportionalis non indicat. Elegantissimas hujusce Problematis solutiones dedere celeberrimi mathematici Eulerus Tom. IV. Acad. Petrop. et Tom. II. Mechanicæ, necnon claris. Bernoullius in Monumentis Acad. Reg. Scientiarum Paris. an. 1730. Novam viam quâ curvæ tautochronæ in medio quolibet resistente possint inveniri aperuit D. Fontaine in iisdem Monumentis anni 1734.

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si corporibus funependulis resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales quam proximè.

(z) Nam pendulis æqualibus in medio resistente describantur arcus inæquales A, B; et resistentia corporis in arcu A, erit ad resistentiam

(z) * *Nam pendulis æqualibus in medio resistente describantur arcus inæquales A et B,* * ad pleniorem hujus demonstrationis evidentiam, fingatur illos arcus in totidem partes quam minimas inter se æquales dividi, singulæ in utroque arcu erunt totis arcubus proportionales dicanturque a et b, si medium aut non resisteret aut resisteret in ratione velocitatum, velocitates initio particularum quarumvis correspondentium a et b, forent ut arcus ipsi A et B; at in medio resistente in ratione duplicatâ velocitatis paulo diversa erit hæc velocitatum ratio, sed propter exiguam rationem resistentiæ ad velocitatem, negligi poterit hæc differentia, et supponi potest velocitates manere in ratione arcuum quam proximè; quod si ita supponatur *resistentia corporis in quovis puncto arcus A erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus B,* sicut quadrata velocitatum in punctis illis correspondentibus eorum arcuum, id est ut *quadrata ipsorum arcuum A A et B B quam proximè.* Designetur vero velocitas initio arcus a per v A, et initio arcus b per v B. Designetur porro resistentia initio arcus a per m A A, et resistentia initio arcus b per m B B; in medio non resistente tempuscula quibus singulæ particulæ a et b describentur erunt æqualia, (per Prop. II. Lib. I.) designentur verò per T; cum ergo in medio resistente propter velocitatem imminutam longius fiat tempus in inversâ ratione velocitatum ut x excessus ille tempusculi quo arcus a describitur in medio resistente supra tempusculum quo idem arcus in medio non resistente percurritur habebiturque ex hypothesibus v A — m A A : v A = T : T + x.

Ut inveniatur ratio hujus excessus x ad excessum tempusculi quo arcus describitur in medio resistente secundum legem duplicatam velocitatis, supra tempusculum T, quo idem arcus in medio non resistente percurritur; supponatur arcum B in tali medio describi ut resistentia in punctis a arcûs A, sit ad resistentiam in punctis correspondentibus b arcûs B, sicut A est ad B, ideóque sicut velocitates initio arcuum illorum, sive cum resistentia in a sit m A A resistentia in b fingatur esse m A B, cùm ergo resistentiæ sint in ipsâ ratione velocitatum, velocitates demptis resistentiis manebunt in eâdem ratione, in ratione nempe arcuum describendorum a et b, qui ergo æqualibus temporibus describentur, sed tempus quo describitur arculus a est T + x ergo si resistentia in arcu B, sive b sit m A B ideóque velocitas sit v B — m A B tempus quo describetur arcus b erit etiam T + x.

Cum autem reverâ resistentia initio arcus b non sit m A B sed m B B, si y sit excessus tempusculi in quo b describitur in medio resistente juxta quadrata velocitatum supra tempus quo idem arcus in medio non resistente percurritur, erit tempus T + x ad tempus T + y reciproce sicut velocitas v B — m A B quæ supponebatur, ad velocitatem v B — m B B, eritque ideò v B — m B B ad v B — m A B = T + x, ad T + y, cum ergo subtractio quantitatum m B B, m A B ex velocitate v B producat excessus x et y supra tempus T, oportet ut illæ quantitates m B B, m A B, sint reciprocè ut x et y, sed m A B et m B B sunt ut A ad B, ergo A est ad B, sicut x est ad y, ideóque excessus x temporis arcus A in medio resistente in duplicatâ ratione velocitatis supra tempus in eodem arcu A in medio non resistente, est ad excessum y temporis arcus B in eodem medio supra tempus in eodem arcu B in medio non resistente, ut arcus A ad arcum B, cumque idem ratiocinium in omnibus arcubus quamminimis a et b instituti possit, summæ omnium excessuum tempusculorum in arcu A, erit ad summam omnium excessuum tempusculorum in arcu B ut A ad B. Q. e. d.

* Quod excessus x et y tempusculorum quibus describuntur arcus a et b, in medio resistente juxta rationem duplicatam velocitatum, supra tempus quo describerentur in medio non resistente sint ut A et B, ex superiori demonstratione alio modo erui potest. Nam manentibus quæ illic posueramus est.

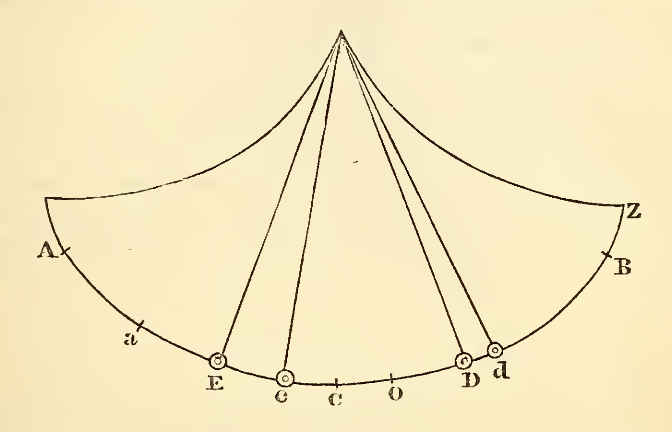
v A — m A A : v A = T : T + x est etiam simili ratione v B — m B B : v B = T : T + y et dividendo in utraque proportione fit

v A — m A A : m A A = T : x
v B — m B B : m B B = T : y.

Sed ob exiguitatem resistentiæ velocitatis respectu assumi potest v A — m A A pro v A, et v B — m B B pro v B, unde est quam proximè

v A : m A A = T : x
v B : m B B = T : y et reducendo pri

corporis in parte correspondente arcus B, in duplicatâ ratione velocitatum, id est, ut A A ad B B, quam proximè. Si resistentia in arcu B esset ad resistentiam in arcu A ut A B ad A A, tempora in arcubus A et B forent æqualia, per Propositionem superiorem. Ideóque resistentia A A in arcu A, vel A B in arcu B, efficit excessum temporis in arcu A supra



tempus in medio non resistente; et resistentia B B efficit excessum temporis in arcu B supra tempus in medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes A B et B B quam proximè, id est, ut arcus A et B. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in medio resistente, in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente. Nam differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente, ut (b) differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. (c) Oscillationes breviores sunt magis isochronæ, et brevis-

ores rationes utriusque proportionis ad minores terminos.

v : m A = T : x
v : m B = T : y et vicissim
v : T = m A : x
v : T = m B : y, unde est
m A : x = m B : y, ideò vicissim
m A : m B = x : y, sed m A : m B = A : B, ideóque A : B = x : y. Ideóque excessus temporum in medio resistente in duplicatâ ratione velocitatum, supra tempora in medio non resistente in arcubus inæqualibus sunt ut illi arcus.

(b) * *Differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente ut differentia arcuum ad arcum minorem* †.

* Tempus per arcum A est T + x, tempus per arcum minorem B, est T + y, ergo differentia temporum T + x — T — y = x — y, et excessus temporis in minore arcu supra tempus in medio non resistente est y juxta denominationes notæ superioris, sed ex Theoremate est x : y = A : B ergo dividendo x — y : y = A — B : B, hoc est *differentia temporum est ad excessum,* &c.

(c) * *Oscillationes breviores sunt magis isochronæ et brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente quam proximè.* * Brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente quàm proximè; sit A arcus major, B minimus, inventum est (in nota a) quod erat v A — m A A : v A = T : T + x, et etiam quod erat v B — m B B : v B — m A B

simæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente, quàm proximè. Earum verò quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulò majora, (d) propterea quòd resistentia in descensu corporis quâ tempus producitur, (e) major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quàm resistentia in ascensu subsequente quâ tempus contrahitur. Sed et tempus oscillationum tam brevium quàm longarum nonnihil produci videtur per motum medii. (f) Nam corporibus tardescentibus paulò minus resistitur, pro ratione velocitatis, et corporibus acceleratis paulò magis quàm iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quàm pro ratione velocitatis, et ex utrâque causâ tempus producitur.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

Si corpori funependulo in cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcûs descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Designet B C arcum descensu descriptum, C a arcum ascensu descriptum; et A a differentiam arcuum: et stantibus quæ in Propositione XXV.

$= T + x : T + y$, unde per compositionem rationum invenitur $v^2 AB - mvAAB - mvABB + m^2AABB$ (sive $\overline{v^2AB - mvA^2B} \times \overline{1 - \frac{mB}{v}}$) ad $v^2AB - mvA^2B = T : T + y$, itaque in primo termino neglecto $-\frac{mB}{v}$ (quod infinitè parvum supponitur ob exiguitatem arcus B ut et quantitatis m respectu v) fiet $v^2AB - mvAAB : v^2AB - mvAAB = T : T + y$; est ergo $T = T + y$, sive tempus in medio non resistente idem ac in medio resistente quàm proximè.

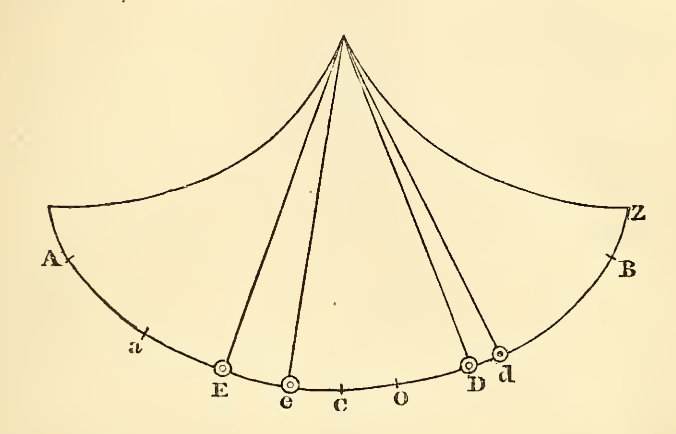
Sed oscillationes in medio non resistente sunt isochronæ, hinc ergo oscillationes breviores in medio resistente ad has quàm proxime accedentes cæteris sunt magis isochronæ. Q. e. d.

(d) * *Propterea quod resistentia in descensu*, &c. Quo major est resistentia, eò minor fit, cæteris paribus, corporis descendentis velocitas, et ideò, manente descensûs longitudine, tempus per resistentiam producitur; et contra, quò major est resistentia, eò citius extinguitur velocitas corpori insita in ascensu.

(e) * *Major sit pro ratione longitudinis.* Longitudo in descensu descripta semper major est quàm longitudo descripta in ascensu subsequente, si medium resistit; cùm longitudines illæ in medio non resistente sint æquales (92. Lib. I.).

(f) * *Nam corporibus tardescentibus*, seu quorum velocitas continuo decrescit, ut fit in corporum ascensu, paulo minus resistitur, pro ratione velocitatis; et corporibus acceleratis, seu descendentibus, paulò magis resistitur quàm iis quæ uniformiter progrediuntur. In priore enim casu, medium eo quem a corporibus accepit motu, quemque aliquandiu ob inertiam materiæ conservat, in eamdem plagam pergit cum corporibus, et ob validiorem ab initio motûs continue decrescentis acceptam impressionem magis agitatur, ac proinde magis conspirat cum corporibus motis, minoremque iis resistentiam objicit. At in secundo casu cùm motus perpetuo acceleretur, medium ex prioribus ictibus non satis velocem motum accepit, et ideò ejus celeritas novis impulsibus continuo augenda est ut possit cum corporibus motis conspirare; hincque corporibus acceleratis resistit magis quàm uniformiter progredientibus. Pendulis igitur in descensu magis

constructa et demonstrata sunt, erit vis, quâ corpus oscillans urgetur in loco quovis D, ad vim resistentiæ ut arcus C D ad arcum C O, (g) qui semissis est differentiæ illius A a. Ideóque vis, quâ corpus oscillans



urgetur in cycloidis principio seu puncto altissimo, (h) id est, vis gravitatis, erit ad resistentiam ut arcus cycloidis inter punctum illud supremum et punctum infimum C ad arcum C O; id est (si arcus duplicentur) ut cycloidis totius arcus, (i) seu dupla penduli longitudo, ad arcum A a. Q. e. d.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Posito quod corpori in cycloide oscillanti resistitur in duplicatâ ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

Sit B a arcus oscillatione integrâ descriptus, sitque C infimum cycloidis punctum, et C Z semissis arcus cycloidis totius, longitudini penduli æqualis; et quæratur resistentia corporis in loco quovis D. Secetur

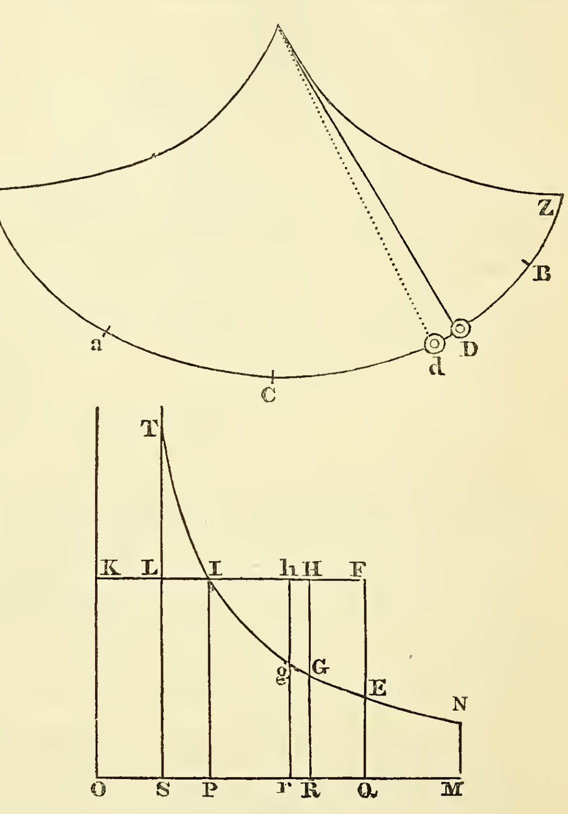
resistit medium, in ascensu minus quàm pro ratione velocitatis, et ex utrâque causâ tempus producitur. Nam quò major est resistentia in descensu, et minor in ascensu, eo magis producitur tempus, ut supra dictum est.

(g) * *Qui semissis est differentiæ illius A a.* Nam (per Hyp.) arcus C A æqualis est arcui C B, et (per Cor. Prop. XXV.) arcus O a æqualis est arcui O B; quare C A — O a, seu A a — C O = C B — O B = C O, et hinc A a = 2 C O, ac C O = $\frac{1}{2}$ A a.

(h) * *Id est, vis gravitatis.* In cycloidis principio sive puncto altissimo tangens cycloidis est in directione gravitatis, et idcirco vis in cycloide æqualis est vi gravitatis in illo puncto, ut patet ex Cor. Prop. LI. Lib. I.

(i) * *Seu dupla penduli longitudo* (462. Lib. I.).

recta infinita O Q in punctis O, S, P, Q, eâ lege, ut (si erigantur perpendicula O K, S T, P I, Q E, centroque O et asymptotis O K, O Q describatur hyperbola T I G E secans perpendicula S T, P I, Q E in T, I et E, et per punctum I agatur K F parallela asymptoto O Q occurrens asymptoto O K in K, et perpendiculis S T et Q E in L et F) fuerit area hyperbolica P I E Q ad aream hyperbolicam P I T S ut arcus B C descensu corporis descriptus ad arcum C a ascensu descriptum, et area I E F ad aream I L T ut O Q ad O S. Dein perpendiculo M N abscindatur area hyperbolica P I N M quæ sit ad aream hyperbolicam P I E Q ut arcus C Z ad arcum B C descensu descriptum. Et si perpendiculo R G abscindatur area hyperbolica P I G R, quæ sit ad aream P I E Q ut arcus quilibet C D ad arcum B C descensu toto descriptum; erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ} \times$ I E F — I G H ad aream P I N M.



Nam cùm vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis Z, B, D, a urgetur, (k) sint ut arcus C Z, C B, C D, C a, (l) et arcus illi sint ut areæ P I N M, P I E Q, P I G R, P I T S; exponantur tum arcus tum vires per has areas respectivè. Sit insuper D d spatium quàm minimum a corpore descendente descriptum, et exponatur idem per aream quam

(k) * *Sint ut arcus,* &c. per demonstrata in Prop. LI. et Cor. 2. Prop. LII. Lib. I.

(l) * *Et arcus illi sint ut areæ,* per constructionem.

minimam R G g r parallelis R G, r g comprehensam; et producatur r g ad h, ut sint G H h g, et R G g r, contemporanea (m) arearum I G H, P I G R decrementa. (n) Et areæ $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H incrementum G H h g — $\frac{Rr}{OQ}$ I E F, seu R r × H G — $\frac{Rr}{OQ}$ I E F, erit ad areæ P I G R decrementum R G g r, seu R r × R G, ut H G — $\frac{IEF}{OQ}$ ad R G; ideóque ut O R × H G — $\frac{OR}{OQ}$ I E F ad O R × G R (o) seu O P × P I, hoc est (p) (ob æqualia O R × H G, O R × H R — O R × G R, O R H K — O P I K, P I H R et P I G R + I G H) ut P I G R + I G H — $\frac{OR}{OQ}$ I E F ad O P I K. Igitur si area $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H dicatur Y, atque areæ P I G R decrementum R G g r detur, (q) erit incrementum areæ Y ut P I G R — Y.

Quod si V designet vim a gravitate oriundam, arcui describendo C D proportionalem, quâ corpus urgetur in D, et R pro resistentia ponatur; erit V — R vis tota quâ corpus urgetur in D. (r) Est itaque incrementum velocitatis ut V — R et particula illa temporis in quâ factum est conjunctim: (s) sed et velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directè et particula eadem temporis inversè. Unde, cùm resistentia per hypothesin sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ (t) (per Lem. II.) erit ut velocitas et incrementum velocitatis conjunctim, (u) id est, ut momentum spatii et V — R conjunctim; atque

(m) * *Arearum I G H, P I G R decrementa.* Cum enim corpus e loco D descendit in arcu D C, decrescit area P I G R huic arcui proportionalis, et cum eâ decrescit quoque area I G H.

(n) * *Et areæ*, &c. Nam, ob datas O Q, et I E F, decrementum areæ $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H, sumptis duorum terminorum fluxionibus, invenitur æquale $\frac{Rr}{OQ}$ I E F — G H h g; et ideò, mutatis signis, ejusdem areæ incrementum est G H h g — $\frac{Rr}{OQ}$ I E F, seu, &c.

(o) * *Seu O P × P I.* Per Theor. IV. de hyperbolâ.

(p) * *Ob æqualia*, &c. Cùm sit H G = H R — G R, erit O R × H G = O R × H R — O R × G R; sed O R × H R æquale est rectangulo O R H K, et (per Theor. IV. de Hyp.) O R × G R æquale est rectangulo O P I K. Quare O R × H G = O R H K — O P I K = P I H R = P I G R + I G H.

(q) * *Erit incrementum areæ Y ut P I G R — Y.* Quoniam enim (Hyp.) est $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H = Y, et (ex demonstratis) incrementum areæ $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H est ad decrementum (ex Hyp.) datum R G g r, ut P I G R + I G H — $\frac{OR}{OQ}$ I E F, seu P I G R — Y, ad datum rectangulum O P I K; manifestum est quod incrementum areæ Y sit ad P I G R — Y in datâ ratione, nimirum in ratione decrementi dati R G g r ad rectangulum datum O P I K.

(r) * *Est itaque incrementum velocitatis, ut*, &c. (18.).

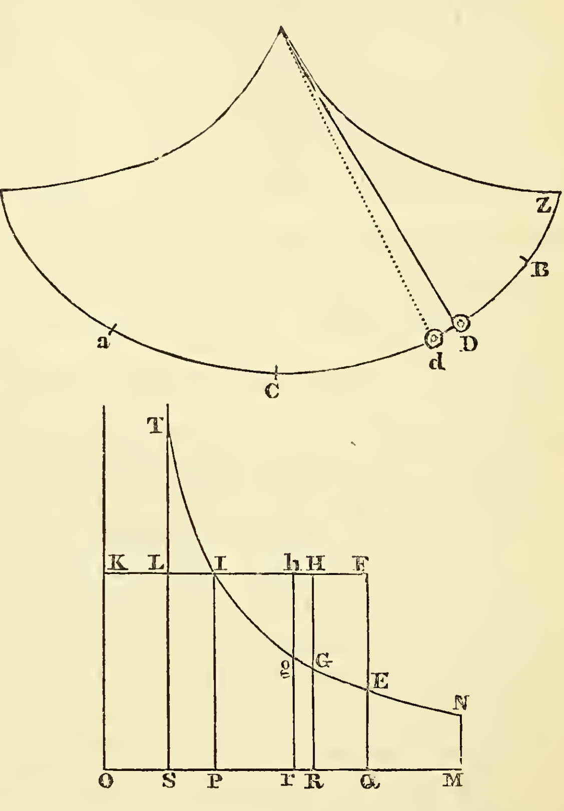
(s) * *Sed et velocitas ipsa est*, &c. (11.)

(t) * *Per Lem. II.* Casu 3. idque statim apparet: nam si velocitas dicatur v, cum sit R ut v v, erit d R ut 2 v d v, seu ut v d v.

(u) * *Id est, ut momentum spatii*, &c. Quia

ideò, si momentum spatii detur, ut V — R; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens P I G R, et resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut P I G R — Z.

Igitur areâ PIGR per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione P I G R — Y, et area Z ratione P I G R — Z. Et propterea si areæ Y et Z simul incipiant et sub initio æquales sint, (x) hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, et æqualibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt et simul evanescunt, æqualia habebunt momenta et semper erunt æquales: id ideò quia si resistentia Z augeatur, velocitas unà cum arcu illo C a, qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; et puncto in quo motus omnis unà cum resistentiâ cessat propius accedente ad punctum C, (y) resistentia citius evanescet quàm area Y. Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur.



(ex dem.) velocitatis incrementum est ut V — R et momentum temporis conjunctim, velocitas autem ipsa ut incrementum spatii directe et momentum temporis inversè; erit ex æquo, velocitas in suum incrementum ducta, ut V — R et incrementum spatii conjunctim, in quâ ratione est etiam incrementum resistentiæ (ex dem.).

(x) * *Hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales*, &c. Cùm enim semper crescat area Y in ratione P I G R — Y, et area Z in ratione P I G R — Z; si areæ illæ Y et Z simul incipiant et initio æquales sint, erunt etiam areæ P I G R — Y et P I G R — Z sub initio æquales; et, ob datam incrementorum areæ Y et areæ Z ad P I G R — Y et P I G R — Z rationem, incrementa illa sicut et P I G R — Y ac P I G R — Z manebunt semper æqualia, uti sub initio. Quare etiam areæ Y et Z æqualibus itidem momentis subinde decrescent et simul evanescent.

(y) * *Resistentia citius evanescet quam area Y, et contrarium*, &c. Nam si area Z semper æqua-

Jam verò area Z incipit desinitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio motûs ubi arcus C D arcui C B æquatur et recta R G incidit in rectam Q E, et in fine motus ubi arcus C D arcui C a æquatur et R G ([z]) incidit in rectam S T. Et area Y seu $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H incipit desinitque ubi nulla est, ideóque ubi $\frac{OR}{OQ}$ I E F et I G H æqualia sunt: ([a]) hoc est (per constructionem) ubi recta R G incidit successivè in rectas Q E et S T. Proindeque areæ illæ simul incipiunt et simul evanescunt, et propterea semper sunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H æqualis est areæ Z, per quam resistentia exponitur, et propterea est ad aream P I N M per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. Q. e. d.

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo C ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}$ I E F ([b]) ad aream P I N M.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area P I H R est ad aream I E F ut O R ad O Q. Eo enim in casu momentum ejus (nimirum P I G R — Y) ([c]) evadit nullum.

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe

lis sit areæ Y, simul incipient simulque evanescent. Incipit autem area Y (ut infra ostendetur) ubi recta R G incidit in rectam Q E, et desinit ubi recta R G incidit in rectam S T, suntque Q et S puncta fixa per arcuum C B, C a longitudines determinata (per constr.). Quare si resistentia Z augeatur vel minuatur ita ut cesset in puncto arcûs C a infra vel supra a positum, citius vel tardius evanescet area Z quàm area Y, quia hæc non desinit nisi ubi corpus pervenit ad locum a. Resistentia igitur, seu area Z nec major nec minor esse potest quàm area Y, si simul incipiant et simul evanescant.

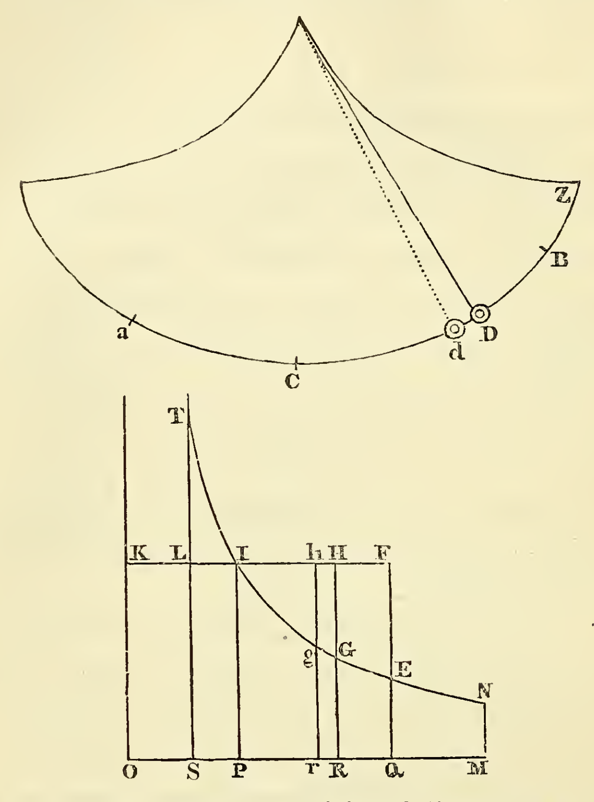
([z]) * *Incidit in rectam S T.* Hæc patent per constructionem, quâ areæ P I E Q, P I G R, P I T S factæ sunt arcubus C B, C D, C a proportionales.

([a]) * *Hoc est (per constructionem) ubi,* &c. Ubi enim Y evanescit, fit quoque $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H = o, et ideò $\frac{OR}{OQ}$ I E F = I G H; hoc autem contingit ubi fit I E F : I G H = O Q : O R, quod evenit primo ubi recta R G incidit in rectam Q E et incipit area Y. Tunc enim I E F = I G H et O Q = O R ideóque I E F : I G H = O Q : O R. Est enim $\frac{OR}{OQ}$ I E F = I G H, quando fit O R = O S et I G H = I L T: nam cùm (per constr.) sit area I E F ad aream I L T ut O Q ad O S, si ponatur O R = O S, fiet I L T = I G H, eritque area I E F ad aream I G H ut O Q ad O R, et hinc $\frac{OR}{OQ}$ I E F = I G H. Est autem O R = O S, ubi recta R G incidit in rectam S T, et area Y desinit ibidem.

([b]) * *Ad aream P I N M.* Nam evanescente arcu C D, evanescit ipsi proportionalis area P I G R, et hinc evanescit etiam area I G H, fitque O R = O P, atque proinde $\frac{OR}{OQ}$ I E F = I G H = $\frac{OP}{OQ}$ I E F.

([c]) * *Evadit nullum.* Momentum areæ Y est ut P I G R — Y (ex dem.), id est, ut P I G R + I G H — $\frac{OR}{OQ}$ I E F = P I H R — $\frac{OR}{OQ}$ I E F. Quâ propter momentum areæ Y nullum fit; et ideò resistentia (cui area Y proportionalis est) maxima evadit (48), ubi est P I H R — $\frac{OR}{OQ}$ I E F = o, seu ubi P I H R = $\frac{OR}{OQ}$ I E F, ac proinde ubi area P I H R est ad aream I E F ut O R ad O Q.

quæ est in subduplicatâ ratione resistentiæ, et ipso motûs initio æquatur velocitati corporis in eâdem cycloide (d) sine omni resistentiâ oscillantis.



(d) * *Sine omni resistentiâ oscillantis.* Quoniam velocitatis quadratum in loco quovis D est ut resistentia, seu ut area Y in medio resistente; et ut $CB^2 - CD^2$ (per Prop. LII. Lib. I.) seu ut $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2$ in medio non resistente; si velocitates illæ dicantur v, V, sintque C et E quantitates constantes, erit $vv = C \times Y$, et $VV = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$. Et quia initio motûs, dum corpus est in B, velocitates illæ æquales sunt, ob resistentiam respectu vis a gravitate oriundæ evanescentem; erit initio motûs $C \times Y = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$; sed initio motûs est Y, seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH = \frac{OR}{OQ} IEF - IEF + QR \times FE = \frac{OR \times IEF - OQ \times IEF + OQ \times QR \times FE}{OQ} = \frac{QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF}$, coincidente nimirum GH cum EF, et QR seu HF evanescente. Et similiter initio motus est $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2 = \overline{PIEQ + PIGR} \times \overline{PIEQ - PIGR} = \overline{2PIEQ - QR \times QE} \times \overline{QR \times QE} = 2PIEQ \times QR \times QE$, neglecto termino evanescente $QR^2 \times QE^2$. Quare erit initio motus $\frac{C \times QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF} = E \times QR \times QE \times 2PIEQ$, et ideò $C : E = 2PIEQ \times QE : \frac{OQ \times FE - IEF}{OQ}$; unde, cum sit semper $vv : VV = C \times Y : E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$, erit quoque $vv : VV = 2PIEQ \times QE \times \left(\frac{OR}{OQ} IEF - IGH\right) : \frac{OQ \times FE - IEF}{OQ} \times \overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2$. Innotescet igitur velocitas in medio resistente per inventam ipsius rationem ad velocitatem in medio non resistente in singulis locis.

([e]) Cæterùm ob difficilem calculum quo resistentia et velocitas per hanc Propositionem inveniendæ sunt, visum est Propositionem sequentem subjungere.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta a B *æqualis sit cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, et ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* D K, *quæ sint ad longitudinem penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum et arcum ascensu toto subsequente descriptum ducta in arcuum eorundem semisummam, æqualis erit areæ* B K a *a perpendiculis omnibus* D K *occupatæ.*

Exponatur enim tum cycloidis arcus, oscillatione integrâ descriptus, per rectam illam sibi æqualem a B, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem A B. Bisecetur A B in C, ([f]) et punctum C repræsentabit

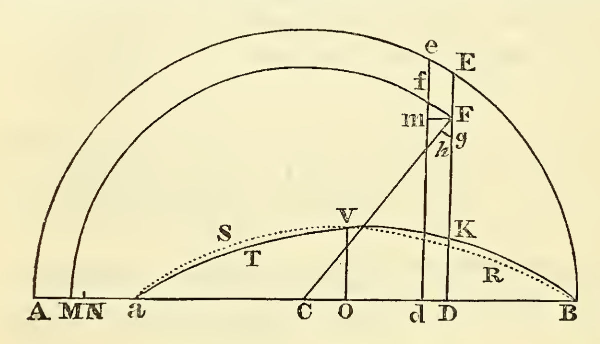
([e]) * *Cæterùm ob difficilem calculum,* &c. Sit O P = a, P I = F Q = b, O S = x, et ideò S T = $\frac{ba}{x}$, S P = L I = a — x, et L T = $\frac{ba}{x} - b$. Deinde O Q = z, et hinc Q E = $\frac{ba}{z}$, P Q = F I = z — a, et F E = $b - \frac{ba}{z}$. Et erit areæ P I E Q elementum = $\frac{badz}{z}$, areæ P I T S elementum = $-\frac{badx}{x}$; et inde area P I E Q = b a L. z + Q const.; et quia area illa evanescit ubi est P Q = z — a = o, seu ubi z = a, invenitur constans Q = — b a L. a, atque adeò area P I E Q = b a L. z — b a L. a = b a L. $\frac{z}{a}$. Simili modo reperitur area P I T S = b a L. $\frac{a}{x}$. Sit jam arcus B C ad arcum C a, ut m ad 1; et erit (per constr.) m : 1 = b a L. $\frac{z}{a}$: b a L. $\frac{a}{x}$ = L. $\frac{z}{a}$: L. $\frac{a}{x}$, ac proinde L. $\frac{z}{a}$ = m L. $\frac{a}{x}$ = L. $\frac{a^m}{x^m}$, atque $\frac{z}{a} = \frac{a^m}{x^m}$, et $z = \frac{a^{m+1}}{x^m}$.

Porro ex superioribus denominationibus invenitur areæ I E F elementum = $bdz - \frac{badz}{z}$, et inde area ipsa I E F = b z — b a L. z + Q const. quæ cùm sit o ubi F I = z — a evanescit fitque z = a, est Q = — b a + b a L. a, ideóque I E F = b a L. $\frac{a}{z}$ + b z — b a; et similiter habetur area I L T = b a L. $\frac{a}{x}$ + b x — b a. Sed (per constr.) area I E F est ad aream I L T ut O Q ad O S, seu ut z ad x: quare z : x = b a L. $\frac{a}{z}$ + b z — b a : b a L $\frac{a}{x}$ + b x — b a, et dividendo per b, ac loco z scribendo ipsius valorem $\frac{a^{m+1}}{x^m}$, fit $a^{m+1} : x^{m+1} = a\,L.\frac{x^m}{a^m} + \frac{a^{m+1}}{x^m} - a : a\,L.\frac{a}{x} + x - a$; unde habetur $a^{m+2}\,L.\frac{a}{x} + a^{m+1}x - a^{m+2} = a x^{m+1}\,L.\frac{x^m}{a^m} + a^{m+1}x - a x^{m+1}$; et inde eruitur $m x^{m+1} L x - m x^{m+1} L a + a^{m+1} L x - x^{m+1} = a^{m+1} L. a - a^{m+1}$. Si itaque ex hâc æquatione per serierum regressum, vel quâcumque alia methodo, determinetur valor x per arbitrariam lineam a, et deinde per æquationem $z = \frac{a^{m+1}}{x^m}$ inveniatur valor ipsius z; Newtoniana constructio ad calculum logarithmorum revocabitur.

Scholion. Hermannus Prop. LXXIII. et LXXIV. Lib. II. Phoronomiæ geminam constructionem dedit, quâ corporis in curvâ qualibet oscillantis resistentia velocitatis quadrato proportionalis definitur, et Newtonianam pro cycloide constructionem ope logarithmicæ simpliciorem reddidit. Difficile autem non est (44) hanc Newtoni constructionem revocare ad logarithmicam per punctum N et asymptoto K O ad partes O productâ describendam.

([f]) * *Et punctum C repræsentabit infimum cycloidis punctum.* Nam cycloidis punctum in-

infimum cycloidis punctum, (g) et erit C D ut vis a gravitate oriunda, quâ corpus in D secundum tangentem cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem penduli (h) quam habet vis in D ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem C D, et vis gravitatis per longitudinem penduli, et si in D E capiatur D K in eâ ratione ad longitudinem penduli quam habet resistentia ad gravitatem, erit D K exponens resistentiæ. Centro C et intervallo C A vel C B construatur semi-circulus B E e A. Describat autem corpus tempore quàm minimo spatium D d, et erectis perpendiculis D E, d e circumferentiæ occurrentibus in E et e,



erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, descendendo a puncto B, acquireret in locis D et d. Patet hoc (per Prop. LII. Lib. I.). Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa D E, d e; sitque D F velocitas quam acquirit in D cadendo de B in medio resistente. Et si centro C et intervallo C F describatur circulus F f M occurrens rectis d e et A B in f et M, (i) erit M locus ad quem deinceps sine ulteriore resistentiâ ascenderet, et d f velocitas quam acquireret in d. Unde etiam si F g designet velocitatis momentum quod corpus D describendo spatium quam minimum D d, ex resistentiâ medii amittit; et sumatur C N æqualis C g: erit N locus ad quem corpus deinceps sine ulteriore resistentiâ ascenderet, et M N erit decrementum ascensûs ex velocitatis illius amissione oriundum. Ad d f demittatur perpendiculum F m, et velocitatis D F decrementum F g a resistentiâ D K genitum, erit ad velocitatis ejusdem incrementum f m a vi C D genitum, ut vis generans D K (k) ad

fimum arcum quem corpus in medio non resistente oscillando describit in duas partes æquales dividit.

(g) * *Et erit C D ut vis a gravitate oriunda,* &c. patet per demonstr. Prop. LI. Lib. I.

(h) * *Quam habet vis in D ad vim gravitatis,* per Cor. 1. Prop. LI. et not. 462. Lib. I.

(i) * *Erit M locus ad quem,* &c. Eamdem enim velocitatem haberet corpus in D, ac si seclusâ omni resistentiâ percurrisset spatium C F — C D, et ideò (per modo demonstrata) in loco d haberet velocitatem d f, et in loco M nullam.

(k) * *Ad vim generantem C D.* Sunt enim velocitatum elementa dato temporis momento genita, ut vires generantes (13. Lib. I.).

vim generantem C D. Sed et (l) ob similia triangula F m f, F g h, F D C, est f m ad F m seu D d ut C D ad D F: et ex æquo F g ad D d ut D K ad D F. Item F h ad F g ut D F ad C F; et ex æquo perturbatè (m) F h seu M N ad D d ut D K ad C F seu C M; (n) ideóque summa omnium M N × C M æqualis erit summæ omnium D d × D K. Ad punctum mobile M erigi semper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ C M, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem A a; et trapezium ex illo motu descriptum sive huic æquale rectangulum A a × $\frac{1}{2}$ a B (o) æquabitur summæ omnium M N × C M, ideóque summæ omnium D d × D K, id est, areæ B K V T a. Q. e. d.

Corol. Hinc ex lege resistentiæ et arcuum C a, C B differentia A a colligi potest proportio resistentiæ ad gravitatem quam proximè.

Nam si uniformis sit resistentia D K, figura B K T a rectangulum erit sub B a et D K; et inde rectangulum sub $\frac{1}{2}$ B a et A a erit æquale rectangulo sub B a et D K, et D K æqualis erit $\frac{1}{2}$ A a. Quare cùm D K sit exponens resistentiæ, et longitudo penduli exponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}$ A a ad longitudinem penduli; omninò ut in Prop. XXVIII. demonstratum est.

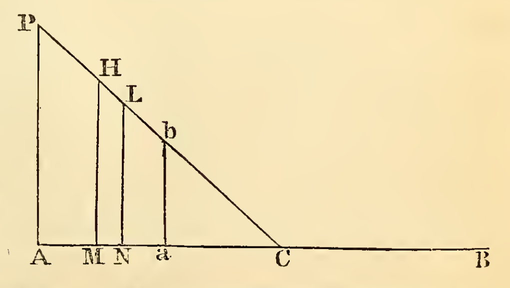
Si resistentia sit ut velocitas, figura B K T a ellipsis erit quàm proximè. Nam si corpus, in medio non resistente, oscillatione integrâ describeret longitudinem B A, velocitas in loco quovis D foret ut circuli diametro A B descripti ordinatim applicata D E. Proinde cùm B a in medio re-

(l) * *Ob similia triangula,* &c. Sunt enim anguli ad m, h, et D recti, angulus C F D duobus triangulis F D C, F h g communis, et angulus f F m æqualis angulo C F D, quia si ex angulis rectis m F D, f F C subducatur communis angulus m F C, remanebunt anguli æquales f F m, C F D. Tria igitur triangula F m f, F h g et F D C æquales angulos habent, suntque proinde similia.

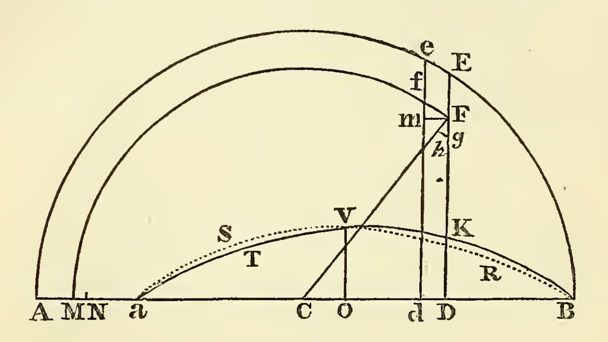
(m) * *F h seu M N.* Cùm sit C M æqualis C F, et C N æqualis C g seu C h, angulo h C g evanescente, est M N = C M — C N = C F — C h = F h.

(n) * *Ideóque summa omnium M N × C M,* &c. Quoniam (per modo demonstrata) M N × C M = D d × D K, erit summa omnium M N × C M æqualis summæ omnium D d × D K, modò simul incipiant simulque desinant. Incipit autem summa omnium D d × D K in B et desinit in a, et summa omnium M N × C M incipit in A, et ideò si desinat in a, erunt summæ illæ æquales.

(o) * *Æquabitur summæ,* &c. Erigatur ad punctum A perpendiculum A P = A C, jungatur P C, et ductis per M et N ac a perpendiculis M H, N L, a b; erit semper M N × C M = M N × H M; ideóque si ordinata variabilis H M ducatur in totam longitudinem A a, erit trapezium A P b a æquale summæ omnium M N × C M ab A ad a; sed trapezium illud est C A P — C a b = $\frac{1}{2}$ C A^2 — $\frac{1}{2}$ C a^2 = $\frac{1}{2}$ (C A + C a) × (C A — C a) = $\frac{1}{2}$ a B × A a, ob C B = C A. Ergo, &c.

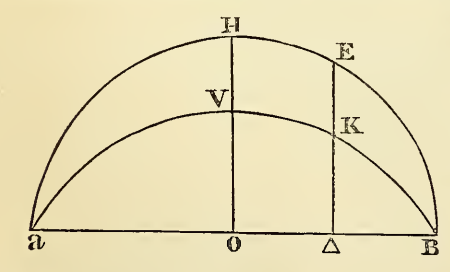


sistente, et B A in medio non resistente, (p) æqualibus circiter temporibus describantur; ideóque velocitates in singulis ipsius B a punctis, sint quam proximè ad velocitates in punctis correspondentibus longitudinis B A, ut est B a ad B A; erit velocitas in puncto D in medio resistente ut circuli vel ellipseos super diametro B a descripti ordinatim applicata;



(q) ideóque figura B K V T a ellipsis erit quàm proximè. Cùm resistentia velocitati proportionalis supponatur, sit O V exponens resistentiæ in puncto medio O; et ellipsis B R V S a, centro O, semi-axibus O B, O V descripta, figuram B K V T a, eique æquale rectangulum A a × B O, æquabit quamproximè. Est igitur A a × B O ad O V × B O (r) ut area semi-ellipseos hujus ad O V × B O: id est, A a ad O V (s) ut area semi-

(p) * 180. *Æqualibus circiter temporibus describantur.* Quia resistentia minuendo corporis velocitatem tempus producit in descensu a B ad C, illudque contrahit in ascensu a C ad a, longitudines B A in medio non resistente et B a in medio resistente, earumque longitudinum partes proportionales, æqualibus circiter temporibus describuntur. Sunt autem velocitates ut spatia eodem temporis momento descripta (11); quare velocitates in partibus longitudinum B A, B a correspondentibus sunt quàm proximè ut longitudines B A, B a, id est, in ratione datâ. Centro O et diametro A B describatur circulus B E H a, sitque B Δ in hac figurâ ad B D in figurâ textûs, ut B a ad B A, hoc est, ut velocitas in loco Δ in medio resistente ad velocitatem in loco D in medio non resistente; et ductâ ordinatâ Δ E, erit etiam, ob figurarum similitudinem Δ E ad D E ut B a ad B A, ideóque ut velocitas in medio resistente ad velocitatem in medio non resistente. Velocitas igitur in medio resistente erit semper ut ordinata variabilis Δ E.



(q) *Ideóque figura B K V T a ellipsis erit quàm proximè.* Cùm enim (ex modò demonstratis) velocitas in loco quovis Δ sit semper ut ordinata Δ E ad circulum, et (per Hyp.) resistentia Δ K in hac figurâ, vel D K in figurâ textûs, sit semper ut velocitas Δ E, erit Δ K ut Δ E; et quia $\Delta E^2 = a\Delta \times \Delta B$ (ex naturâ circuli), erit etiam ΔK^2 ut $a\Delta \times \Delta B$, et ideò figura B K V T a ellipsis, cujus centrum O, semi-axes a O, et O V, si O V exponat resistentiam in puncto medio O axis a B.

(r) * *Ut area semi-ellipseos hujus ad O V × B O.* Est enim area illa $= A a \times \frac{1}{2} a B$ (per Prop. hanc), et $\frac{1}{2} a B = B O$ (per constr.).

(s) * *Ut area semi-circuli ad quadratum radii,* &c. Area ellipseos cujuscumque est ad rectangulum sub axibus in ratione datâ, nimirum in ratione areæ circuli ad quadratum diametri (250.

circuli ad quadratum radii, sive ut 11 ad 7 circiter: et propterea $\frac{7}{11}$ A a ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad ejusdem gravitatem.

Quod si resistentia D K sit in duplicatâ ratione velocitatis, figura B K V T a (t) ferè parabola erit verticem habens V et axem O V, (u) ideóque æqualis erit rectangulo sub $\frac{2}{3}$ B a et O V quam proximè. Est igitur rectangulum sub $\frac{1}{2}$ B a et A a æquale rectangulo sub $\frac{2}{3}$ B a et O V, ideóque O V æqualis $\frac{3}{4}$ A a: et propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{3}{4}$ A a ad longitudinem penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abundè satis accuratas esse censeo. Nam cùm ellipsis vel parabola B R V S a congruat cum figura B K V T a (x) in puncto medio V, hæc si ad partem alterutram B R V vel V S a excedit figuram illam, (y) deficiet

Lib. I.); circulus enim est ellipsis cujus sunt axes æquales; unde area semi-ellipseos B K V T a est ad quartam partem rectanguli sub axibus, seu ad rectangulum sub semi-axibus O V $\times$ B O, ut area semi-circuli ad quadratum radii. Sed si circuli radius sit 7, erit semi-peripheria 22 circiter, et area semi-circuli 7 $\times$ 11, ideóque areæ semi-circuli ad quadratum radii ut 11 ad 7 circiter. Est igitur A a ad O V ut 11 ad 7, et proinde O V $= \frac{7}{11}$ A a. Et propterea (per Prop. hanc) $\frac{7}{11}$ A a est ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad ejusdem pondus.

(t) * *Ferè parabola erit.* Ordinata Δ E ad semi-circulum B E H a est semper ut velocitas in loco Δ in medio resistente, et (ex naturâ circuli) $\Delta E^2 = a\Delta \times \Delta B$, et (ex Hyp.) resistentia Δ K est ut velocitatis quadratum, seu ut ΔE^2, adeóque Δ K est ut rectangulum $a\Delta \times \Delta B$ sive ut $\overline{OB + O\Delta} \times \overline{OB - O\Delta}$ hoc est ut $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$. * Sed in parabolâ cujus vertex foret V et axis V O differentia abscissarum foret semper ad differentiam quadratorum ordinatarum in utriusque abscissæ extremo ductarum, in datâ ratione. Jam verò si ex K ducatur in axem perpendicularis K P, est K Δ = P O et P O est differentia abscissarum V P et V O, est O Δ = P K ordinatæ in P, ideóque est $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$ differentia quadratorum ordinatarum in punctis P et O, cum ergo K D et $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$ sint in datâ ratione figura B K V T a parabola erit verticem habens V et axem O V (per Theor. I. de parab.).

(u) * *Ideóque æqualis erit rectangulo sub $\frac{2}{3}$ B a et O V quam proximè.* Nam area parabolica B K V O est $\frac{2}{3}$ B O $\times$ V O (Theor. IV. de parab.) et ipsius duplum, seu area tota B K V a est $\frac{2}{3}$ a B $\times$ O V.

(x) * *In puncto medio V.* Supponitur enim quòd O V accuratè exhibeat resistentiam in puncto medio O, quodque parabola vel ellipsis per punctum V descripta sit.

(y) * *Deficiet ab eâdem ad partem alteram.* Quia duæ ellipseos vel parabolæ partes B R V et a S V similes sunt et æquales, si resistentiæ in descensu a B ad O majores sint quàm pro ratione ordinatarum D R ad ellipsim vel parabolam, ad alteram partem minores erunt; et contra.

181. Sit resistentia in ratione sesquiplicatâ velocitatis, id est, Δ K ut $\Delta E^{\frac{3}{2}}$; et quoniam (ex naturâ circuli) $\Delta E = (BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{1}{2}}$, et proinde $\Delta E^{\frac{3}{2}} = (BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{3}{4}}$, erit Δ K ut $(BO^2 - \Delta O^2)^{\frac{3}{4}}$, et (in fig. textûs) D K ut $(BO^2 - DO^2)^{\frac{3}{4}}$. Dicantur B O $= a$, V O $= b$, D O $= x$, D K $= y$, et erit $b : y = a^{\frac{3}{2}} : (aa - xx)^{\frac{3}{4}}$, ideóque $y = \frac{b(aa - xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$; et hinc areæ O V K D momentum $y\,dx = b\,dx \frac{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$. Quantitas $(aa - xx)^{\frac{3}{4}}$ in seriem infinitam resolvatur (551. Lib. I.), et invenietur $dx\,(aa - xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}dx - \frac{3x^2dx}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^4dx}{4 \times 8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3 \times 5x^6dx}{4 \times 8 \times 12a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3 \times 5 \times 9x^8dx}{4 \times 8 \times 12 \times 16a^{\frac{13}{2}}} -$, &c. Et sumptis fluentibus S. $dx\,(aa - xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}x - \frac{x^3}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^5}{5 \times 4 \times 8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3 \times 5x^7}{7 \times 4 \times 8 \times 12a^{\frac{9}{2}}} -$

ab eâdem ad partem alteram, et sic eidem æquabitur ([z]) quàm proximè.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in datâ ratione; differentia inter arcum descensu descriptum et arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.

([a]) Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per resistentiam medii, ideóque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia

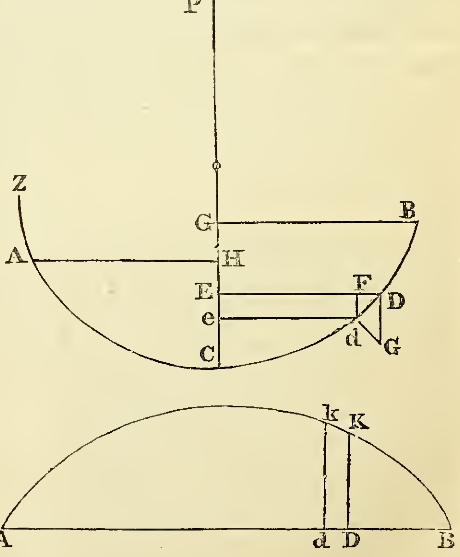
$\frac{3 \times 5 \times 9 x^9}{9 \times 4 \times 8 \times 12 \times 16 a^{\frac{13}{2}}}$ —, &c. $= \frac{50841 a^{\frac{5}{2}}}{71680}$, factâ x = a, et neglectis, ob parvitatem, cæteris seriei terminis. Quare cùm sit area O V K D $= \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} \times$ S. d x (a a — x x)$^{\frac{3}{4}}$, si ponatur x = a erit area O V K B $= \frac{50841}{71680} \times$ b a, et 2 O V K B seu area tota B K V T a $= \frac{50841}{35840}$ b a $= \frac{10}{7}$ b a, circiter. Est itaque $\frac{10}{7}$ V O $\times$ B O = A a $\times$ B O, et hinc V O $= \frac{7}{10}$ A a; ac propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{7}{10}$ A a ad longitudinem penduli.

([z]) * 182. *Quàm proximè.* Prop. LXXII. Lib. II. Phor. quæ XXX. hujus Libri fere similis est, sed generalis, et demonstratu facilis, hic adjungemus.

Si curvæ cujusvis B C Z arcus totus A B, quem grave descensu per B C et subsequente ascensu per C A in medio resistente describit, extendatur in lineam rectam B A, et ad singula hujus rectæ puncta D erigantur perpendicula D K proportionalia medii resistentiis quas mobile in homologis curvæ B C A punctis D subit, sitque B K A curva quam punctum K perpetuo tangit: area curvilinea B K A B æquabitur rectangulo P C $\times$ G H ex recta P C, quæ gravitatem constantem exponit, in differentiam G H abscissarum G C, H C arcuum B C, C A descensu et subsequente ascensu descriptorum.

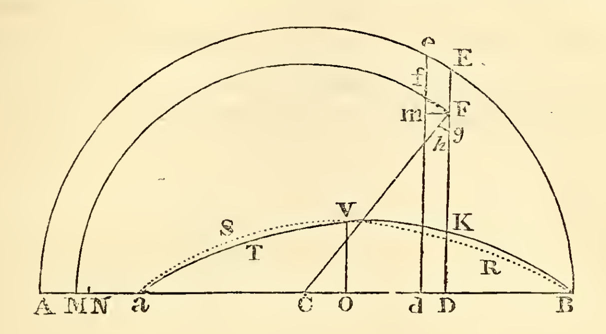
Ex punctis D, d infinitè propinquis demittantur ad P C perpendicula D E, d e, et ex puncto d ad E D perpendiculum d F; et vis gravitatis P C erit ad vim tangentialem in loco D, quâ motus corporis in curvâ acceleratur, ut D d ad F d.

* Nam ducta D G parallela P C et G d in curvam perpendiculari, exprimat D G gravitatis actionem, exprimet D d vim tangentialem, sed



ob similitudinem triangulorum D d G, D d F est D G : D d = D d : F d, erit ergo D d ad F d ut vis gravitatis ad vim tangentialem, quâpropter cum D d sumatur ubique æqualis ut est actio gravitatis, ubique F d exprimet vim tangentialem; est F d = E e, si itaque P C repræsentet vim gravitatis erit D d : E e = P C ad vim tangentialem, † ideóque vis illa tangentialis $= \frac{P C \times E e}{D d}$. Sed corporis descendentis vis acceleratrix æqualis est excessui vis tan-

retardans. In superiore Propositione rectangulum sub rectâ $\frac{1}{2}$ a B et arcuum illorum C B, C a differentia A a æqualis erat areæ B K T a.



Et area illa, si maneat longitudo a B, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum D K; hoc est, in ratione resistentiæ, (b) ideòque est ut longitudo a B et resistentia conjunctim. Proindeque

gentialis supra resistentiam; erit igitur vis acceleratrix in loco D $= \frac{P C \times E e}{D d} - D K$. Ducatur hæc vis in elementum spatii D d, et fiet $P C \times E e - D K \times D d = v\, d v$, si velocitas in loco D sit v (18, 19); et hinc, sumptis fluentibus, habetur $P C \times G E - B K D = \frac{1}{2} v v$. Fiat $B D = B A$, et ideò $v = o$, atque $G E = G C - C H = G H$, et erit $P C \times G H - B K A B = o$, ac proinde $P C \times G H = B K A B$. Q. e. d.

(a) * *Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per resistentiam medii.* * Dividantur arcus a duobus pendulis descripti in partes proportionales infinitè parvas, et totum illud quod deest singulo arcui, poterit concipi ut effectus retardationum quas corpora passa sunt singularum illarum particularum initio, spatium verò quod propter singulam retardationem deficit, est ut illa retardatio et tempus per quod corpus motum fuit post illam retardationem receptam usque ad finem oscillationis; sed quoniam in oscillationibus utut inæqualibus tempora quibus similes arcuum partes describuntur sunt æqualia, in medio non resistente, et in medio resistente saltem quàm proximè, (180) spatia quæ deficiunt propter retardationes in proportionalibus arcuum partibus receptas, sunt ut illæ retardationes.

* *Ideò differentia arcuum est ut retardatio tota, eique proportionalis resistentia retardans,* si quantitates materiæ corporum pendulorum sint æquales, retardatio in singulis arcuum descriptorum partibus est ut resistentia in iisdem locis, sed ut resistentiæ sunt in datâ quâdam lege velocitatem ex hypothesi et velocitates in arcuum partibus proportionalibus sunt in ratione datâ, ideò resistentiæ in singulis arcuum partibus proportionalibus sunt in ratione datâ, ac per consequens omnes retardationes, sunt in eâdem ratione, summæ ergo retardationum erunt in eâdem ratione datâ, ergo tota spatia deficientia illis retardationibus proportionalia erunt in eâdem ratione, *differentiæ ergo inter arcum descensu descriptum et arcum ascensu subsequente descriptum* in variis arcubus ab eodem corpore descriptis, *sunt in datâ lege resistentiæ.*

183. * *Corol.* 1. Differentiæ arcuum, respectu arcuum descensu descriptorum eamdem sequuntur legem quam resistentiæ sequuntur respectu velocitatum. Nam cùm tempora quibus correspondentes et proportionales arcuum partes describuntur sint æqualia, velocitates erunt semper ut illæ arcuum partes, sive ut arcus toti, (180.) quam proximè, ergo resistentiæ, retardationes et differentiæ arcuum eamdem legem sequuntur respectu arcuum ac respectu velocitatum.

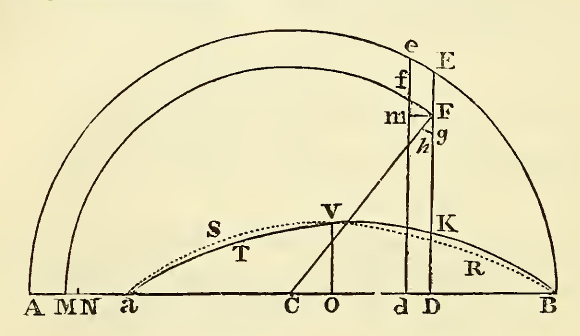
Cor. 2. * *Si corpora pendula differant quantitate materiæ, differentiæ arcuum sunt directè in lege datâ arcuum et inversè ut quantitates materiæ:* nam eo in casu retardationes in singulis arcuum partibus sunt directè ut resistentiæ et inversè ut quantitates materiæ; nam resistentia motus jacturam producit, quæ motus jactura est factum ex retardatione et massâ retardatâ (per Def. 2. Lib. I.).

(b) * *Ideòque est ut longitudo a B et resistentia conjunctim.* Area illa si maneat longitudo a B, augetur vel diminuitur in ratione resistentiæ D K; si verò constans maneat resistentia seu ordinata D K, sed augeatur a B omnesque ejus partes d D in ratione totius a B augeantur, area illa augetur vel diminuitur in ratione longitudinis a B; unde si longitudo a B variabilis sit et resistentia seu ordinata D K in singulis longitudinum a B locis correspondentibus au-

rectangulum sub A a et $\frac{1}{2}$ a B est ut a B et resistentia conjunctim, et propterea A a ut resistentia. Q. e. d.

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem medio erit ut arcus totus descriptus: et contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicatâ ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicatâ ratione arcûs totius: et contra.



Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicatâ vel aliâ quâvis ratione velocitatis, differentia erit in eâdem ratione arcûs totius: et contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ, differentia erit partim in ratione arcûs totius et partim in ejus ratione duplicatâ: et contra. Eadem erit lex et ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcûs.

Corol. 5. Ideóque si, pendulo inæquales arcus successivè describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcûs descripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his Propositionibus, per oscillationes pendulorum in mediis quibuscunque, invenire licet resistentiam mediorum. Aëris verò resistentiam investigavi per experimenta sequentia. Globum ligneum pondere unciarum Romanarum $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum Londinensium $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco satis firmo suspendi, ita ut inter uncum (c) et cen-

geatur vel diminuatur in datâ ratione, area B K T a augebitur vel diminuetur in ratione compositâ ex ratione longitudinis a B et ratione resistentiæ auctæ vel diminutæ, proindeque rectangulum sub A a et $\frac{1}{2}$ a B erit ut a B et resistentia conjunctim, et propterea A a ut resistentia.

(c) * *Et centrum oscillationis globi.* Quid sit

trum oscillationis globi distantia esset pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem et unciâ unâ a centro suspensionis distans; et e regione puncti illius collocavi regulam in digitos distinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a pendulo descriptas. Deinde numeravi oscillationes quibus globus octavam motus sui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad distantiam duorum digitorum, et inde demittebatur; ita ut toto suo descensu describeret arcum duorum digitorum, totâque oscillatione primâ, ex descensu et ascensu subsequente compositâ, arcum digitorum fere quatuor: ([d]) idem oscillationibus 164 amisit octavam motûs sui partem, sic ut ultimo suo ascensu describeret arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo descensu descripsit arcum digitorum quatuor; amisit octavam motûs partem oscillationibus 121, ita ut ascensu ultimo describeret arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo descensu descripsit arcum digitorum octo, sexdecim, triginta duorum vel sexaginta quatuor; amisit octavam motûs partem oscillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, respectivè. Igitur differentia inter arcus descensu primo et ascensu ultimo descriptos, erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 respectivè. ([e]) Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque, et in oscillatione unâ mediocri, quâ arcus digitorum $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu et subsequente ascensu descriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti respectivè. ([f]) Hæ autem in majoribus oscillationi-

centrum oscillationis et quomodo inveniri possit, indicavimus in scholio post notam 478. Lib. I. Et ex his quæ ibi dicta sunt, satis liquet in longioribus pendulis graviori globo instructis et filo tenui, centrum oscillationis cum centro globi coincidere quàm proximè.

([d]) * *Idem oscillationibus* 164. *amisit octavam motûs sui partem, sic ut ultimo suo ascensu describeret arcum digiti* $1\frac{3}{4}$.

* Liquet (ex notâ ([a]) præcedente) quod differentia inter arcum descensu descriptum et arcum ascensu subsequente descriptum sit toti retardationi quam corpus passum est proportionalis, ideóque motui destructo per resistentiæ actionem; ascendat itaque corpus in fine primæ oscillationis ad altitudinem qualemcunque, sumaturque differentia arcûs ascensu descripti ab arcu descensu primo percursi: secundâ oscillatione corpus ascendere deberet in vacuo ad eam altitudinem ad quam in fine primæ oscillationis assurrexerat, et sumatur quod deest in secundo ascensu ab illâ altitudine, duæ illæ differentiæ sunt ut motus in singulâ oscillatione amissi, earum summa est ergo ut summa motûs amissi in utraque oscillatione, sed duæ illæ differentiæ sunt differentia inter altitudinem e quâ corpus primò descendit, et altitudinem ad quam ultimò assurrexit; ergo ratiocinio ad 164. oscillationes continuato differentia inter altitudinem e quâ corpus primò descendit, et altitudinem ad quam ultimò assurrexit, est ut summa motûs quem resistentia durantibus illis 164. oscillationibus destruere valuit.

([e]) * *Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum*, &c. Exempli causâ, si in primo casu dividatur differentia $\frac{1}{4}$ per numerum oscillationum 164, habebitur $\frac{1}{656}$ differentia inter arcum descensu descriptum et arcum subsequente ascensu descriptum in una mediocri oscillatione; quia differentia $\frac{1}{4}$ ex omnibus differentiis quæ per oscillationes 164 producuntur, composita est; et quia arcus totus unâ mediocri oscillatione descriptus medius est arithmeticè inter arcum maximum fere digitorum 4. primâ oscillatione descriptum, et arcum minimum digitorum $2\frac{3}{2}$ ultimâ oscillatione descriptum, ideò arcus ille mediocris invenitur capiendo dimidium summæ arcuum $4 + 2\frac{3}{2}$, quod est $3\frac{3}{4}$, aut etiam capiendo summam arcuum dimidiorum, videlicet $2 + 1\frac{3}{4}$. Atque eodem modo de cæteris ratiocinandum est.

([f]) * *Hæ autem in majoribus oscillationibus*, &c. * Dividantur omnes arcuum differentiæ in

bus sunt in duplicatâ ratione arcuum descriptorum quàm proximè, in minoribus verò paulò majores quàm in eâ ratione; et propterea (per Corol. 2. Prop. XXXI. Libri hujus) resistentia globi, ubi celerius movetur, est in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè; ubi tardiùs, paulò major quàm in eâ ratione.

(g) Designet jam V velocitatem maximam in oscillatione quâvis, sintque A, B, C quantitates datæ, et fingamus quod differentia arcuum sit $A V + B V^{\frac{3}{2}} + C V^2$. (h) Cùm velocitates maximæ sint in cycloide ut semisses

oscillatione mediocri per primam, omnes illæ differentiæ erunt ut 1.; 2.7107; 9.5072, 36.9577; 141.8378; 542.8965.

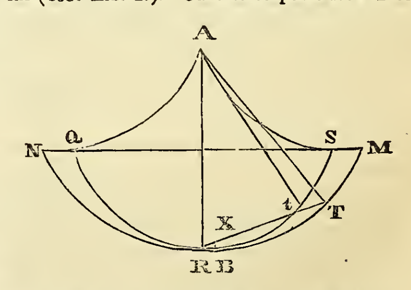
Quadrata verò arcuum sunt ut 1, 4, 16, 64, 256, 1024. unde ex eorum numerorum inspectione liquet differentias quæ in minoribus oscillationibus observatæ sunt esse ad eas quæ in majoribus arcubus observantur in majore ratione quàm duplicatâ arcuum; in majoribus verò oscillationibus rationes illarum differentiarum ad rationem duplicatam arcuum magis accedunt, ut enim arcus in progressione duplâ fuere sumpti, ratio duplicata arcuum proximorum est ratio 1 ad 4, jam verò 9.5072 est non multo major 4. parte numeri 36.9577, iste autem ad 4. partem numeri 141.8378, magis accedit, propius adhuc iste accedit ad quartam partem numeri 542.8965. Unde inter arcus magnos, motus amissos in duplicatâ fere ratione arcuum sive velocitatum sumi posse deducitur.

Idem manifestius patebit si dividantur hi numeri qui arcuum differentias exprimunt per ipsorum arcuum rationes, habebuntur enim 1.; 1.3553; 2.3788; 4.6197; 8.8648; 16.9655, qui si resistentiæ forent ut quadrata velocitatum, deberent esse ut ipsi arcus $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16. Sed ex ipsâ inspectione liquet minores differentias majoribus numeris exprimi quam ipsi arcus, majores verò ferè iisdem. Si verò supponeretur resistentiam non tantùm esse in ratione duplicatâ velocitatum, sed etiam partem aliquam aliunde quàm ex merâ inertiâ materiæ oriundam, esse ut velocitas, ideóque cùm hæ quantitates mox inventæ sint quotientes differentiarum arcuum per velocitates divisarum, hæ quantitates constarent parte constante et aliâ parte velocitati sive arcui proportionatâ.

Sumatur itaque prima quantitas 1, et ordine conferatur cum secundâ, tum cum tertiâ, cum quartâ, &c. supponaturque illas constare duabus partibus altera velocitati proportionata altera constanti, v. gr. sit prima quantitas $1 = a + x$ secunda $1.3553 = 2a + x$, iis ita binatim calculatis ut eruatur valor a et x, quantitas constans x, in singulo calculo eadem non invenietur, sed varii isti obtinebuntur valores hoc ordine .6447; .5404; .4829; .4757; .4849, qui decrescunt ordine quodam regulari (ultimo excepto ob aliqualem exiguum errorem), unde liquet, rationem differentiarum arcuum, non esse partim in ratione duplicatâ ipsorum arcuum, et partim in eorum arcuum ratione simplici, sed his adjungi debere rationem aliquam intermediam quam sesquiplicatam arcuum assumit Newtonus, quod cum experimentis propiùs consentit.

(g) * *Designet jam V velocitatem maximam*, sive quantitatem velocitati maximæ proportionalem, *in oscillatione quavis, sintque A, B, C quantitates* constantes, quarum valores per experimenta determinabuntur; et fingamus quòd resistentia, seu differentia arcuum ipsi proportionalis (Prop. XXXI.), sit partim ut velocitas, partim ut velocitatis quadratum, et partim ut velocitatis dignitas cujus index $\frac{3}{2}$, et proinde *supponamus quod arcuum differentia sit* $A V + B V^{\frac{3}{2}} + C V^2$, &c.

(h) * *Cùm velocitates maximæ*, &c. Corpus pendulum in medio non resistente oscilletur in cycloide S B R Q, sitque A punctum suspensionis, et R punctum infimum ac medium arcûs totius S R Q. Centro A et radio A R describatur arcus circuli M T R N, in quo corpus idem, vel aliud simile et æquale oscilletur in eodem medio non resistente. Sit T R arcus circularis æqualis arcui cycloidis t R, et R B arcus quàm minimus cycloidi et circulo communis (465. Lib. I.). Jam si corpus e locis T et



B successivè cadat in circulo, erit ipsius velocitas maxima in R descensu per arcum T R acquisita, ad velocitatem descensu per arcum B R acquisitam, ut chorda T X R ad chordam arcûs R B (88. Lib. I.), aut, quod idem est (per Lemma VII. Lib. I.), ut chorda T X R ad arcum cycloidis B R; et velocitas descensu per arcum B R acquisita in R est ad velocitatem maximam descensu per arcum cycloidis t B R acquisitam, ut arcus B R ad arcum t B R seu arcum circuli

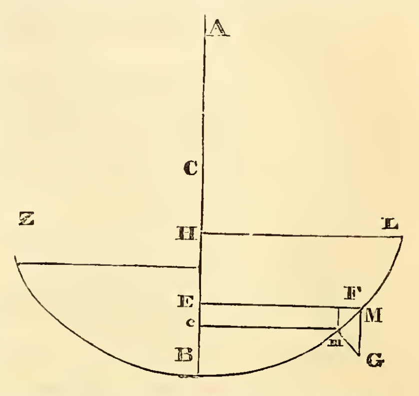
arcuum oscillando descriptorum, in circulo verò ut semissium arcuum illorum chordæ; ideóque paribus arcubus majores sint in cycloide quam in circulo, in ratione semissium arcuum ad eorundem chordas; ([1]) tempora

æqualem T B R (per demonstr. Prop. LI. Lib. I.). Quare, ex æquo, velocitas maxima in R descensu per arcum circularem T B R acquisita est ad velocitatem maximam in R descensu per cycloidis arcum t B R acquisitam, ut chorda R T ad arcum t B R vel T B R. Sunt autem velocitates maximæ in medio resistente velocitatibus maximis in medio non resistente proportionales quàm proximè, et in puncto medio arcuum qui oscillatione integrâ describuntur, ferè contingunt (180). Paribus igitur arcubus, velocitates maximæ in cycloide sunt ad velocitates maximas in circulo, ut semisses arcuum oscillando descriptorum ad eorumdem arcuum circularium chordas, quam proximè; et ideò, paribus arcubus majores sunt in cycloide quàm in circulo in ratione semissium arcuum ad eorumdem chordas in circulo ductas.

([1]) * *Tempora autem in circulo sunt majora quam in cycloide in velocitatis ratione reciprocâ.* * Id est, tempora in circulo sunt ad tempus in arcu quovis cycloidis, ut semissis arcus circuli oscillando descripti ad ejusdem semissis chordam, sive invertendo et temporum dimidia sumendo, tempus semi-oscillationis in cycloide est ad tempus semi-oscillationis in circulo (pendulis existentibus ejusdem longitudinis) ut chorda arcus descripti ad ipsum arcum, quæ quidem proportio proximè tantùm obtinet.

* Est enim tempus oscillationis integræ cujusvis in cycloide ad tempus descensûs per dimidiam penduli longitudinem ut semi-peripheria ad radium (vide not. 470. ad Prop. LII. Lib. I.) ideóque etiam tempus semi-oscillationis in cycloide ad tempus illud descensûs per dimidiam penduli longitudinem ut quadrans circuli ad radium, sed tempus descensus per quadruplum dimidiæ longitudinis penduli, sive tempus descensûs per diametrum circuli cujus pendulum est radius, est duplum temporis descensus per dimidiam penduli longitudinem, ideóque tempus semi-oscillationis in cycloide est ad tempus descensûs per diametrum circuli cujus longitudo penduli est radius, ut circuli quadrans ad diametrum. Sed, ratio temporis lapsûs per diametrum circuli ad tempus semi-oscillationis in arcu ejusdem circuli est (ut mox liquebit) composita ex ratione diametri ad quadrantem circuli et chordæ ad arcum, quàm proximè, unde ex æquo erit tempus in cycloide ad tempus in circulo ut chorda circuli ad ejus arcum oscillando descriptum. Rationem autem temporis descensus per diametrum circuli ad tempus semi-oscillationis in arcu ejus circuli esse compositam ex ratione diametri ad quadrantem circuli et ex ratione chordæ ad arcum oscillando descriptum, saltem quam proximè, sequenti calculo constabit.

Descendat itaque corpus per arcum L B centro C descriptum et diametro A B, sit t tempus quæsitum quo corpus descendit per eum arcum L B, sitque b tempus datum quo corpus labitur per diametrum A B, et quo velocitate per eum lapsum in B acquisitâ posset describere uniformiter duplum A B sive 2 A B, sumatur in arcu L B portiuncula infinitè parva M m quam corpus descendens uniformiter describere censeatur tempore infinitè parvò d t, ducanturque ex punctis L et M lineæ L H, M E in



diametrum perpendiculares; cùm tempora quibus spatia data uniformiter describuntur sint ut illa spatia directè et velocitates quibus percurruntur inversè, sitque velocitas quæ in B acquisita est per lapsum ex A B ad velocitatem per lapsum ex L in M, sive ex H in E acquisitam, ut $\sqrt{AB}$ ad $\sqrt{HE}$, erit $b : dt = \frac{2AB}{\sqrt{AB}} : \frac{Mm}{\sqrt{HE}}$; dicatur ergo $AB = 1$; $HB = h$, $BE = x$, $EM = y$; $HE = h - x$ erit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h - x}}$, est autem $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ et ex naturâ circuli (cùm fit $yy = x - xx$, et $2y\,dy = dx - 2x\,dx$, sive $dy = \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x - xx}}$) dx invenietur $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm \frac{dx}{2\sqrt{x - xx}}$, et quoniam dum crescit B E decrescit L M est $Mm = \frac{-dx}{2\sqrt{x - xx}}$, resolvatur ergo $\frac{1}{\sqrt{x - xx}}$ in seriem per formulam Newtonianam invenietur $\frac{1}{\sqrt{x - xx}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2 \times 4}$, &c. ideóque M m sive

autem in circulo sint majora quàm in cycloide in velocitatis ratione reciprocâ; patet arcuum differentias (k) (quæ sunt ut resistentia et quadratum

$$\frac{-dx}{2\sqrt{x-xx}} = \tfrac{1}{2} \times -\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4}, \text{ \&c.}$$

Pariter resolvatur $\frac{1}{\sqrt{h-x}}$ in seriem per eamdem formulam erit

$$\frac{1}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{2h^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{2\times 4h^{\frac{5}{2}}}, \text{ \&c.} = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} \times 1 + \frac{x}{2h} + \frac{3x^2}{2\times 4h^2}, \text{ \&c.}$$

Ductis ergo per se mutuo his seriebus

$$\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times -\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4}, \text{ \&c.}$$

$$-\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2h} - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 2h} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 4\times 2h}, \text{ \&c.}$$

$$-\frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4h^2} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 2\times 4h^2} - \frac{3\times 3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times 4\times 2\times 4h^2}, \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

ideóque integralis

$$S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times -2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times 3} - \frac{2\times 3x^{\frac{5}{2}}}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

$$-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times 3h} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{2\times 2\times 5h} - \frac{2\times 3x^{\frac{7}{2}}}{2\times 4\times 2\times 7h}, \text{ \&c.}$$

$$-\frac{2\times 3x^{\frac{5}{2}}}{2\times 4\times 5h^2} - \frac{2\times 3x^{\frac{7}{2}}}{2\times 2\times 4\times 7h^2} - \frac{2\times 3\times 3x^{\frac{9}{2}}}{2\times 4\times 2\times 4\times 9h^2}, \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Cùm ergo sit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$ erit $b : t = 2 : S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$, sed quando t fit o, tunc est h = x ideóque integralis quæsita in hanc mutatur, (posito ubique h pro x)

$$S.\frac{Mm}{h-x} = -1 - \frac{h}{2\times 3} - \frac{3h^2}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

$$-\frac{1}{2\times 3} - \frac{h}{2\times 2\times 5} - \frac{3h^2}{2\times 4\times 2\times 7}, \text{ \&c.}$$

$$-\frac{3}{2\times 4\times 5} - \frac{3h}{2\times 2\times 4\times 7} - \frac{2\times 3\times 3h^2}{2\times 4\times 2\times 4\times 9}, \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Ideóque hæc est quantitas illa constans quæ debet tolli ex valore integralis quæ in proportione $b : t = 2 : S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ pro $S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ adhibetur, quæcumque assumatur valor indeterminatæ x, sed ubi totus arcus L B est descriptus, tunc x fit o, et evanescit prior series $\frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times -2x^{\frac{1}{2}}$, &c. ergo in eo casu integralis $S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ est æqualis soli quantitati illi constanti adsumptæ cum signis mutatis, ideóque est

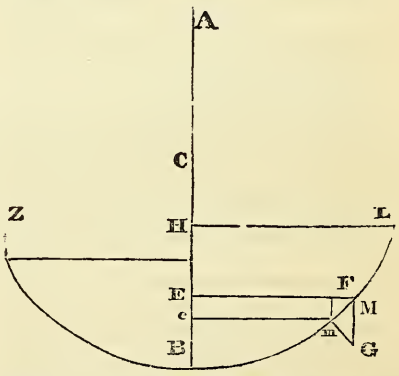
$$b : t = 2 : \quad 1 + \frac{h}{2\times 3} + \frac{3h^2}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

$$+\frac{1}{2\times 3} + \frac{h}{2\times 2\times 5}, \text{ \&c.}$$

$$+\frac{3}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

&c.

Jam autem cùm Mm, sit æqualis seriei $\frac{1}{2} \times \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4}$, &c. ejus integralis est $\frac{1}{2} \times 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times 3} + \frac{2\times 3x^{\frac{5}{2}}}{2\times 4\times 5}$, &c. $= \sqrt{x} \times 1 + \frac{1x}{2\times 3} + \frac{3x^2}{2\times 4\times 5}$, &c. in quâ si fiat x = 1 habebitur semi-peripheria circuli, et si fiat x = h habebitur arcus



L B, tumque illæ duæ series in has abibunt

$$1 + \frac{1}{2\times 3} + \frac{3}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

$$\text{et } \sqrt{h} \times 1 + \frac{h}{2\times 3} + \frac{3h^2}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

Quæ si per se mutuo ducantur, earum factum erit

$$\sqrt{h} \times 1 + \frac{h}{2\times 3} + \frac{3h^2}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

$$\frac{1}{2\times 3} + \frac{h}{2\times 3\times 2\times 3}, \text{ \&c.}$$

$$\frac{3}{2\times 4\times 5}, \text{ \&c.}$$

&c.

Sed termini hujus seriei saltem primi, iidem sunt cum terminis seriei superius inventæ pro

temporis conjunctim) easdem fore, quamproximè, in utrâque curvâ: (†) deberent enim differentiæ illæ in cycloide augeri, unà cum resistentia, in duplicatâ circiter ratione arcûs ad chordam, ob velocitatem in ratione illâ simplici auctam; et diminui, unà cum quadrato temporis, in eâdem duplicatâ ratione. Itaque ut reductio fiat ad cycloidem, eædem sumendæ sunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in circulo observatæ, velocitates verò maximæ ponendæ sunt arcubus vel dimidiatis vel integris, hoc est, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in casu secundo, quarto et sexto, numeros, 1, 4 et 16 pro V; et prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ in casu secundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4\,A + 8\,B + 16\,C$ in casu quarto; et $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16\,A + 64\,B + 256\,C$ in casu sexto. Et ex his æquationibus, (l) per debitam collationem et reductionem analyticam, fit $A = 0,\,0000916$, $B = 0,\,0010847$, et $C = 0,\,0029558$. Est igitur differentia arcuum ut $0,\,0000916\,V + 0,\,0010847\,V^{\frac{3}{2}} + 0,\,0029558\,V^2$: et propterea cum (per Corollarium Propositionis XXX. applicatum ad hunc casum) resistentia globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V, (m) sit ad ipsius pondus A ut $\frac{7}{11}\,A\,V + \frac{7}{10}\,B\,V^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}\,C\,V^2$ ad

valore S. $\frac{Mm}{\sqrt{h - n}}$, sit ergo arcus $LB = a$, peripheria circuli cujus diameter est 1 sit p, erit $\sqrt{h} \times S.\,\frac{Mm}{\sqrt{h - x}} = \frac{ap}{2}$, sive $S.\,\frac{Mm}{\sqrt{h - x}} = \frac{ap}{2\sqrt{h}}$, sed $\sqrt{h}$ est æqualis chordæ LB, ex naturâ circuli, quæ si dicatur c, erit $S.\,\frac{Mm}{\sqrt{h - x}} = \frac{ap}{2c}$. Unde tandem est $b : t = 2 : \frac{ap}{2c} = 1 : \frac{ap}{4c} = 1 \times c : a \times \frac{p}{4}$ sive est b tempus descensus per diametrum vel per chordam quamlibet ad t tempus descensus per arcum in ratione compositâ ex ratione diametri 1 ad $\frac{p}{4}$ sive quadrantem peripheriæ, et ex ratione chordæ c ad arcum a. Q. e. d.

(k) * *Quæ sunt ut resistentia et quadratum temporis conjunctim* (per Cor. 3. Lem. X.). Resistentia enim considerari potest ut vis quæ retardationem producit, et differentia arcuum ut spatium quod corpus vi illâ mediocri ac constante sollicitatum describeret. Hinc arcuum differentiæ erunt quam proxime ut *resistentia directè et quadratum temporis conjunctim.*

(†) * *Deberent differentiæ in cycloide augeri unà cum resistentiâ in duplicatâ circiter ratione, arcus ad chordam ob velocitatem in ratione illâ simplici auctam,* quia scilicet pars maxima resistentiæ est ut quadrata velocitatum.

(l) * *Per debitam collationem.* Prima æquatio est $\frac{\frac{1}{2}}{121} = \frac{1}{2 \times 121} = A + B + C$. secunda divisa per 4. est $\frac{1}{71} = A + 2\,B + 4\,C$, et tertia divisa per 16. est $\frac{3}{58} = A + 4\,B + 16\,C$. Ex his autem æquationibus facile eruuntur valores litterarum A, B, C, si fractiones $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{71}$, et $\frac{3}{58}$ ad decimales reducantur.

(m) * *Sit ad ipsius pondus.* A V est pars differentiæ arcuum genita per resistentiæ partem illam quæ est ut velocitas $B\,V^{\frac{3}{2}}$, pars differentiæ arcuum genita per resistentiæ partem quæ est in sesquiplicatâ ratione velocitatis; et $C\,V^2$ pars differentiæ arcuum producta per resistentiæ totius partem quadrato velocitatis proportionalem (per Cor. 4. Prop. XXXI.). Sed (per Cor. Prop. XXX.) si resistentia sit ut velocitas, est $\frac{7}{11}\,A\,V$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in puncto medio arcûs descripti ad ejusdem pondus; si resistentia sit ut velocitatis quadratum, resistentia illa in puncto

longitudinem penduli; si pro A, B et C scribantur numeri inventi, fiet resistentia globi ad ejus pondus, ut 0, 0000583 V + 0, 0007593 $V^{\frac{3}{2}}$ + 0, 0022169 V^2 ad longitudinem penduli inter centrum suspensionis et regulam, id est, ad 121 digitos. Unde cùm V in casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus globi in casu secundo ut 0, 0030345 ad 121, in quarto ut 0, 041748 ad 121, in sexto ut 0, 61705 ad 121.

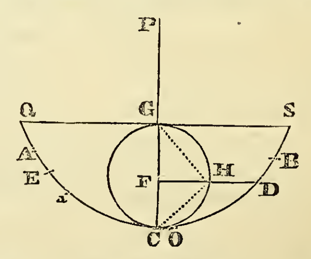
Arcus quem punctum in filo notatum in casu sexto descripsit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ seu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cùm radius esset 121 digitorum, et longitudo penduli inter punctum suspensionis et centrum globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum globi descripsit (n) erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistentiam aëris, non incidit in punctum infimum arcus descripti, (o) sed in medio ferè loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si globus descensu suo toto in medio non resistente (p) describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$, idque in cycloide, ad quam motum penduli supra reduximus: et propterea velocitas illa æqualis erit ve-

medio arcûs descripti est ad corporis pondus ut $\frac{3}{4}$ C V^2 ad longitudinem penduli, et (181) si resistentia sit in ratione sesquiplicatâ velocitatis, est illa ad corporis pondus ut $\frac{7}{10}$ B $V^{\frac{3}{2}}$ ad longitudinem penduli. Quarè cum hic supponatur resistentia partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione sesquiplicatâ et partim in duplicatâ, resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti, ubi velocitas est V, erit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}$ A V + $\frac{7}{10}$ B $V^{\frac{3}{2}}$ + $\frac{3}{4}$ C V^2, ad longitudinem penduli.

(n) * *Erat* $124\frac{3}{31}$ *digit.* Sunt enim radii ut similes circulorum arcus, et ideò radius 121, est ad suum arcum $119\frac{5}{29}$ ut radius 126, ad arcum correspondentem 124 $\frac{3}{31}$ quamproximè.

(o) * *Sed in medio ferè loco.* Patet per not. 180.

(p) * *Describeret arcûs illius partem dimidiam.* Corpus oscillando describat arcum B a in medio resistente et arcum B A in medio non resistente; sit C punctum cycloidis infimum; O, punctum medium arcûs B a, et arcus C D sit æqualis arcui B O, velocitas maxima descensu corporis per arcum B O acquisita in medio resistente est ad velocitatem maximam per arcum B C acquisitam in medio resistente ut arcus B O, ad arcum B C (180). Sed si corpus e loco D in medio non resistente cadendo describat arcum D C, erit etiam velocitas ipsius in C descensu per arcum D C acquisita ad velocitatem acquisitam ibidem descensu per arcum B C ut arcus C D, vel æqualis B O, ad arcum B C, (Prop. LI. Lib. I.). Ergò velocitas in medio resistente per arcum B O acquisita in O æqualis est velocitati quam corpus in medio non resistente cadendo per arcum D C = B O haberet in C; et propterea (85. Lib. I.) velocitas illa æqualis est velocitati quam corpus perpendiculariter cadendo in medio non resistente, et casu suo describendo altitudinem F C æqualem sinui verso arcûs C H, acquirere posset. Sit jam P punctum suspen-



sionis, P C longitudo penduli S D C semicyclois, S G et D F ad P C normales, et C H G C circulus diametro G C descriptus secans D F in H. Jungatur chorda C H, et erit arcus cycloidis S D = 2 G C — 2 C H, et arcus S C = 2 G C (462. Lib. I.) ideóque arcus D C = 2 C H. Est autem (ex naturâ circuli) C F ad C H ut C H ad C G, et hinc C F ad 2 C H seu D C, ut 2 C H ad 4 C G, sivè ut D C ad 2 P C; hoc est, sinus versus C F, ad arcum C D, ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam.

locitati quam globus, perpendiculariter cadendo et casu suo describendo altitudinem arcus illius sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in cycloide ad arcum istum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, et propterea æqualis digitis 15, 278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo et casu suo spatium 15, 278 digitorum describendo acquirere posset. Tali igitur cum velocitate globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0, 61705 ad 121, vel (q) (si resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicatâ) ut 0, 56752 ad 121.

(r) Experimento autem hydrostatico inveni quod pondus globi hujus lignei esset ad pondus globi aquei magnitudinis ejusdem ut 55 ad 97: et propterea cum 121 sit ad 213, 4 in eâdem ratione, erit resistentia globi aquei præfatâ cum velocitate progredientis (s) ad ipsius pondus ut 0, 56752 ad 213, 4, id est, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$. Unde cùm pondus globi aquei, quo tempore globus cum velocitate uniformiter continuatâ (t) describat longitudinem digitorum 30, 556, velocitatem illam omnem in globo cadente generare posset; (u) manifestum est quod vis resistentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$, hoc est, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$. Et propterea quo tempore globus, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ, longitudinem semidiametri suæ, seu digitorum $3\frac{7}{16}$, describere posset, (x) eodem amitteret motûs sui partem $\frac{1}{3342}$.

(q) * *Si resistentiæ pars illa sola*, &c. Si enim in quantitate, 0, 0022169 V^2 quæ est ad longitudinem penduli ut resistentiæ pars velocitatis quadrato proportionalis ad corporis pondus loco V scribatur 16, et loco V^2 scribatur 256, fiet 0, 0022169 $V^2 = 0, 56752$, quamproximè.

(r) * *Experimento autem hydrostatico.* Experimentum facile est. Cùm enim corpus fluido immersum, eâdem vi sursum urgeatur quâ par fluidi volumen sustinetur, id est, vi quæ æqualis est ponderi fluidi ejusdem magnitudinis (Cor. 5. et 6. Prop. XX. Lib. hujus) corpus fluido specificè leviori immersum ponderis sui partem amittet æqualem ponderi fluidi ejusdem voluminis; et propterea si corpus illud fluido immersum ponderetur, cognoscetur pondus fluidi ejusdem magnitudinis cum corpore. Si fluidum corpore immergendo specificè gravius sit, corpori illi adjungi potest aliud corpus majoris gravitatis specificæ ut eorum summa fluido specificè gravior fiat.

(s) *Ad ipsius pondus.* Resistentia globi solidi æqualis est resistentiæ globi aquei ejusdem magnitudinis et cum eâdem velocitate in eodem medio progredientis, sed resistentia globi solidi est ad ejusdem pondus ut 0, 56752 ad 121, et pondus globi solidi ad pondus globi aquei ut 121 ad 213.4, seu ut 1 ad $376\frac{1}{50}$ quamproximè.

(t) * *Describat longitudinem digit.* 30, 556, duplam nimirum longitudinis digitorum 15. 278, quæ velocitatem illam omnem in globo cadente generare posset (29. Lib. I.).

(u) * *Manifestum est.* Sunt enim velocitates dato tempore genitæ vel extinctæ, ut vires quibus generantur vel extinguuntur (13. Lib. I.).

(x) * *Eodem amitteret motûs sui partem.* Nam velocitates eâdem vi constante vel extinctæ sunt ut tempora quibus generantur vel extinguuntur (13. Lib. I.), sed tempora quibus corpora duo eâdem velocitate uniformi percurrunt longitudines digit. 30, 556, et digit. $3\frac{7}{16}$, sunt ut hæ longitudines (5. Lib. I.). Quarè velocitates amissæ sunt ut eædem longitudines, et ideò 30, 556 ad $3\frac{7}{16}$, ut $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ ad velocitatem amissam eo tempore quo globus longitudinem semi-diametri suæ seu digit. $3\frac{7}{16}$, percurrit; undè invenitur velocitas illa amissa $= \frac{1}{3342}$, quamproximè.

Numerabam etiam oscillationes quibus pendulum quartam motûs sui partem amisit. In sequente tabulâ numeri supremi denotant longitudinem arcûs descensu primo descripti, in digitis et partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcûs ascensu ultimo descripti; et loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripsi tanquam magis accuratum quàm cùm motûs pars tantùm octava amitteretur. (y) Calculum tentet qui volet.

Descensus primus	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus oscillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Postea globum plumbeum diametro digitorum 2, et pondere unciarum Romanarum $26\frac{1}{4}$ suspendi filo eodem, sic ut inter centrum globi et punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, et numerabam oscillationes

(y) * *Calculum tentet.* Quoniam experimentum magis accuratum est, calculum tentabimus. Erunt igitur differentiæ arcuum primo descensu et ultimo ascensu descriptorum.

$$\tfrac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16.$$

Arcus in unâ mediocri oscillatione descripti, sunt

$$3\tfrac{1}{2},\ 7,\ 14,\ 28,\ 56,\ 112.$$

Differentiæ arcuum descensu et subsequente ascensu in unâ mediocri oscillatione descriptorum, sunt

$$\frac{\frac{1}{2}}{374},\ \frac{1}{272},\ \frac{2}{162\frac{1}{2}},\ \frac{4}{83\frac{1}{3}},\ \frac{8}{41\frac{2}{3}},\ \frac{16}{22\frac{2}{5}}$$

sive ut 1. 2.7500; 9.2061; 35.5040; 143.7760; 528.5882.

Hæ autem differentiæ in majoribus oscillationibus sunt in duplicatâ ratione arcuum descriptorum satis proximè; nam $\frac{8}{41\frac{2}{3}} : \frac{16}{22\frac{2}{3}} = 34 : 125$, et $34 : 126 = 1 : 4$; hoc est, in duplicatâ ratione arcuum descriptorum. Et similiter $\frac{4}{83\frac{1}{3}} : \frac{8}{41\frac{2}{3}} = 1 : 4$, accuratè; in minoribus verò oscillationibus, differentiæ illæ sunt in ratione paulò majore quam duplicatâ arcuum descriptorum. Est enim $\frac{1}{272} : \frac{1}{162\frac{1}{2}} = 325 : 1088$ et hæc ratio major est ratione 1 ad 4. Designet jam V, ut supra, velocitatem maximam in oscillatione quâvis, et $A V + B V^{\frac{3}{2}} + C V^2$, differentiam arcuum; et quoniam velocitates ponendæ sunt arcubus descriptis scil. numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, analogæ, scribamus in cas. 2. 4. et 6. numeros 1, 4, 16, pro V, et prodibit arcuum differentia $\frac{1}{272} = A + B + C$ in cas. 2. $\frac{4}{83\frac{1}{3}} = 4 A + 8 B + 16 C$ in cas. 4 et $\frac{16}{22\frac{1}{3}} = 16 A + 64 B + 256 C$ in cas. 6. Ex his æquationibus habetur $A = 0,0005096$, $B = 0,0005884$, et $C = 0,0025784$. Est igitur differentia arcuum ut $0,0005096 V + 0,0005884 \times V^{\frac{3}{2}} + 0,0025784 V^2$, et propterea cùm resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11} A V + \frac{7}{10} B V^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} C V^2$ ad longitudinem penduli, fiet resistentia globi ad ejus pondus ut $0,0003243 V + 0,0004119 V^{\frac{3}{2}} + 0,0019338 V^2$, ad longitudinem penduli inter centrum suspensionis et regulam, id est, ad 121 digit. Unde cùm V in cas. 2. designet 1; in 4. 4, in 6. 16; erit resistentia ad pondus globi in cas. 2. ut 0,0267 ad 121; in 4. ut 0,0355332 ad 121; in 6. ut 0,5266032 ad 121.

Ponatur resistentia in tardioribus motibus partim uniformis et partim velocitati, partim velocitatis quadrato proportionalis, ideóque arcuum differentia sit $A + B V + C V^2$, et scribamus in cas. 1. 2. et 3. numeros 1, 2, 4, pro V, prodibunt æquationes $A + B + C = \frac{1}{748}$, $A + 2 B + 4 C = \frac{1}{272}$, et $A + 4 B + 16 C = \frac{4}{323}$, ex quibus eruitur $A = 0,00034$, $B = 0,0003255$, et $C = 0,0006714$; et propterea cùm (per Cor. Prop. XXX.) resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti, ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{1}{2} A + \frac{7}{11} B V + \frac{3}{4} C V^2$ ad longitudinem penduli; si pro A, B, et C, scribantur numeri inventi, sint resistentia globi ad ejus pondus ut $0,00017 + 0,0002071 V + 0,0005035 V^2$ ad 121, id est, in cas. 1. ut 0,0008806 ad 121; in 2. cas. ut 0,0025982 ad 121; in 3. cas. ut 0,0090544, ad 121; resistentia verò uniformis erit ad pondus globi ut 0,00017 ad 121, seu ut 1, ad 735294.

quibus data motûs pars amitteretur. Tabularum subsequentium prior exhibet numerum oscillationum quibus pars octava motûs totius cessavit: secunda numerum oscillationum quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus oscillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus oscillat.	510	518	420	318	204	121	70

In tabulâ priore seligendo ex observationibus tertiam, quintam et septimam, et exponendo velocitates maximas in his observationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 respectivè, et generaliter per quantitatem V ut supra: emerget in observatione tertiâ $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quintâ $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4\,A + 8\,B + 16\,C$, in septimâ $\frac{8}{30} = 16\,A + 64\,B + 256\,C$. Hæ verò æquationes reductæ dant $A = 0,001414$, $B = 0,000297$, $C = 0,000879$. Et inde prodit resistentia globi cum velocitate V moti in eâ ratione ad pondus suum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0,0009\,V + 0,000208\,V^{\frac{3}{2}} + 0,000659\,V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et si spectemus eam solummodo resistentiæ partem quæ est in duplicatâ ratione velocitatis, hæc erit ad pondus globi ut $0,000659\,V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars resistentiæ in experimento primo ad pondus globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0,002217\,V^2$ ad 121: ([z]) et inde fit resistentia globi lignei ad resistentiam globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in 0, 002217 ad $26\frac{1}{4}$ in 0, 000659, id est, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ et 2 digitorum, et harum quadrata sunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ et 4, seu $11\frac{13}{16}$ et 1 quamproximè. Ergo resistentiæ globorum æquivelocium erant in minore ratione quàm duplicatâ diametrorum. ([a]) At nondum consideravimus resistentiam fili, quæ certè per-

([z]) *Et indè fit resistentia.* Est enim (ex dem.) resistentia globi lignei $57\frac{7}{22} \times \frac{0,002217}{121}$; et resistentia globi plumbei $26\frac{1}{4} \times \frac{0,000659}{121}$, ideóque resistentia globi lignei ad resistentiam globi plumbei ut $57\frac{7}{22} \times 0,002217$ ad $26\frac{1}{4} \times 0,000659$ id est, $7\frac{1}{3}$ ad 1.

([a]) 184. *At nondum consideravimus*, &c.

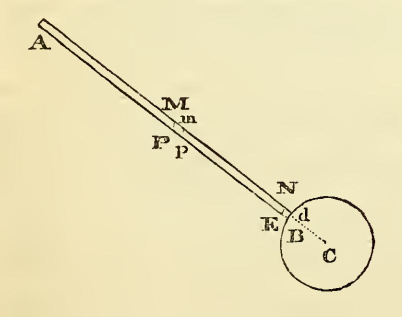
PROBLEMA.

Fili tensi oscillantis resistentiam invenire in medio cujus resistentia est ut velocitatis et diametri globi quadrata conjunctim.

Filum cylindricum homogeneum A B, circà punctum A, oscilletur, sitque ejus longitudo

magna erat, ac de pendulorum inventâ resistentiâ subduci debet. Hanc accuratè definire non potui, sed majorem tamen inveni quàm partem ter-

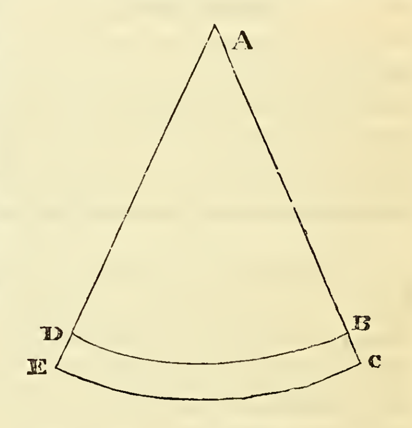
A B = a, diameter E N = 2 b, globi C, diameter = 2 r, longitudo variabilis A P = x, P p = d x; et cylindruli evanescentis P M, velocitas erit ut distantia A P, ejusque proindè resistentia ut x x d x, sive ut altitudo cylindruli P p et quadratum velocitatis conjunctim; et hinc, sumptâ fluente, resistentia fili A P, fit ut $\frac{1}{3}$ x^3, et totius fili A B resistentia ut $\frac{1}{3}$ a^3. Capiatur in B, cylindrulus B N, cujus altitudo B E sit æqualis diametro fili E N, seu 2 b, et resistentia fili A E, erit ut $\frac{1}{3}$ $(a - 2b)^3$, ideóque cylindri B N resistentia ut $\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}(a - 2b)^3$. Est igitur resistentia fili totius A B, ad resistentiam cylindri B N, ut a^3 ad $a^3 - (a - 2b)^3$; sed ut infra Prop. XXXIV. demonstrabitur, cylindri B N resistentia est ad resistentiam globuli huic cylindro inscripti ut 2 ad 1, et resistentia globuli hujus est ad resistentiam globi C, in ratione quamproximè compositâ ex ratione quadrati diametri E N, ad quadratum diametri 2 B C, et ratione quadrati velocitatis globuli ad quadratum velocitatis globi C hoc est, ut $bb(a - b)^2$ ad $rr(a + r)^2$. Quarè (per compositionem rationum et ex æquo) resistentia fili A B, est ad resistentiam globi C, ut $2a^3bb(a - b)^2$, ad



$a^3rr(a + r)^2 - rr(a + r)^2 \times (a - 2b)^3$, seu ponendo $a + r = c$, ut $a^3b(a - b)^2$ ad $3a^2rrcc - 6abrrcc + 4bbrrcc$, et hinc resistentia fili ad resistentiam totius penduli ut $a^3b(a - b)^2$, ad $a^3b(a - b)^2 + rrcc(3aa - 6ab + 4bb)$. Q. e. i.

185. *Corol.* Si fili semi-diameter b, sit admodum exigua respectu longitudinis ejusdem a, erit ferè $3aa - 6ab + 4bb = 3aa - 6ab + 3bb = 3(a - b)^2$. Quare fili resistentia erit ad resistentiam globi ut a^3b ad $3rrcc$, et ad resistentiam totius penduli ut a^3b ad $a^3b + 3rrcc$. Exempli causâ. Sit c = 126. digit. r = 1 digit. a = 125 digit. b = $\frac{1}{100}$ digit. et resistentia fili erit ad resistentiam totius penduli ut 1953125 ad 4762800, seu ut 1 ad 2, 438 quamproximè.

186. Inveniri etiam potest pars illa resistentiæ fili quæ uniformis est, quæque in tardioribus motibus observatur; posito quod uniformis illa resistentia fili sit ad uniformem resistentiam globi, ut spatium solidum quod filum oscillando describit ad spatium solidum quod describit globus. Filum cylindricum A B oscillatione unâ



describat spatium solidum seu prisma cujus basis est sector circularis A B D, et altitudo diameter fili, interea dum globi centrum C, describit arcum C E, diameter fili dicatur 2 R, et spatium a filo descriptum erit R × A B × B D; spatium verò a globo descriptum est factum ex area circuli cujus radius B C, in arcuum C E quem centrum C describit; seu est $\frac{22}{7}BC^2 \times CE$. Quarè uniformis resistentia fili est ad uniformem resistentiam globi ut $R \times AB \times BD$ ad $\frac{22}{7}BC^2 \times CE$, hoc est, ob rectas A B, A C arcubus B D, C E proportionales, ut $R \times AB^2$ ad $\frac{22}{7}BC^2 \times AC$, totaque uniformis resistentia penduli ad uniformem resistentiam globi ut $R \times AB^2 + \frac{22}{7}BC^2 \times AC$ ad $\frac{22}{7}BC^2 \times AC$.

Exemvli causâ. Sit R = $\frac{1}{100}$ digit. A C = 126 digit. B C = $3\frac{7}{16}$, A B = $122\frac{9}{16}$ ut in experimentis primo ac secundo, et invenietur uniformis resistentia fili ad uniformem resistentiam globi ut 1 ad 31. circiter, et ideò resistentia fili est resistentiæ totius penduli pars $\frac{1}{32}$. Cùm igitur

tiam resistentiæ totius minoris penduli; et inde didici quod resistentiæ globorum, demptâ fili resistentiâ, sunt quam proximè in duplicatâ ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, seu $10\frac{1}{2}$ ad 1 non longe abest a diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cùm resistentia fili in globis majoribus minoris sit momenti, tentavi etiam experimentum in globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum suspensionis et centrum oscillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum suspensionis et nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli descensu a nodo descriptus 32 dig. Arcus ascensu ultimo post oscillationes quinque ab eodem nodo descriptus 28 dig. Summa arcuum seu arcus totus oscillatione mediocri descriptus 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. (b) Ejus pars decima seu differentia inter descensum et ascensum in oscillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oscillatione mediocri a nodo descriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oscillatione mediocri a centro globi descriptum; et ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0, 4475. (c) Si longitudo penduli,

supra inventa sit resistentia uniformis ad pondus globi lignei ut 1 ad 735294, subductâ resistentiâ fili, erit uniformis resistentia globi lignei ad ejusdem pondus unciar. Rom. $57\frac{7}{22}$ ut 1 ad 760000 circiter. Quæramus nunc resistentiam uniformem globi plumbei in ultimo experimento. Mediocres arcuum differentiæ in primâ tabulâ sumptæ sunt in cas. 1. 2. et 3. $\frac{1}{1808}$, $\frac{1}{912}$ et, $\frac{1}{386}$, respectivè. Loco V, in quantitate $A + B V + C V^2$, scribantur successivè numeri 1, 2, et 4, et prodibunt æquationes $A + B + C = \frac{1}{1808}$, $A + 2 B + 4 C = \frac{1}{912}$, et $A + 4 B + 16 C = \frac{1}{386}$, ex quibus habetur $A = 0,0001455$, $B = 0,0004076$, et $C = 0,0000679$. Unde resistentia uniformis est ad pondus globi unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut $\frac{1}{2}$ A seu 0, 0000728 ad 121, id est, ut 1 ad 1662088. Jam verò cùm in hoc experimento sit $A C = 126$ digit. $B C = 1$, $A B = 125$, si ponatur $R = \frac{1}{100}$ digit. invenitur uniformis resistentia fili ad resistentiam uniformem globi ut 15625 ad 39600, sivè ferè ut 2 ad 5; et ideò fili resistentia totius resistentiæ uniformis partes continet $\frac{2}{7}$. Quarè uniformis resistentia globi plumbei est ad ejus pondus unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut 1 ad 2326923 circiter; et hinc uniformis resistentia globi plumbei cujus diameter est digit. 2, est ad resistentiam globi lignei uniformem cujus diameter est digit. $6\frac{7}{8}$ ut $26\frac{1}{4} \times 760000$ ad $57\frac{7}{22} \times 2326923$, hoc est, ut 19950000 ad 133374995 sivè ut 1 ad 6, 685.

Verùm si ponatur resistentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, resistentia globi lignei invenitur esse ad ejusdem pondus $57\frac{7}{22}$ unciar. Rom. in ratione 1 ad 450000 circiter, et resistentia uniformis globi plumbei ad ejus pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. in ratione 1, ad 910900 per tabulam primam; et in ratione 1, ad 1021097 per tabulam secundam ultimi experimenti; undè sumptâ mediocri ratione, resistentia uniformis globi plumbei est ad pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. ut 1 ad 966000 circiter. Et ideò, in hâc resistentiæ hypothesi, uniformis resistentia globi plumbei cujus est diameter digit. 2, est ad resistentiam uniformem globi lignei cujus diameter est digit. $6\frac{1}{8}$, ut $26\frac{1}{4} \times 450000$ ad $57\frac{7}{22} \times 966000$ seu ut 1, ad 4,687, circiter.

(b) * *Ejus pars decima.* Si oscillatio ex itu et reditu penduli, seu ex bino descensu binoque ascensu componatur, quinque oscillationes sic acceptæ æquivalent oscillationibus decem quarum singulæ ex uno tantùm descensu unoque ascensu constant. Priore significatione Newtonus oscillationes quinque, de quibus hic loquitur, accepisse videtur, ut potè qui differentiam 4 digit. per num. 10 dividit ut differentiam inveniat inter arcus descensu uno et subsequente ascensu descriptos in unâ mediocri oscillatione ex descensu uno unoque ascensu compositâ.

(c) * *Si longitudo penduli,* in medio non resistente *augeretur in ratione 126 ad* $122\frac{1}{2}$, *tempus oscillationis,* ob datam globi funependuli massam et pondus, *augeretur in ratione illâ subduplicatâ* (per Cor. 6. Prop. XXIV.) quod etiam in medio resistente verum est quam proximè (180).

* Mutatâ longitudine penduli et manente longitudine arcûs descripti, velocitas penduli diminuetur in ratione subduplicatâ longitudinis

manente longitudine arcûs descripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$ tempus oscillationis augeretur, et velocitas penduli diminueretur in ratione illâ subduplicatâ, maneret verò arcuum descensu et subsequente ascensu descriptorum differentia 0, 4475. Deinde si arcus descriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia ista 0, 4475 (d) augeretur in duplicatâ illa ratione, ideóque evaderet 1, 5295. Hæc ita se haberent, ex hypothesi quod resistentia penduli esset in duplicatâ ratione velocitatis. Ergo si pendulum describeret arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, et longitudo ejus inter punctum suspensionis et centrum oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum descensu et subsequente ascensu descriptorum foret 1, 5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318, 136. Rursus ubi pendulum superius ex globo ligneo constructum centro oscillationis, quod a puncto suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum descensu et ascensu descriptum (e) fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49, 396. Duxi autem differentias hasce in pondera globorum, ut invenirem eorum resistentias. Nam differentiæ oriuntur ex resistentiis, (f) suntque ut resistentiæ directè et pondera inversè. Sunt igitur resistentiæ ut numeri 318, 136 et 49, 396. Pars autem resistentiæ globi minoris, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam ut 0, 56752 ad 0, 61675, id est, ut 45, 453 ad 49, 396; et pars resistentiæ globi majoris

penduli, (ideóque inversè ut tempus); nam velocitates descensu per arcus quosvis acquisitæ sunt in ratione subduplicatâ abscissarum illis arcubus correspondentium; chordæ verò pro quibus arcus sumere hic liceat, sunt mediæ proportionales inter abscissas suas et circulorum diametros, si ergo sumantur arcus æquales in circulis inæqualibus, abscissæ eorum arcuum erunt inversè ut diametri circulorum sive inversè ut eorum radii, hoc est inversè ut longitudines pendulorum, ergo velocitates quæ sunt in ratione subduplicatâ abscissarum, erunt in ratione subduplicatâ inversâ longitudinum pendulorum; cùm ergo arcuum differentiæ sint ut resistentia et quadratum temporis conjunctim, resistentiaque sit ut quadratum velocitatis, sitque quadratum velocitatis inversè ut longitudo pendulorum; et quadratum temporis directè ut longitudo pendulorum, compensatis rationibus manebunt eædem arcuum differentiæ, si mutatâ pendulorum longitudine arcus æquales describantur.

(d) * *Augeretur in duplicatâ illâ ratione* (per Cor. 2. Prop. XXXI.).

(e) * *Fuit* $\frac{126}{121}$ *in* $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$. Cùm enim in cas. 6. experimenti primi penduli seu fili ad nodum usquè longitudo esset 121 digit. arcus descriptus erat $119\frac{5}{29}$ digit. et arcuum differentia $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit. Et mutatâ penduli longitudine in ratione 126 ad 121, arcus descriptus et differentia mutantur in eâdem ratione, fiebatque proindè arcus $\frac{126}{121} \times 119\frac{5}{29}$, seu $124\frac{3}{31}$ digit. et differentia $\frac{126}{121} \times \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit.

(f) * *Suntque ut resistentiæ directè et pondera inversè.* Nam (per Cor. Prop. XXX.) differentiæ illæ in datos numeros ductæ sunt ad penduli longitudinem, ut resistentia ad gravitatem seu pondus globi penduli; data igitur penduli longitudine, differentiæ illæ sunt ut resistentiæ directe et pondera inversè.

propemodum æquatur ipsius resistentiæ toti; ideóque partes illæ sunt ut 318, 136 et 45,453 quamproximè, id est, ut 7 et 1. Sunt autem globorum diametri $18\frac{3}{4}$ et $6\frac{7}{8}$; et harum quadrata $351\frac{9}{16}$ et $47\frac{17}{64}$ sunt ut 7,438 et 1, id est, ut globorum resistentiæ 7 et 1 quamproximè. Differentia rationum haud major est, quam quæ ex fili resistentiâ oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt, paribus globis, ut quadrata velocitatum, sunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum globorum.

Cæterum globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfectè sphæricus, et propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratiâ neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minimè sollicitus. Optarim itaque, (g) cùm demonstratio

(g) 187. * *Cùm demonstratio vacui*, &c. Utrum resistentia quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an verò partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, experimentis globorum in medio resistente oscillantium inveniri potest. Nam si, exempli causâ, globorum in dato medio paribus velocitatibus motorum resistentiæ semper essent in duplicatâ diametrorum ratione, insensibilis foret in partibus internis resistentia; cum enim resistentia illa interna a numero, magnitudine, figurâ et texturâ internarum partium penderet, non posset eadem constanter manere in globis æqualibus et heterogeneis, ligneis v. g. et plumbeis, nec in globis inæqualibus externarum superficierum, sed potiùs solidorum rationem sequeretur. Porrò superioribus experimentis jam probatum est in velocioribus globorum motibus, resistentias quadratis diametrorum proportionales esse quam proxime, concludendum igitur est nullam esse notabilem in partibus corporum internis resistentiam, quod tamen deinceps pluribus aliis argumentis demonstrabit Newtonus. Verum si medium quoddam æthereum vel longe subtilissimum omnes omnium corporum poros et meatus repleret, propter medii illius ætherei summam densitatem atque inertiam omni materiæ propriam, partes internæ corporum per magnam resistentiam sentirent. At qui Cartesianum mundi pleni systema emendarunt novisque inventis ornarunt eruditissimi sagacissimique mathematici, ii, repudiatis veteribus effugiis, quibus Cartesianorum vulgus utitur, ex subtilitate ac mobilitate ætheris et pororum quibus corpora omnia pertusa sunt dispositione petitis, hoc unum responsum proferunt, æthercam materiam corporum gravium motibus minime resistere, quod sit omni gravitate destituta. Duplicis itaque generis materiam in universo distinguunt, gravem alteram cujus partes in vorticulos divisæ non sunt, alteram non gravem, omnis tamen gravitatis causam, cujus partes ex tenuissimis variorum ordinum vorticulis elasticis constant. Cùm autem vis motrix ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibenda, decrescente corporis hujus gravitate, in eâdem ratione decrescat, nullaque sit ætheris gravitas, consequens esse aiunt ut corpus grave quod in æthere datâ celeritate fertur, nonnisi infinitesimam motûs sui partem ex resistentia ætheris finito quovis tempore deperdat. Verùm prætterquam quod totum hoc systema, ut elegans ac venustum, fictis fere ad arbitrium hypothesibus, quas Newtonus e physicâ experimentali vellet eliminari, nititur, plurimisque et gravissimis aliis ex mechanica atque astronomiâ difficultatibus premitur, adductum modò responsum his etiam laborat incommodis. Primum quidem evidens est, vim illam quæ ad corpus grave contrà gravitatis directionem sustinendum necessaria est, cum corporis pondere decrescere debere; sed non ità manifestum est vim motricem ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibendam, in ratione ponderis decrescere oportere, ubi vis illius motricis directio gravitatis directioni opposita non est, sed illi perpendicularis aut cum illâ conspirans. Præterea materia omnisætherea circa Solem, stellas, atque planetas singulos pernicissimo motu in orbem acta vi centrifugâ pollet quâ a centris magnorum vorticum, atque etiam a centris singulorum vorticulorum propriis recedere nititur, undè cæterorum corporum gravitas ortum habet; at vis illa centrifuga quæ cum vi centripetâ seu gravitate conferri potest, idem præstare in æthere debet ratione motûs in datâ materiæ quantitate datâ vi motrice imprimendi, quod in cæteris corporibus gravitas præstat. Nulla igitur esse ratio videtur cur corpus grave datâ celeritate motum nonnisi infinitesimam suæ celeritatis particulam ex ætheris non gravis resistentiâ amittat, siquidem illud vi centrifugâ pollet; et, si materia ætherea suâ vi centrifugâ vel certè vi indè ortâ corporum gravitatem producat, eorumque motum finitum acceleret et extinguat finito tempore, multò magis eadem materia corpus grave movere, aut motum ejus finito tempore extinguere debet, si finitâ velocitate in illud incurrat ac continuò urgeat, cum vis cen-

vacui ex his dependeat, ut experimenta cum globis et pluribus et majoribus et magis accuratis tentarentur. Si globi sumantur in proportione geometricâ, putà quorum diametri sint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progressione experimentorum colligetur quid in globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam verò conferendo resistentias diversorum fluidorum inter se, tentavi sequentia. Arcam ligneam paravi longituaine pedum quatuor, latitudine et altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aquâ fontanâ, fecique ut immersa pendula in medio aquæ oscillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum movebatur ut in tabulâ sequente descripsimus, existente videlicet longitudine penduli a puncto suspensionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oscillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus oscillationum in aqua			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus oscillationum in aëre	$85\frac{1}{2}$	287	535						

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aëre, et $1\frac{1}{5}$ in aquâ amissi sunt. Erant quidem oscillationes in aëre paulo celeriores quàm in aquâ. At si oscillationes in aquâ in eâ ratione accelerarentur ut motus pendulorum in medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{5}$ in aquâ, quibus (h) motus idem ac

trifuga infinitesima sit, si cum vi quâ corpus spatium finitum tempore infinito describit, conferatur.

* Et quidem resistentia ex gravitate materiæ occurrentis non pendet, sed ex ejus inertiâ, quâ fit ut nullum corpus ab alio motum suscipiat quin tantumdem motus in eo destruat, idque mechanici communiter statuunt tam ex consensu omnium quorumcumque phænomenorum, ubi (semotâ gravitatis consideratione) nullus motus motum producendo non consumitur, quam ex principiis metaphysicis quâ liquet quod si res ita se non haberet, vel minimus motus infinitum motum produceret, totaque universi moles ex atomi progressione dimoveretur, quod absurdum. Unde si æther non resisteret, hoc est vi inertiæ careret, fingendæ forent duæ materiæ species, quarum altera vi inertiæ prædita foret, altera vero non, ita ut quamvis ab occurrente materia dimoveatur, nihil tollat de ejus motu; simul autem statuitur quod id æther corporum motum sistere potest aut mutare quomodocumque, nam si æther sit gravitatis causa oportet ut illa ipsa materia ætherea quæ corporis moti actione movetur, dum tamen nihil quicquam de illius motu tollit, possit illud idem corpus si sursum feratur sistere, in adversum ejus directionem mutare, &c. Quæ metaphysicè etiam inter se repugnare videntur, nec satis fuisse perpensa ab ingeniosissimis Cartesianismi restauratoribus.

(h) * *Motus idem ac prius amitteretur.* Differentia arcuum motui amisso proportionalis, est ut resistentia et quadratum temporis conjunctim (per Cor. 5. Lem. X.); sed aucta paululum velocitate, resistentia quamproximè augetur in ejus ratione duplicatâ (per Hyp.) et simul qua-

prius amitteretur; ob resistentiam auctam et simul quadratum temporis diminutum in eâdem ratione illâ duplicatâ. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aëre oscillationibus 535 et in aquâ oscillationibus $1\frac{1}{5}$ amissi sunt; ([i]) ideóque resistentia penduli in aquâ est ad ejus resistentiam in aëre ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam A V + C V ^{2} differentiam arcuum in descensu et subsequente ascensu descriptorum a globo in aëre cum velocitate maximâ V moto; et cum velocitas maxima in casu columnæ quartæ sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8; et differentia illa arcuum in casu columnæ quartæ ad differentiam in casu columnæ primæ ([k]) ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his casibus 1 et 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ et 4280 pro differentiis arcuum, et fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$ et $8\,A + 64\,C = 4280$ seu $A + 8\,C = 535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7\,C = 449\frac{1}{2}$ et $C = 64\frac{3}{14}$ et $A = 21\frac{2}{7}$: atque ideò resistentia, ([l]) cùm sit ut $\frac{7}{11}\,A\,V + \frac{3}{4}\,C\,V^2$, erit ut $13\frac{6}{11}\,V + 48\frac{9}{56}\,V^2$. Quare in casu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$ seu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; et idcirco resistentia penduli in aquâ est ad resistentiæ partem illam in aëre, quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ([m]) ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ et 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim, id est, ut 571 ad 1. Si penduli in aquâ oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeò ut penduli in aquâ oscillantis resistentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consi-

dratum temporis minuitur in eâdem ratione illâ duplicatâ, quia totus arcus descriptus numero oscillationum $1\frac{1}{5}$ idem quam proximè manet. Quarè motus amissus numero oscillationum $1\frac{1}{5}$ idem manet, si oscillationes in aquâ accelerentur ut dictum est (vid. not. ([c]) pag. 181.)

([i]) * *Ideòque resistentia penduli.* Nam motus in aëre amissus unâ mediocri oscillatione, quâ arcus digit. 14 describitur, est pars $\frac{1}{535}$ motûs totius oscillationibus 535, amissi; et similiter motus in aquâ amissus æquali oscillatione quâ arcus digit. 14 pari velocitate describeretur est quam proximè pars $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ejusdem motûs totius amissi oscillationibus $1\frac{1}{5}$ in aquâ et oscillationibus 535 in aëre. Quarè cùm resistentiæ totæ unâ oscillatione mediocri sint ut partes illæ motûs amissæ, est resistentia penduli in aquâ ad ejus resistentiam in aere ut $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ad $\frac{1}{535}$, id est, ut 535 ad $1\frac{1}{5}$.

([k]) * *Ut* $\frac{2}{535}$ *ad* $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$. Dividendo nimirum arcuum differentias per numerum oscillationum ut differentia in unâ mediocri oscillatione habeatur, quemadmodum suprà factum est.

([l]) * *Cùm sit ut* $\frac{7}{11}\,A\,V + \frac{3}{4}\,C\,V^2$ (per Cor. Prop XXX.).

([m]) * *Ut* $61\frac{12}{17}$ *ad*, &c. Est enim, ex suprà dictis, resistentia in aquâ ad resistentiam totam in aëre ut 535 ad $1\frac{1}{5}$ et resistentia tota in aëre ad resistentiæ partem illam in aëre quæ velocitatis quadrato proportionalis est ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$, et idcircò (ex æquo et per compositionem rationum) *resistentia penduli in aquâ est ad resistentiæ partem illam in aëre,* &c.

deranda venit, sit ad resistentiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate in aëre oscillantis, (n) ut 850 ad 1 circiter, hoc est, ut densitas aquæ ad densitatem aëris quamproximè.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aquâ, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum forte videatur) resistentia in aqua augebatur in ratione velocitatis plusquam duplicatâ Ejus rei causam investigando, in hanc incidi, quod arca nimis angusta esset pro magnitudine globi penduli, et motum aquæ cedentis præ angustiâ suâ nimis impediebat. Nam si globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; resistentia augebatur, in duplicatâ ratione velocitatis quam proximè. Id tentabam construendo pendulum ex globis duobus, quorum inferior et minor oscillaretur in aquâ, superior et major proximè supra aquam filo affixus esset, et in aëre oscillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut (o) in tabulâ sequente describitur.

Arcus descensu primo descriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amisso proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus oscillationum	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo resistentias mediorum inter se, effeci etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, et diameter globi penduli quasi tertia pars digiti. Ad filum autem proximè supra mercurium affixus erat globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo et aquâ communi, ut pendulo in fluido utroque successivè oscillante, invenirem proportionem resistentiarum; et prodiit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est, ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi globum pendulum paulo majorem adhibebam, putà cujus diameter esset quasi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat resistentia argenti vivi in eâ ratione ad resistentiam aquæ, quam habet numerus 12

(n) * *Ut* 850. *ad* 1 *circiter*. Si enim resistentia fili ponatur ut suprà factum est, æqualis tertiæ parti resistentiæ totius in aëre, erit fere resistentia penduli in aquâ ad ejus resistentiam totam in aëre ut $535 - \frac{6}{15}$ ad $1\frac{1}{5} - \frac{6}{15}$, seu ut 2673 ad 4, et $2673 \times 61\frac{12}{17}$ ad $4 \times 48\frac{9}{56}$, ut 850 ad 1 circiter.

(o) * *In tabulâ sequente*. Arcuum differentiæ dividantur per numerum oscillationum in casu unoquoque, et prodibunt differentiæ in oscillatione unâ mediocri 1.1851; 0.3076; .0827; .0235; .0073; .0023; .0010 quæ sunt quam proximè ut quadrata velocitatum, sive ut 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{64}$ $\frac{1}{256}$ in majoribus oscillationibus priores enim termini sunt proximè sequentium fere quadrupli, in minoribus verò oscillationibus præcedentes termini sunt in minore ratione ad sequentes.

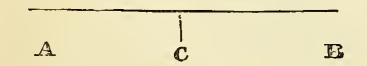
vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quod in his ultimis vas nimis angustum fuit pro magnitudine globi immersi. Ampliato globo, deberet etiam vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus et in liquoribus tum metallorum fusorum, tum aliis quibusdam tam calidis quam frigidis repetere: sed omnia experiri non vacat, et ex jam descriptis satis liquet resistentiam corporum celeriter motorum densitati fluidorum in quibus moventur proportionalem esse quam proximè. Non dico accuratè. Nam fluida tenaciora, pari densitate, proculdubio magis resistunt quàm liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quàm aqua pluvialis, aqua quàm spiritus vini. Verum in liquoribus, qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in aëre, in aquâ seu dulci seu salsâ, in spiritibus vini, terebinthi et salium, in oleo a fæcibus per distillationem liberato et calefacto, oleoque vitrioli et mercurio, ac metallis liquefactis, et si qui sint alii, qui tam fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrimè in guttas decurrendo resolvantur, nullus dubito quin regula allata satis accuratè obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis et majoribus et velocius motis instituantur.

Denique cùm nonnullorum opinio sit, medium quoddam æthereum et longè subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros et meatus liberrimè permeet; a tali autem medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concavâ, ut annulus arcu suo superiore aciei annixus liberrimè moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam a perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oscillante pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accuratè notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissimè invenirem. Tum pyxidem plumbo et gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, unà cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio

partis reliquæ quæ inter uncum et pyxidem pendulam tendebatur. Nam filum tensum (p) dimidio ponderis sui pendulum a perpendiculo digressum semper urget. Huic ponderi addebam pondus aëris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta et septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad resistentiam pyxidis vacuæ quàm 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies et octies majorem vi insitâ pyxidis vacuæ, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque ideò completis semper oscillationibus 78 (q) ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxidis in ipsius superficie externâ, et B resistentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; et si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut materia, seu numerus particularum quibus resistitur: erit 78 B resistentia pyxidis plenæ in ipsius partibus internis: ideóque pyxidis vacuæ resistentia tota A + B erit ad

(p) * *Dimidio ponderis sui.* Fili tensi A B homogenei et æqualis ubique crassitiei centrum gravitatis est in loco medio C, (59. Lib. I.) ideóque vis quâ filum pondere suo toto P, ad rotandum circà A, urgetur, est ut A C $\times$ P, seu



ut $\frac{1}{2}$ P $\times$ A B (63. Lib. I.) jam si inveniendum sit pondus Q in B locandum ut momentum Q $\times$ A B æquivaleat momento seu vi fili totius; erit Q $\times$ A B $= \frac{1}{2}$ P $\times$ A B, ideóque Q $= \frac{1}{2}$ P. Quarè filum tensum dimidio ponderis sui P pendulum a perpendiculo digressum semper urget.

(q) * *Ad loca illa notata redire.* Si resistentiæ in singulis oscillationibus essent æquales, motus amissi, ut potè resistentiis proportionales, essent quoque æquales; sed motus amissi, paribus oscillationum temporibus, sunt ut massæ seu pondera corporum et spatia motibus amissis describenda conjunctim; ideóque spatia illa essent ut pondera inversè; hoc est, spatium motu pixidis vacuæ amisso in unâ oscillatione describendum, esset ad spatium motu pixidis plenæ oscillatione unâ amisso percurrendum ut 78 ad 1, et propterea spatia illa, completâ unicâ pixidis vacuæ oscillatione, et pixidis plenæ oscillationibus 78 absolutis, forent æqualia quamproximè, atquè ideò pixis plena, completis semper oscillationibus 78, ad loca notata rediret.

Cùm in hâc Sectione VI. Newtonus de solo corporum in cycloide oscillantium motu egerit, multa verò a recentioribus authoribus inventa sint, quibus generalis motuum in curvis quibuslibet theoria longe promota est, principia quibus usi sunt sequenti Problemate breviter exponemus.

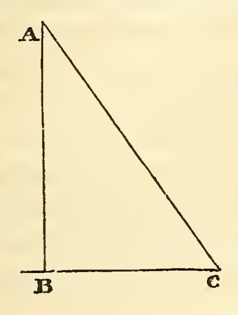
PROBLEMATA.

188. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis, definire motum corporis per curvam quamlibet ascendentis vel descendentis in medio uniformi cujus resistentia est ut velocitatis functio quælibet.

De corporum ascensu ac descensu in lineis rectis ad horizontem quomodocumque inclinatis

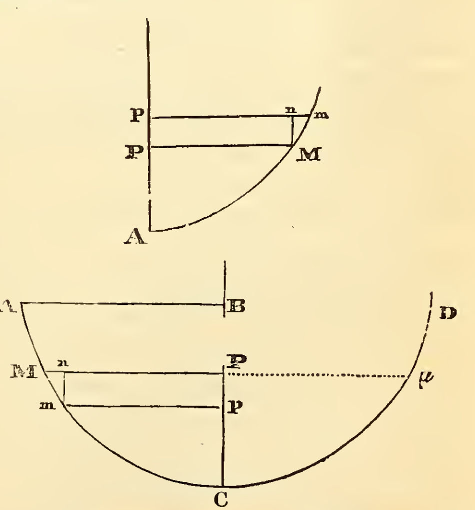
pyxidis plenæ resistentiam totam A + 78 B ut 77 ad 78, et divisim A + B ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque A + B ad B ut 77 × 77 ad 1,

agere hic necessum non est; si enim corpus in lineâ rectâ A C ad horizontem B C utcumque inclinatâ ascendat vel descendat, resistentia et



celeritas in quibuscumque locis et spatium descriptum ac tempus quo descriptum est, definiuntur per Prop. III. Sect. I., 8. et 9. Sect. II., 13. et 14. Sect. III. ac per notas iisdem locis adjunctas. Cum enim vis gravitatis secundum directionem A B urgentis sit ad ipsius partem quæ agit juxtà directionem A C, in datâ ratione lineæ A C ad A B, seu in datâ ratione sinûs totius ad sinum anguli inclinationis A C B; si loco vis gravitatis horizonti perpendicularis adhibeatur in calculis et constructionibus pars illius data quæ secundum directionem A C agit, constructiones calculique in citatis locis non mutantur. Superest igitur ut corporis in curvâ lineâ ascendentis aut descendentis motum definiamus.

Descendat primùm corpus e loco dato A per curvam A M, ducatur verticalis A P, ad quam ex punctis M, et m, infinitè propinquis demittantur perpendicula M P, m p, et ex M ad p in perpendiculum M n. Gravitas constans secundùm directionem verticali A P parallelam semper agens sit = g, resistentia in loco M = r, velocitas corporis ibidem = v; tempus quo describitur A M = t, A P = x, A M = s, P p = M n = d x, et M m = d s. Jam verò M m, est ad M n, seu d s ad d x, ut vis gravitatis g ad ipsius partem in directione M m agentem quæ ideò erit $= \frac{g\,d\,x}{d\,s}$; subducatur vis resistentiæ r, et vis residua quâ corpus in loco M, juxtà directionem M m urgetur, erit $= \frac{g\,d\,x}{d\,s} - r$. Undè (18) fit $g\,d\,x - r\,d\,s = v\,d\,v$. Hujus autem æquationis fluens ità sumi debet ut evanescentibus x et s evanescat quoque v si velocitas corporis in loco A nulla sit, et fiat v = c, si velocitas corporis in A, sit = c. Simili modo si corpus e loco dato A per arcum A M ascendat, et omnia ut modò supposuimus maneant, erit (18) $g\,d\,x + r\,d\,s = -v\,d\,v$, cujus æquationis fluentem ità sumi oportet ut positis x et s = o, fiat v, æqualis velocitati in loco A datæ.



Si abscissa x in verticali B C per curvæ A C D punctum infimum C ducta capiatur, sitque B P = x, et cætera maneant ut supra, erit adhuc pro corporis descensu $g\,d\,x - r\,d\,s = v\,d\,v$; at pro ascensu per arcum C μ si data sint puncta A et B, dicaturque C μ vel A C μ = s, erit $-g\,d\,x + r\,d\,s = -v\,d\,v$, seu adhuc $g\,d\,x - r\,d\,s = v\,d\,v$, quia crescente s decrescit x et contrà. Si vero dicatur C P = x et C M = s, quia hæ quantitates respectu aliarum B P, et A M negativæ sunt, fiet pro descensu $-g\,d\,x + r\,d\,s = v\,d\,v$, seu $g\,d\,x - r\,d\,s = -v\,d\,v$, et pro ascensu si dicatur C μ = s erit $g\,d\,x + r\,d\,s = -v\,d\,v$ quarum æquationum altera in

et divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejusdem resistentia in externâ superficie, et amplius. Sic verò disputamus ex hypothesi quod major illa resistentia pyxidis plenæ, non ab aliâ aliquâ causâ latente oriatur, sed ab actione solâ fluidi alicujus subtilis in metallum inclusum.

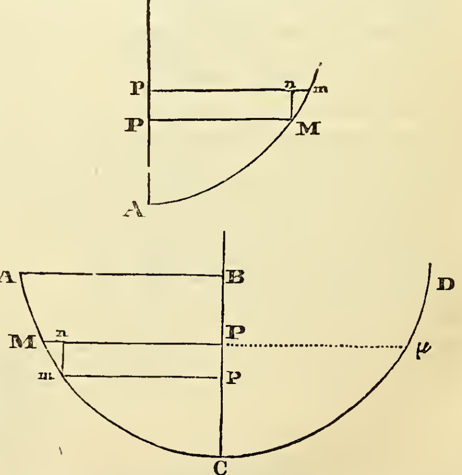
Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in quâ illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoriâ exciderunt, omittere compulsus sum.

Nam omnia denuò tentare non vacat. Primâ vice, cùm unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, et ejus oscillationibus obsequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, et tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

alteram abit, mutato signo quantitati r, præfixo. Ex datâ igitur lege resistentiæ, loco r scribatur ipsius valor per v et datas quantitates, et ex datâ æquatione ad curvam A M, loco d x scribatur valor ejus per d s, s et datas quantitates in superioribus formulis seu æquationibus; et deinde per curvarum quadraturas vel per series, capiantur, ut oportet, formularum fluentes, obtinebitur v per s et contrà, atque etiam r per s, et quia tempus t, quo arcus s describitur est S. $\frac{d\,s}{v}$, dabitur quoque tempus. Q. e. i.

Exempli causâ. Sit resistentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, quæ est hypothesis naturæ, seu sit $r = \frac{a\,a + v\,v}{b}$, dicanturque B P = x, A M = s et æquatio $g\,d\,x - r\,d\,s = v\,d\,v$ in hanc migrabit $g\,d\,x - \frac{a\,a\,d\,s}{b} = v\,d\,v + \frac{v\,v\,d\,s}{b}$; ut hoc secundum æquationis membrum debitam formam acquirat, ponatur $d\,s = \frac{\frac{1}{2}\,b\,d\,z}{z}$, seu $s = \frac{1}{2}\,b$ L. z, æquatio evadet $g\,z\,d\,x - \frac{1}{2}\,a\,a\,d\,z = z\,v\,d\,v + \frac{1}{2}\,v\,v\,d\,z$, sumptis fluentibus, sit g S. $z\,d\,x - \frac{1}{2}\,a\,a\,z = \frac{1}{2}\,z\,v\,v$. Undè invenietur $v\,v = \frac{2\,g\,\text{S.}\,z\,d\,x}{z} - a\,a$. Est autem S. z d x, area curvæ cujus abscissa x et ordinata z; et z datur per s, ope logarithmicæ, et x per s ope æquationis ad curvam A M. Sit h numerus cujus logarithmus est unitas, seu L. h = 1, erit s L. h = $\frac{1}{2}$ b L. z, et $\frac{2\,s}{b}$ L. h = L. $h^{\frac{2s}{b}}$ = L. z. atquè $h^{\frac{2s}{b}} = z$, undè habetur $v\,v = \frac{2\,g\,\text{S.}\,h^{\frac{2s}{b}}\,d\,x}{h^{\frac{2s}{b}}} - a\,a$.

Si in his æquationibus ponatur a = o, definietur motus corporis in lineâ qualibet curvâ



descendentis et ascendentis in medio uniformi, cujus resistentia velocitatis quadrato proportionalis est. Cæterum totam hanc materiam copiosissimè et accuratissimè tractavit clariss. Eulerus Tom. II. Mechan.

SECTIO VII.

De motu fluidorum et resistentiâ projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum systemata duo similia ex æquali particularum numero constent, et particulæ correspondentes similes sint et proportionales, singulæ in uno systemate singulis in altero, et similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, et inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eæ inter se quæ in uno sunt systemate et eæ inter se quæ sunt in altero) et si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant, vel fugent se mutuò, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inversè et quadrata velocitatum directè: dico quod systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus (r) *similiter moveri.*

Corpora similia et similiter sita temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: putà si particulæ unius systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes et proportionales figurarum similium partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem incœptorum motuum, pergent similiter moveri, usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter (s) in lineis rectis per motûs leg. 1. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, et vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inversè et quadrata velocitatum directè,

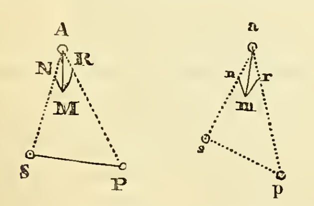
(r) * *Similiter moveri.* Sunto A et a, P et p, S et s, &c. particulæ in duobus systematibus sibi mutuò correspondentes. Particula A in suo systemate tempore T, describat spatium quam minimum A B, et particula correspondens a, in altero systemate tempore t, describat spatium a b, priori A B, simile similiterque situm, ità ut sit A B, ad a b, ut diameter particulæ A, ad diametrum particulæ a, sivè ut A S ad a s, vel P S ad p s, et angulus A S B æqualis angulo a s b, atque S A B æqualis s a b. Et aliæ sibi mutuò correspondentes particulæ quiescant vel simili modo moveantur. His positis, demonstrandum est, quod si sumantur tempora alia quæ sint ut T et t, particulæ correspondentes erunt utrinque similiter positæ.

(s) * *In lineis rectis per motûs leg.* 1. Ideóque ob velocitates uniformes et similes motuum directiones pergent similiter moveri temporibus proportionalibus, usque ad occursus suos primos.

quoniam particularum situs sunt similes et vires proportionales, (t) vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur, ex viribus singulis agitantibus (per legum Corollarium secundum) compositæ, similes habebunt determinationes, perinde ac si centra inter particulas similiter sita respicerent; et erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentes, hoc est, ut correspondentium particularum diametri inversè, et quadrata velocitatum directè: et propterea efficient ut correspondentes particulæ figuras similes describere pergant. (u) Hæc ita se habebunt (per Corol.

(t) * *Vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur similes habebunt determinationes, et erunt ad invicem ut correspondentium particularum diametri inversè et quadrata velocitatum directè.*

* Particula A inter duas S et P, et particula a inter duas s et p sint similiter sitæ, et quâcumque celeritate in directione similiter positâ particulæ illæ A et a ferantur, trahanturque vel fugentur illæ particulæ A et a à particulis S et P, s et p per vires quæ sint ut diametri particularum correspondentium inversè sive ut lineæ homologæ inversè, et quadrata velocitatum directè, dico primò quod directio vis compositæ trahentis particulas A et a similiter posita erit in utroque systemate, nam anguli S A P et s a p, quos faciunt vires agentes, ex hypothesi æquales sunt, vis autem composita sequetur diagonalem quæ faciat angulos cum directione utriusque vis componentis quorum sinus sint reciprocè ut vires agentes, per naturam virium compositarum, sit ea diagonalis hic A M, illic a m, erit ergo sinus anguli S A M,



ad sinum anguli P A M, inversè ut vis particulæ S ad vim particulæ P sive directè ut lineæ homologæ S A et P A (nam quoniam de unico corpore A nunc agitur ratio quadratorum velocitatum hic nihil mutat) pariter sinus anguli s a m est ad sinum anguli p a m ut s a ad p a; sed est S A ad P A sicut s a ad p a ex hypothesi, ergo anguli æquales S A P et s a p in eadem ratione secantur per lineas A M, a m, ideóque anguli S A M et s a m, M A P et m a p sunt æquales, ergo directio vis compositæ trahentis particulas A et a in singulo systemate similiter est posita. Q. erat 1.

2. Vires illæ compositæ erunt ut particularum diametri inversè et quadrata velocitatum directè.

Secetur utcumque in directione A S lineola A N quæ vim particulæ S exprimat, ducaturque N M, parallela A P, et ex M ducatur M R parallela A S, fiet parallelogrammum A N M R, in quo M R = A N, et angulus A M R = ang. M A N, ideóque A N ad A R ut sinus anguli M A R ad sinum ang. M A N, sive ut P A ad S A, hoc est ut vires particularum S et P, ideóque A R exprimet vim particulæ P, et A M exprimet vim compositam ex viribus S et P. Sumatur in a s lineola a n, quæ sit ad A N, ut a s ad A S inversè, et ut quadratum velocitatis in a ad quadratum velocitatis in A directè, ductisque n m et m r parallelis lineis a p, a s erunt a n et a r ut vires particularum s et p, et a m exprimet vim ex iis compositam.

Sed ob similitudinem triangulorum A N M, a n m est A N ad A M sicut a n ad a m, sive vis particulæ A, ad vim compositam ex particulis S et P, ut vis particulæ a ad vim compositam ex particulis s et p, ideóque vicissim, vis particulæ A ad vim particulæ a ut, vis composita ex vi particularum S et P, ad vim compositam ex viribus particularum s et p; sed vis particulæ A est ad vim particulæ a, inversè ut particularum diametri, et directè ut velocitatum quadrata ex hypothesi, ergo vires compositæ sunt in eâdem ratione. Q. e. d.

Idem ratiocinium ad vires compositas ex pluribus particulis extendetur. Unde *vires totæ*, &c.

(u) * *Hæc ita se habebunt* (per Cor. 1. et 8. Prop. IV. Lib. I.). Aut quod idem est per hoc Lemma.

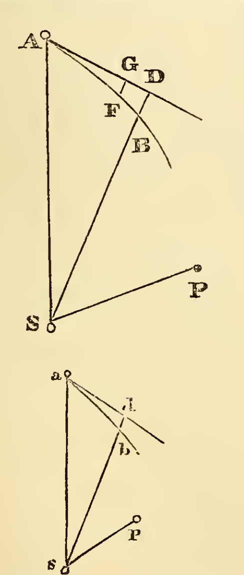
189. *Lemma.* Si corpora duo A, a, circà centra immota S, s, projiciantur secundum directiones A D, a d, quæ cum distantiis A S et a s æquales angulos D A S, d a s constituunt, et urgeantur viribus acceleratricibus centra illa S, s respicientibus, quæ semper sint inter se ut quadrata velocitatum corporum directè et distantiæ a centris inversè, corpora illa figuras similes circà centra S et s describent, similesque et proportionales figurarum illarum partes temporibus proportionalibus percurrent.

In projectilium directionibus capiantur partes quam minimæ A D, a d distantiis A S, a s proportionales. Jungantur S D, s d et corpora A, a temporibus quibusvis T, t describant arcus A B, a b qui lineas S D, s d attingunt. Sumantur arcus A F, a b qui eodem tempusculo descripti sint, et ductâ F G parallelâ S D, erit

1. et 8. Prop. IV. Lib. I.) si modò centra illa quiescant. Sin moveantur, quoniam (x) ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris quas particulæ describunt. Similes igitur erunt correspondentium et similium particularum motus (y) usque ad occursus suos primos, et propterea similes occursus, et similes reflexiones, et subinde (per jam ostensa) similes motus inter se donec iterum in se mutuo inciderint, et sic deinceps in infinitum. Q. e. d.

Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint et ad systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum magnitudines ac densitates ad invicem ut magnitudines ac densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri.

(4. Lib. I.) F G ad b d ut vis centralis quâ corpus A urgetur ad vim centralem quâ urgetur corpus a; et quia vires illæ (per Hyp.) sunt ut quadratum velocitatum directè et distantiæ A S, a s, inversè, velocitates autem sunt ut spatia quæ



simul descripta fuissent in tangente A G, a d, erit F G ad b d, ut $AG^2 \times as$ ad $ad^2 \times AS$. Sed (per Cor. 1. Lem. XI.) $BD : FG = AD^2 : AG^2$; quarè (per compositionem rationum et ex æquo) $BD : bd = AD^2 \times as : ad^2 \times AS$. Cùm igitur ob triangulorum A S D, a s d, similitudinem (ex Hyp.) sit $AD : ad = AS : as$ et ideò $AD^2 \times as : ad^2 \times AS = AS : as$; erit $BD : bd = AS : as$, et ob similitudinem figurarum, ut A D ad a d, ideóque ob æquales angulos D et d, triangula A D B, a d b erunt similia, et propterea arcus A B, a b, similes et similiter siti. Simili modo demonstrabitur quod corpora e locis B et b progressa similes arcus ac similiter positos describant, atque ità deinceps. Describent ergò figuras similes circà centra S et s. His verò demonstratis patet (196. Lib. I.) quod describent similes et proportionales figurarum similium partes temporibus proportionalibus, seu quæ semper sint ut tempora T et t.

(x) * *Ob translationum similitudinem.* Oriuntur enim centrorum illorum translationes ex causis proportionalibus et similiter agentibus, videlicet ex similibus particularum similium et correspondentium motibus, adeò ut quemadmodum initio motûs centra similiter moveri cœperunt, similiter quoque deinceps moveri pergant.

(y) * *Usque ad occursus suos primos,* &c. Nam cùm particularum correspondentium distantiæ, post quævis tempora proportionalia, sint semper in datâ diametrorum ratione in duobus systematibus (ex dem.), necesse est ut distantiæ temporibus proportionalibus evanescant, et proindè ut particularum occursus primi contingant, ubi particulæ illæ figurarum similium partes similes descripserunt. Ex quo sequitur particularum illarum occursus primos similes fore, tum ratione directionum, quod jam demonstratum est, tum etiam ratione velocitatum et quantitatum motûs. Siquidem spatia percursa temporibus proportionalibus sunt semper in datâ ratione, ideóque velocitates in locis similibus sunt semper in datâ ratione, et indè ob particularum correspondentium similitudinem et datam densitatum rationem, quantitates motûs quæ sunt ut velocitates et densitates et volumina conjunctim, in locis similibus manent in datâ ratione. Reflexiones igitur quæ ex ejusmodi motibus atque occursibus similibus nascuntur; similes erunt.

Est enim eadem ratio partium majorum systematis utriusque atque particularum.

Corol. 2. Et similes et similiter positæ systematum partes omnes quiescant inter se: et earum duæ, quæ cæteris majores sint, et sibi mutuo in utroque systemate correspondeant, secundum lineas similiter sitas simili cum motu utcumque moveri incipiant: hæ similes in reliquis systematum partibus excitabunt motus, et pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque ideò spatia diametris suis proportionalia describere.

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iisdem positis, dico quod systematum partes majores resistuntur in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum suarum et duplicatâ ratione diametrorum et ratione densitatis partium systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ systematum se mutuo agitant, partim ex occursibus et reflexionibus particularum et partium majorum. Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, (z) id est, ut vires totæ acceleratrices et quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per Hypothesin) ut quadrata velocitatum directè et distantiæ particularum correspondentium inversè et quantitates materiæ in partibus correspondentibus directè: ideóque cum distantiæ particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, (a) et quantitates materiæ sint ut densitates partium et cubi diametrorum; resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum et quadrata diametrorum et densitates partium systematum. Q. e. d. (b) Posterioris generis resistentiæ sunt

(z) * *Id est, ut vires totæ acceleratrices et quantitates materiæ* (per Def. 8. Lib. I.).

(a) * *Et quantitates materiæ sint*, &c. Quantitates materiæ sunt ut densitates et volumina partium conjunctim (2. Lib. I.), et ob partium similitudinem, volumina sunt ut cubi laterum homologorum, seu diametrorum, ideóque quantitates materiæ sunt ut densitates partium et cubi diametrorum.

(b) * *Posterioris generis resistentiæ*, &c. Si enim vires reflexionum supponantur æquales, resistentiæ sunt ut numeri reflexionum seu occursuum; et si numeri reflexionum æquentur, resistentiæ sunt ut vires reflexionum correspondentium; undè, conjunctis his rationibus, resistentiæ quæ ex particularum et partium majorum occursibus et reflexionibus oriuntur, sunt semper ut reflexionum correspondentium numeri et vires conjunctim. Numeri autem reflexionum, cæteris paribus, sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè, et, cæteris paribus, sunt inversè ut spatia inter particularum et partium correspondentium occursus seu reflexiones intercepta, id est, inversè ut partium correspondentium diametri, ideóque *numeri reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè* et earumdem diametri inversè. *Et vires reflexionum sunt ut* motûs quantitates

ut reflexionum correspondentium numeri et vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè, et spatia inter earum reflexiones inversè. Et vires reflexionum sunt ut velocitates et magnitudines et densitates partium correspondentium conjunctim; id est, ut velocitates et diametrorum cubi et densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum et quadrata diametrorum et densitates partium conjunctim. Q. e. d.

Corol. 1. Igitur si systemata illa sint fluida duo elastica ad modum aëris, et partes eorum quiescant inter se: corpora autem duo similia et partibus fluidorum quoad magnitudinem et densitatem proportionalia, et inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas, utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ fluidorum se mutuo agitant, sint ut corporum projectorum diametri inversè, et quadrata velocitatum directè: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in fluidis, et spatia similia ac diametris suis (c) proportionalia describent.

Corol. 2. Proinde in eodem fluido projectile velox resistentiam patitur, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè. Nam si vires, quibus particulæ distantes se mutuo agitant, augerentur in duplicatâ ratione velocitatis, (d) resistentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè; (e) ideóque in medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicatâ ratione velocitatis accuratè. Sunto igitur media tria A, B, C ex partibus similibus et æqualibus et secundum distantias æquales regulariter dispositis constantia. Partes mediorum A et B fugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut T et V, illæ medii C ejusmodi viribus omninò destituantur. Et si corpora quatuor æqualia D, E, F, G in his mediis moveantur, priora duo D et E in prioribus

in occursibus *id est, ut velocitates et diametrorum cubi et densitates partium correspondentium. Et conjunctis his omnibus rationibus*, &c.

(c) * *Proportionalia describent.* Probatur enim ut in dem. Prop. XXXII. Lemmate (189) similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus a corporibus illis semper describi. Undè Corollarium hoc patet (per Cor. 1. et 2. Prop. XXXII.).

(d) * *Resistentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè.* Nam si idem corpus variâ cum velocitate in uno eodemque fluido similiter projiciatur, eædem sunt resistentiæ, ac si corpora duo similia et æqualia similiter projicerentur in duobus fluidis priori omnino paribus; sed in hoc casu, ob æquales inter se partium correspondentium diametros et densitates, resistentiæ sunt in duplicatâ ratione velocitatum accuratè (per Prop. XXXIII. et ejus Corol. 1.). Ergò, &c.

(e) * *Ideóque in medio*, &c. In medio cujus partes ab invicem distantes sese viribus quibuscumque in ratione velocitatis duplicatâ crescentibus agitant, resistentia (ex modò dem.) est semper in eâdem ratione duplicatâ; quarè si vires illæ quibus particulæ sese agitant, supponantur quàm minimæ, manebit semper resistentia in ratione velocitatis duplicatâ accuratè; evanescant tandem illæ vires, manet resistentia in ratione velocitatis duplicata; sed idem melius patet per secundam partem demonstrationis Propositionis hujus XXXIII.

duobus A et B, et altera duo F et G in tertio C; sitque velocitas corporis D ad velocitatem corporis E, et velocitas corporis F ad velocitatem corporis G in subduplicatâ ratione virium T ad vires V: resistentia corporis D erit ad resistentiam corporis E, et resistentia corporis F ad resistentiam corporis G, (f) in velocitatum ratione duplicatâ; et propterea resistentia corporis D erit ad resistentiam corporis F ut resistentia corporis E ad resistentiam corporis G. Sunto corpora D et F æquivelocia ut et corpora E et G; et augendo velocitates corporum D et F in ratione quâcunque, ac diminuendo vires particularum medii B in eâdem ratione duplicatâ, (g) accedet medium B ad formam et conditionem medii C pro lubitu, et idcirco resistentiæ corporum æqualium et æquivelocium E et G in his mediis, perpetuò accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cùm resistentiæ corporum D et F sint ad invicem ut resistentiæ corporum E et G, accedent etiam hæ similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur D et F, ubi velocissimè moventur, resistentiæ sunt æquales quam proximè: et propterea cùm resistentia corporis F sit in duplicatâ ratione velocitatis, erit resistentia corporis D in eâdem ratione quàm proximè.

(h) *Corol.* 3. Corporis in fluido quovis elastico velocissimè moti eadem ferè est resistentia ac si partes fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuo non fugerent: si modo fluidi vis elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur, et velocitas adeò magna sit ut vires non habeant satis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cùm resistentiæ similium et æquivelocium corporum, in medio cujus partes distantes se mutuo non fugiunt, (i) sint ut quadrata diametrorum; sunt etiam æquivelocium et celerrimè motorum corporum resistentiæ in fluido elastico ut quadrata diametrorum quàm proximè.

Corol. 5. Et cùm corpora similia, æqualia et æquivelocia, in mediis ejusdem densitatis, quorum particulæ se mutuo non fugiunt, sive particulæ illæ sint plures et minores, sive pauciores et majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus

(f) * *In velocitatum ratione duplicatâ.* (Ex demonstratis initio Corol. hujus.)

(g) * *Accedet medium B*, &c. Si enim velocitates corporum D et F, quam maximè augerentur vires particularum medii B, manentibus viribus medii A et velocitate corporis E quam maximè decrescerent, quia est semper vis medii A ad vim medii B ut quadratum velocitatis corporis D ad quadratum velocitatis corporis E.

(h) * *Corollarium* 3. Patet per Cor. 2. in quo vis T, quâ particulæ medii A in quo corpus D movetur se fugiunt, qualiscumque supponitur; corporum D et F ubi velocissimè moventur, resistentiis manentibus æqualibus quam proximè, licet medii C in quo corpus F movetur, particulæ viribus centrifugis prorsus destituantur. Patet etiam ex eo quod supponatur vires non habere satis temporis ad agendum, unde casus redit ad eum in quo vires illæ nullæ sunt.

(i) * *Sint ut quadrata diametrorum.* Per 2. partem dem. Prop. hujus, ob datas corporum velocitates et medii densitatem datam.

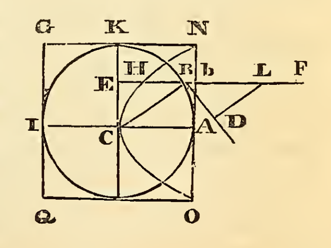
quantitatem imprimant, et vicissim (per motûs legem tertiam) æqualem ab eâdem reactionem patiantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifestum est etiam quod in ejusdem densitatis fluidis elasticis, ubi velocissimè moventur, æquales sint eorum resistentiæ quam proximè; sive fluida illa ex particulis crassioribus constent, sive ex omnium subtilissimis constituantur. Ex medii subtilitate resistentia projectilium celerrimè motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita se habent in fluidis, quorum vis elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar lanæ vel ramorum arborum, aut ex aliâ quâvis causâ, quâ motus particularum inter se redduntur minus liberi: resistentia, ob minorem medii fluiditatem, erit major quàm in superioribus Corollariis.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

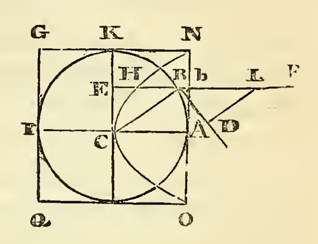
Si globus et cylindrus æqualibus diametris descripti, in medio raro ex particulis æqualibus et ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constante, secundùm plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia globi duplo minor quàm resistentia cylindri.

Nam quoniam actio medii in corpus eadem est (per legum Corol. 5.) sive corpus in medio quiescente moveatur, sive medii particulæ eâdem cum velocitate (k) impingant in corpus quiescens: consideremus corpus tanquam quiescens, et videamus quo impetu urgebitur a medio movente. Designet igitur A B K I corpus sphæricum centro C semi-diametro C A descriptum, et incidant particulæ medii datâ cum velocitate in corpus illud sphæricum, secundum rectas ipsi A C parallelas: sitque F B ejusmodi recta. In eâ capiatur L B semi-diametro C B æqualis, et ducatur B D quæ sphæram tangat in B. In K C et B D demittantur perpendiculares B E, L D, et vis quâ particula medii, secundùm rectam F B obliquè incidendo, globum ferit in B, erit ad vim quâ particula eadem cylindrum O N G Q axe A C I circa globum descriptum perpendicula-



(k) * *Impingant in corpus quiescens.* Eadem enim est in utroque casu velocitas respectiva, eademque proindè vis percussionis (per dem. in Cor. 5. leg. mot.) idem quoque manifestum est per motûs leg. 3. quia fluidum et corpus ob reactionem actioni æqualem et contrariam, in utroque casu in se mutuò agunt.

riter feriret in b, (l) ut L D ad L B vel B E ad B C. Rursus efficacia hujus vis ad movendum globum secundum incidentiæ suæ plagam F B vel A C, est ad ejusdem efficaciam ad movendum globum secundùm plagam determinationis suæ, id est, secundùm plagam rectæ B C quâ globum directè urget (m) ut B E ad B C. Et (n) conjunctis rationibus, efficacia particulæ in globum secundum rectam F B obliquè incidentis, ad movendum eundem secundùm plagam incidentiæ suæ, est ad efficaciam particulæ ejusdem secundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipsum movendum in plagam eandem, ut B E quadratum ad B C quadratum. Quare si in b E, quæ perpendicularis est ad cylindri basem circularem N A O et æqualis radio A C, sumatur b H æqualis $\frac{\text{B E quad.}}{\text{C B}}$: erit b H ad b E ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. (o) Et propterea solidum quod a rectis omnibus b H occupatur erit ad solidum quod a rectis omnibus b E occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in cylindrum. (p) Sed solidum prius est parabolois



(l) * *Ut L D ad L B vel B E ad B C.* Si enim recta data L B exponat vim quâ particula medii circularem basim cylindri perpendiculariter ferit in b, et vis illa (per leg. Cor. 2.) resolvatur in vires B D, L D, vis B D juxtà directionem tangentis in B agens nullam efficaciam habet ad globum promovendum et recta L D vim exponet quâ particula medii globulum perpendiculariter ferit in B. Quia verò radius C B, tangenti perpendicularis est, et ideò (per constr.) D L parallela C B, triangula rectangula C E B, B D L, similia sunt, imo ob B L = C B (per constr.) æqualia; est igitur L D ad L B ut B E ad B C.

(m) 190. * *Ut B E ad B C.* Vis L D ductâ ex puncto D ad L B perpendiculari D M, iterum resolvatur in vires L M et M D, et ob triangulorum L M D, L D B, similitudinem, erit vis L M ad vim L D, ut L D ad L B, seu ut B E ad B C; nulla verò ratio habenda est vis M D, cujus directio perpendicularis est ad axem A I, quia simili constructione factâ ad alteram hujus axis partem in puncto sphæræ quod puncto B directè oppositum est, vis M D, vi æquali et directè oppositâ eliditur. Unde sola consideranda est vis L M, quæ secundùm directionem axi A I parallelam agit. Est autem vis L M ad vim L B quâ particula medii circularem basim cylindri perpendiculariter ferit in b, ut LD^2 ad LB^2, ob continuè proportionales L M, L D, L B.

(n) * *Conjunctis rationibus.* Et ex æquo.

(o) * *Et propterea solidum.* Si in omnibus rectæ N A punctis erigantur perpendicula ut b H et b E, sitque N H C curva quam punctum H perpetuò tangit, et recta K C locus omnium punctorum E; solidum quod perpendiculis omnibus b H, per totam basim cylindri ductis occupatur, æquale erit conoidi seu figuræ solidæ quæ ex rotatione figuræ planæ N H C A circà axem C A factâ generatur, et solidum quod a rectis omnibus b E occupatur erit cylindrus ex rotatione rectanguli A K circà eundem axem C A factâ descriptus.

(p) * *Sed solidum prius.* Cùm (per constr.) sit $bH = \frac{BE^2}{CB}$ ideóque $bH \times CB = \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2$ et (ex naturâ circuli) $BC = CA = KC$, ideóque $BE^2 = KC^2 - CE^2$ et $bH \times CB$, seu $\overline{KC - EH} \times KC$, seu $KC^2 - KC \times EH = KC^2$

vertice C, axe C A et latere recto C A descriptum, et solidum posterius est cylindrus paraboloidi circumscriptus, (†) et notum est quod parabolois sit semissis cylindri circumscripti. Ergo vis tota medii in globum est duplo minor quam ejusdem vis tota in cylindrum. Et propterea si particulæ medii quiescerent, et cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret resistentia globi duplo minor quàm resistentia cylindri. Q. e. d.

Scholium.

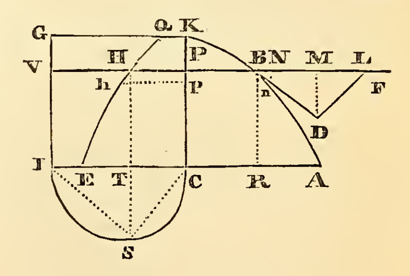
(q) Eâdem methodo figuræ illæ inter se quoad resistentiam comparari possunt, eæque inveniri quæ ad motus suos in mediis resistentibus conti-

— C E², ideóque K C × E H = C E²; sed si ex puncto H duceretur ad C A, ordinata perpendicularis, hæc esset æqualis C E, et abscinderet a C A, partem æqualem E H. Quarè rectangulum sub abscissâ et datâ lineâ K C sive C A, æquale est quadrato ordinatæ ad C A perpendicularis; unde curva C H N, (per Theor. I. de parab.) est parabola cujus vertex C, axis C A, et latus rectum C A.

(†) * *Et notum est quod*, &c.

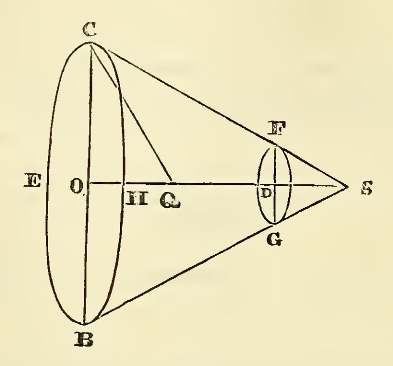
191. *Lemma.* Parabolois seu solidum ex rotatione parabolæ C H N, circà axem C A genitum est semissis cylindri circumscripti, qui producitur ex rotatione rectanguli A K circà latus C A. Per punctum mobile P, erigatur ad axem C A normalis P M, parabolam secans in H, et rectam K N in M; et in rotatione figuræ totius circà axem C A, lineæ P H et P M circulos describent, qui erunt inter se ut radiorum P H, P M quadrata, seu (ex naturâ parabolæ) et ob P M = A N, ut abscissæ C P, C A. Ducatur jam punctum P cum verticali P H M per totam altitudinem C A, et solidum ex rotatione figuræ C H N genitum erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K N A ortum, ut summa omnium circulorum quos recta mobilis P H rotando describit, ad summam omnium circulorum quos describit recta P M, hoc est, ut summa omnium C P, ad summam omnium C A. In lineâ A N capiatur A R æqualis A C, jungatur C R secans P H in L, et erigatur ad A R, perpendicularis R Q, secans P M in V; cum sit semper P L = C P, et P V = C A, summa omnium C P, seu P L, per totam altitudinem C A, est triangulum isoscele C R A, et summa omnium C A, seu P V, per eandem altitudinem C A, est quadratum C A R Q; cum igitur triangulum C R A, sit semissis quadrati C A R Q, parabolois est etiam semissis cylindri circumscripti. Q. e. d.

(q) 192. *Eâdem methodo*, &c. Solidum ex rotatione curvæ cujusvis K B A, circà rectam A I positione datam genitum in medio resistente



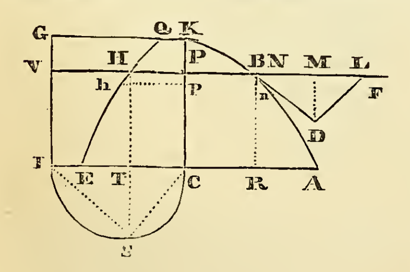
moveatur secundùm directionem rectæ I A, et oporteat resistentiam quam patitur conferre cum resistentiâ cylindri secundùm eandem directionem moti et cujus basis est circulus radio K C ad A C normali descriptus. Diametro C I ad arbitrium assumptâ describatur semi-circulus C S I, agatur per punctum I chorda I S, parallela B D curvam tangenti in puncto quovis B; ducatur per B recta B V parallela A I, et per S recta S H parallela C K, ambæ concurrentes in H, sitque Q H E curva quam punctum H perpetuò tangit; et completo rectangulo C K G I, resistentia solidi rotundi per conversionem cur-

nuandos aptiores sunt. Ut si base circulari C E B H, quæ centro O, radio O C describitur, et altitudine O D, construendum sit frustum coni



C B G F, quod omnium eâdem basi et altitudine constructorum et secundùm plagam axis sui versus D progredientium frustorum minimè

væ K B A circà C A geniti erit ad resistentiam basis ipsius, seu circuli centro C et radio C K descripti, ut solidum ex rotatione figuræ K Q H E circà C I genitum, ad cylindrum rotatione rectanguli C K G I circà eandem C I factâ descriptum. Producatur enim H B ad L, ut sit B L = C I; ex puncto L demittatur ad B D perpendicularis L D, et ex D ad B L perpendicularis D M; et eodem modo quo suprà (190) patet efficaciam particulæ medii ad movendum solidum totum K B A secundùm plagam incidentiæ suæ L B esse ad efficaciam particulæ ejusdem secundum eandem rectam in basim circularem K C, perpendiculariter in P ad cylindrum qui rotatione rectanguli C K G I describitur movendum



in plagam eandem, ut est L D ² ad L B ², seu etiam ut est L M ad L B; sed (per constr.) C I = L B, et ob angulum S I C = D B L et angulum I S C = B D L, est etiam C T seu P H = L M; quarè solidum quod a rectis omnibus P H, occupatur, erit ad solidum quod a rectis omnibus P V = C I, occupatur, aut quod idem est, solidum ex rotatione figuræ C K Q H E circà C I, erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K G I genitum, ut resistentia solidi quod figura C K B A circà C A, rotata describit, ad resistentiam baseos circularis quam describit recta C K quæ eadem est cum resistentiâ cylindri cujuslibet ejusdem basis, quia superficies cylindri quam recta K G rotando circà A I describit, nullam resistentiam patitur, secundùm directionem motûs ipsi K G parallelam. Q. e. d.

193. Ex constructione liquet, si recta quæ curvam K B A tangit in A sit ad axem C A normalis, punctum E coincidere cum puncto I, et si recta tangens curvam K B A, in K perpendicularis sit ad K C, punctum Q in quo curva E H secat latus K G coincidere cum puncto K.

194. Ex puncto B demittatur ad C A perpendicularis B R, dicaturque C I = a, A R = x, B R = H T = C P = y, H P = C T = z, B N = d x, N n perpendicularis ad B L curvæque occurrens in n = d y, ac proindè $Bn^2 = dx^2 + dy^2$. Et quoniam triangula B n N, I C S, similia sunt (per constr.) erit $Bn^2 : Nn^2 = CI^2 : CS^2 = CI : CT$, hoc est, $dx^2 + dy^2 : dy^2 = a : z$. Et properteà $a\,dy^2 = z\,dx^2 + z\,dy^2$, formula per quam ex datâ æquatione ad curvam K B A, inveniri potest æquatio ad curvam alteram E H Q et contrà; nam quoniam C P = y, si loco d x eruatur ex æquatione curvæ K B A ejus valor in y et d y habebitur æquatio quæ continebit z, y et d y sive C P, P H et fluxionem P C, cum constantibus.

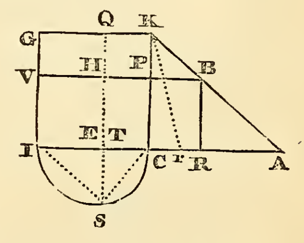
195. Ducta sit ordinata p h alteri P H infinitè propinqua, et si radius sit ad peripheriam circuli ut unitas ad numerum p, erit p y peripheria circuli quem linea P C circà axem C I, rotando describit, ideóque annulus cylindricus quem arcus P H h p in eâdem convolutione

resistatur: ([r]) biseca altitudinem O D in Q et produc O Q ad S ut sit Q S æqualis Q C, et erit S vertex coni cujus frustum quæritur.

describit, erit $p\,z\,y\,d\,y$, et inde solidum ex rotatione figuræ C P H E, genitum, erit $S.pzydy$, fluente hâc itâ sumptâ ut factâ $y = o$ ea evanescat. Quare cùm cylindrus convolutione rectanguli C P V I, descriptus sit $\frac{1}{2}\,p\,a\,y\,y$, resistentia solidi ex revolutione figuræ A B R geniti, erit ad resistentiam baseos ipsius circuli radio B R descripti ut $S.\,p\,z\,y\,d\,y$ ad $\frac{1}{2}\,p\,a\,y\,y$, seu ut $S.\,z\,y\,d\,y$ ad $\frac{1}{2}\,a\,y\,y$.

196. Sit K B A ellipsis vel hyperbola cujus vertex A axis principalis A I. Sit semiaxis principalis $= b$, semi-latus rectum $= c$, $A\,R = x$, $R\,B = y$, et erit $b\,y\,y = 2\,b\,c\,x - c\,x\,x$ æquatio ad ellipsim; et $b\,y\,y = 2\,b\,c\,x + c\,x\,x$, æquatio ad hyperbolam. Prioris æquationis fluxio $b\,y\,d\,y = b\,c\,d\,x - c\,x\,d\,x$, ex quâ habetur $d\,x^2 = \frac{b^2 y^2 d y^2}{(b c - c x)^2} = \frac{b^2 y^2 d y^2}{b^2 c c - 2 b c c x + c c x x} = \frac{b y^2 d y^2}{b c c - c y y}$. Hinc æquatio (194) $a\,d\,y^2 = z\,d\,x^2 + z\,d\,y^2$, in banc abit * $a\,d\,y^2 = \frac{z\,b\,y^2\,d\,y^2}{-c\,y^2 + b\,c\,c} + z\,d\,y^2$ sive dividendo per $d\,y^2$ et ad communem denominatorem revocando utrumque æquationis membrum fit $-a\,c\,y^2 + a\,b\,c\,c = b\,y^2\,z - c\,y^2\,z + b\,c\,c\,z$ ergo est $z = \frac{-a\,c\,y^2 + a\,b\,c\,c}{\overline{b - c} \times y^2 + b\,c\,c}$ et factâ divisione $z = \frac{-ac}{b-c} + \frac{a\,b^2\,c^2}{(b - c) \times (\overline{b - c} \times y^2 + b\,c\,c)}$ unde erit $z\,y\,d\,y = \frac{-acydy}{b - c} + \frac{a\,b^2\,c^2\,y\,d\,y}{(b-c) \times (\overline{b-c} \times y^2 + bcc)}$ sumptisque fluentibus est $S.\,z\,y\,d\,y = \frac{-a\,c\,y^2}{2\,(b - c)} + \frac{a\,b^2\,c^2}{2\,(b-c)^2}\,L.\,\overline{\overline{b-c} \times y^2 + b\,c\,c} + Q$ const. (ut patebit si hujus quantitatis fluxio sumatur): facta autem $y = o$ erit $o = \frac{a\,b^2\,c^2}{2\,(b-c)^2}\,L.\,b\,c\,c + Q$ const. ideóque Q const. $= -\frac{a\,b^2\,c^2}{2\,(b - c)^2}\,L.\,b\,c\,c$, unde tandem habetur $S.\,z\,y\,d\,y = -\frac{a\,c\,y^2}{2(b-c)} + \frac{a\,b^2\,c^2}{2\,(b-c)^2} \times (L.\,\overline{b-c} \times y^2 + b\,c\,c - L.\,b\,c\,c)$ sive $S.\,z\,y\,d\,y = -\frac{a\,c\,y^2}{2\,(b-c)} + \frac{a\,b^2\,c^2}{2(b-c)^2}\,L.\,\frac{\overline{b-c} \times y^2 + b\,c\,c}{b\,c\,c}$, est ergo resistentia conoidis elliptici A B R ad resistentiam suæ baseos, seu circuli radio B R descripti ut $-\frac{c\,y^2}{2\,(b - c)} + \frac{b^2\,c^2}{2\,(b - c)^2} \times L.\,\frac{\overline{b - c} \times y^2 + b\,c\,c}{b\,c\,c}$ ad $y\,y$. Pro conoide hyperbolico, invenietur $a\,d\,y^2 = \frac{z\,b\,y^2\,d\,y^2}{c\,y^2 + b\,c\,c} + z\,d\,y^2$, unde eodem iterato calculo prodibit ratio ejus resistentiæ ad resistentiam baseos ut $+\frac{c\,y^2}{2\,(b + c)} + \frac{b^2\,c^2}{2\,(b + c)^2} \times L.\,\frac{\overline{b + c} \times y^2 + b\,c\,c}{b\,c\,c}$ ad y^2. Pro conoide parabolico, fiat in formulâ resistentiæ conoidis elliptici axis b infinitus, cæterisque terminis in quibus b non occurrit deletis, erit conoidis parabolici resistentia ad resistentiam suæ baseos ut $\frac{b^2\,c^2}{2\,b^2} \times L.\,\frac{b\,y^2 + b\,c\,c}{b\,c\,c}$ ad y^2, sive ut $\frac{c^2}{2}\,L.\,\frac{y^2 + c\,c}{c\,c}$ ad y^2.

197. Sit K B A linea recta, et quia chorda I S parallela est rectæ K A, (192) punctum H est semper in lineâ rectâ T H Q, ideóque resistentia coni revolutione trianguli K A C circà A C geniti erit ad resistentiam circuli radio C K descripti, ut cylindrus ex rotatione rectanguli C K Q T ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K G I circà C I, id est, ob communem utriusque cylindri basim, ut altitudo C T ad altitudinem C I; et est C T ad C I, in ratione duplicatâ C S ad C I vel K C ad K A, seu in



ratione duplicatâ sinûs anguli K A C ad sinum totum. Simili modo resistentia coni quem recta B A rotata describit est ad resistentiam circuli radio B R descripti in eâdem ratione duplicatâ K C ad K A; et (dividendo) resistentia annuli conici quem recta K B, circà C A rotata describit est ad resistentiam annuli circularis quem in eâdem convolutione describit recta K P in eâdem duplicatâ ratione K C ad K A. Resistentia verò coni truncati convolutione figuræ K B R circà C R, geniti, est ad resistentiam baseos ipsius sive circuli radio C K, descripti ut solidum quod figura C K Q H V I, circà C I rotando describit, ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K G I ortum. Est autem solidum prius summa duorum cylindrorum, revolutione rectangulorum C K Q T et T H V I circa C I productorum, hoc est, (ob areas circulorum radiorum quadratis proportionales) ut summa $C\,K^2 \times C\,T + C\,P^2 \times T\,I$.

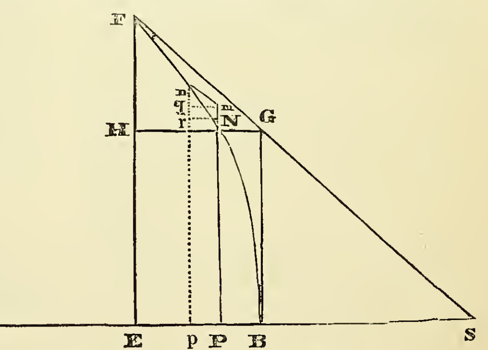
([r]) 198. * *Biseca altitudinem*, &c. Datis C K et C R invenienda sit positio rectæ K B

(s) Unde obiter, cùm angulus C S B semper sit acutus, (t) consequens est, quod si solidum A D B E, convolutione figuræ ellipticæ vel ovalis

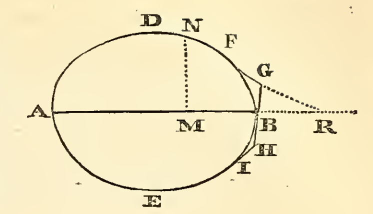
ut resistentia frusti conici quod per revolutionem figuræ K B R circà C A producitur sit omnium minima. Resistentia illa est ut $CK^2 \times CT + CP^2 \times TI$; sed $KA^2 : CK^2 = CI : CT = \frac{CK^2 \times CI}{KA^2}$; et similiter $KA^2 : CA^2 = CI : TI = \frac{CA^2 \times CI}{KA^2}$. Quarè ob datam C I, resistentia coni truncati erit ut $\frac{CK^4 + CP^2 \times CA^2}{KA^2}$. Dicantur K C = b, C R = 2 c, C A = x, ideóque $KA^2 = bb + xx$, et quia C A (x) : K C (b) = R A (x − 2 c) : B R, seu C P, erit $CP = \frac{bx - 2cb}{x}$, et indè resistentia coni truncati erit ut $\frac{b^4 + (bx - 2cb)^2}{bb + xx} = \frac{b^4 + b^2x^2 - 4b^2cx + 4c^2b^2}{bb + xx} = bb + \frac{4bbcc - 4bbcx}{bb + xx}$. Capiatur hujus quantitatis fluxio et (40) ponatur nihilo æqualis, fiet $-\frac{4bbcdx}{bb + xx} - 2xdx \frac{(4bbcc - 4bbcx)}{(bb + xx)^2} = 0$, sive $\frac{1}{bb + xx} - \frac{2cx - 2xx}{(bb + xx)^2} = 0$, ideóque $-bb - xx - 2cx + 2xx = 0$, undè habetur $xx - 2cx = bb$, et indè eruitur $x = c + \sqrt{bb + cc}$. Biseca igitur altitudinem C R in r, ut sit C r = c, et juncta K r $= \sqrt{bb + cc}$, erit x, seu C A = C r + K r, sicut Newtonus in constructione posuit.

(s) 199. * *Unde obiter.* Angulus externus (vid. fig. textûs) æqualis est summæ angulorum æqualium Q C S et Q S C, id est, angulo C S B; et quia C O Q rectus est, angulus C Q O ideóque et æqualis C S B, est semper acutus. Altitudo O D quam minima evadat tandemque evanescat; et quoniam (in hâc Hypoth.) rectæ O C, O S, Q S, C Q æquales fiunt, angulus C S O, et æqualis D F S fit semirectus, ejusque complementum ad duos rectos D F C grad. 135. Ducatur ad F D recta quælibet C E et evanescente O D resistentia coni truncati quem figura C F D circà O S rotata describit, erit in suo genere minima (198), ideóque minor quam resistentia coni truncati ex revolutione figuræ C E D circà O S geniti; subducatur utrinquè resistentia circuli quem recta D E rotando describit; et resistentia superficiei ex rotatione figuræ C F E circà O S, minor erit quam resistentia annuli conici quem in eâdem revolutione describit recta C E.

(t) 200. *Consequens est.* Ut hæc consequentia pateat, demonstrandum est resistentiam superficiei quæ per rotationem figuræ F G B circà axem A B gignitur, minorem esse resistentiâ superficiei quam in eâdem revolutione arcus F B, describit. Ductis itaquè ad curvam ordinatis verticalibus et infinitè propinquis P N, p n, et ex puncto n ad P N productam rectâ n m, parallelâ F G, atquè ex m et N in p n perpendicularibus m q, N r; dicantur F E ad axem A B normalis = b, G B = c, B P = x, P N = y, et quia productâ F G ut axi occurrat in S, est ob angulos E F S, B G S semi-rectos (per Hyp.) E S = F E = b, et B S = G B = c, erit E B = b − c. Est quoquè P p = m q = q n = d x, r n = d y, et hinc q r = d y − d x, ac proindè P m = y + d y − d x, et



p n = y + d y. Vis particulæ fluidi in G B perpendiculariter incidentis sit = a, et radius circuli ad peripheriam ut 1 ad p; his positis, resistentia circuli radio P N descripti exponi poterit (195) per $\frac{1}{2} payy$; resistentia circuli radio P m descripti per $\frac{1}{2} pa(y + dy - dx)^2 = \frac{1}{2} payy + paydy - paydx$, neglectis scilicet terminis qui respectu p a y d y et p a y d x, evanescunt. Hinc resistentia annuli circularis quem recta N m, rotando describit, exponetur per differentiam $paydy - paydx$. Resistentia circuli radio p n descripti erit ut $\frac{1}{2} pa(y + dy)^2 = \frac{1}{2} payy + paydy$, ex quâ si auferatur resistentia circuli radio P m descripti, remanebit resistentia annuli circularis



A D B E circa axem A B factâ generetur, et tangatur figura generans a rectis tribus F G, G H, H I in punctis F, B et I, eâ lege ut G H sit perpendicularis ad axem in puncto contactus B, et F G, H I cum eâdem G H contineant angulos F G B,

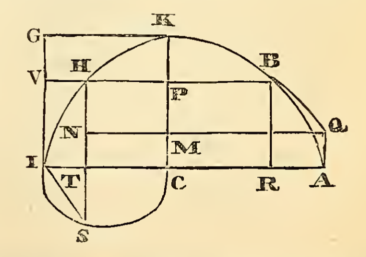
ex rotatione rectæ q n geniti $=$ p a y d x et cum sit (197), n m ^{2} ad n q ^{2}, seu F S ^{2} ad F E ^{2}, sive 2 ad 1, ut illius annuli resistentia ad resistentiam superficiei ex revolutione rectæ n m genitæ, hæc resistentia erit ut $\frac{1}{2}$ p a y d x. Quare resistentia superficiei quam figura n m N circâ E B rotata describit, exponatur per quantitatem p a.y d y — $\frac{1}{2}$ p a y d x, et, sumptis fluentibus, harum resistentiarum summa per totum arcum B N exponetur per $\frac{1}{2}$ p a y y — $\frac{1}{2}$ p a $\times$ B N P aream, cui nihil addendum est nec subducendum; cum factâ y $=$ o, hæc fluens evanescat, ut oportet. Si verò loco y scribatur b, seu F E, resistentia omnium superficierum quæ ex rotatione figurarum n m N, per totum arcum F B, descriptarum generarentur, erit ut $\frac{1}{2}$ p a b b — $\frac{1}{2}$ p a $\times$ B N F E aream.

Porrò resistentia circuli radio G B descripti exponenda est per $\frac{1}{2}$ p a c c, et resistentia circuli radio F E descripti per $\frac{1}{2}$ p a b b; ideóque ductâ G H ad F E normali, resistentia annuli circularis ex rotatione rectæ F H, per $\frac{1}{2}$ p a b b — $\frac{1}{2}$ p a c c; undè cum sit F S ^{2} ad F E ^{2}, seu 2 ad 1 ut annuli illius resistentia ad resistentiam superficiei ex rotatione rectæ F G, hæc resistentia erit ut $\frac{1}{4}$ p a b b — $\frac{1}{4}$ p a c c, totaque proindè resistentia coni truncati ex rotatione figuræ F G B geniti exponetur per $\frac{1}{4}$ p a b b $+$ $\frac{1}{4}$ p a c c. Quarè resistentia omnium superficierum quas figuræ n m N, per totum arcum B N F distributæ rotando describunt, est ad resistentiam frusti conici ex revolutione figuræ F G B orti ut $\frac{1}{2}$ p a b b — $\frac{1}{2}$ p a $\times$ B N F E, ad $\frac{1}{4}$ p a b b $+$ $\frac{1}{4}$ p a c c; sive dividendo per $\frac{1}{4}$ p a, ut 2 b b — 2 B N F E ad b b $+$ c c. Si area B N F E æqualis esset trapezio B G F E, cùm hoc sit $=$ $\frac{1}{2}$ E B $\times$ $\overline{\text{F E} + \text{B G}} = \frac{\text{b b} - \text{c c}}{2}$, foret 2 b b — 2 B N F E $=$ b b $+$ c c; ideóque prædictæ resistentiæ duæ æquales essent; sed trapezium B G F E majus est areâ B N F E, quæ (per Hyp.) tota in trapezio continetur, et propter eà quantitas 2 b b — 2 B N F E, major est quantitate b b $+$ c c; resistentia igitur omnium superficierum ex rotatione figurarum n m M, superat resistentiam coni truncati ex revolutione figuræ F G B producti. Verùm (199) resistentia superficiei quam figura n m N circà E B rotando describit, minor est resistentiâ superficiei quam in eadem rotatione describit n N; ideóque resistentia omnium superficierum quas figuræ n m N, per totum arcum B N F distributæ rotando describunt, minor est resistentiâ totius superficiei ex rotatione arcûs B N F genitæ. Ergò resistentia coni truncati per rotationem figuræ F G B descripti minor quoque est quam resistentia superficiei ex rotatione arcûs B N F productæ. Q. e. d.

201. Quæcumque igitur sit figura (in textu) A N B, regularis vel irregularis, modò arcus F B concavitatem axi A B obvertat, et totus intrâ lineas F G, B G contineatur, per hanc Newtoni Propositionem inveniri semper potest alia figura majoris capacitatis et minoris resistentiæ; quod in construendis navibus usum habere potest. Resistentia adhuc minuitur si loco circuli radio G B descripti adjungatur conus quem recta G R, ad axem productum utcumque ducta rotando describit. In omnibus autem curvis, quæ æquatione inter abscissas x et ordinatas y definiuntur, facillimè invenitur punctum B per quod ducta tangens angulum semi-rectum cum ordinatâ perpendiculari constituit. Quia in illo puncto B, ordinatæ fluxio d y æqualis est fluxioni abscissæ d x ut si æquatio ad curvam sit a ^{2} x $=$ y ^{3}, et sumptis fluxionibus a ^{2} d x $=$ 3 y ^{2} d y, ponendo d x $=$ d y, habetur a ^{2} $=$ 3 y ^{2}, et hinc y $=$ a $\sqrt{\frac{1}{3}}$, undè per æquationem a ^{2} x $=$ y ^{3}, invenitur x $= \frac{1}{3}$ a $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

PROBLEMA.

202. Datâ curvâ K B A quam recta Q A ad axem C A perpendicularis tangit in A, invenire punctum B per quod si ducatur tangens altera B Q priori Q A occurrens in Q, resistentia solidi per convolutionem figuræ K B Q A, circà axem C A descripti sit in suo genere minima.

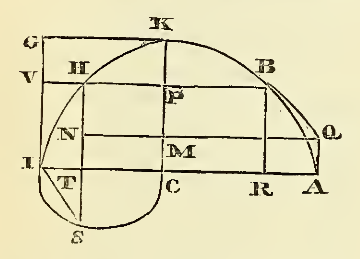


Eâdem constructione quâ suprà (192) factâ; ex puncto Q ducatur ad H T perpendicularis Q N secans K C in M dicanturque C I $=$ a, A R $=$ x, B R seu P C $=$ y, P H seu T C

B H I graduum 135, solidum, quod convolutione figuræ A D F G H I E circa axem eundem A B generatur, minus resistitur quam solidum prius, si modo utrumque secundum plagam axis sui A B progrediatur, et utriusque terminus B præcedat. Quam quidem Propositionem in construendis navibus non inutilem futuram esse censeo.

([u]) Quòd si figura D N F G, ejusmodi sit curva, ut, si ab ejus puncto

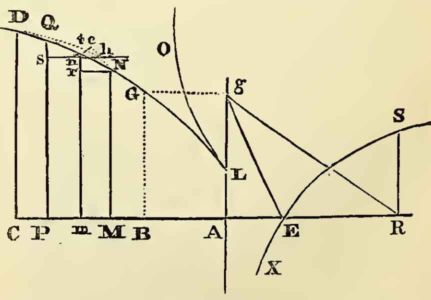
$= z$, Q A $= v$, et peripheria circuli radio 1 descripti $= p$. His positis resistentia solidi ex revolutione arcûs B A circà axem C A geniti exponi potest per S. $p z y d y$, (195); resistentia verò coni truncati ex rotatione figuræ B Q A circà C A, per $\frac{1}{2} p a v v + \frac{1}{2} p y y z - \frac{1}{2} p v v z$. Sit R resistentia data solidi ex rotatione arcûs totius K B A geniti, et resistentia superficiei



quam in eâdem rotatione describit arcus K B, erit R — S. $p z y d y$, ideòque resistentia solidi per rotationem figuræ K B Q A, erit R — S. $p z y d y + \frac{1}{2} p a v v + \frac{1}{2} p y y z - \frac{1}{2} p v v z$. Hujus quantitatis fluxio nihilo æqualis fiat (40) et ob datam R, habebitur $- p z y d y + p a v d v + p z y d y + \frac{1}{2} p y y d z - p z v d v - \frac{1}{2} p v v d z = o$; undè invenitur $(z - a) 2 v d v = (y y - v v) d z$. Cùm igitur sit etiam (194) $a d y^2 = z d x^2 + z d y^2$, ex his æquationibus et ex æquatione ad curvam K B A, invenientur valores litterarum x, y, v, seu R A, R B, et A Q. Q. e. i.

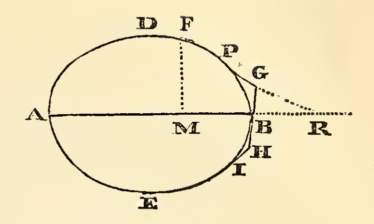
Exempli causâ. Sit K B A parabola, cujus vertex A, axis A C, latus rectum $= 4 c$, et ideò $4 c x = y y$, erit A Q $= v = \frac{1}{2} y$, ex naturâ tangentis parabolæ, $\frac{1}{4} y y = c x = v v$, $c d x = 2 v d v$, $y y - v v = 3 c x$, $y d y = 2 c d x$, $d y^2 = \frac{c d x^2}{x}$. Undè æquatio $a d y^2 = z d x^2 + z d y^2$, in hanc mutatur $\frac{a c d x^2}{x} = z d x^2 + \frac{c z d x^2}{x}$, ex quâ habetur $z = \frac{a c}{c + x}$, et $d z = \frac{- a c d x}{(c + x)^2}$. Ex his verò omnibus æquatio $(z - a) 2 v d v = (y y - v v) d z$, in hanc migrat $- \frac{a c x d x}{c + x} = - \frac{3 a c c x d x}{(c + x)^2}$, sive $1 = \frac{3 c}{c + x}$ ex quâ eruitur $x = 2 c$, et hinc $y = 2 c \sqrt{2}$, et $z = \frac{1}{3} a$. Quarè cùm sit a ad z, in ratione duplicatâ sinûs totius ad sinum anguli B Q M, erit $\sqrt{3}$ ad 1 ut sinus totus ad sinum anguli B Q M, qui proindè est 35°. 16′, angulus Q B R, 54°. 44′ et angulus B Q A 125°. 46′.

([u]) 203. *Quòd si figura*, &c. Invenienda sit curva L D, quæ circà axem C B rotata describat superficiem solidi quod in fluido motum secundùm axis directionem a C versus B, minorem patiatur resistentiam quàm solidum quodvis aliud per puncta L et D pari ratione descriptum et similiter motum. Ex punctis curvæ infinitè propinquis N, n, Q, demittantur ad axem C B ordinatæ N M, n m, P Q et ad n m, Q P, perpendicula N r, n s. Sit p peripheria circuli cujus radius est unitas, et data a vim exponat quâ singulæ fluidi particulæ in rectam N M perpendiculariter incurrunt. His positis resistentia annuli circularis quem recta n r, circà axem C B rotata describit, exponi potest, ut suprà, per $\frac{1}{2} p a \times (n m^2 - N M^2)$ seu per $p a N M \times n r$, ob $n m^2 - N M^2 = \overline{n m + N M} \times (n m - N M) = 2 M N \times n r$. Et quia $n N^2$ est ad $n r^2$ ut resistentia illa ad resistentiam superficiei quam linea n N circà C B rotata describit (196) hæc resistentia erit ut $\frac{p a \times M N \times n r^3}{n N^2}$; eodemque modo patet resistentiam superficiei



ex rotatione lineæ Q n genitæ exponi posse per $\frac{p a \times m n \times Q s^3}{Q n^2}$. Fingatur curvam hanc in aliam mutari Q h N inter puncta N, Q ductam et Q s, n r tanquam magnitudine datas as-

quovis N ad axem A B demittatur perpendiculum N M, et a puncto dato G ducatur recta G R quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in N, et axem productum secet in R, fuerit M N ad G R ut G R cub. ad 4 B R × G B q; solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem A B factâ describitur, in medio raro prædicto ab A versus B movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eâdem longitudine et latitudine descriptum solidum circulare.



sumi variantibus N r, et n s, dicanturque constantes M N = b, m n = c, n r = f, Q s = g et variabiles N n = v, n Q = z, N r = m, n s = n, et resistentia superficiei quam arculus Q n N circà C B rotando describit, exponetur per $\frac{p\,a\,b\,f^3}{v\,v} + \frac{p\,a\,c\,g^3}{z\,z}$, si curva Q n N sit ea quæ minimam resistentiam patitur, hujus quantitatis fluxio (40 et per Hyp.) nihilo æquanda est, et indè habetur $-\frac{2\,p\,a\,b\,f^3\,v\,d\,v}{v^4} - \frac{2\,p\,a\,c\,g^3\,z\,d\,z}{z^4} = o$. Productâ ergo lineâ s n, usque ad novum punctum h, ad quod ducuntur lineæ N h, Q h, in has cadant perpendicula n e, n t, et evanescente n h, erit t h = d z et e h = − d v. Quia verò, evanescente n h triangula n e h, n r N, et n t h, Q s n, similia sunt; erit N n (v) : N r (m) = n h : e h (− d v), et s n (n v) : Q n (z) = t h (d z) : n h, ideóque ex æquo, n v : m z = d z : − d v = $\frac{m\,z\,d\,z}{n\,v}$. Loco − d v, scribatur hic ipsius valor in æquatione modò inventâ, et illa in hanc migrabit $\frac{2\,p\,a\,b\,f^3\,m\,z\,v\,d\,z}{n\,v^5} = \frac{2\,p\,a\,c\,g^3\,z\,d\,z}{z^4}$, et hinc fit $\frac{2\,p\,a\,b\,f^3\,m}{v^4} = \frac{2\,p\,a\,c\,g^3\,n}{z^4}$ seu $\frac{2\,p\,a \times M\,N \times n\,r^3 \times N\,r}{N\,n^4} = \frac{2\,p\,a \times m\,n \times Q\,s^3 \times n\,s}{Q\,n^4}$. Undè manifestum est quantitatem $\frac{M\,N \times n\,r^3 \times N\,r}{N\,n^4}$ pro quolibet curvæ puncto N, datam seu constantem esse.

* Quæ quidem curva D N F G (vide figuram textûs) talis esse debet, ut angulus quem facit in G cum lineâ B G sit semi-recti complementum per notam 200. illic ergo linea B G data, est ipsa ordinata M N et triangulum n r N est rectangulum æquicrurum, ideóque N r = n r et N n² = 2 n r² ergo quantitas constans $\frac{M\,N \times n\,r^3 \times N\,r}{N\,n^4}$ in hanc abit $\frac{G\,B \times n\,r^4}{4\,n\,r^4} = \frac{G\,B}{4}$. Talis ergo est hujus curvæ natura ut quovis in puncto ducatur ordinata M N sit semper $\frac{M\,N \times n\,r^3 \times N\,r}{N\,n^4} = \frac{G\,B}{4}$, sive ponendo pro M N, y; pro n r, d y; pro N r, d x; pro N n², d x² + d y², erit $\frac{y\,d\,y^3\,d\,x}{\overline{d\,x^2 + d\,y^2}|^2} = \frac{G\,B}{4}$: sive adhibendo constructionem Newtoni, si ducatur G R tangenti parallela, ob triangula G B R, n r N ubique similia, erit $\frac{G\,B}{G\,R} = \frac{d\,y}{\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}}$ et $\frac{B\,R}{G\,R} = \frac{d\,x}{\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}}$ ideóque $\frac{G\,B^3 \times B\,R}{G\,R^4} = \frac{d\,y^3\,d\,x}{\overline{d\,x^2 + d\,y^2}|^2}$ et $\frac{M\,N \times G\,B^3 \times B\,R}{G\,R^4} = \frac{G\,B}{4}$ sive M N × G B² × 4 B R = G R⁴ unde est M N : G R = G R³ : G B² × 4 B R. Q. e. d.

Dicatur G B = a, fiet $\frac{y\,d\,y^3\,d\,x}{(d\,x^2 + d\,y^2)^2} = \frac{a}{4}$ ideóque $4\,y\,d\,x\,d\,y^3 = a\,(d\,x^2 + d\,y^2)^2$, ex quâ curvæ L N D per logarithmicam constructio eruitur. Ponatur $d\,x = \frac{z\,d\,y}{a}$, et hoc valore loco d x in æquatione ad curvam substituto, habetur $\frac{4\,y\,z\,d\,y^4}{a} = \frac{a\,(z\,z + a\,a)^2\,d.y^4}{a^4}$, undè invenitur $y = \frac{(z\,z + a\,a)^2}{4\,a^2\,z} = \frac{z^3}{4\,a\,a} + \frac{1}{2}\,z + \frac{a\,a}{4\,z}$, et (sumptis fluxionibus) $d\,y = \frac{3\,z^2\,d\,z}{4\,a\,a} + \frac{1}{2}\,d\,z - \frac{a\,a\,d\,z}{4\,z\,z}$; loco d y scribatur hic ipsius valor in æquatione assumptâ $d\,x = \frac{z\,d\,y}{a}$, et sit $d\,x = \frac{3\,z^3\,d\,z}{4\,a^3} + \frac{z\,d\,z}{2\,a} - \frac{a\,d\,z}{4\,z}$, sumptisque fluentibus $x = \frac{3\,z^4}{16\,a^3} + \frac{z\,z}{4\,a} - \frac{1}{4}\,a\,L.z$ + Q const. Porrò si assumatur abscissæ initium in loco B, ubi ordinata B L est omnium minima, id est (40) ubi d y = o quo supposito,

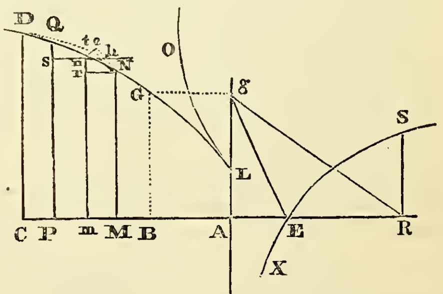
fit $\frac{3z^2dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aadz}{4zz} = 0$, ideóque $3z^2 + 2aa = \frac{a^4}{z^2}$ et $z^4 + \frac{2}{3}a^2z^2 = \frac{1}{3}a^4$ undè habetur $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ (et $y = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$), substituto hoc valore loco z, in æquatione quæ dat abscissæ x valorem, habebitur ex hypothesi initium axeos eritque $x = 0 = \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a\,L.\,a\sqrt{\frac{1}{3}}$ $+ Q.$ const. et ideò $Q = -\frac{5a}{48} + \frac{1}{4}a\,L\,a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

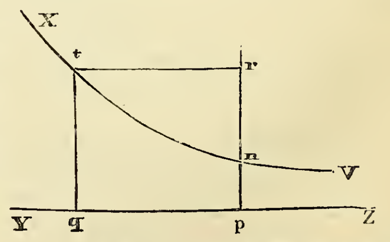
* Erit igitur abscissa $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a \times \overline{L.\,z - L.\,a\sqrt{\frac{1}{3}}}$ et ut habeatur origo abscissarum, notandum quod ordinata in B sive G B æqualis sit a, ex suprà demonstratis; cùm itaque sit ubique $y = \frac{(zz+aa)^2}{4a^2z}$ erit in eo puncto $a = \frac{(zz+aa)^2}{4a^2z}$ ex quâ æquatione si eruatur valor z invenietur $z = a$, ac per consequens erit $x = \frac{3a^4}{16a^3} + \frac{aa}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a\,L.\,\frac{a}{a\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}a\,L.\,\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}a \times L.\,\sqrt{3}$. Describatur ergo logarithmica X V, asymptoto Y Z et subtangente æquali $\frac{1}{4}$ G B, sive $\frac{1}{4}$ a, in quâ sumatur ubivis ordinata p m, quæ producatur in r donec p r = 3 p m, ducatur ad logarithmicam r t quæ sit asymptoto parallela, erit $\frac{1}{2}$ r t æqualis logarithmo $\sqrt{3}$ in logarithmica cujus subtangens $\frac{1}{4}$ a, itaque $\frac{GB}{3} - \frac{1}{2}rt = x$, quo valore transiato ex B ad A in axe producto habetur A origo abscissarum: in eo puncto A ductâ perpendiculari A L g, describatur logarithmica S X cujus ea linea A L g sit asymptotus, et $\frac{1}{4}$ G B sive $\frac{1}{4}$ a subtangens, et quæ producto axe in E ut sit A E $= a\sqrt{\frac{1}{3}}$ transeat per punctum E et sumptâ A R magnitudinis arbitrariæ pro z, ductâque R S parallelâ A L logarithmicæ occurrente in S capiatur abscissa A M, seu $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} \mp$ R S nimirum − R S, cum est A R > A E, et + R S ubi A R < A E; ac denique capiatur ordinata M N, seu $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$; punctum N erit in curvâ quæsitâ L D. Quod ut pateat, demonstrandum superest, esse $\mp RS = -\frac{1}{4}a(L.\,z - L.\,a\sqrt{\frac{1}{3}})$. Hoc autem manifestum est; nam R S, est differentia logarithmorum correspondentium quantitatibus A R et A E, sive z et $a\sqrt{\frac{1}{3}}$) sumptorum in logisticâ cujus subtangens est $\frac{1}{4}$ a, et hæc differentia positiva est, ubi A R (z) > A E ($a\sqrt{\frac{1}{3}}$) negativa ubi A R (z) < A E ($a\sqrt{\frac{1}{3}}$), et nulla, cùm fit A R = A E, seu $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, ut oportet. Quarè cùm A R superat A E, est $-RS = -\frac{1}{4}a \times L.\,z - L.\,a\sqrt{\frac{1}{3}}$, et ubi A E superat A R, fit $+RS = -\frac{1}{4}a \times \overline{L.\,z - L.\,a\sqrt{\frac{1}{3}}}$. Est igitur semper $\mp RS = -\frac{1}{4}a \times \overline{L.\,z - L.\,a\sqrt{\frac{1}{3}}}$.

204. Datâ minimâ ordinatâ A L, curva L N D, describi potest. Nam cùm sit (ex dem.) A L $= \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$ A E, et G B sive A g = a, datâ A L dantur A g, A E, et subtangens logarithmicæ quæ proindè poterit describi.

205. Datis duabus ordinatis M N et C D magnitudine, curva describi potest. Si enim in æquatione $y = \frac{(zz+aa)^2}{4a\cdot az}$ loco y scribantur seorsim datæ M N, et C D dabuntur z et a undè dabitur minima ordinata A L $= \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

206. Datâ ordinatâ quâlibet C D cum abscissa correspondente C A, curva describi potest. Si enim in æquatione $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$, loco y scribatur data C D, habebitur z per a et datas quantitates; deindè si in æquatione alterâ $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a \times \overline{L.z - L\,a\sqrt{\frac{1}{3}}}$, loco x substituatur data C A et loco z, ejus valor per a et datas inventus, dabitur æquatio inter a et datas quantitates, et ex hâc æquatione invenietur linea a, quâ datâ, datur ordinata minima A L.





207. Recta g R, parallela est tangenti per punctum N ductæ. Est enim (per constr.) $dx = \frac{zdy}{a}$, ideóque n r (d y) : r N (d x) = g A (a) : A R (z) ex quâ proportione et propter angulum

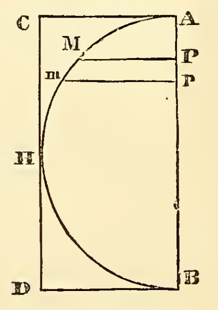
rectum in r, et in A, patet triangula n r N, g A R, similia esse, et propterea g R parallelam n N, seu tangenti per N ductæ. Hinc cum A E sit æqualis a $\sqrt{\frac{1}{3}}$ = z ubi z = o (103) erit g E tangenti per L ductæ parallela, sitque A g = a est $gE^2 = \frac{a^2}{3} + a^2 = \frac{4a^2}{3}$ atque adeò g E $= 2a\sqrt{\frac{1}{3}} = 2$ A E erit g E ad A E ut 2, ad 1, et ità sinus totus ad sinum anguli A g E, sivè ad sinum anguli quem curva constituit cum minimâ ordinatâ A L, qui proindè est 30°.

208. Quoniam A R, in infinitum crescere ac decrescere potest si capiatur semper B R > B E, describetur curvæ ramus L N D, qui concavitatem axi B C obvertit, et ab utroque axe A C, A g, in infinitum recedit; at si semper sumatur B R < B E, describetur alter curvæ ramus L O, qui priori L D convexitatem offert, et ab utroque axe B C, B G, in infinitum abscedit; curva igitur D L O punctum regressûs habet in L, et solidum minimæ resistentiæ ex ejus circà axem A C revolutione genitum, convexum vel concavum, et partim convexum, partim concavum esse potest.

209. Quoniam $dx = \frac{z\,dy}{a}$, erit areæ curvæ elementum $y\,dx = \frac{zy\,dy}{a}$, elementum arcus curvæ $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy\sqrt{aa+zz}}{a}$, elementum superficiei a curvâ circà axem A C rotatâ genitæ $= \frac{2py\,dy\sqrt{aa+zz}}{a}$ (si p sit semi-peripheria circuli cujus radius est unitas); elementum solidi in eâdem revolutione descripti $= \frac{pzy^2dy}{a}$; et resistentia superficiei $\frac{2py\,dy\sqrt{aa+zz}}{a}$, erit $\frac{a\,dy^2}{dx^2+dy^2}\,y\,dy = \frac{a\,dy^2}{dy^2 \times \overline{aa+zz}}\,y\,dy$ sive ut $\frac{y\,dy}{aa+zz}$. Porrò si in his fluxionibus loco y, et d y, substituantur ipsarum valores qui ex æquationibus $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$, et $dy = \frac{3z^2dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aa\,dz}{4zz}$ habentur, fluens S. y d x, seu area curvæ inveniri poterit algebraicè, aliæ verò fluentes ab hyperbolæ quadraturâ pendent.

Schol. Quæ ad solidum minimæ resistentiæ spectant, ea ferè omnia mutuati sumus ex ill^mo. Marchione Hospitalio, tum in Act. Lipsiens. an. 1699, tum in Monum. Paris. ejusdem anni. De eodem solido plurima etiam dederunt celeb. viri Joh. Bernoull. in Act. Lips. an. 1699. 1700. Hermannus in Phoronomiâ, et Facio ad calcem Libri de Murorum Inclinatione, &c. Sed qui totam hanc Newtoni Propositionem maximâ universalitate pertractatam habere volunt, legant tractatum a clariss. Bouguero editum, et ab Academiâ Regiâ Parisiensi an. 1727. præmio condecoratum, cui titulus; De la mâture des Vaisseaux, nec non Monum. Paris. an. 1733. in quibus elegantissima et universalissima legitur ultimæ scholii Newtoniani partis solutio. Rem a clariss. autore demonstratam hic observatu dignissimam judicamus, videlicet, solidum rotundum cujus constructionem modò dedimus, in quâlibet hujus solidi directione et juxtà quamlibet fluidi impulsionem, minimam omnium pati resistentiam, exceptis quibusdam casibus qui in navigationis praxi vix unquam occurrunt, cum scilicet directio solidi majores angulos cum axe constituit; et quod mirum est, in his casibus, solidum illud quod erat minimæ resistentiæ et navigationi aptissimum, solidum maximæ resistentiæ et ad usum navigationis omnium minime idoneum evadit. Quæ verò ad universalem solidorum in fluidis resistentiam pertinent, peti possunt ex aureo Joh. Bernoullii Libello qui inscribitur: Essai d'une Nouvelle Theorie de la manœuvre des Vaisseaux, et ex Hermanni Phoronomiâ.

210. Lemma. *Sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria.* Sphæra generatur per revolutionem semi-circuli A H B circà diametrum A B, et cylindrus sphæræ circumscriptus per revolutionem rectanguli A C D B, cujus latera A C, B D circuli radio sunt æqualia. Ductis ordinatis infinitè propinquis P M, p m,



dicantur A C = r, semi-peripheria A H B = p, A P = x, P p = d x, et quia circulorum areæ sunt in ratione duplicatâ radiorum, erit quadratum radii C A, seu r r, ad aream circuli A H B, nempè r p, ut M P², seu 2 r x — x x ad aream circuli radio P M descripti, quæ ideò erit $2px - \frac{pxx}{r}$; et hinc solidum ex rotatione elementi P M m p, circà A B genitum, erit $2px\,dx - \frac{pxx\,dx}{r}$, sumptisque fluentibus, solidum ex rotatione segmenti circularis A M P ortum, erit $pxx - \frac{px^3}{3r}$, et factâ A P = A B, seu x = 2 r, sphæra tota habetur $= 4prr - \frac{8}{3}prr = \frac{4}{3}prr$. Sed cylindrus sphæræ circumscriptus est factum ex areâ circuli radio A C descripti in cylindri altitudinem A B, seu est 2 p r r. Quarè sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut $\frac{4}{3}prr$ ad 2 p r r, id est, ut 4 ad 6, sivè ut 2 ad 3. Q. e. d.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si medium rarum ex particulis quam minimis quiescentibus æqualibus et ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constet: invenire resistentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus eâdem diametro et altitudine descriptus progredi intelligatur eâdem velocitate secundum longitudinem axis sui in eodem medio. Et ponamus quòd particulæ medii, in quas globus vel cylindrus incidit, vi reflexionis quam maximâ resiliant. Et cùm resistentia globi (per Propositionem novissimam) sit duplo minor quam resistentia cylindri, et globus sit ad cylindrum ut duo ad tria, et cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas, ipsasque quàm maximè reflectendo, (x) duplam sui ipsius velocitatem ipsis communicet: cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, communicabit motum particulis, (y) qui sit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri; et globus, quo tempore totam longitudinem diametri suæ uniformiter progrediendo describit, (z) communicabit motum eundem particulis; (a) et quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit, communicabit motum particulis, qui sit ad totum globi motum ut densitas medii ad densitatem globi. Et propterea globus resistentiam patitur, quæ sit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri possit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri suæ uniformiter progrediendo describit, ut densitas medii ad densitatem globi.

(x) * *Duplam sui ipsius velocitatem,* &c. Cùm singulæ particulæ, cylindri respectu, minimæ sint, si nulla esset particularum medii reflexio, eâdem cum cylindro velocitate moverentur; ac accedente vi reflexionis perfectâ, velocitas illa duplicatur (53. Lib. I.).

(y) * *Qui sit ad totum cylindri motum,* &c. Quantitates motûs sunt ut velocitates et massæ conjunctim; massæ verò sunt ut volumina et densitates; ideóque quantitates motûs ut velocitates et volumina et densitates conjunctim. Cùm igitur cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, medii volumen dimidio volumini cylindri æquale duplâ cum velocitate moveat, sitque proindè factum ex volumine cylindri in ipsius velocitatem æquale facto ex volumine medii moto in ejus velocitatem, motus particulis medii communicatus, erit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri.

(z) * *Communicabit motum eundem particulis,* ob resistentiam globi resistentiâ cylindri duplo minorem (Prop. XXXIV. Lib. II.)

(a) *Et quo tempore duas tertias partes,* &c. * Huc redit compositio rationum a Newtono indicata: totus globi motus est ad cylindri motum, ut 2 ad 3, hæc enim est utriusque massæ ratio; totus cylindri motus est ad motum a cylindro communicatum quo tempore dimidiam suam longitudinem describit ut densitas cylindri (sive globi) ad densitatem medii, motus ille a cylindro communicatus idem est cum motu a globo communicato dum totam suam diametrum percurrit; denique motus ille a globo communicatus dum totam suam diametrum percurrit est ad motum ab eo globo communicatum dum percurrit duas diametri suæ tertias partes ut 3 ad 2, ideóque totus globi motus est ad motum ab eo communicatum dum percurrit duas diametri suæ partes conjunctim ut 2 ad 3, ut densitas globi ad densitatem medii, et ut 3 ad 2, sive primâ ratione et hâc ultimâ sese compensantibus ut densitas globi ad densitatem medii. Q. e. d.

Cas. 2. Ponamus quòd particulæ medii in globum vel cylindrum incidentes non reflectantur; et cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas simplicem suam velocitatem ipsis communicabit, ideóque resistentiam patitur duplo minorem quàm in priore casu, et resistentia globi erit etiam duplo minor quàm prius.

Cas. 3. Ponamus quòd particulæ medii vi reflexionis neque maximâ neque nullâ, sed mediocri aliquâ resiliant a globo; et resistentia globi erit in eâdem ratione mediocri inter resistentiam in primo casu et resistentiam in secundo. Q. e. i.

Corol. 1. Hinc si globus et particulæ sint infinitè dura, et vi omni elasticâ, et propterea etiam vi omni reflexionis destituta: resistentia globi erit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri possit vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri suæ describit, ut densitas medii ad densitatem globi.

Corol. 2. (b) Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione velocitatis.

Corol. 3. (†) Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione diametri.

Corol. 4. Resistentia globi, cæteris paribus, est ut densitas medii.

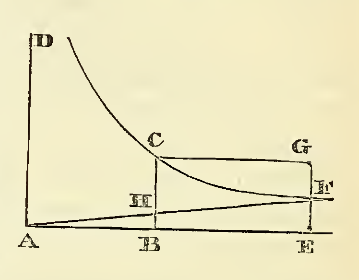
Corol. 5. Resistentia globi est in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis et duplicatâ ratione diametri et ratione densitatis medii.

Corol. 6. Et motus globi cum ejus resistentia sic exponi potest. Sit A B tempus quo globus per resistentiam suam uniformiter continuatam totum suum motum amittere potest. Ad A B erigantur perpendicula A D, B C. Sitque B C motus ille totus, et per punctum C asymptotis

(b) * *Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione velocitatis.* * Sint globi æquales in eodem medio moti diversâ cum velocitate; motus totus uniuscujusque est ad motum ab ipso communicatum tempore quo duas tertias suæ diametri percurrit, ut densitates globorum ad densitates mediorum, ideóque ex hypothesi in eâdem ratione, ergo etiam velocitas unius est ad velocitatem alterius ut motus ab illis communicati temporibus quibus duas tertias suarum diametrorum (æquales quippe longitudines) percurrunt. Dividantur illa tempora in partes minimas utrinque æquales, et quia resistentia singulis momentis, ejusdem globi respectu, uniformis censetur, resistentiæ momentaneæ erunt directè ut motus amissi et inversè ut tempora quibus amittuntur, sed motus amissi sunt ut velocitates directè et tempora sunt inversè ut velocitates, quia æquales longitudines percurruntur motibus qui uniformes, saltem quam proximè, censentur, ergo resistentiæ momentaneæ sunt bis ut velocitates, hoc est in ratione duplicatâ velocitatis.

(†) * *Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione diametri.* * Sint globi æquiveloces, æquè densi, in eodem medio moti, sed diversæ sint earum diametri, fingantur duo cylindri ejusdem cum iis diametri, et etiam æquiveloces et æque densi, resistentiæ quas patientur cylindri singulis momentis erunt ut numerus partium in quas incurrunt, illi verò numeri partium sunt ut quadrata diametrorum: sed facile liquet resistentias cylindrorum et globorum æquivelocium, ejusdem diametri, in eodem medio esse in datâ ratione, ergo ut resistentia unius cylindri ad resistentiam alterius, ita resistentia unius globi ad resistentiam alterius, sunt ergo globorum resistentiæ ut quadrata diametrorum.

A D, A B describatur hyperbola C F. Producatur A B ad punctum quodvis E. Erigatur perpendiculum E F hyperbolæ occurrens in F. Compleatur parallelogrammum C B E G, et agatur A F ipsi B C occurrens in H. Et si globus tempore quovis B E, motu suo primo B C uniformiter continuato, in medio non resistente describat spatium C B E G per aream parallelogrammi expositum, idem in medio resistente describet spatium C B E F per aream hyperbolæ expositum, et motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam E F, amissâ motus ejus parte F G. (c) Et resistentia ejus in fine temporis ejusdem exponetur per longitudinem B H, amissâ resistentiæ parte C H. Patent hæc omnia per Corol. 1. et 3. Prop. V. Lib. II.



Corol. 7. Hinc si globus tempore T per resistentiam R uniformiter continuatam amittat motum suum totum M: idem globus tempore t in medio resistente per resistentiam R in duplicatâ velocitatis ratione decrescentem, (d) amittet motûs sui M partem $\frac{t\,M}{T+t}$, manente parte $\frac{T\,M}{T+t}$; et describet spatium quod sit ad spatium motu uniformi M eodem tempore t descriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2, 302585092994 est ad numerum $\frac{t}{T}$, (e) propterea quod area hyperbolica B C F E est ad rectangulum B C G E in hâc proportione.

(c) *Et resistentia ejus in fine*, &c. Resistentia sub initio ubi velocitas est B C, exponatur per eandem lineam B C, et quia resistentiæ sunt ut velocitatum quadrata, atque B C ad F E, ut velocitas sub initio ad velocitatem in fine temporis B E ad $F E^2$, ut B C ad lineam quæ resistentiam exponit in fine temporis B E, ideóque linea hæc $= \frac{F E^2}{B C}$. Sed (per Theor. IV. de Hyp.) et ob similitudinem triangulorum A B H, A E F, est B C : F E = A E : A B = F E : H B, et hinc H B $= \frac{F E^2}{B C}$. Quare recta H B exponet resistentiam in fine temporis B E, et proindè recta C H partem amissam resistentiæ illius quæ sub initio exponebatur per lineam B C.

(d) * *Amittet motûs sui partem*, &c. Pars motûs M in fine temporis t residua dicatur m, et quia (ex dem.) T : t = A B : B E, et hinc T + t : T = A E : A B, et prætereà M : m = C B : F E = A E : A B; erit T + t : T = M : m, unde habetur m $= \frac{M\,T}{T+t}$, et inde motûs M pars amissa est M $- \frac{M\,T}{T+t} = \frac{t\,M}{T+t}$.

(e) * *Propterea quod area hyperbolica*. Dicantur A B = a, B C = b, B E = x, A E = a + x; et quia (Theor. IV. de Hyp.) F E $= \frac{a\,b}{a+x}$, elementum areæ C F E B, erit $\frac{a\,b\,d\,x}{a+x}$, et area ipsa C F E B = a b S. $\frac{d\,x}{a+x}$,

Scholium.

In hâc Propositione exposui resistentiam et retardationem projectilium sphæricorum in mediis non continuis, et ostendi quod hæc resistentia sit ad vim quâ totus globi motus vel tolli possit vel generari quo tempore globus duas tertias diametri suæ partes velocitate uniformiter continuata describat, ut densitas medii ad densitatem globi, si modo globus et particulæ medii sint summè elastica et vi maximâ reflectendi polleant: quodque hæc vis sit duplo minor ubi globus et particulæ medii sunt infinitè dura et vi reflectendi prorsus destituta. In mediis autem continuis qualia sunt aqua, oleum calidum, et argentum vivum, in quibus globus non incidit immediatè in omnes fluidi particulas resistentiam generantes, sed premit tantum proximas particulas et hæ premunt alias et hæ alias, resistentia est adhuc duplò minor. Globus utique in hujusmodi mediis fluidissimis resistentiam patitur quæ est ad vim quâ totus ejus motus vel tolli possit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri suæ describat, ut densitas medii ad densitatem globi. Id quod in sequentibus conabimur ostendere.

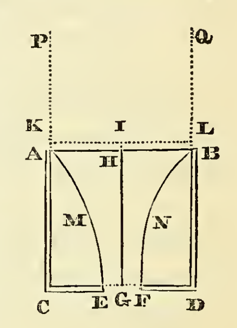
PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vase cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit A C D B vas cylindricum, A B ejus orificium superius, C D fundum horizonti parallelum, E F foramen circulare in medio fundi, G cen-

quæ fluens itâ sumenda est ut evanescat ubi fit $x = o$, sed fluens S. $\frac{d\,x}{a + x}$ itâ sumpta est logarithmus numeri $\frac{a + x}{a}$, desumptus ex logisticâ cujus subtangens est unitas, aut quod idem est, ex hyperbolâ cujus dignitas unitati æqualis est (382. Lib. I. et 40. Lib. II.); si enim ponatur $x = o$, numerus $\frac{a + x}{a}$, evadit $= 1$, et ideò L. $\frac{a + x}{a} = o$. Quarè area B C F E $= a\,b \times$ L. $\frac{a + x}{a}$; rectangulum verò B C G E $=$ b x. Est ergò area hyperbolica B C F E ad rectangulum B C G E, ut a b L. $\frac{a + x}{a}$ ad b x, hoc est, dividendo per a b, ut L. $\frac{a + x}{a}$ ad $\frac{x}{a}$. Verum (ex dem. et Hyp.) $\frac{a + x}{a} = \frac{T + t}{T}$ et $\frac{x}{a} = \frac{t}{T}$; quare area hyperbolica B C F E, est ad rectangulum B C G E, ut L. $\frac{T + t}{T}$ ad $\frac{t}{T}$. Superest igitur inveniendus logarithmus numeri $\frac{T + t}{T}$; per logarithmicam cujus subtangens est unitas. Porrò ejusdem numeri logarithmi diversæ speciei sunt inter se in datâ ratione (38) et numerus 2, 302585092994 est logarithmus numeri denarii sumptus in logarithmicâ cujus subtangens est unitas, et ejusdem numeri denarii logarithmus in tabulis sumptus est 1, 0000000 $= 1$; quarè ut 1, ad 2, 302585092994, itâ logarithmus numeri $\frac{T + t}{T}$ in tabulis sumptus ad logarithmum ejusdem numeri sumptum in

trum foraminis, et G H axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge cylindrum glaciei A P Q B ejusdem esse latitudinis cum cavitate vasis, et axem eumdem habere, et uniformi cum motu perpetuo descendere, et partes ejus quam primum attingunt superficiem A B liquescere, et in aquam conversas gravitate suâ defluere in vas; et cataractam vel columnam aquæ A B N F E M cadendo formare, et per foramen E F transire, idemque adæquatè implere. Ea verò sit uniformis velocitas glaciei descendentis ut et aquæ contiguæ in circulo A B, quam aqua cadendo (f) et casu suo describendo altitudinem I H acquirere potest; et jaceant I H et H G in directum, et per punctum I ducatur recta K L horizonti parallela et lateribus glaciei occurrens in K et L. Et velocitas aquæ effluentis per foramen E F (g) ea erit quam aqua cadendo ab I et casu suo describendo altitudinem I G acquirere potest. (h) Ideóque per Theoremata Galilæi erit I G ad I H in duplicatâ ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo A B, hoc est, in duplicatâ ratione circuli A B ad circulum E F; (i) nam hi circuli sunt reciprocè ut velocitates aquarum quæ per ipsos eodem tempore et æquali quantitate, adæquatè transeunt. De velocitate aquæ horizontem versùs hîc agitur. Et motus horizonti parallelus, quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cùm non oriatur a gravitate, nec motum horizonti perpendicularem a gravitate oriundum mutet, hic non consideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, et per cohæsionem suam inter



logarithmicâ cujus subtangens est unitas, vel in hyperbolâ cujus dignitas est 1; habetur ergò logarithmus quæsitus, si logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ ex tabulis sumptus multiplicetur per numerum 2, 302585092994.

(f) * *Et casu suo describendo altitudinem I H.* Hâc igitur hypothesi idem præstatur ac si in loco A B nova superficies aquæ continuò crearetur, cum motu initiali qualem cadendo ex altitudine I H singula ejus superficiei particula acquirere potuisset, et deinde particulæ aquæ e loco A B vi propriæ gravitatis cadendo sese mutuò attraherent horizontaliter ad cataractam vel columnam A B N F E M formandam.

(g) * *Ea erit quam aqua* (per Hyp.).

(h) * *Ideóque per Theoremata Galilæi* XXVIII. Lib. I.

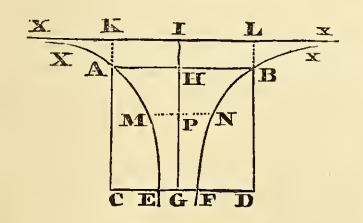
(i) 271. *Nam hi circuli,* &c. Quoniam aqua per totam cataractam A B N F E M, eodem semper tenore fluere supponitur, necesse est ut eadem aquæ quantitas per singulas cataractæ sectiones axi I G perpendiculares, seu per singulos circulos A B, M N, E F horizonti parallelos eodem tempore transeat. Nam si dato tempore major vel minor aquæ copia per circulum A B quàm per circulum M N transiret; aqua inter illos circulos vel intumesceret vel decresceret, et cataractæ figuram mutaret (contrà Hyp.). Quantitas aquæ per circulum quemlibet M N, dato tempore fluentis æquatur cylindro aqueo, cujus basis est circulus M N, et altitudo est æqualis longitudini quam superficies aquæ M N, cum velocitate acquisitâ uniformiter progrediendo eodem tempore dato describeret; et longitudo illa est ut aquæ per circulum M N fluentis velocitas (5. Lib. I.) et ideò quantitas aquæ per circulum M N dato tempore fluentis, est ut circulus M N et velocitas conjunctim. Quarè cùm data sit quantitas aquæ per singulos circulos dato tempore transeuntis, circulus M N est reciprocè ut velocitas aquæ quæ per ipsum transit. Q. e. d.

cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam et non in plures cataractas dividantur; sed motum horizonti parallelum, a cohæsione illâ oriundum, hic non consideramus.

Cas. 1. Concipe jam cavitatem totam in vase, in circuitu aquæ cadentis A B N F E M, glacie plenam esse, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum transeat. Et si aqua glaciem tantùm non tangat, vel, quod perinde est, si tangat et per glaciem propter summam ejus polituram quam liberrimè et sine omni resistentiâ labatur; hæc defluet per foramen E F eâdem velocitate ac prius, (k) et pondus totum columnæ aquæ A B N F E M impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, et fundum vasis sustinebit pondus glaciei columnam ambientis.

Liquescat jam glacies in vase; et effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac prius. (l) Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere: non major, quia glacies in aquam resoluta

272. His ità constitutis, facile est cataractæ figuram geometricè definire. Secet M N axem I G in P; et quia altitudo I P est in duplicatâ ratione velocitatis aquæ in P, hæc vero velocitas est inverse ut circulus M N, et denique circulus M N est in ratione duplicatâ radii M P, et ideò I P seu abscissa in ratione quadruplicatâ inversa radii seu ordinatæ M P, sive I P ut $\frac{1}{MP^4}$, et ideò $MP^4 \times IP$, quantitas data. Est igitur curva E M A, hyperbola quarti gradûs, asymptotos habens I G, I K, quibus convexitatem



obvertit. Producantur arcus E M A, et asymptotus I K ad partes X in infinitum, et figura E A X X I G circà asymptotum seu axem I G, rotata cataractam describet in infinitum ad partes X, x, productam; figura verò E M A H G, hanc cataractæ partem quæ intra vas A B D C, continetur, generabit.

273. Tota cataracta E A X x B F, æquatur cylindro cujus basis est circulus E F, et altitudo 2 I G. Sint enim altitudo I G = x, ordinata E G = y, a linea data, et (272) $x = \frac{a^5}{y^4}$ x, ideóque $y^4 = a^5$ æquatio ad hyperbolam E M A X. Et si semi-peripheria circuli cujus radius est unitas, dicatur p, erit circuli E F area $= pyy$, et cylindrus $EG \times 2IG = 2pyyx = \frac{2pa^5}{yy}$. Cùm verò sit $x = \frac{a^5}{y^4}$, ac proindè $dx = -\frac{4a^5dy}{y^5}$, cataractæ elementum $pyydx = -\frac{4pa^5dy}{y^3} = -4pa^5y^{-3}dy$, et sumptis fluentibus, tota cataracta ad asymptotum usque X x producta, erit $= \frac{2pa^5}{yy} = 2EF \times IG$. Q. e. d.

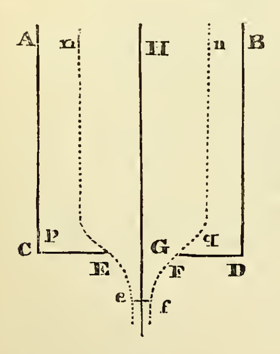
(k) 274. *Et pondus totum*, &c. Pondus quidem totum columnæ aquæ A B N F E M in defluxum ejus generandum impenditur; attamen totum aquæ motum non generat, cùm motûs illius pars pendeat a motu superficiei A B, quæ (per Hyp.) eam habet velocitatem quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem I H acquirere potest. Sed totum aquæ defluxum mathematicè considerare possumus tanquam genitum pondere aquæ totius, quæ in cataractâ E A X x B F, usque ad asymptotum X x producta continetur, quæque æqualis est cylindro aqueo basi E F et altitudine 2 I G, descripto (273).

(l) * *Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere,* atquè ità aquæ descensum accelerare; *non* tamen *major erit, quia glacies in aquam resoluta,* ob reactionem actioni æqualem et contrariam, *non potest descendere, nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem.* Idem igitur manet in aquâ totâ ad descendendum et per foramen E F effluendum conatus. At *eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.*

non potest descendere nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vasis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus esse debet quàm prius. (m) Nam particulæ aquæ jam non transeunt omnes per foramen perpendiculariter; sed a lateribus vasis undique confluentes et in foramen convergentes, obliquis transeunt motibus; et cursum suum deorsum flectentes in venam aquæ exilientis conspirant, quæ exilior est paulo infra foramen quàm in ipso foramine, existente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proximè, si modò diametros rectè dimensus sum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, existente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis, cadendo accelararetur et acceleratione redderetur angustior, hanc laminam non fundo sed lateri vasis effixi sic, ut vena illa egrederetur secundùm lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquâ plenum esset, aperui foramen ut aqua effluerct; et venæ diameter, ad distantiam quasi dimidii digiti a foramine quàm accuratissimè mensurata, prodiit partium viginti et unius quadragesimarum digiti. (n) Erat igitur diameter forami-

(m) * *Nam particulæ aquæ*, &c. Clariss. Daniel Bernoullius paragr. 3. Sect. IV. Hydrodynamicæ observavit particulas ceræ Hispanicæ aquis innatantes ità cum aquâ in vase moveri, ut quæ foraminis centro C imminent, per lineam verticalem H G, descendant, aliæ verò omnes



utrinque positæ motu fere verticali descendant primùm per lineas m p, n q, fere ad fundum usque C D, tumque cursum suum versus foramen E F per lineas P E, q F sensim inflectant. Itaque vena aquæ exilientis E F f e duplici de causâ contrahitur usque in e f paulo infra foramen E F. Prima contractionis illius causa est acceleratio motûs, quæ omnibus gravibus cadentibus communis est, et quâ fit ut major sit velocitas aquæ in loco inferiori e f quàm in superiore E F; quia enim aquam esse in statu manente, eandemque proindè (271) illius quantitatem per sectiones E F et e f, eodem tempore effluere supponimus, sectio e f est ad sectionem E F in ratione velocitatis aquæ in loco E F, ad ejus velocitatem in loco e f (271) et ideò sectio e f, cæteris paribus, minor esse debet sectione E F. Secunda contractionis venæ causa, quam solam hic considerat Newtonus, est obliquitas motûs particularum aquæ per lineas P E, q F, ad foramen E F tendentium; hinc enim fit, ut seclusâ etiam omni acceleratione motûs a gravitate ortâ, particulæ aquæ convergant, venamque contrahant, atque ideò motum suum accelerent.

(n) * *Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproximè.* Hæc ratio in experimentis constans ferè manet, si aqua e vase satis amplo per exiguum foramen laminæ tenuissimæ insculptum effluat, licet in vase mutetur aquæ foramini incumbentis altitudo. Experimenta illa iterarunt celeberrimi mathematici, Marchio Polenus Lib. de Castellis et Daniel Bernoullius Sect. IV. Hydrodynamicæ. Hæc sunt illustr. Marchionis verba pag. 38. 39. "Proclive autem erit intelligere, confirmari ex allatis experimentis rationem inter diametros foraminum et aquæ contractæ diametros a viro summo Isaaco Newtono, ut antè diximus, constitutam. Non tamen inficias

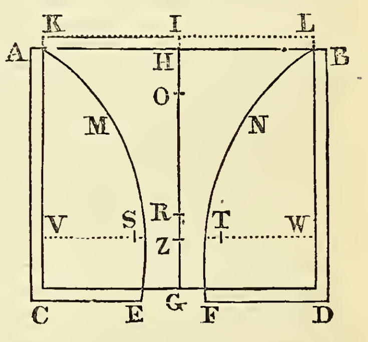
nis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quàmproximè. Aqua igitur transeundo per foramen, convergit undique, et postquam effluxit ex vase, tenuior redditur convergendo, et per attenuationem acceleratur donec ad distantiam semissis digiti a foramine pervenerit, et ad distantiam illam tenuior (o) et celerior fit quàm in ipso foramine in ratione 25 × 25 ad 21 × 21 seu 17 ad 12 quamproximè, id est in subduplicatâ ratione binarii ad unitatem circiter. (p) Per experimenta verò

iverim perexiguam aliquam differentiam interesse inter contractiones aquæ effluentis ex minoribus foraminibus, et aquæ contractiones ex majoribus effluentis. Anteà descripti foraminis in laminâ ferreâ diameter ad diametrum aquæ contractæ fuit in eâ ratione quam habet numerus 52 ad 41; cùm Newtoniana sit ratio numeri 50 ad 42. sic omninò eâdem lege, non semper contrahi aquæ venas ostendunt variæ contractiones in aquæ a variis frustis conicis effluxu observatæ, quin etiam huc debebunt referri illæ quas animadverti differentiæ inter diametros ad perpendiculum sumptas, et diametros secundum lineam horizonti parallelam mensas. At quanta sit differentia inter aquæ contractiones non ausim definire; neque verò illa Newtoniana ratio inter diametrum foraminis et contractæ aquæ diametrum sumi debet ceu præcisa, cùm ipse vir summus in citato opere hæc habeat; existente ejus (nempè aquæ contractæ) diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel 5 et $\frac{1}{2}$ ad 6 et $\frac{1}{2}$, quamproximè, si modò diametros rectè dimensus sum." Bernoullius verò Sect. IV. parag. 7. hæc habet; "interim assumptis laminâ tenui, vase amplissimo, foramine ad 4 vel 6 lineas in diametro assurgente, solet ratio inter foramen et sectionem venæ contractæ non multum recedere ab illâ quam Newtonus statuit." Verùm utriusque authoris experimenta demonstrant, rationem illam diametri venæ contractæ ad diametrum foraminis multum variari, si per oblongos variæque figuræ canales, non verò ex simplici foramine in tenuissimâ laminâ insculpto e vase effluat aqua.

(o) * *Et celerior fit quàm in ipso foramine.* Nam velocitates sunt reciprocè ut circuli per quos aqua eodem tempore transit (171), circuli verò sunt in ratione duplicatâ diametrorum; et ideò velocitas aquæ per sectionem circularem venæ contractæ transeuntis est ad velocitatem aquæ per foramen effluentis ut 25 × 25 ad 21 × 21 hoc est, 625 ad 441; quod utrumque divisum per 37 dat rationem 17 ad 12, vel utrumque divisum per 441, dat rationem 1.41, &c. ad 1, est verò radix binarii numeri 1.41, &c., est ergo velocitas aquæ per venam contractam ad velocitatem per foramen in ratione radicis binarii numeri ad unitatem.

(p) *Per experimenta verò constat.* Datâ quantitate aquæ per datum foramen seu per datam venæ contractæ sectionem dato tempore effluentis, sic illius velocitas inquiritur. Quoniam data aquæ quantitas æquatur cylindro vel prismati cujus basis est foramen datum aut venæ contractæ sectio, et altitudo spatium quod aqua tempore dato cum illâ velocitate quam in foramine aut venæ sectione habet, uniformiter progrediendo describeret, dividitur quantitas aquæ data per foraminis aut sectionis venæ aream, et quotiens erit spatium quod aqua dato tempore uniformiter progrediendo describeret, atquè ità nota fit aquæ velocitas cujus dimidium est altitudo ex quâ cadere debuit ut eam velocitatem acquireret. Sit jam a altitudo quam corpus grave tempore minuti unius secundi sine resistentiâ cadendo describit, v velocitas hoc casu acquisita, et ideò 2 a spatium quod velocitate uniformi v tempore minuti unius secundi describi potest (50. Lib. I.) sit b altitudo aquæ in vase stagnantis, c celeritas quam grave per altitudinem b sine resistentiâ cadendo acquirit, et s spatium quod cum celeritate c uniformiter progrediendo tempore minuti unius secundi describeret, erit $a : b = vv : cc$ (28. Lib. I.) et $2a : s = v : c$ (5. Lib. I.) ideóque $a : b = 4aa : ss$; undè habetur $ss = 4ab$, et $s = \sqrt{4ab}$. Si igitur aqua e vase per venæ contractæ sectionem effluat cum velocitate c quam grave cadendo et casu suo describendo altitudinem b aquæ in vase stagnantis acquirit, spatium s quod ex quantitate aquæ tempore minuti unius secundi e vase effluentis, ut suprà dictum est, habetur, debet esse æquale $\sqrt{4ab}$. Hinc si altitudo a, sit pedum Paris. 14, erit $ss = 56b$, quæ est ipsa regula quam D. Pitot in Monum. Acad. Paris. an. 1730. tradidit. At si altitudo a ponatur esse pedum Paris. $15\frac{1}{12}$ seu $\frac{181}{12}$ (471. Lib. I.) erit $ss = \frac{181}{3}b$. Verùm ut aquæ in vase stagnantis altitudo et velocitas per foramen effluentis quo tempore experimentum capitur, eadem ad sensum maneant, ut oportet, usurpari potest vas satis amplum exiguo pertusum foramine, vel si vas paulò angustius adhibeatur, tantum aquæ affundi supernè debet quantum per inferius lumen effluit, et cavendum est ne affusa aqua cum aliquo impetu cadendi extimam aquæ in vase stagnantis superficiem attingat. Quibus autem artibus id possit effici fusè exponunt locis suprà citatis Marchio Polenus et Daniel Bernoullius quos lector consulere potest. Attamen his adhibitis cautelis, velocitas aquæ per venæ contractæ sectionem effluentis paulò minor per experimenta

constat quòd quantitas aquæ, quæ per foramen circulare in fundo vasis factum, dato tempore effluit, ea sit quæ cum velocitate prædictâ, non per foramen illud, sed per foramen circulare, cujus diameter est ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideóque aqua illa effluens velocitatem habet deorsum in ipso foramine quam grave cadendo et casu suo (q) describendo dimidiam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirere potest quamproximè. Sed postquam exivit ex vase, acceleratur convergendo donec ad distantiam a foramine diametro foraminis prope æqualem pervenerit, et velocitatem acquisiverit majorem in ratione subduplicatâ binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, et casu suo describendo totam altitudinem aquæ in vase stagnantis, acquirere potest quamproximè.



In sequentibus igitur diameter venæ designetur per foramen illud minus quod vocavimus E F. Et plano foraminis E F parallelum duci intelligatur planum aliud superius V W ad distantiam diametro foraminis æqualem circiter et foramine majore S T pertusum; per quod utique vena cadat, quæ adæquatè impleat foramen inferius E F, atque ideò cujus diameter sit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter transibit; et quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam solutio Problematis postulat quamproximè. Spatium verò, quod planis duobus et venâ cadente clauditur, pro fundo vasis haberi potest. Sed ut solutio Problematis simplicior sit et magis mathematica, præstat adhibere planum solum inferius pro fundo vasis, et fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, et e vase per foramen E F in plano inferiore factum egrediebatur, motum

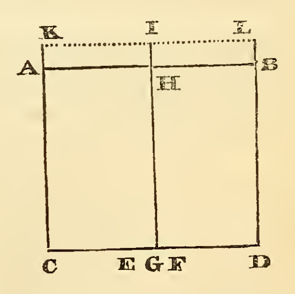
quàm per theoriam invenitur, quod variis resistentiis tribuendum esse videtur, et certè illustr. Marchio Polenus, cùm in Libro de Castellis pag. 64. opinatus fuisset velocitatem illam in experimentis valde esse minorem quàm in theoriâ, pluribus deinde experimentis ad calculos revocatis priorem sententiam mutavit in Epistolâ ad Marinonium.

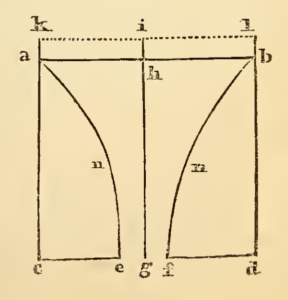
(q) *Describendo dimidiam altitudinem.* Velocitas quam corpus quodlibet grave, sine resistentiâ cadendo et casu suo describendo dimidiam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirit, est ad velocitatem ejus per totam altitudinem aquæ cadendo acquisitam ut 1 ad $\sqrt{2}$ (28. Lib. I.) Sed, ex suprà ostensis, velocitas aquæ per vasis foramen transeuntis est ad velocitatem per venæ contractæ sectionem fluentis, id est, ad velocitatem quam grave cadendo per totam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirit, in eâdem ratione 1, ad $\sqrt{2}$; quarè velocitas quam grave per dimidiam altitudinem aquæ stagnantis cadendo acquirit, æqualis est velocitati aquæ per foramen effluentis, modò tamen aqua per simplex foramen in tenuissimâ laminâ factum, ut suprà expositum est, effluat e vase.

suum perpetuo servet, (r) et glacies quietem suam. In sequentibus igitur sit S T diameter foraminis circularis centro Z descripti per quod cataracta effluit ex vase ubi aqua tota in vase fluida est. Et sit E F diameter foraminis per quod cataracta cadendo adæquatè transit, sive aqua exeat ex vase per foramen illud superius S T, sive cadat per medium glaciei in vase tanquam per infundibulum. Et sit diameter foraminis superioris S T ad diametrum inferioris E F ut 25 ad 21 circiter, et distantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis sit diametro foraminis minoris E F. Et velocitas aquæ e vase per foramen S T exeuntis ea erit in ipso foramine deorsum quam corpus cadendo a dimidio altitudinis I Z acquirere potest: velocitas autem cataractæ utriusque cadentis ea erit in foramine E F, quam corpus cadendo ab altitudine totâ I G (s) acquiret.

Cas. 2. Si foramen E F non sit in medio fundi vasis, sed fundum alibi perforetur: aqua effluet eâdem cum velocitate ac priùs, si modò eadem sit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore descendit ad eandem profunditatem (t) per lineam obliquam quàm per lineam perpendicularem, sed descendendo eandem velocitatem acquirit in utroque casu, (u) ut Galilæus demonstravit.

Cas. 3. Eadem est aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vasis. Nam si foramen parvum sit, (x) ut intervallum inter superficies





(r) * *Et glacies quietem suam.* Sumto vasa duo æqualia A B D C, a b d c, in quorum primo glacies omnis in aquam resoluta sit, et in altero glacies quietem suam conservet, ut aqua cataractam a b m f e n formando effluat per foramen e f sectioni venæ contractæ e foramine E F exilientis æquale; et loco vasis A B D C, in Problematis solutione substitui poterit vas alterum a b d c, in quo aquæ per lumen e f effluentis eadem est velocitas quam aqua e vase A B D C exiliens habet in sectione venæ contractæ, eademque proindè aquæ quantitas in defluxum impenditur, et proptereà idem aquæ pondus fundo incumbit in utroque vase. Quoniam enim cataractæ a b m f e n figura et lex secundùm quam aqua cataractâ illâ movetur notæ sunt, Problematis solutio et facilior et magis mathematica fiet, si loco vasis A B D C mente substituatur vas a b d c.

(s) * *Acquiret.* Hæc ex suprà demonstratis patent.

(t) * *Per lineam obliquam.* In hoc secundo casu pars aquæ per lineas ad foramen obliquas descendit.

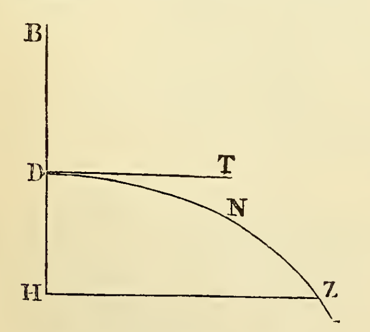
(u) * *Ut Galilæus demonstravit* (81. et 85. Lib. I.).

(x) 275. * *Ut intervallum inter superficies A B et K L.* I H est ad I G in ratione quadruplicatâ diametri E F ad diametrum A B

A B et K L quoad sensum evanescat, et vena aquæ horizontaliter exilientis figuram parabolicam efformet: (y) ex latere recto hujus parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea sit quam corpus ab aquæ in vase stagnantis altitudine H G vel I G cadendo acquirere potuisset. Facto utique experimento inveni quod, si altitudo aquæ stagnantis supra foramen esset viginti digitorum et altitudo foraminis supra planum horizonti parallelum esset quoque viginti digitorum, vena aquæ prosilientis incideret in planum illud ad distantiam digitorum 37 circiter a perpendiculo quod in planum illud a foramine demittebatur captam. Nam sine resistentiâ, vena (z) incidere debuisset in planum illud ad distantiam digitorum 40, existente venæ parabolicæ latere recto digitorum 80.

Cas. 4. Quin etiam aqua effluens, si sursum feratur, eâdem egreditur cum velocitate. Ascendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vase stagnantis altitudinem G H vel G I, nisi quâtenus ascensus ejus ab aëris resistentiâ aliquantulum impediatur; (a) ac proinde eâ effluit cum velocitate quam ab altitudine illâ cadendo acquirere potuisset. Aquæ stagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (per Prop. XIX. Lib. II.) et pressioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, sive descendat per foramen in fundo vasis, sive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, sive egrediatur in canalem et inde ascendat per foramen parvum in superiore canalis parte factum. Et velocitatem quâ aqua effluit eam esse, quam in hâc Propositione as-

(272), aut quod idem est, in ratione duplicatâ areæ circuli E F ad aream circuli A B, ideóque si ratio E F ad A B parva sit, minor adhuc erit ratio I H ad I G, et H G, I G erunt ad sensum æquales.



(y) * *Ex latere recto hujus parabolæ.* Aquæ gutta e loco D, secundùm directionem quamlibet D T exiliat cum eâ velocitate quam per altitudinem B D cadendo acquirere potest, et sublatâ medii resistentiâ, describat parabolam D N Z, cujus vertex D, tangens D T, et diameter D H seu verticalis B D producta (40. Lib. I.), capiatur abscissa D H æqualis altitudini B D, ducaturque ordinata H Z, quæ tangenti D T parallela erit; et quo tempore gutta aquæ vi gravitatis cadendo altitudinem B D vel D H describit uniformi illâ velocitate quam casu per B D acquisivit, describit longitudinem H Z ipsius B D vel D H duplam, (30. Lib. I.). Latus rectum parabolæ D N Z, pertinens ad diametrum D H est $\frac{H Z^2}{D H}$ (Theor. I. de parab.) ideóque cùm sit H Z = 2 D H = 2 B D, latus rectum est 4 B D. Igitur altitudo B D quam aqua cadendo describere debet ut velocitatem acquirat cum quâ e loco D exilit, est quarta pars lateris recti ad diametrum D H parabolæ D N Z pertinentis.

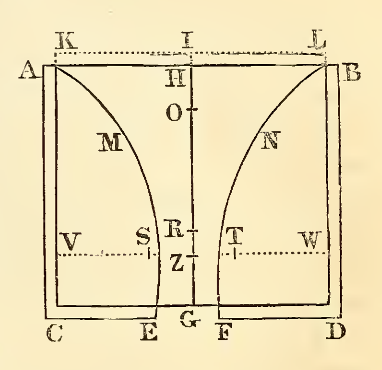
(z) * *Incidere debuisset in planum illud.* Sit enim altitudo B D = D H digit. 20, et quia B D est pars quarta lateris recti parabolæ D N Z, quam aqua sine resistentiâ describeret, latus illud rectum est digit. 80, et ordinata H Z æqualis 2 D H est digit. 40. differentia 3. digit. inter distantias 40. et 37. digit. resistentiis tribuenda est.

(a) * *Ac proinde eâ effluit cum velocitate* (25. 26. Lib. I.).

signavimus, non solùm ratione colligitur, sed etiam per experimenta notissima jam descripta manifestum est.

Cas. 5. Eadem est aquæ effluentis velocitas, sive figura foraminis sit circularis, sive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet a figurâ foraminis, sed oritur ab ejus altitudine infra planum K L.

Cas. 6. Si vasis A B D C pars inferior in aquam stagnantem immergatur et altitudo aquæ stagnantis supra fundum vasis sit G R: velocitas quâcum aqua quæ in vase est, effluet per foramen E F in aquam stagnantem, ea erit quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem I R acquirere potest. Nam pondus aquæ omnis in vase quæ inferior est superficie aquæ stagnantis, substinebitur in æquilibrio per pondus aquæ stagnantis, ideóque motum aquæ descendentis in vase minimè accelerabit. Patebit etiam et hic casus per experimenta, [b] mensurando scilicet tempora quibus aqua effluit.



[c] *Corol.* 1. Hinc si aquæ altitudo C A producatur ad K, ut sit A K ad C K in duplicatâ ratione areæ foraminis in quâvis fundi parte facti, ad aream circuli A B: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem K C acquirere potest.

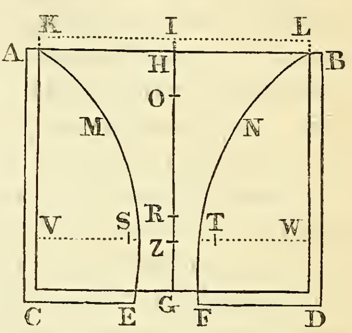
[d] *Corol.* 2. Et vis, quâ totus aquæ exilientis motus generari potest,

[b] * *Mensurando scilicet tempora quibus aqua effluit,* et quantitates aquæ iisdem temporibus effluentis.

[c] * *Corol.* 1. Patet per not. 275. et cas. 2. ac 5.

[d] * *Corol.* 2. De hujus Corollarii veritate diù multumque disputatum est inter Comitem Riccatum, Danielem Bernoullium, Petrum Antonium Michelottum, Jacobum Jurinum, aliosque eruditissimos viros. Cùm enim in primâ Principiorum editione, Newtonus, nondum observatâ contractione venæ, statuisset, vim quâ totus aquæ exilientis motus generari potest, æqualem esse ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus basis est foramen E F, et altitudo G I, et in secundâ editione, habitâ ratione venæ contractæ, vim illam duplam fecisset, priorem vis illius mensuram adversus Comitem Riccatum et Jurinum tuebatur cum Michelotto Daniel Bernoullius, quorum Dissertationes videre est in Exercitationibus Mathematicis quæ an. 1724. Venetiis editæ sunt. Verùm Daniel Bernoullius paragr. 9. Sect. XIII. Hydrodynamicæ posteriori sententiæ Newtoni ità suffragatur: "Ista sententia a me olim et ab aliis fuit impugnata, ab aliis rursus confirmata. Nunc autem postquam hanc aquarum motarum theoriam meditatus sum, lis ità dirimenda mihi videtur ut cum aquæ ad motum uniformem pervenerint, quæ quidem hypothesis est Newtoni, tunc rectè altitudine 2 G I, vis illa definiatur, sed ab initio fluxûs, ubi velocitas adhuc nulla est, vis simplici altitudini G I respondeat, moxque crescente velocitate, simul vis aquam ad effluxum animans crescat, et tandem ad eam magnitudinem exsurgat quam Newtonus assignavit. . . . . Rectè etiam ill. Riccatus, cum quo mihi de hoc argumento res erat, interrogatus, undè vis illa duplæ aquarum altitudini conveniens oriri possit, cum obturato orificio, gutta eidem imminens vi simplicis altitudinis urgeri manifestè appareat, respondit distinguendum esse statum quietis a statu

æqualis est ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus basis est foramen E F, et altitudo 2 G I vel 2 C K. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam æquat, pondere suo ab altitudine G I cadendo velocitatem suam, quâ exilit, acquirere potest.



Corol. 3. Pondus aquæ totius in vase A B D C est ad ponderis partem, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut summa circulorum A B et E F ad duplum circulum E F. Sit enim I O media proportionalis inter I H et I G; et aqua per foramen E F egrediens, quo tempore gutta cadendo ab I describere posset altitudinem I G, æqualis erit cylindro cujus basis est circulus E F et altitudo est 2 I G, id est, cylindro cujus basis est circulus A B et altitudo est 2 I O, (e) nam circulus E F est ad circulum A B in subduplicatâ ratione altitudinis I H ad altitudinem I G, hoc est, in simplici ratione mediæ proportionalis I O ad altitudinem I G: et quo tempore gutta cadendo ab I describere potest altitudinem I H, aqua egrediens (f) æqualis erit cylindro cujus basis est circulus A B et altitudo est 2 I H: et quo tempore gutta cadendo ab I per H ad G describit altitudinum differentiam H G, aqua egrediens, (g) id est, aqua tota in solido A B N F E M æqua-

motûs." Jam verò hujus Cor. 2. demonstrationem dedimus (274.); aliam, quam Newtonus indicat, exposuerunt Comes Riccatus in citatis Exercitationibus, et Eustachius Manfredius in Adnotationibus ad cap. 1. Tractatûs Guilelmini de Natura Fluminum (quod præclarum opus post fata summi viri, clariss. fratres Gabriel et Heraclitus Manfredi. an. 1739. Bononiæ edi curarunt.) Demonstratio sic potest exponi. Quo tempore cylindrus aquæ, cujus basis æqualis est foramini E F, et altitudo G I vi ponderis sui cadendo describeret altitudinem I G, et velocitatem aquæ exilientis acquireret; eodem tempore e foramine E F efflueret aquæ quantitas æqualis alteri cylindro aqueo, cujus basis est foramen E F, et longitudo 2 G I (30. Lib. I.), id est, cylindro prioris duplo; et ideò ob velocitatem quam cylindrus per altitudinem I G, cadendo acquirit, æqualem velocitati aquæ exilientis, quantitas motûs in illo cylindro vi ponderis ejusdem cylindri genita, est ad quantitatem motûs eodem tempore in aquâ exiliente productam ut 1 ad 2. Sed vires uniformes quibus cylindri cadentis et aquæ exilientis motus generantur, sunt ut motûs quantitates eodem tempore a viribus illis genitæ (15. Lib. I.). Quare pondus cylindri aquæ, cujus basis est foramen E F, et altitudo G I, est ad vim quâ totus aquæ exilientis motus generari potest ut 1 ad 2, et proinde hæc vis æqualis est ponderi cylindricæ columnæ aquæ cujus basis et foramen E F et altitudo 2 G I. Q. e. d.

(e) * *Nam circulus E F est ad circulum A B, in subduplicatâ ratione altitudinis I H, ad altitudinem I G* (per Cor. 1.) *id est, in simplici ratione mediæ proportionalis I O, ad altitudinem I G,* ideóque factum ex circulo A B in altitudinem 2 I O æquale est facto ex circulo E F in altitudinem 2 I G, aut, quod idem est, cylindrus cujus basis est circulus E F et altitudo 2 I G, æquatur cylindro cujus basis est circulus A B et altitudo 2 I O.

(f) * *Æqualis erit cylindro cujus basis est circulus A B et altitudo est 2 I H.* Eadem enim aquæ quantitas eodem tempore transit per circulos A B, et E F (271) et quantitas aquæ per circulum A B, transeuntis eo tempore quo gutta cadendo describere potest altitudinem I H, æqualis erit cylindro aqueo cujus basis est circulus A B et altitudo 2 I H (30. Lib. I.).

(g) * *Id est, aqua tota.* Nam ex iis quæ ante cas. 1. dicta sunt, manifestum est aquam totam prædicto solido contentam, per foramen E F eodem tempore effluere, quo aquæ gutta vi gra-

lis erit differentiæ cylindrorum, id est, cylindro cujus basis est A B et altitudo 2 H O. Et propterea aqua tota in vase A B D C est ad aquam totam cadentem in solido A B N F E M (h) ut H G ad 2 H O, id est, ut H O + O G ad H O, seu I H + I O ad 2 I H. Sed pondus aquæ totius in solido A B N F E M in aquæ defluxum (i) impenditur: ac proinde pondus aquæ totius in vase est ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut I H + I O ad 2 I H, (k) atque ideò ut summa circulorum E F et A B ad duplum circulum E F.

(l) *Corol.* 4. Et hinc pondus aquæ totius in vase A B D C est ad ponderis partem alteram quam fundum vasis sustinet, ut summa circulorum A B et E F ad differentiam eorundem circulorum.

(m) *Corol.* 5. Et ponderis pars, quam fundum vasis sustinet, est ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum A B et E F ad duplum circulum minorem E F, sive ut area fundi ad duplum foramen.

(n) *Corol.* 6. Ponderis autem pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus A B ad summam circulorum A B et E F, sive ut circulus A B ad excessum dupli circuli A B supra fundum. Nam ponderis pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius in vase, ut differentia circulorum A B et E F ad summam eorundem circulorum, per Cor. 4.: et pondus aquæ totius in vase est ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus A B ad differentiam circulorum A B et E F. Itaque ex æquo perturbatè, ponderis pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus

vitatis suæ e loco I per H ad G cadendo describit altitudinem H G.

(h) * *Ut H G ad 2 H O*, &c. Volumen aquæ in vase A B D C contentæ æquatur capacitati vasis seu cylindro cujus basis est circulus A B, et altitudo H G; et propterea aqua tota in vase A B D C, est ad aquam totam cadentem in solido A B N F E M, ut H G ad 2 H O (ex dem.), id est, ut H O + O G ad 2 H O, et quia (per Hyp.) I H : I O = I O : I G = I O — I H : I G — I O = H O : O G, erit H O + O G : 2 H O = I H + I O : 2 I H.

(i) *Impenditur*, ut probatum est initio cas. 1.

(k) * *Atque ideò ut summa circulorum.* Quoniam enim (per Hyp.) est I H ad I O ut I O ad I G, erit etiam I H + I O ad 2 I H ut I G + I O ad 2 I O, sed (ex modò dem.) circulus A B est ad circulum E F ut I G ad I O, ideóque summa circulorum A B et E F ad duplum circulum E F ut I G + I O ad 2 I O seu ut I H + I O ad 2 I H. Quarè patet propositum.

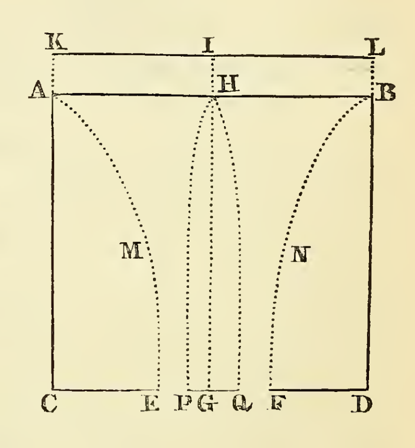
(l) * *Corol.* 4. Pondus aquæ totius in vase A B D C sit P ponderis illius pars quæ in defluxum impenditur sit p et hinc P — p, pars ponderis totius quæ fundo vasis seu plano æquali differentiæ circulorum C D et E F sustinetur et in defluxum non impenditur. Et (per Cor. 5.) erit P : p = A B + E F : 2 E F, ac proindè P : P — p = A B + E F : A B — E F.

(m) * *Corol.* 5. Cùm sit P : p = A B + E F : 2 E F, erit quoque P — p : p = A B — E F : 2 E F. Est autem area fundi æqualis differentiæ circulorum A B et E F.

(n) * *Corol.* 6. *Ponderis autem pars, quâ solâ fundum urgetur,* sive pondus aquæ quæ in spatio solido C E M A D F N B continetur, *est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit* et quæ æquatur solido aqueo cujus basis est differentia circulorum A B et E F, et altitudo G H, *ut circulus,* &c.

A B ad summam circulorum A B et E F (°) vel excessum dupli circuli A B supra fundum.

Corol. 7. Si in medio foraminis E F locetur circellus P Q centro G descriptus et horizonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille sustinet, majus est pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo est G H. Sit enim A B N F E M cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens G H ut supra, et congelari intelligatur aqua omnis in vase, (P) tam in circuitu cataractæ quàm supra circellum, cujus fluiditas ad promptissimum et celerrimum aquæ descensum non requiritur. Et sit P H Q columna aquæ supra circellum congelata, verticem habens H et altitudinem G H. Et finge cataractam hancce pondere suo toto cadere et non incumbere in P H Q, nec eandem premere, sed liberè et sine frictione præterlabi, nisi forte in ipso glaciei vertice quo cataracta ipso cadendi initio incipiat esse cava. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata A M E C, B N F D convexa est in superficie internâ A M E, B N F versus cataractam cadentem, sic etiam hæc co-



(°) * *Vel excessum dupli circuli A B supra fundum.* Cùm fundum æquale sit differentiæ circulorum A B et E F, excessus dupli circuli A B, suprà fundum est 2 A B — A B + E F, seu A B + E F.

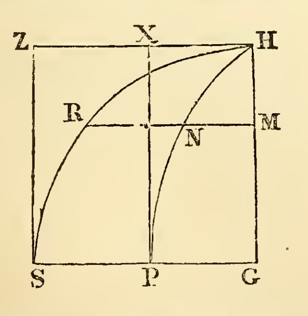
(P) * *Tam in circuitu cataractæ.* Quemadmodum enim suprà antè cas. 1., aqua omnis cujus fluiditas ad promptissimum et celerrimum aquæ descensum illiusque effluxum per foramen E F inutilis erat, in circuitu cataractæ congelata supponebatur, idque rectè factum experimentis posteà ostensum est, ità hic loci congelata supponi potest aqua omnis in vase tam in circuitu cataractæ quàm suprà circellum, cujus fluiditas ad promptissimum et celerrimum aquæ effluxum per spatium annulare E P, Q F, non requiritur; et quemadmodum glacies in circuitu cataractæ constituta, C E M A, D F N B pertingebat ad superficiem A B seu terminum glaciei continuò liquescentis K A B L, ità aqua suprà circellum congelata producitur ad punctum H, in eâdem superficie A B positum; et uti glacies *in circuitu cataractæ convexa est versùs cataractam cadentem* (272), *sic etiam columna aquæ suprà circellum congelatæ P H Q convexa erit versus cataractam cadentem A H P E M, B H Q F N;* * considerari enim potest axis H G ut paries vasis cujus sectio sit H G C A, et foramen in fundo factum sit E P, qualiscumque autem sit lex quâ effluit aqua ex vase, eodem modo quo factum est a Newtono in hujus demonstrationis casu primo, concipi potest cataracta trans glaciem effluens, adhibitis cautionibus illic notatis, ut hæc hypothesis mathematica congruat cum verâ effluxus aquæ lege, quâtenus ad copiam aquæ effluentis dato tempore, quo posito evidens est lineam H P convexam sumi debere. Quâpropter si ex punctis P et Q ad punctum H ducantur lineæ rectæ, quæ cum diametro P Q triangulum constituant, conus ex revolutione hujus trianguli circà axem H G genitus, totus continebitur in solido quod per rotationem figuræ convexæ P H Q circâ eundem axem H G generatur. Hoc igitur solidum, seu columna P H Q suprà circellum congelata, magnitudine superat conum illum cujus basis est circellus P Q et altitudo H G. Quarè (per Prop. X. Lib. XII. Elem.) columna congelata P H Q, major est tertiâ parte cylindri aquæ, cujus basis est circellus P Q et altitudo G H. Sed sicut fundum E C, F D sustinet pondus aquæ in spatio solido C E M A, D F N B contentæ, ità circellus

lumna P H Q convexa erit versus cataractam, et propterea major cono cujus basis est circellus ille P Q et altitudo G H, id est, major tertiâ parte cylindri eâdem base et altitudine descripti. Sustinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id est, pondus quod pondere coni seu tertiæ partis cylindri illius majus est.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus P Q sustinet, minus esse videtur pondere duarum tertiarum partium cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo est H G. Nam stantibus jam positis, describi intelligatur dimidium sphæroidis cujus basis est circellus ille et semi-axis sive altitudo est H G. (q) Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus cylindri illius et comprehendet columnam aquæ congelatæ P H Q cujus pondus circellus ille sustinet. Nam ut motus aquæ sit maximè directus, columnæ illius superficies externa concurret cum basi P Q (r) in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua cadendo perpetuò acceleratur et propter accelerationem fit tenuior; et cùm angulus ille sit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes (s) jacebit intra dimidium sphæroidis. (t) Eadem verò sursum acuta erit seu cuspidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem sphæroidis sit infinitè velocior quàm

P Q sustinet pondus columnæ aquæ P H Q, id est, pondus quod majus est pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus basis est circellus P Q et altitudo G H.

(q) * *Et hæc figura æqualis erit*, &c. Centro G, et semi-axibus conjugatis G H et G P, describatur ellipseos quadrans H N P, et centro eodem G ac radio G H circuli quadrans H R S, compleanturque rectangula H G P X et H G S Z. Ducatur in circulo ordinata quævis R M, ellipsi



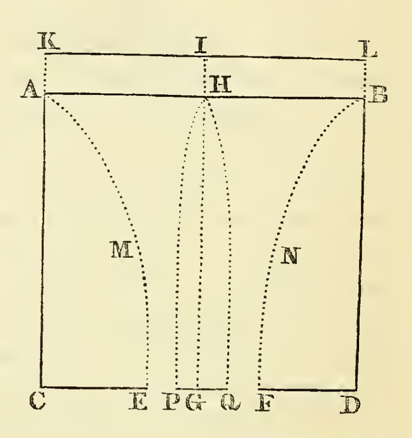
occurrens in N, erit R M ad N M, in datâ ratione S G ad P G (247. Lib. I.) et propterea si figuræ illæ circà axem H G revolvantur, circulus quem radius M R in hâc revolutione describet, erit ad circulum radio M N descriptum in datâ ratione $S G^2$ ad $P G^2$, seu in datâ ratione cylindri quem rectangulum H G S Z rotando describit ad cylindrum ex rotatione rectanguli H G P X genitum; undè (per Cor. Lem. IV. Lib. I.) hemisphærium ex revolutione quadrantis circuli H R S G genitum, est ad hemisphæroidem ex rotatione quadrantis ellipseos H N P G in eâdem ratione. Cum igitur hemisphærium sit ad cylindrum circumscriptum ut 2 ad 3 (170. Lib. II.) erit etiam hemisphærois ad cylindrum circumscriptum qui per rotationem rectanguli H G P X generatur, in eâdem ratione 2 ad 3. Q. e. d.

(r) * *In angulo nonnihil acuto.* Nam quemadmodum angulus quem cataractæ A B N F E M superficies externa A M E, B N F cum basi C E, D F constituit, est semper acutus, quia aqua cadendo semper acceleratur (272.). Sic etiam, ob eandem rationem, columnæ P H Q superficies externa concurret cum basi P Q in angulo acuto H P Q, H Q P. Quia verò circulo P Q evanescente, seu coincidente H P cum axe H G, angulus ille H P G rectus evadit; si circulus est valdè parvus; angulus H P G erit fere rectus seu nonnihil acutus.

(s) *Jacebit intrà dimidium sphæroidis.* Quia (ex naturâ ellipseos) in quâ tangentes per axium vertices ductæ angulos rectos cum axibus constituunt, sphæroidis superficies cum circello P Q, concurrit in angulo recto.

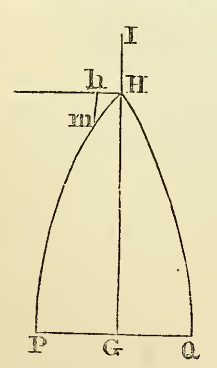
(t) * *Eadem verò sursum acuta erit.* Cùm enim partes aquæ duplici motu cieantur in H, alio verticali qui lapsu per altitudinem I H acquiritur, alio horizontali quo partes aquæ ad cataractam formandam ad se mutuò accedunt, uti suprà antè cas. 1. dictum est, atquè ideò guttula

ejus motus horizontem versus. (u) Et quò minor est circellus P Q, eò acutior erit vertex columnæ; et circello in infinitum diminuto, angulus, P H Q in infinitum diminuetur et propterea columna jacebit intra dimidium sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio sphæroidis, seu duabus tertiis partibus cylindri cujus basis est circellus ille et altitudo G H. Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cùm pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.



Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus P Q sustinet, æquale est ponderi cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo est $\frac{1}{2}$ G H quamproximè. (x) Nam pondus hocce est medium arithmeticum inter pondera coni et hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valde parvus, sed augeatur donec æquet foramen E F; hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo est G H.

aquæ in H, lineam curvam H P motu composito describat, necessum est ut angulus P H G sit acutus, et proindè columna P H Q cuspidata in H. Describat enim guttula aquæ lineam



quam minimam H h, motu horizontali, et eodem temporis momento lineam h m, motu verticali, atquè arcum H m motu composito; et velocitas horizontalis erit ad velocitatem verticalem ut H h ad h m, id est, ut sinus h m H seu m H G ad sinum anguli h H m. Sed evanescente angulo h H m, seu angulo m H G recto existente, sinus anguli m H G, infinitè major est sinu anguli h H m. Quare si angulus m H G rectus sit, horizontalis motus aquæ erit infinitè major quàm motus ejus verticalis. Quod absurdum est; angulus igitur m H G acutus est.

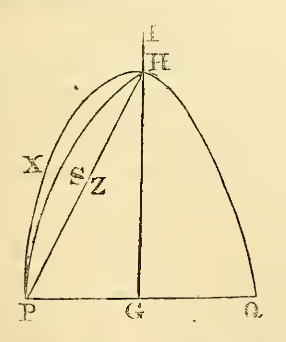
(u) * *Et quò minor est circellus P Q.* Nam si circellus P Q ità augeatur, ut adæquet foramen E F illudque occludat, columna P H Q evadet cylindrica, et recta m h coincidente cum H h angulus m H G rectus erit; et contrà circello in infinitum diminuto, coincidet H m P, cum axe H G, angulusque m H G evanescet. Columna igitur tam ad superiores partes versùs H, quàm ad inferiores partes versùs P et Q, jacebit intrà dimidium sphæroidis.

(x) * *Nam pondus hocce est medium arithmeticum.* Cùm enim columna illa aquæ, quam circellus valde parvus sustinet, major sit tertiâ parte cylindri cujus basis est circellus ille et altitudo H G (Cor. 7.), et minor duabus tertiis partibus ejusdem cylindri (Cor. 8.), erit ferè æqualis medio arithmetico inter cylindros $\frac{1}{3}$ P Q $\times$ H G, et $\frac{2}{3}$ P Q $\times$ H G. Est autem medium illud arithmeticum æquale dimidiæ summæ illorum cylindrorum, id est, cylindro $\frac{1}{2}$ P Q $\times$ H G, cujus basis est circellus P Q, et altitudo $\frac{1}{2}$ H G.

Corol. 10. Et (quantum sentio) pondus quod circellus sustinet, est semper ad pondus cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille et altitudo est $\frac{1}{2}$ G H, (y) ut E F q ad E F q — $\frac{1}{2}$ P Q q, sive ut circulus E F ad excessum circuli hujus supra semissem circelli P Q quamproximè.

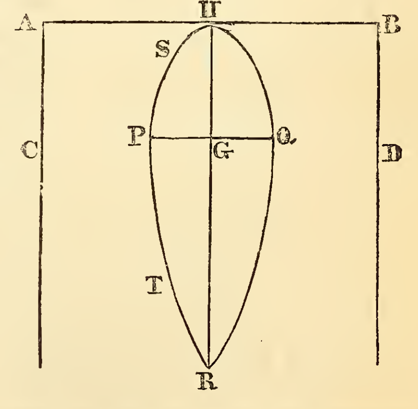
(y) * *Ut E F q ad E F q* — $\frac{1}{2}$ *P Q q.* Hæc enim suppositio superioribus determinationibus satisfacit. Nam sit p pondus aquæ quam circellus sustinet; P pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo G H; et si (juxtà Cor. hoc 10.) ponatur $p : \frac{1}{2} P = EF^2 : EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$, erit $p = \frac{\frac{1}{2} P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2}$. Sed quantitas $\frac{\frac{1}{2} P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2} = \frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2}$ semper major est quantitate $\frac{1}{3}$ P, quod Cor. 7. satisfacit. Et contrà quantitas illa $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2}$, minor est quàm $\frac{2}{3}$ P, ubi circellus est, satis parvus seu quamdiu $2\,\overline{PQ}^2 < EF^2$ (cùm enim fit $\overline{PQ}^2 = \frac{EF^2}{2}$, tunc illa quantitas p est $\frac{2 P \times \overline{EF}^2}{3 EF^2} = \frac{2}{3}$ P, (quæ est determinatio Cor. 8.). Tandem ubi circellus infinitè minor est quàm foramen E F, fit $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2} = \frac{1}{2}$ P, et ubi circellus adæquat foramen E F, est $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2} =$ P, quæ duo cum Cor. 9. determinationibus congruunt.

277. Si circellus P Q sit valdè parvus, et vertice P axe P G describatur per punctum H, parabolæ arcus P S H, et figura P S H G circà



H G convolvatur, solidum inde genitum columnam aquæ quam circellus sustinet exhibebit quam proximè. Nam angulus S P G quem parabola cum axe P G, continet, rectus est, et ideò quam proximè æqualis angulo quem prædictæ columnæ superficies cum circello valdè parvo P Q efficit (Cor. 8.); et evanescente P G, angulus S H G arcu parabolæ S H et rectâ H G comprehensus fit infinitè parvus, ut oportet (per idem Cor. 8.). Præterea si jungatur recta P Z H, et centro G, ac semi-axibus conjugatis G H, et G P describatur ellipseos quadrans P X H, et figuræ P Z H G, P S H G, P X H G circà axem H G convolvantur, solidum quod per revolutionem figuræ parabolicæ P S H G generatur, majus erit cono ex rotatione trianguli P Z H G genito, et minus hemisphæroide quam figura P X H G rotata describit, quod Cor. 7. et 8. satisfacit. Tandem, calculo inito, facile patet solidum quod per convolutionem figuræ P S H G, gignitur, esse ad cylindrum cujus basis est circellus P Q, et altitudo G H, ut 8 ad 15, quæ ratio non multùm aberrat a ratione 1 ad 2 quam Newtonus in Cor. 9. invenit.

278. Si circulus P Q valdè parvus maneat respectu foraminis E F, foramen verò E F quantumvis augeatur finitum sit, et vas A B D C infinitum evadat, æquales erunt altitudines I G et H G, et velocitas aquæ in loco P Q, ea erit



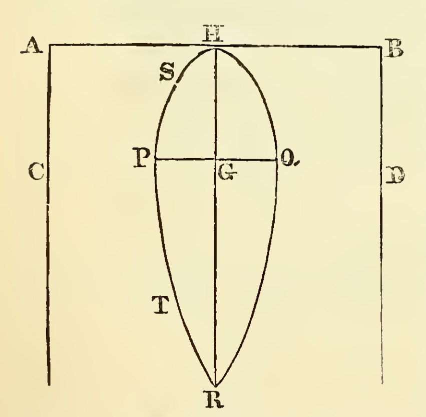
quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem H G, acquirere potest (per Cor. 1. Prop. hujus XXXVI.). Iisdem positis, si vas A B D C infrà circulum P Q continuetur, et aqua postquam pervenit ad locum P Q, solâ vi insitâ pergat uniformiter moveri cum illâ velocitate quam habet in loco P Q, sitque P Q R columna aquæ congelatæ, cujus fluiditas ad promptissimum alterius aquæ motum non requiritur, ut suprà de columnâ P H Q dictum est; erit G R = 2 G H et P T R ferè arcus parabolæ cujus vertex P axis P G, et ordinata G R. Nam * fingatur considerari lapsum ejus aquæ quæ per conoidem H P Q moveretur seorsim a lapsu reliquæ aquæ vasis, liquet quod eo tempore quo

LEMMA IV.

Cylindri, qui secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia ex auctâ vel diminutâ ejus longitudine non mutatur; ideóque eadem est cum resistentia circuli eâdem diametro descripti et eâdem velocitate secundùm lineam rectam plano ipsius perpendicularem progredientis.

([z]) Nam latera cylindri motui ejus minimè opponuntur: et cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminutâ, in circulum vertitur.

aquæ gutta motu verticali uniformiter accelerato cadit ex H in G effluet bis ea aquæ copia quæ in conoide H P Q continetur; ea ergo aquæ copia erit æqualis cylindro cujus altitudo erit H G, et basis circulus P Q, particula verò G celeritate ex lapsu per H acquisita describet 2 H G sive G R, tota ergo aqua quæ per conoidem H P Q movebitur occupabit figuram cujus



basis est circulus P Q, cujus altitudo est 2 H G, et soliditas dimidium cylindri cujus P Q foret basis et altitudo 2 H G, sed per præcedentem paraboloides est ferè dimidium cylindri circumscripti: ergo aqua quæ per conoidem effluit tum paraboloidem occuparet: est ergo columna P Q R columna aquæ congelatæ quæ ad promptissimum aquæ reliquæ circumpositæ motum non requiritur. Hæc ad demonstrationem scholii proximi hic adnectenda visa sunt; utrum satis rectè Newtonianæ demonstrationis indolem simus assecuti, videat B. Lector,

Si quid novisti rectiùs istis
Candidus imperti; si non, his utere mecum.

([z]) * *Nam latera cylindri*, &c. Hic enim latera cylindri esse politissima, et medii tenacitatem et frictionem esse nullam supponitur.

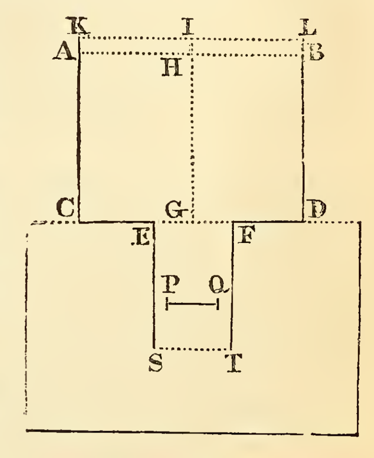
279. Lemma. *Vires uniformes sunt directè ut quantitates motûs quas generant, et inversè ut tempora quibus illas generant*, (13. et 15. Lib. I.); et quia motûs quantitates sunt ut massæ et velocitates conjunctim, sive ut volumina et densitates et velocitates, *vires uniformes sunt etiam in ratione compositâ ex rationibus directis voluminum, densitatum et velocitatum et ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant;* cùmque tempora illa sint ut spatia descripta directè et velocitates inversè (31. Lib. I.); *vires uniformes sunt quoque in ratione compositâ ex rationibus directis voluminum, densitatum et quadratorum velocitatis et ratione inversâ spatiorum descriptorum*, et quia velocitates sunt ut spatia descripta directè et tempora inversè, *vires uniformes sunt etiam in ratione compositâ ex ratione voluminum, densitatum et spatiorum descriptorum, et ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur.*

280. *Corol.* Quoniam cylindrorum volumina sunt ut eorum altitudines et diametrorum quadrata conjunctim: *vires uniformes quibus urgentur cylindri, sunt in ratione quæ componitur ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum et velocitatum a viribus illis genitarum, et ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant;* sunt etiam in ratione quæ componitur ex *rationibus directis altitudinum, quadratorum diametrorum, densitatum et quadratorum velocitatum, et ratione inversâ spatiorum descriptorum;* sunt quoque vires illæ in ratione compositâ *ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum et spatiorum descriptorum, et ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur.* Ubi prædictarum quantitatum, ex quibus virium ratio composita est, aliquæ datæ sunt, iis deletis habetur virium ratio.

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compresso infinito et non elastico secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia, quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, est ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproximè.

Nam si vas A B D C fundo suo C D superficiem aquæ stagnantis tangat, et aqua ex hoc vase per canalem cylindricum E F T S horizonti perpendicularem in aquam stagnantem effluat, locetur autem circellus P Q horizonti parallelus ubivis in medio canalis, et producatur C A ad K, ut sit A K ad C K in duplicatâ ratione quam habet excessus orificii canalis E F supra circellum P Q ad circellum A B: manifestum est (per Cas. 5. Cas. 6. et Cor. 1. Prop. XXXVI.) quod velocitas aquæ transeuntis per spatium annulare inter circellum et latera vasis, ea erit quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem K C vel I G acquirere potest.



Et (per Corol. 10. Prop. XXXVI.) si vasis latitudo sit infinita, [a] ut lineola H I evanescat et altitudines I G, H G æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus cylindri cuju basis est circellus ille et altitudo est $\frac{1}{2}$ I G, ut E F q ad E F q — $\frac{1}{2}$ P Q quamproximè. Nam vis aquæ, [b] uniformi motu defluentis per totu canalem, eadem erit in circellum P Q in quâcunque canalis parte locatum.

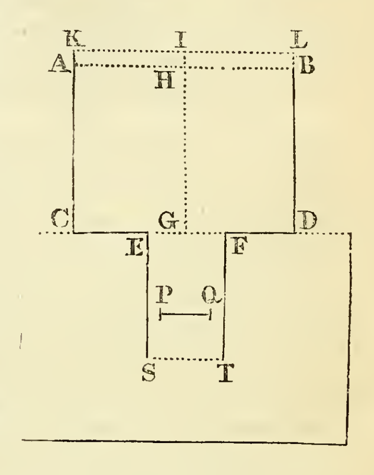
Claudantur jam canalis orificia E F, S T, et ascendat circellus in fluido undique compresso, et ascensu suo cogat aquam superiorem descendere per spatium annulare inter circellum et latera canalis: et velocitas circelli ascendentis erit ad velocitatem aquæ descendentis [c] ut differentia circulorum E F et P Q ad circulum P Q, et velocitas circelli ascendentis ad

(a) * *Ut lineola H I evanescat.* Per Cor. 1. Prop. XXXVII. aut (per not. 275.).

(b) * *Uniformi motu defluentis* (per Cas. 6. Prop. XXXVI.).

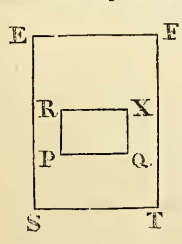
(c) * *Ut differentia circulorum.* Velocitates uniformes sunt ut spatia eodem tempore descripta; sed intereadum circulus P Q spatium solidum, seu cylindrum P Q X R describit, descendit aquæ quantitas huic cylindro æqualis, et propterea altitudo verticalis per quam aqua descen-

summam velocitatum, (d) hoc est, ad velocitatem relativam aquæ descendentis quâ præterfluit circellum ascendentem, ut differentia circulorum E F et P Q ad circulum E F, sive ut E F q — P Q q ad E F q. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, quâ supra ostensum est aquam transire per idem spatium annulare dum circellus interea immotus manet, id est, velocitati quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem I G acquirere potest: et vis aquæ in circellum ascendentem eadem erit ac prius (per legum Corol. 5.) id est, resistentia circelli ascendentis erit ad pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille et altitudo est $\frac{1}{2}$ I G, ut E F q ad E F q — $\frac{1}{2}$ P Q q quamproximè. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem I G acquirit, ut E F q — P Q q ad E F q.



Augeatur amplitudo canalis in infinitum: et rationes illæ inter E F q — P Q q et E F q, interque E F q et E F q — $\frac{1}{2}$ P Q q accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo et casu suo describendo altitudinem I G acquirere potest, resistentia verò ejus æqualis evadet ponderi cylindri cujus basis est circellus ille et altitudo dimidium est altitudinis I G, a quâ cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli ascendentis acquirat; (e) et hâc velo-

dit, æquatur longitudini quæ habetur dividendo valorem cylindri P Q X R per valorem sectionis annularis inter circulum P Q et vasis latera E S, F T comprehensam, ideóque si $\overline{EF}^2$ et $\overline{PQ}^2$,



circulos, et R P, lineam rectam significent, altitudo illa per quam aqua descendit est $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$. Quarè velocitas circuli ascendentis est ad velocitatem aquæ descendentis ut altitudo R P, ad altitudinem $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$, id est, ut $\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2$ ad $\overline{PQ}^2$, sivè ut differentia circulorum E F et P Q ad circulum P Q.

(d) * *Hoc est, ad velocitatem relativam.* Cùm circulus ascendat et aqua descendat, velocitas relativa æqualis est summæ velocitatum oppositarum circuli et aquæ. Velocitas absoluta circuli ascendentis dicatur V, velocitas absoluta aquæ descendentis v, et quia circuli sunt ut diametrorum quadrata, si E F, et P Q, pro circulorum diametris sumantur; erit (ex dem.) $V : v = EF^2 - PQ^2 : \overline{PQ}^2$, et ideò $V : V + v = EF^2 - PQ^2 : EF^2$.

(e) * *Et hâc velocitate,* cylindrus tempore cadendi duplum longitudinis I G, seu quadruplum longitudinis suæ $\frac{1}{2}$ I G, describet (30. Lib. I.).

citate cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis suæ describet. Resistentia autem cylindri, hâc velocitate secundùm longitudinem suam progredientis, eadem est cum resistentiâ circelli (per Lemma IV.) ideóque æqualis est vi quâ motus ejus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, (f) generari potest quamproximè.

Si longitudo cylindri augeatur vel minuatur, motus ejus ut et tempus, quo quadruplum longitudinis suæ describit, (g) augebitur vel minuetur in eâdem ratione, ideóque vis illa, quâ motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli possit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis est resistentiæ cylindri, nam et hæc quoque immutata manet per Lemma IV.

(h) Si densitas cylindri augeatur vel minuatur, motus ejus ut et vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli potest, in eâdem ratione augebitur vel minuetur. Resistentia itaque cylindri cujuscunque erit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproximè. Q. e. d.

Fluidum autem comprimi debet ut sit continuum, (i) continuum verò esse debet et non elasticum, ut pressio omnis, quæ ab ejus compressione oritur, propagetur in instanti, et in omnes moti corporis partes æqualiter agendo resistentiam non mutet. Pressio utique, quæ a motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum et resistentiam creat. Pressio autem quæ oritur a compressione fluidi, utcunque fortis sit, si propagetur in instanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideóque resistentiam

(f) * *Generari potest quamproximè.* Quo enim tempore cylindrus cum prædictâ velocitate uniformiter progrediendo, describit spatium 2 I G, proprio pondere cadendo describeret altitudinem I G, et velocitatem illam acquireret (30. Lib. I.). Cùm igitur resistentia æqualis sit ponderi cylindri, patet propositum.

(g) * *Augebitur vel minuetur.* Quantitas motûs in cylindro cujus basis, densitas et velocitas datæ sunt, augetur vel minuitur in ratione longitudinis cylindri seu voluminis, et tempus quo cylindrus datâ illâ velocitate uniformiter progrediendo quadruplum longitudinis suæ describit, augetur vel minuitur in eâdem longitudinis auctæ vel diminutæ ratione (5. Lib. I.) ideóque (179) vis *illa quâ motus auctus,* &c.

(h) * *Si densitas cylindri* cæteris manentibus, *augeatur vel minuatur, motus ejus ut et vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli potest, in eâdem ratione augebitur vel minuetur* (279). Cùm igitur cylindri cujuscunque resistentia æqualis sit vi quâ motus cylindri aquæ ejusdem basis, altitudinis et velocitatis, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, generari vel tolli possit, et vis hæc sit ad vim quâ totus prioris cylindri motus eodem tempore generari possit vel tolli, ut densitas aquæ ad densitatem cylindri, consequens est ut resistentia cylindri cujuscumque sit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, generari vel tolli potest, ut densitas aquæ ad densitatem cylindri quamproximè.

(i) * *Continuum verò esse debet et non elasticum.* Nam si fluidum esset elasticum, ipsius partes per compressionem condensarentur, et deinde rarefierent, atque ità pressio per motum progressivum, qui instantaneus esse non potest, propagaretur. At si fluidum continuum sit et densari compressione nequeat, pressio propagabitur in instanti. Experimentis verò constat aquam in statu naturali constitutam vix posse condensari, seu in spatium minus compressione redigi; cùm e contrà aër maximæ condensationis et rarefactionis sit capax.

nec auget nec minuit. Certè actio fluidi, quæ ab ejus compressione oritur, fortior esse non potest in partes posticas corporis moti quàm in ejus partes anticas, ideóque resistentiam in hac Propositione descriptam minuere non potest: et fortior non erit in partes anticas quàm in posticas, si modo propagatio ejus infinitè velocior sit quàm motus corporis pressi. Infinitè autem velocior erit et propagabitur in instanti, si modo fluidum sit continuum et non elasticum.

(k) *Corol.* 1. Cylindrorum, qui secundum longitudines suas in mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatum et duplicatâ ratione diametrorum et ratione densitatis mediorum.

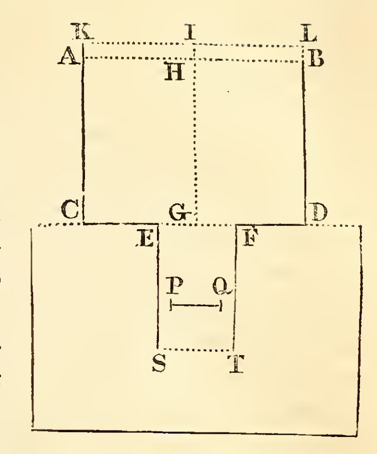
(l) *Corol.* 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, sed cylindrus in medio quiescente incluso secundum longitudinem suam progre-

(k) *Corol.* 1. Sic demonstratur. Resistentia cylindri cujusque est directè ut densitas medii et vis uniformis quâ totus cylindri motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit vel generari vel tolli possit, et inversè ut densitas cylindri (ex dem.); sed vis illa uniformis est in ratione compositâ ex rationibus directis longitudinis cylindri, quadrati diametri, densitatis et quadrati velocitatis et ex ratione inversâ spatii descripti, seu ex ratione inversâ longitudinis cylindri (280.). Quarè (per compositionem rationum et ex æquo), resistentia cylindri cujuscumque, si conferatur cum resistentiâ alterius cylindri, est in ratione quæ componitur ex ratione densitatis medii, et ratione duplicatâ diametri et duplicatâ ratione velocitatis.

(l) * *Corol.* 2. Sic demonstratur. * Si canalis non sit infinitus respectu baseos cylindri inclusi, resumantur ea quæ sub initium Theor. istius XXXVII. dicebantur; primo nempe quod ascendente circello in canali clauso, velocitas relativa aquæ semper sit ad ejus velocitatem ut basis canalis E F ad annulum E P sive ad differentiam circulorum E F et P Q sive ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$; quæratur igitur altitudo I G talis ut velocitas lapsu per eam acquisita sit ad velocitatem circelli, ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$, et si fingatur circellus immotus in medio foraminis E F et aqua cadens ex altitudine I G ex vase amplissimo A B D B per illud foramen, cùm velocitas aquæ juxta circellum transiens eadem sit ac velocitas respectiva aquæ juxta cylindrum in canali clauso motum, actio aquæ in circellum utrinque æqualis censenda est, sed actio aquæ sive ejus pondus in circellum per Cor. 10. Prop. XXXVI. est ad cylindrum cujus basis est circellus altitudo $\frac{1}{2}$ I G sicut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, hæc itaque erit ratio resistentiæ ad pondus cylindri aquei cujus basis est circellus et altitudo $\frac{1}{2}$ I G; sed gravitas est vis quæ tempore quo percurritur uniformiter quadruplum longitudinis $\frac{1}{2}$ I G sive 2 I G velocitate lapsu per I G acquisitâ, generare potest eam ipsam velocitatem, et pondus cylindri est ipsa gravitas per massam cylindri multiplicata, ergo pondus cylindri, est vis quæ dum percurritur quadruplum longitudinis cylindri velocitate lapsu per I G acquisitâ, generare potest motum ejus cylindri eâ velocitate moti.

Cùm verò celeritas quæ lapsu per I G acquiritur sit ad eam cum quâ cylindrus movetur ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$. Quadruplum longitudinis cylindri propriâ suâ celeritate alio tempore percurret quàm si moveatur celeritate lapsu per I G acquisitâ. Gravitas ergo cylindri, erit ad eam vim quâ cylindri velocitas acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis suæ propriâ suâ celeritate describitur, directè ut celeritates quæ iis viribus acquiruntur et inversè ut tempora quibus acquiruntur, quæ tempora (cum agatur de describendo uniformiter eodem spatio quadruplo nempe longitudinis cylindri) sunt inversè ut velocitates, ideóque pondus cylindri est ad vim quâ ejus cylindri motus acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis suæ propriâ suâ celeritate describitur bis directè ut celeritas lapsu per I G acquisita, ad celeritatem cylindri, sive bis ut EF^2, ad $EF^2 - PQ^2$.

Ergo ex æquo resistentia est ad eam vim sicut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ et bis ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$. At, nec resistentia nec ea vis mutantur longitudine cylindri mutata, sed tantum densitate mutatâ ut ex ipsa Propositionis demonstratione liquet, est autem vis quâ motus in cylindro aqueo generatur, dato tempore quo quadruplum suæ longitudinis suâ cum velocitate percurrit, ad eam vim qua motus in æquali cylindro, sed diversæ densitatis æquali cum velocitate moto, eodem tempore generatur, ut densitas aquæ sive medii, ad densitatem cylindri, ergo tandem resistentia est ad vim quâ motus in cylindro generari vel tolli potest quo tempore quadruplum suæ longitudinis propriâ cum velocitate describit, ut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ et bis ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$ et ut densitas medii ad densitatem cylindri. Q. e. d.



diatur, et interea axis ejus cum axe canalis coincidat: resistentia ejus erit ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione E F q ad E F q — $\frac{1}{2}$ P Q q semel, et ratione E F q ad E F q — P Q q bis, et ratione densitatis medii ad densitatem cylindri.

Corol. 3. Iisdem positis, et quod longitudo L sit ad quadruplum longitudinis cylindri in ratione quæ componitur ex ratione E F q — $\frac{1}{2}$ P Q q ad E F q semel, et ratione E F q — P Q q ad E F q bis: (m) resistentia cylindri erit ad vim quâ totus ejus motus, interera dum longitudinem L describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri.

Scholium.

In hâc Propositione resistentiam investigavimus quæ oritur a solâ magnitudine transversæ sectionis cylindri, neglectâ resistentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri possit. Nam quemadmodum in Casu primo Propositionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vase, undique convergebant in foramen E F, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: sic in hâc Propositione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore cylindri termino pressæ, cedunt pressioni (n) et undique divergunt, retardat eorum transitum per loca in circuitu termini illius antecedentis versus posteriores partes cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem distantiam commoveatur et resistentiam auget, (o) idque in eâ

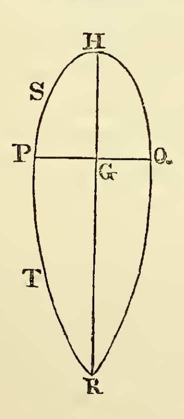
(m) * *Resistentia cylindri erit ad vim.* Nam (per Cor. 2. et Hyp.) resistentia cylindri est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ uniformiter describit vel generari possit vel tolli, in ratione compositâ ex ratione quadruplæ longitudinis cylindri ad longitudinem L et ratione densitatis medii ad densitatem cylindri, et (279) vis quâ totus cylindri motus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, generari vel tolli possit, est ad vim quâ idem ejusdem cylindri motus quo tempore longitudinem L uniformiter describit vel tolli possit vel generari, in ratione inversâ temporum, sive ob eamdem utrinque celeritatem in ratione inversâ spatiorum, hoc est, in ratione longitudinis L ad quadruplum longitudinis cylindri. Quare (ex æquo) resistentia cylindri est ad vim quâ totus ejus motus, intereadum longitudinem L uniformiter describit tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri.

(n) * *Et undique divergunt.* Vid. Prop XLI. et XLII. Lib. hujus.

(o) * *Idque in eâ ferè ratione.* Eodem enim ferè modo motus obliqui in aquæ partibus excitantur, sive aqua in planum circuli immotum impingat, sive circulus eâdem cum velocitate in aquâ quiescente feratur.

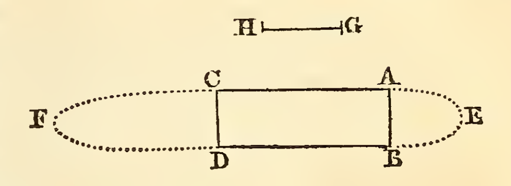
ferè ratione quâ effluxum aquæ e vase diminuit, id est in ratione duplicatâ 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in Propositionis illius casu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter et maximâ copiâ transirent per foramen E F, ponendo quod aqua omnis in vase quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, et cujus motus obliquus erat et inutilis, maneret sine motu: sic in hâc Propositione, ut obliquitas motuum tollatur et partes aquæ motu maximè directo et brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum cylindro, et sola maneat resistentia, quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, quæque diminui non potest nisi diminuendo diametrum cylindri, concipiendum est quod partes fluidi, quarum motus sunt obliqui et inutiles et resistentiam creant, quiescant inter se ad utrumque cylindri terminum, et cohærant (p) et cylindro jungantur. Sit A B C D rectangulum, et sint A E et B E arcus duo parabolici axe A B descripti, latere autem recto quod sit ad spatium H G, describendum a cylindro cadente dum velocitatem suam acquirit, ut H G ad $\frac{1}{2}$ A B. Sint etiam C F et D F arcus alii duo parabolici, axe C D et latere recto quod sit prioris lateris recti quadruplum descripti; et convolutione figuræ circum axem E F generetur solidum cujus media pars A B D C sit

(p) * *Et cylindro jungantur.* Ut num. 277. 278. factum est, ubi circulo P Q in quem aqua influebat cum eâ velocitate quam cadendo et casu suo describendo altitudinem H G acquirit et deinde movebatur uniformiter junctæ sunt glaciei columnæ duæ parabolicæ P H Q et P R Q, quæ aquas exhibent, quarum fluiditas

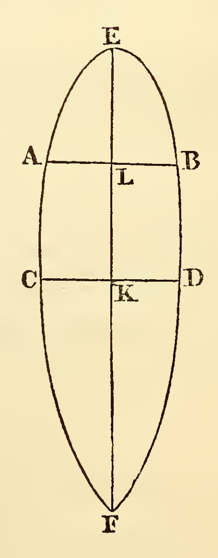


ac motus sunt inutiles, et parabolarum P S H, P T S erat vertex principalis P, axis P G, et ordinatæ G H, ac G R, ideóque parabolæ P S H, latus rectum $\frac{GH^2}{PG}$, et parabolæ P T R latus rectum $\frac{GR^2}{PG}$ seu $\frac{4\,GH^2}{PG}$ prioris $\frac{GH^2}{PG}$, quadruplum (per Theor. I. de parab.). Hinc si aqua quiescat et circulus P Q in aquâ moveatur cum eâdem velocitate quam grave cadendo et casu suo describendo altitudinem H G acquirit, columnæ illæ P H Q et P R Q aquas fere exponent quarum fluiditas ac motus inutiles sunt ut partes aquæ motu maximè directo et brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum circulo. Sed (per Lem. IV.) loco circuli P Q substitui potest cylindrus A B D C eâdem velocitate motus, et cujus bases A B, C D circulo P Q æquales sint, quibus proinde basibus adjungendæ sunt columnæ duæ A E B, C F D columnis P H Q, P R Q æquales respectivè, atque idipsum est quod Newtonus in hoc scholio fecit. Siquidem junctâ E F, mediis basibus A B, C D, occurrente in L et K, et positis A B et C D ipsi P Q æqualibus; est (per Newt. constr.) parabolæ A E latus rectum $\frac{HG^2}{AL} = \frac{HG^2}{PG} = \frac{EL^2}{AL}$, et ideò E L = H G. Et simili modo parabolæ C F, Newtonianâ constructione descriptæ, latus rectum est $\frac{4\,HG^2}{PG} = \frac{KF^2}{CK} = \frac{KF^2}{PG}$, ac proindè K F = 2 H G = G R. Columnæ igitur A E B et C F D, non differunt a columnis P H Q et P R Q.

cylindrus de quo agimus, et partes extremæ A B E et C D F contineant partes fluidi inter se quiescentes et in corpora duo rigida concretas, quæ cylindro utrinque tanquam caput et cauda adhæreant. Et solidi E A C F D B, secundum longitudinem axis sui F E in partes versus E progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hâc Propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim quâ totus cylindri motus, interea dum longitudo 4 A C motu illo uniformiter continuato describatur vel tolli possit vel generari, quam densitas fluidi habet ad densitatem cylindri quamproximè. (q) Et hâc vi resistentia minor esse non potest quàm in ratione 2 ad 3. per Corol. 7. Prop. XXXVI.



(q) * *Et hâc vi resistentia minor esse non potest*, &c. Resistentia (per Cor. 7. Prop. XXXVI.) minor esse non potest pondere cylindri aquæ, cujus basis est circellus P Q (sive A B) et altitudo $\frac{1}{3}$ E L seu $\frac{1}{3}$ H G. (Vid. figuras superiores.) Velocitas quam hic cylindrus aquæ, vi ponderis sui cadendo et casu suo describendo altitudinem E L acquirit, æqualis est velocitati cum quâ cylindrus A C D B, in aquâ movetur (ex dem.) et ideò cùm basis A B sit etiam utrique cylindro communis, pondus cylindri aquæ erit ad vim quâ totus cylindri A B D C motus, quo tempore longitudinem 4 A C uniformiter describit, generari possit vel tolli, in ratione compositâ ex ratione densitatis aquæ ad densitatem cylindri A B D C, et ratione altitudinis $\frac{1}{3}$ E L ad altitudinem A C, et ratione spatii 4 A C ad spatium 2 E L (280), id est, in ratione compositâ ex ratione densitatis aquæ ad densitatem cylindri A B D C et ratione 2 ad 3. Si itaque vis quâ totus cylindri A B D C motus, intereadum longitudinem 4 A C, uniformiter describit, generari vel tolli possit, sit ad vim aliquam P, ut densitas cylindri A B D C ad densitatem aquæ, erit (ex æquo) pondus prædicti cylindri aquæ ad vim P ut 2 ad 3, atquè ideò pondus cylindri aquæ, quo resistentia minor esse non potest; quam in ratione 2 ad 3.



LEMMA V.

Si cylindrus, sphæra et sphærois, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur successivè ut eorum axes cum axe canalis coincidant : hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

(r) Nam spatia inter canalem et cylindrum, sphæram, et sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia: et aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

Hæc ita se habent ex hypothesi, quòd aqua omnis supra cylindrum sphæram vel sphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ transitum non requiritur, ut in Corol. 7. Prop. XXXVI. explicui.

LEMMA VI.

Iisdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aquâ per canalem fluente.

Patet per Lemma V. et motus legem tertiam. Aqua utique et corpora in se mutuo æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quiescat in canali, et hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur : æquales erunt eorum resistentiæ inter se.

Constat ex Lemmate superiore, nam motus relativi iidem inter se manent.

Scholium.

Eadem est ratio corporum omnium convexorum et rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri potest; sed in his Lemmatis corpora esse politissima supponimus, et medii tenacitatem et frictionem esse nullam, et quod partes fluidi, quæ motibus suis obliquis et superfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, et retardare possunt, quiescant inter se tanquam gelu constrictæ, et corporibus ad ipsorum partes anticas et posticas ad-

(r) * *Nam spatia inter canalem et transversas sectiones, seu latitudines maximas cylindri, sphæræ et sphæroidis per quæ aqua transit, sunt æqualia.* Vid. schol. sequens.

hæreant, perinde ut in scholio Propositionis præcedentis exposui. Agitur enim in sequentibus de resistentiâ omnium minimâ quam corpora rotunda, datis maximis sectionibus transversis descripta, habere possunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam ascendat, ad posticam subsidat, præsertim si figura sint obtusa; et inde resistentiam paulo majorem sentiunt quàm si capite et caudâ sint acutis. Et corpora in fluidis elasticis mota, si ante et post obtusa sint, fluidum paulo magis condensant ad anticam partem et paulo magis relaxant ad posticam; et inde resistentiam paulo majorem sentiunt quam si capite et caudâ sint acutis. Sed nos in his Lemmatis et Propositionibus non agimus de fluidis elasticis, sed de non elasticis; non de insidentibus fluido, sed de altè immersis. Et ubi resistentia corporum in fluidis non elasticis innotescit, augenda erit hæc resistentia aliquantulum tam in fluidis elasticis; qualis est aër, quàm in superficiebus fluidorum stagnantium, qualia sunt maria et paludes.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in fluido compresso infinito et non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas fluidi ad densitatem globi quamproximè.

(s) Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; et propterea vis illa, quæ tollere possit motum omnem cylindri interea dum cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, globi motum omnem tollet interea dum globus describat duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem cylindri est ad hanc vim quamproximè ut densitas fluidi ad densitatem cylindri vel globi per Prop. XXXVII. et resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri per Lem. V. VI. VII. Q. e. d.

(t) *Corol.* 1. Globorum, in mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt

(s) *Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria* (170. Lib. I.) et propterea, cum eadem sit globi et cylindri densitas eademque velocitas (ex Hyp.) quantitas motûs globi est ad quantitatem motûs cylindri ut duo ad tria, et tempus quo globus octo tertias partes diametri propriæ uniformiter describit, est ad tempus quo cylindrus eâdem uniformi velocitate quadruplum longitudinis suæ, seu duodecim tertias diametrorum globi describit, etiam ut duo ad tria. Quare (178) vis uniformis quâ totus globi motus intereadum octo tertias partes diametri propriæ describit tolli possit vel generari, est ad vim uniformem quâ totus cylindri motus, quo tempore longitudinem quatuor diametrorum globi describit vel tolli vel generari possit ut duo ad tria directè et duo ad tria inversè, id est, in ratione æqualitatis. *Resistentia autem cylindri,* &c.

(t) * *Corol.* 1. Patet per Cor. 1. Prop. XXXVII., quiâ resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri circumscripti.

in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis, et duplicatâ ratione diametri, et ratione densitatis mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quâcum globus, vi ponderis sui comparativi, in fluido resistente potest descendere, ea est quam acquirere potest globus idem, eodem pondere, sine resistentiâ cadendo et casu suo describendo spatium quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitas globi ad densitatem fluidi. Nam globus tempore casus sui, cum velocitate cadendo acquisitâ, (u) describet spatium quod erit ad octo tertias diametri suæ, ut densitas globi ad densitatem fluidi; et vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare possit, quo tempore globus octo tertias diametri suæ eâdem velocitate describit, (x) ut densitas fluidi ad densitatem globi: ideóque per hanc Propositionem, vis ponderis æqualis erit vi resistentiæ, et propterea globum accelerare non potest.

(y) *Corol.* 3. Datâ et densitate globi et velocitate ejus sub initio motus,

(u) * *Describet spatium quod erit ad octo tertias partes diametri suæ,* &c. Describet enim spatium duplum illius quod vi ponderis sui comparativi sine resistentia cadendo descripsit (30. Lib. II.), id est, *spatium quod erit ad octo tertias partes,* &c.

(x) * *Ut densitas fluidi ad densitatem globi.* Sit D diameter globi, 2 F spatium quod sit ad $\frac{8}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem fluidi; et tempus quo globus uniformiter describit spatium $\frac{8}{3}$ D, erit ad tempus quo eâdem uniformi velocitate describit spatium 2 F, ut $\frac{8}{3}$ D ad 2 F (5. Lib. I.), id est, ut densitas fluidi ad densitatem globi. Cùm igitur vires uniformes sint reciprocè ut tempora quibus motus æquales generant (279), patet propositum.

(y) 282. Cor. 3. *Datâ et densitate globi et velocitate ejus sub initio motus et densitate fluidi datur ad omne tempus et velocitas globi, et ejus resistentia et spatium ab eo descriptum.* * Primum, ex datâ densitate globi, et densitate fluidi, invenietur, per Cor. 2, vis æqualis resistentiæ cùm velocitas ea est quam acquirere potest is globus, cadendo in vacuo per vim sui ponderis comparativi et describendo spatium quod sit ad quatuor tertias diametri suæ ut densitas globi ad densitatem fluidi.

Secundò, ex datâ hac resistentiâ invenietur resistentia quæ competit velocitati globi de quo agitur sub initio ejus motus, quia resistentiæ hic supponuntur esse ut quadrata velocitatum; istâ autem resistentiâ cognitâ dabitur tempus quo si hæc resistentia uniformiter ageret, totam velocitatem quam habet globus sub initio motus destruere posset, sicque si B C designet eam velocitatem initio motus simulque resistentiam ipsi competentem, designeturque per A B illud tempus quo ea velocitas per resistentiam uniformem destrui potest, et erecto perpendiculo A D, asymptotis A D, A B per punctum C describatur hyperbolâ, ex ejus hyperbolæ constructione dabitur ad quodlibet tempus (quod designabitur per B E) velocitas residua E F, resistentia B H, et spatium descriptum C B E F; quâ autem ratione hæc singula ad calculum revocentur, dicendum.

I. Vis illa quæ resistentiæ æqualis esse debet cùm corpus habet velocitatem maximam quam lapsu suo in fluido dato acquirere potest, est ipsum pondus comparativum corporis, sit ergo A ejus pondus, densitas data corporis est ad densitatem fluidi, ut A ad pondus æqualis voluminis fluidi, quo invento, detrahatur illud ex pondere A, relinquitur pondus comparativum globi in fluido quod dicatur B.

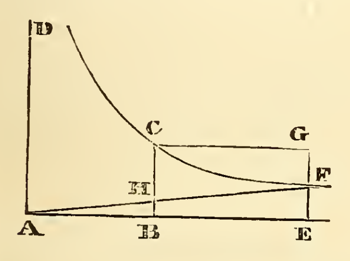
Ut præterea determinetur tempus quo eo pondere B corpus percurret cadendo spatium quod sit ad quatuor tertias diametri suæ ut ejus densitas ad densitatem fluidi, sive, si dicatur D diameter et dicatur F spatium quod sit ad $\frac{4}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem medii, ut determinetur tempus quo globus pondere B cadendo percurret spatium F posito quod grave cadendo in vacuo pondere A tempore unius minuti secundi pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$ percurrit, et cùm spatia diversis viribus acceleratricibus descripta eodem tempore sint ut illæ vires, spatium $15\frac{1}{12}$ pedum pondere A uno minuto secundo percursum est ad spatium eodem tempore pondere B percursum ut A ad B. Ut autem est illud spatium, ad spatium F, ita quadratum minuti unius secundi ad quadratum temporis quo eo pondere

ut et densitate fluidi compressi quiescentis in quo globus movetur; datur ad omne tempus et velocitas globi et ejus resistentia et spatium ab eo descriptum, per Corol. 7. Prop. XXXV.

(z) *Corol.* 4. Globus in fluido compresso quiescente ejusdem secum densitatis movendo, dimidiam motus sui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipsius diametrorum descripserit, per idem Corol. 7.

B spatium F percurretur, quod tempus dicatur G, cumque velocitate per lapsum acquisitâ duplum spatii lapsu percursi uniformiter describatur ipso lapsus tempore, ideò velocitate pendere B tempore G acquisitâ, eodem tempore G describeretur 2 F, cùmque velocitas omnis exprimatur per spatium divisum per tempus, erit ea velocitas maxima $\frac{2\ F}{G}$ quæ in posterum dicatur H.

II. Datâ autem quâvis aliâ ejusdem globi velocitate in eodem fluido eaque dicatur M, resistentia ipsi competens ita obtinetur, ut quadratum velocitatis H ad quadratum velocitatis hujusce M, ita est resistentia adversus velocitatem H cui



pondus B æquipollet, ad resistentiam adversus velocitatem M, quam vocabo R; cum ergo prius data sit ratio A ad B dabitur etiam ratio A ad R ideóque dabitur spatium quod actione vi R uniformi suppositâ per unum minutum secundum describeretur, siquidem spatia per diversas vires uniformes acceleratrices descripta iisdem temporibus sunt ut illæ vires, ideóque A ad R ut $15\frac{1}{12}$ ped. ad spatium uno minuto secundo descriptum, cujus spatii duplum per unum minutum secundum divisum exprimit velocitatem vi R per unum minutum secundum productam. Unde invenietur tempus quo per eam vim R uniformiter agentem velocitas M produci vel etiam destrui posset, velocitates enim per eamdem vim acquisitæ sunt ut tempora quibus acquiruntur; ergo velocitas tempore unius minuti secundi acquisita est ad velocitatem M, ut unum minutum secundum ad tempus quo vis R velocitatem M generare vel tollere posset. Unde tandem in hyperbolæ constructione datur valor temooris per lineam A B designati.

Sumatur ergo B E quod sit ad A B ut tempus quod assumere lubet ad tempus illud quo vis R velocitatem M quæ per B C exprimitur generare vel tollere potest uniformiter agendo, et ducatur ordinata E F, ea designabit velocitatem globi eo tempore superstitem quæ ex naturâ hyperbolæ habebitur, est enim A E, ad A B, sicut B C sive M ad E F, unde cum sit A E = A B + B E; sitque A B tempus mox inventum, B E tempus assumptum, B C sive M velocitas data, datur etiam E F.

Datur pariter resistentia B H, est enim $B\ C^2$ ad $E\ F^2$ ut R ad hancce novam resistentiam, quæ, prioribus datis, etiam dabitur.

Denique datur spatium a corpore descriptum, datur enim spatium quod velocitate constanti M tempore B E percurritur; est verò area B C G E ad spatium hyperbolicum B C F E, ut spatium velocitate constanti M tempore B E percursum, ad spatium percursum cum velocitate per resistentiam decrescente, at ex naturâ logarithmorum hyperbolicorum spatium hyperbolicum B C F E est logarithmus quantitatis $\frac{A\ E}{A\ B}$, et quia logarithmi earumdem quantitatum in diversis logarithmorum seriebus sumpti sunt proportionales, sumatur logarithmus illius quantitatis $\frac{A\ E}{A\ B}$ in tabulis vulgaribus, fiatque ut logarithmus denarii numeri in tabulis (sive unitas) ad 2.30258509 qui est logarithmus hyperbolicus ejusdem denarii numeri, ita logarith. quantitatis $\frac{A\ E}{A\ B}$ ex tabulis desumptus ad logarithmum hyperbolicum ejus quantitatis, habebitur area B C F E, sit ergo dignitas hyperbolæ = 1, erit $B\ C = \frac{1}{A\ B}$ et area $B\ C\ G\ E = \frac{1}{A\ B} \times B\ E$, ideóque ut $\frac{B\ E}{A\ B}$, ad logarithmum quantitatis $\frac{A\ E}{A\ B}$ e tabulis desumptum et multiplicatum per 2.30258509. Ita spatium velocitate constanti B C tempore B E percursum, ad spatium percursum cum velocitate per resistentiam decrescente. Q. e. i.

(z) * *Corol.* 4.; * cum globus et fluidum ejusdem densitatis supponantur, resistentia isto in casu erit æqualis vi quâ totus motus globi generari vel tolli posset quo tempore octo tertias diametri suæ uniformiter describeret, itaque sit B C motus globi, erit A B tempus quo uniformiter percurreret octo tertias suæ diametri, sit E F, dimidium B C, quoniam E F exprimit residuum motum, B E erit tempus quo dimidia pars motus amissa fuerit, sed B C ad E F ut A E ad A B et est B C ad E F ut 2 ad 1, per const. ergo etiam A E = 2 A B et B E = A B,

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per fluidum in canali cylindrico clausum et compressum uniformiter progredientis, resistentia est ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi globi, et ratione duplicatâ orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum globi, et ratione densitatis fluidi ad densitatem globi quamproximè.

Patet per Corol. 2. Prop. XXXVII. procedit verò demonstratio ([a]) quemadmodum in Propositione præcedente.

Scholium.

In Propositionibus duabus novissimis (perinde ut in Lem. V.) suppono quòd aqua omnis congelatur quæ globum præcedit, et cujus fluiditas auget resistentiam globi. Si aqua illa omnis liquescat, augebitur resistentia aliquantulum. Sed augmentum illud in his Propositionibus parvum erit et negligi potest, propterea quòd convexa superficies globi totum ferè officium glaciei faciat.

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi, in medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistentiam per phænomena.

Sit A pondus globi in vacuo, B pondus ejus in medio resistente, D diameter globi, F spatium quod sit ad $\frac{4}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem

ideóque dimidium motum amittet quo tempore percurreret uniformiter octo tertias diametri suæ; sed illud spatium uniformiter percursum est ad spatium percursum velocitate per resistentiam decrescente ut $\frac{BE}{AB}$ (sive $\frac{1}{1}$) ad logarithmum e tabulis desumptum quantitatis $\frac{AE}{AB}$ (sive $\frac{2}{1}$) multiplicatum per 2.30258509, et ille logarithmus est .3010300, productum ergo erit .6931, &c. ideò 1. ad .6931, &c. ut $\frac{8}{3}$ D, ad 1.84852 × D, quod quidem paulo minus est quam 2 D, ideò globus in fluido ejusdem densitatis dimidiam sui motus partem prius describet *quam longitudinem duarum ipsius diametrorum descripserit.* Q. e. d.

([a]) * *Quemadmodum in Propositione præcedente.* Demonstratio eadem manet, quæ in nota 281. adjungenda tantum hæc sunt: resistentia autem cylindri est ad hanc vim quam proximè in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi globi, et ratione duplicata orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum globi, et ratione densitatis fluidi ad densitatem globi (per Corol. 2. Prop. XXXVII.); et resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri, per Lem. V. VI. VII. Q. e. d.

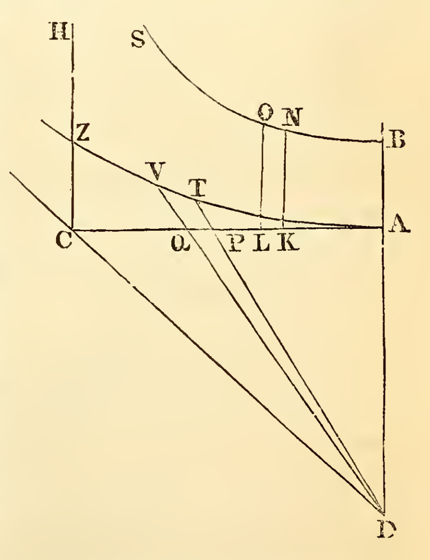
medii, (b) id est, ut A ad A — B, G tempus quo globus pondere B sine resistentiâ cadendo describit spatium F, et H velocitas quam globus hocce casu suo acquirit. Et erit H velocitas maxima quâcum globus, pondere suo B, in medio resistente potest descendere, per Corol. 2. Prop. XXXVIII. et resistentia, quam globus eâ cum velocitate descendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: resistentia verò, quam patitur in aliâ quâcunque velocitate, erit ad pondus B in duplicatâ ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, per Corol. 1. Prop. XXXVIII.

Hæc est resistentia quæ oritur ab inertiâ materiæ fluidi. Ea verò quæ oritur ab elasticitate, tenacitate, et frictione partium ejus, (c) sic investigabitur.

(b) 283. * *Id est, ut A ad A — B.* Densitates corporum ejusdem voluminis sunt eorumdem pondera in vacuo (2. et 3. Lib. I.); sed A est pondus globi in vacuo, et A — B pondus æqualis globi aquæ etiam in vacuo; nam globus A aquæ immersum ponderis sui partem amittit æqualem ponderi paris voluminis aquæ (per Cor. 6. Prop. XX.). Ergo, &c.

(c) 284. * *Sic investigabitur.* Ut eorum quæ hic Newtonus profert, demonstratio facilius intelligatur, non nulla revocanda sunt, quæ in Propositionibus VIII. et IX. demonstravit. Sunto C H et A B rectæ ad datam A C perpendiculares, C H quidem infinita, et B A æqualis $\frac{1}{4}$ A C. Centro C asymptotis C H, C A describatur per punctum B hyperbola B N S capiantur A C, A P, A K continuè proportionales, et per punctum K ducatur ad hyperbolam recta K N parallela A B. Et si corpus grave e quiete cadat in medio quod in duplicatâ velocitatis ratione resistit, exponatque area A B N K spatium a corpore cadente descriptum; velocitas corporis hocce casu acquisita exponi poterit per lineam A P, et ipsius velocitas maxima per datam A C (per Cor. 1. et 2. Prop. VIII.). Producatur jam B A ad D ut sit A D æqualis A C, jungatur D C, et centro D, asymptoto D C ac vertice principali A describatur altera hyperbola A T Z, quæ lineam D P productam secet in T, et lineam D Q ipsi D P infinitè propinquam in V; et sector evanescens D T V erit æqualis $\frac{\text{P D Q} \times \text{A C}}{\text{C K}}$, et sector A T D tempus exponet quo corpus cadendo describit spatium A B N K et quo velocitatem A P acquirit (per Casum 2. Prop. IX.). Spatium verò quod corpus tempore quovis A T D cadendo describit, erit ad spatium quod corpus velocitate maximâ A C, eodem tempore uniformiter progrediendo, describere potest, ut area A B N K ad aream A T D (per Cor. 1. Prop. IX.), et tempus quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem A P acquirit, erit ad tempus quo velocitatem maximam A C in medio non resistente vi ponderis sui comparativi cadendo acquirere posset, ut sector A T D ad triangulum A D C (per Cor. 5. Prop. IX.).

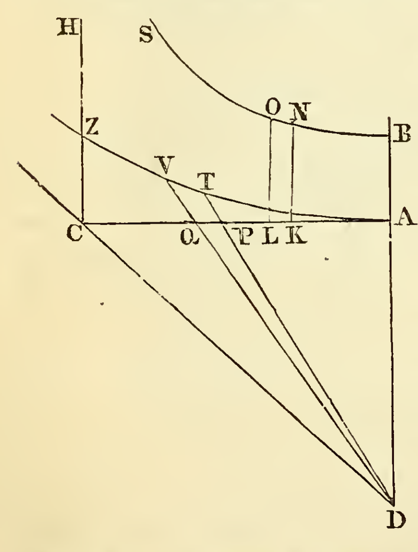
285. His præsuppositis, dicantur A C = A D = a, A B = $\frac{1}{4}$ a, A P = x, P Q = d x, et quia A C : A P = A P : A K, erit A K



$= \frac{xx}{a}$, C K $= \frac{aa - xx}{a}$, triangulum P D Q $= \frac{1}{2}$ a d x, et sector D T V $= \frac{\text{P D Q} \times \text{A C}}{\text{C K}}$ $= \frac{\frac{1}{2} a^3 dx}{aa - xx} = \frac{\frac{1}{4} aadx}{a + x} + \frac{\frac{1}{4} aadx}{a - x}$; undè, sumtis fluentibus, habetur sector A T D = $\frac{1}{4}$ a a L. $\overline{a + x}$ — $\frac{1}{4}$ a a L. $\overline{a - x}$ = $\frac{1}{4}$ a a L. $\frac{a + x}{a - x}$, cui quantitati nihil addendum vel subducendum est, quia ubi fit A T D = o, et x = o, evanescit, ut oportet. Ducatur L O parallela

Demittatur globus ut pondere suo B in fluido descendat; et sit P tempus cadendi, idque in minutis secundis si tempus G in minutis secundis habeatur. Inveniatur numerus absolutus N qui congruit logarithmo

K N ipsique infinitè propinqua; et cum sit A K $= \frac{x x}{a}$ et (per Theor. IV. de Hyp.) K N $= \frac{C A \times A B}{C K} = \frac{\frac{1}{4} a^3}{a a - x x}$ ac K L $= \frac{2 x d x}{a}$, erit areæ A B N K fluxio K N O L $= \frac{\frac{1}{2} a^2 x d x}{a a - x x}$, sumptisque fluentibus, area A B N K $=$ Q const. $- \frac{1}{4} a a$ L. $\overline{a a - x x}$; quia verò area A B N K evanescit ubi fit $x = o$, erit constans Q $= \frac{1}{4} a a$ L. a a, et area accurata A B N K $= \frac{1}{4} a a$ L. a a $- \frac{1}{4} a a$ L. $\overline{a a - x x} = \frac{1}{4} a a \times$ L. $\frac{a a}{a a - x x}$. Porro (284) tempus P quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem acquirit li-



neæ A P seu x proportionalem, est ad tempus G quo velocitatem maximam H vi ponderis sui comparativi B sine resistentia cadendo acquirere potest, ut sector A T D ad triangulum A D C, id est, P : G $= \frac{1}{4} a a$ L. $\frac{a + x}{a - x} : \frac{1}{2} a a =$ L. $\frac{a + x}{a - x}$: 2. Quare erit $\frac{2 P}{G} =$ L. $\frac{a + x}{a - x}$, hoc logarithmo sumto in logistica cujus subtangens est unitas (53. Lib. II.). Quapropter si logarithmus numeri $\frac{a + x}{a - x}$ sumatur in tabulis, multiplicandus erit per numerum 2, 302585093, ut in Cor. 7. Prop. XXXV. factum est, et habebitur $\frac{2 P}{G}$ $= 2, 302585093$ L. $\frac{a + x}{a - x}$, ideóque dividendo 1. per 2.3025, &c. numerus 0,4342944819 $\times \frac{2 P}{G}$ est logarithmus tabularis numeri $\frac{a + x}{a - x}$. Itaque si per tabulas quæratur numerus absolutus N qui congruat logarithmo 0,4342944819 $\times \frac{2 P}{G}$, erit N $= \frac{a + x}{a - x}$, ideóque $x = \frac{a [N - 1]}{N + 1}$. Est autem (284) A C ad A P seu a ad x, ut velocitas maxima H ad velocitatem cadendo acquisitam. Quare hæc velocitas erit $\frac{x H}{a} = \frac{N - 1}{N + 1} \times$ H, sicuti Newtonus invenit. Spatium quod globus velocitate maximâ H uniformiter progrediendo tempore P describit, est ad spatium 2 F quod eadem velocitate H uniformiter percurrit tempore G, ut tempus P ad tempus G (5. Lib. I.), et propterea spatium illud est $\frac{2 P F}{G}$. Altitudo S quam globus tempore P cadendo in medio resistente describit, est ad spatium $\frac{2 P F}{G}$, ut area A B N K ad sectorem A T D (284), id est, ut $\frac{1}{4} a a$ L. $\frac{a a}{a a - x x}$ ad $\frac{1}{4} a a$ L. $\frac{a + x}{a - x}$, sive ut L. $\frac{a a - x x}{a a}$ ad L. $\frac{a + x}{a - x}$; sed (ex dem.) $\frac{a + x}{a - x} =$ N, et $x = \frac{a [N - 1]}{N + 1}$, ac proinde $\frac{a a}{a a - x x} = \frac{[N + 1]^2}{4 N} = \frac{N \times [N + 1]^2}{4 N N}$, et si logarithmi sumantur in logistica cujus subtangens est unitas, est $\frac{2 P}{G} =$ L. $\frac{a + x}{a - x} =$ L. N, et L. $\frac{a a}{a a - x x} =$ L. $\frac{N \times [N + 1]^2}{4 N N} =$ L. N $+ 2$ L. $\frac{N + 1}{N}$ $-$ L. 4; ideóque L. $\frac{a a}{a a - x x}$: L. $\frac{a + x}{a - x}$ $=$ L. N $+ 2$ L. $\frac{N + 1}{N} -$ L. 4 : L. N

$$= 1 + \frac{2 \text{ L. } \frac{N + 1}{N} - \text{L. } 4}{\text{L. N}} : 1 = 1 + \frac{G}{P} \text{ L. } \frac{N + 1}{N} - \frac{G}{2 P} \text{ L. } 4 : 1 = S : \frac{2 P F}{G}.$$

Quare altitudo S $= \frac{2 P F}{G} -$ F L. 4 $+$ 2 F L. $\frac{N + 1}{N}$. At si velimus tabularum logarithmis uti, ii multiplicandi sunt per numerum

$0,4342944819 \frac{2P}{G}$, sitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: et velocitas cadendo acquisita erit $\frac{N-1}{N+1}H$, altitudo autem descripta erit $\frac{2PF}{G} -$ $1,3862943611 F + 4,605170186 LF$. (d) Si fluidum satis profundum sit negligi potest terminus $4,605170186 LF$; et erit $\frac{2PF}{G} -$ $1,386294611 F$ altitudo descripta quamproximè. Patent hæc per Libri secundi Propositionem nonam et ejus Corollaria, ex hypothesi quod globus nullam aliam patiatur resistentiam nisi quæ oritur ab inertiâ materiæ. Si verò aliam insuper resistentiam patiatur, descensus erit tardior, et ex retardatione innotescet quantitas hujus resistentiæ.

Ut corporis in fluido cadentis velocitas et descensus facilius innotescant, composui tabulam sequentem, cujus columna prima denotat tempora descensûs, secunda exhibet velocitates cadendo acquisitas existente velocitate maximâ 100000000, tertia exhibet spatia temporibus illis cadendo descripta existente 2 F spatio quod corpus tempore G cum velocitate maximâ describit, et quarta exhibet spatia iisdem temporibus cum velocitate maximâ descripta. Numeri in quartâ columnâ sunt $\frac{2P}{G}$, et subducendo numerum $1,3862944 - 4,6051702 L$, inveniuntur numeri in tertiâ columnâ, et multiplicandi sunt hi numeri per spatium F ut habeantur spatia cadendo descripta. Quinta his insuper adjecta est columna, quæ continet spatia descripta iisdem temporibus a corpore, vi ponderis sui comparativi B, (e) in vacuo cadente.

2, 302585092994, seu per 2, 302585093. Hic numerus dicatur M, logarithmus numeri 4 in tabulis sumptus Q, et logarithmus etiam tabularis numeri $\frac{N+1}{N}$ sit L; et erit $S = \frac{2PF}{G} -$ $MQF + 2MLF$. Est autem $2M = 4,605170186$, et Q in tabulis vulgaribus est 0, 60206; seu accuratius 0, 60205999133, ideóque $MQ = 1,3862943611$ quamproximè. Quare altitudo S, quam globus in medio resistente cadendo tempore P describit, est $\frac{2PF}{G}$ $- 1,3862943911 F + 4,605170186 LF$, uti Newtonus definivit.

(d) * *Si fluidum satis profundum sit,* id est, si altitudo S quam globus tempore P cadendo describit, satis magna fuerit, negligi potest terminus $4,605170186 LF$. Cum enim sit L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$, ubi N est numerus satis magnus, seu ubi numerus $\frac{N+1}{N}$ est fere æqualis unitati, logarithmus L evanescit quam proximè. Sed, si velocitas maxima dicatur H, et velocitas tempore P casu globi acquisita V, est $H : V = a : x$ (285), et ideò $\frac{H+V}{H-V} = \frac{a+x}{a-x}$ $= N$, et quando spatium descriptum S satis magnum est, fit $V = H$ quam proximè, ac proinde $\frac{H+V}{H-V}$ seu N numerus satis magnus, ut ex sequenti tabula manifestum est. Patet ergo propositum.

(e) * *In vacuo cadente.* Hujus tabulæ constructio paulo fusius exponenda videtur. Numeri singuli columnæ primæ, quibus exprimitur ratio temporis P ad tempus G, assumuntur pro lubitu; numeri verò in columna quarta correspondentes facillimè reperiuntur. Cum enim spatium tempore G velocitate maximâ H uniformiter descriptum sit 2 F, et spatia eâdem uniformi velocitate descripta temporibus, quibus describuntur, proportionalia sint; numeri co-

Tempora P	*Velocitates cadentis in fluido.*	*Spatia cadendo descripta in fluido.*	*Spatia motu maximo descripta.*	*Spatia cadendo descripta in vacuo.*
0,001G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001F	0,002F	0,000001F
0,01G	999967	0,0001F	0,2F	0,0001F
0,1G	9966799	0,0099834F	0,2F	0,01F
0,2G	19737532	0,0397361F	0,4F	0,04F
0,3G	29131261	0,0886815F	0,6F	0,09F
0,4G	37994896	0,1559070F	0,8F	0,16F
0,5G	46211716	0,2402290F	1,0F	0,25F
0,6G	53704957	0,3402706F	1,2F	0,36F
0,7G	60436778	0,4545405F	1,4F	0,49F
0,8G	66403677	0,5815071F	1,6F	0,64F
0,9G	71629787	0,7196609F	1,8F	0,81F
1G	76159416	0,8675617F	2F	1F
2G	96402758	2,6500055F	4F	4F
3G	99505475	4,6186570F	6F	9F
4G	99932930	6,6143765F	8F	16F
5G	99990920	8,6137964F	10F	25F
6G	99998771	10,6137179F	12F	36F
7G	99999834	12,6137073F	14F	49F
8G	99999980	14,6137059F	16F	64F
9G	99999997	16,6137057F	18F	81F
10G	$99999999\frac{3}{5}$	18,6137056F	20F	100F

lumnæ quartæ, duplicatis numeris columnæ primæ correspondentibus, habentur. Quia verò spatia, a corpore vi ponderis sui comparativi B sine resistentia cadente, descripta, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur, et tempore G describitur spatium F; numeri columnæ quintæ sunt quadrata numerorum correspondentium in columna prima. Numeri columnæ secundæ velocitatem acquisitam cadendo in fluido tempore P indicant quæ est $\frac{N-1}{N+1} \times H$, sicque inveniuntur: assumpto in columna prima termino quovis, exempli causâ, 2 G pro P, fit $\frac{2P}{G} = \frac{4G}{G} = 4$, et hinc 0, 4342944819 $\frac{2P}{G} = 1, 7371779276$. Huic logarithmo in tabulis congruit numerus absolutus 54, 59815 $= N$; unde fit $\frac{N-1}{N+1} = \frac{5359815}{5559815}$, et quia $H = 100000000$ (per Hyp.), velocitas tempore P, sive 2 G, acquisita $\frac{N-1}{N+1}H$, est 96402758, uti Newtonus in tabula posuit. Inventis hoc modo numeris columnæ secundæ, inveniuntur quoque numeri columnæ tertiæ, videlicet $\frac{2P}{G} - 1, 386293611 + 4, 6051702$ L. Quoniam enim datus est numerus $\frac{2P}{G}$, et jam inventus fuit numerus N, cognoscetur numerus $\frac{N+1}{N}$ cum ipsius logarithmo L; atque ita obtinebitur numerus columnæ tertiæ.

286. Ex hâc porro tabulâ patet verum esse posse, quod nonnulli se observasse testantur, nimirum gravia in mediis resistentibus cadentia brevi satis tempore ad maximam quam acquirere possint velocitatem pervenire et postea moveri uniformiter; licet per theoriam non nisi tempore infinito, seu nunquam, possint maximam illam velocitatem reverâ acquirere. Nam si tempus P quo globus in fluido quocumque cadit, sit æquale tempori 5 G; globi velocitas acquisita erit ad velocitatem maximam ut 9999092 ad 10000000, seu ut 1. ad 1,0000908, quamproximè, et spatium hoc tempore 5 G descriptum erit 8, 6137964 F, et deinde spatia descripta crescent fere in progressione arithmetica ad modum temporum. Elapso igitur tempore 4 G vel 5 G globus uniformiter descendere videbitur, licet ejus velocitas reverâ perpetuò crescat. Si verò assumatur tempus P æquale 10 G, tum velocitas acquisita est ad velocitatem maximam ut $99999999\frac{3}{5}$ ad 100000000, et tantorum numerorum differentia $\frac{2}{5}$ prorsus insensibilis est oculis humanis.

Scholium.

Ut resistentias fluidorum investigarem per experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine et latitudine internâ digitorum novem ([f]) pedis Londinensis, profunditate pedum novem cum semisse, idemque implevi aquâ pluviali; et globis ex cerâ et plumbo incluso formatis, notavi tempora descensus globorum, existente descensus altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus Londinensis continet 76 libras Romanas aquæ pluvialis, et pedis hujus digitus solidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus ([g]) seu grana $253\frac{1}{3}$; et globus aqueus diametro digiti unius descriptus continet grana 132, 645 in medio aëris, ([h]) vel grana 132, 8 in vacuo; ([i]) et globus quilibet alius est ut excessus ponderis ejus in vacuo supra pondus ejus in aquâ.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aëre et 77 granorum in aquâ, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor secundorum descripsit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor secundorum.

([k]) Pondus globi in vacuo est $156\frac{13}{38}$ gran. et excessus hujus ponderis supra pondus globi in aquâ est $79\frac{13}{38}$ gran. ([l]) Unde prodit globi diameter 0, 84224 partium digiti. Est autem ut excessus ille ad pondus globi

([f]) * *Pedis Londinensis.* Pes Londinensis est ad pedem Parisiensem ut 15 ad 16; uterque in digitos 12, et digitus in 12 lineas dividitur.

([g]) * *Seu grana.* Libra Romana uncias 12, uncia 480. grana continet.

([h]) 287. * *Vel grana* 132, 8 *in vacuo.* Corpus quodlibet ponderis sui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris; corporum vero pondera absoluta sub paribus voluminibus sunt ut eorum densitates, et densitas aquæ, juxta Newtonum, est ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Quare, cum globi aquei pondus in aëre parum differat ab ejusdem pondere in vacuo, dicendum est, ut 860 ad 1, ita pondus globi aquei granorum 132, 645 ad pondus æqualis globi aëris, quod proinde erit granorum 0, 1543 quam proximè. Addatur pondus hoc ponderi granorum 132, 645, et summa gran. 132, 7993, seu gran. 132, 8 erit pondus prædicti globi aquæ in vacuo quam proximè. Dato igitur pondere globi cujuslibet aquei in aëre, invenitur ejus pondus in vacuo, si ponderi dato addatur id quod ex divisione ejusdem ponderis per numerum 860 habetur.

([i]) 288. * *Et globus quilibet,* &c. Globus quilibet E est ad globum aqueum C diametro digiti unius descriptum, ut excessus ponderis globi E in vacuo supra pondus ejus in aqua, ad pondus granorum 132, 8. Nam excessus ponderis globi E in vacuo supra pondus ejus in aquâ est pondus globi aquæ ejusdem cum globo E diametri; sed globi aquæ homogenei sunt ut eorumdem pondera: est igitur globus E ad globum C ut excessus ponderis globi E in vacuo supra pondus ejus in aqua, ad pondus 132, 8 granorum.

([k]) * *Pondus globi in vacuo est* $156\frac{13}{38}$ *gran.* Si enim ex pondere globi in aëre gran. $156\frac{1}{4}$ subducatur pondus ejus in aqua, quod est gran. 77, residuum erit pondus globi aquæ ejusdem voluminis gran. $79\frac{1}{4}$; et propterea (287) ut habeatur pondus globi in vacuo, ponderi gran. $156\frac{1}{4}$ addendum est pondus gran. $\frac{79\frac{1}{4}}{860}$, et prodit pondus globi in vacuo gran. $156\frac{13}{38}$ quam proximè.

([l]) * *Unde prodit globi diameter,* &c. Est enim (288) pondus gran. 132, 8 ad excessum $79\frac{13}{38}$, ut globus diametro digiti unius descriptus ad globum quæsitum; ideóque ut diametri 1 digiti cubus 1 ad diametri globi quæsiti cubum, qui proinde erit $\frac{79\frac{13}{38}}{132,8}$ partium digiti cubici. Hujus fractionis radix cubica, seu globi diameter, est 0, 84224 partium digiti quam proximè.

in vacuo, (m) ita densitas aquæ ad densitatem globi, (n) et ita partes octo tertiæ diametri globi (viz. 2, 24597 dig.) ad spatium 2 F, (o) quod proinde erit 4, 4256 dig. Globus tempore minuti unius secundi, toto suo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, (p) cadendo in vacuo describet digitos $193\frac{1}{3}$, et pondere granorum 77, eodem tempore sine resistentiâ cadendo in aquâ (q) describet digitos 95, 219; (r) et tempore G, quod sit ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2, 2128 dig. ad 95, 219 dig. describet 2, 2128 dig. et velocitatem maximam H acquiret quâcum potest in aquâ descendere. (s) Est igitur tempus G 0″, 15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illâ maximâ H, globus describet spatium 2 F digitorum 4, 4256; (t) ideóque tempore minutorum quatuor secundorum describet spatium digitorum 116, 1245. (u) Subducatur spatium 1, 3862944 F seu 3, 0676 dig. et manebit spatium 113, 0569 digitorum quod globus cadendo in aquâ, in vase amplissimo, tempore minutorum quatuor secundorum describet. Hoc spatium, ob angustiam vasis lignei prædicti, (x) minui

(m) * *Ita densitas aquæ ad*, &c. (283).

(n) * *Et ita partes octo tertiæ diametri globi*, &c. Per Prop. XL. Lib. II.

(o) * *Quod proinde erit* 4, 4256 *dig.* Nam $79\frac{13}{38} : 156\frac{13}{38} = 3015 : 5941 = 2, 24597 : 4, 4256$, quam proximè.

(p) 289. * *Cadendo in vacuo describet digitos* $193\frac{1}{3}$. Quoniam corporis, præsertim gravioris, oscillationes quæ in minoribus arcubus fiunt, iisdem quam proximè temporibus peraguntur in aëre et in vacuo (per Cor. 2. Prop. XXVII. Lib. II.); spatium quod grave cadendo in vacuo tempore minuti unius secundi describit, est pedum Parisiensium $15\frac{1}{12}$, seu accuratius digitorum $181\frac{1}{6}$ quam proximè (471. Lib. I.); et quia pes Londinensis pede Parisiensi minor est in ratione 15 ad 16, erit spatium illud digitorum Londinensium $193\frac{11}{45}$, seu fere $193\frac{1}{4}$. Hoc spatium augeri paululum debet ob pondus in aëre oscillantis diminutum, et ideò poni potest digit. Lond. $193\frac{1}{3}$ quam proximè.

(q) * *Describet digitos* 95, 219. Nam vires uniformes sunt ut spatia quæ corpus viribus illis agitatum dato tempore describit (179); et propterea $156\frac{13}{38}$ est ad 77 ut $193\frac{1}{3}$ dig. ad spatium quod globus vi ponderis granorum 77 tempore minuti unius secundi sine resistentia cadendo describit; unde spatium hoc prodit 95, 219 digit. quam proximè.

(r) * *Et tempore G, quod sit*, &c. Spatia quæ corpus vi ponderis sui comparativi 77 gran. sine resistentiâ cadendo describit, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur (27. Lib. I.). Ergo tempus G, quo corpus vi ponderis sui comparativi sine resistentiâ cadendo describit spatium F (per Prop. XL.), est ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2, 2128 dig. ad 95, 219 digit.

(s) 290. * *Est igitur tempus G* 0″, 15244. Si juxta notam 286, multiplicetur hæc fractio per numerum 5, productum erit 0″, 7622 seu 46‴ ferè. Quare globus, cujus diameter est 0, 84224 partium digiti et pondus in aëre $156\frac{1}{4}$ gran., in aqua cadendo tempore 46‴ describet spatium 19 dig. circiter et maximam suam velocitatem acquirere atque postea uniformi velocitate descendere videbitur (286).

(t) * *Ideóque tempore minutorum quatuor secundorum*, &c. Sunt enim tempora ut spatia velocitate uniformi H descripta, et 0″, 15244 est ad 4″ ut 4, 4256 ad 116, 1245 ferè.

(u) * *Subducatur spatium*, &c. Tempus P est minutorum secundorum quatuor, et ut G ad P ita est 2 F ad digitos 116, 1245 $= \frac{2\,P\,F}{G}$, sed (per Prop. XL.) spatium quod globus in aqua cadendo tempore P describit, est $\frac{2\,P\,F}{G} - 1, 3862944\ F$, neglecto, scilicet, termino 4, 60517016 L F, qui ob parvitatem hic potest tutò contemni.

(x) 291. * *Minui debet in ratione*, &c. Globi datâ velocitate moti resistentia in vase amplissimo sit r, in vase angustiore R, hujus vasis orificium æquale sit circulo c, circulus globi maximus sit m, densitas globi δ, densitas fluidi d; vis uniformis quâ totus globi motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ uniformiter describeret tolli possit vel generari, sit p. Et (per Prop. XXXVIII.) erit $p : r = \delta : d$; et (per Prop. XXXIX.) $R : p = d\,c^3 : \delta\,[c - \frac{1}{2}m] \times [c - m]^2$; et propterea, conjunctis his rationibus, $R : r = c^3 : [c - \frac{1}{2}m] \times [c - m]^2$. Datâ igitur velocitate globi, resistentia in vase amplissimo est ad resistentiam in vase angustiore in datâ ratione $[c - \frac{1}{2}m] \times [c - m]^2$ ad c^3. Brevitatis causâ ponatur r ad R ut 1 ad n.

debet in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione orificii vasis ad excessum orificii hujus supra semi-circulum maximum globi et ex simplici ratione orificii ejusdem ad excessum ejus supra circulum maximum globi, id est, in ratione 1 ad 0, 9914. Quo facto, habebitur spatium 112, 08 digitorum, quod globus cadendo in aquâ in hoc vase ligneo tempore minutorum quatuor secundorum per theoriam describere debuit quamproximè. Descripsit verò digitos 112 per experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera seorsim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aëre et $5\frac{1}{16}$ granorum in aquâ, successivè demittebantur, et unusquisque cecidit in aquâ tempore minutorum secundorum quindecim, casu suo describens altitudinem digitorum 112.

(y) Computum ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{5}{12}$ gran. excessus hujus ponderis supra pondus in aquâ $71\frac{17}{48}$ gran. diameter globi 0, 81296 dig. octo tertiæ partes hujus diametri 2, 16789 dig. spatium 2 F 2,3217 dig. spatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ gran. tempore 1″ sine resistentiâ cadendo describat 12, 808 dig. et tempus G 0″, 301056. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum potest in aquâ vi ponderis $5\frac{1}{16}$ gran. descendere, tempore 0″, 301056 describet spatium 2, 3217 dig. et tem-

Quando velocitas in vase amplissimo maxima est, seu H, resistentia æqualis est ponderi B globi in aqua, et F est spatium quod globus tempore G vi ponderis B sine resistentia cadendo describit ut velocitatem illam H acquirat. Sit h velocitas maxima globi in vase angustiore, quam cum acquisivit, resistentia ejus æqualis est ponderi B; et cum resistentia globi in vase angustiore æqualis sit n B ubi velocitas ejus est H (ex demonstratis), et resistentiæ sint ut quadrata velocitatum, erit $H H : h h = n B : B = n : 1$, ideóque $H : h = \sqrt{n} : 1$. Sit g tempus quo globus pondere B sine resistentiâ cadendo acquirit velocitatem h, et f spatium quod eodem tempore describit; et erit $H : h = \frac{F}{G} : \frac{f}{g}$, ac proinde $\frac{F}{G} : \frac{f}{g} = \sqrt{n} : 1$. Porro spatia in vase amplissimo tempore P, quod satis magnam habet rationem ad tempus G, cadendo descripta, sunt quam proximè ut $\frac{2 P F}{G}$, seu ut spatia eodem tempore motu maximo descripta, ut ex Prop. XL. et ex tabulâ huic scholio præfixâ patet; et similiter spatium eodem tempore P in vase angustiore descriptum erit etiam ut $\frac{2 P f}{g}$ ferè. Quare cum sit $\frac{2 P F}{G}$ ad $\frac{2 P f}{g}$ ut $\frac{F}{G}$ ad $\frac{f}{g}$, id est (ex demonstr.) ut $\sqrt{n}$ ad 1; spatium tempore P in vase amplissimo descriptum erit ad spatium eodem tempore in vase angustiore descriptum, ut $\sqrt{n}$ ad 1, id est, ut $c^{\frac{3}{2}}$ ad $[c - m] \times [c - \frac{1}{2} m]^{\frac{1}{2}}$, aut quod idem est, in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione orificii vasis c ad excessum $c - \frac{1}{2} m$ orificii hujus supra semi-circulum maximum globi, et ex simplici ratione orificii ejusdem c ad excessum ejus c — m, supra circulum maximum globi.

Sed vasis orificium c est 81 digitorum (ex dictis initio scholii hujus), et circuli m diameter inventa est 0, 84224 partium digiti, ideóque si dicatur ut 7 ad 11 ita 0, 84224 digit. ad semi-peripheriam circuli m, hæc invenietur digit. 1, 32352, et hinc circulus m prodit 0, 5573 partium digiti quadrati circiter; ex quibus habetur $\frac{c}{c - m} = 1,0069$, et $\frac{c^{\frac{1}{2}}}{[c - \frac{1}{2} m]^{\frac{1}{2}}} = 1,0017$, ac proinde $\frac{c^{\frac{3}{2}}}{[c - m] \times [c - \frac{1}{2} m]^{\frac{1}{2}}} = 1,00861$. Quare spatium in vase amplissimo descriptum digit. 113, 0569 est ad spatium in vase angustiore eodem tempore minutorum quatuor secundorum descriptum, ut 1, 00861 ad 1, seu ut 1 ad 0, 9914 ferè; unde hoc spatium prodit 111, 08 digit.

(y) * *Computum ineundo*, &c. Calculo experimenti primi fusè exposito, nulla superest difficultas in computo simili experimenti hujus.

pore 15″ spatium 115, 678 dig. Subducatur spatium 1, 3862944 F seu 1, 609 dig. et manebit spatium 114, 069 dig. quod proinde globus eodem tempore in vase latissimo cadendo describere debet. Propter angustiam vasis nostri detrahi debet spatium 0, 895 dig. circiter. Et sic manebit spatium 113, 174 dig. quod globus cadendo in hoc vase, tempore 15″ describere debuit per theoriam quamproximè. Descripsit veros digitos 112 per experimentum. Differentia est insensibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera seorsim erant 121 gran. in aëre et 1 gran. in aquâ, successive demittebantur; et cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, et 50″, describentes altitudinem digitorum 112.

([z]) Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter. Quod tardius ceciderunt, utrum minori proportioni resistentiæ quæ a vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad resistentiam quæ oritur ab aliis causis tribuendum sit; an potius bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempestatis vel manus globum demittentis, vel etiam erroribus insensibilibus in ponderandis globis in aquâ, incertum esse puto. Ideòque pondus globi in aquâ debet esse plurium granorum, ut experimentum certum et fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus descripta cœpi, ut investigarem resistentias fluidorum, antequam theoria in propositionibus proximè præcedentibus exposita mihi innotesceret. Postea, ut theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine internâ digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cerâ et plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aëre et $7\frac{1}{8}$ granorum in aquâ. Et hos demisi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad semi-minuta secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur et postea cadebant, frigidi erant et aliquamdiu frigidi manserant; quia calor ceram rarefacit, et per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua, et cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per

([z]) * *Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore* 40″ *circiter*. Cum pondus globi sit 121 granorum in aëre, et 1 grani in aqua, erit pondus æqualis globi aquæ granorum 120; et ideò pondus globi in vacuo gran. $121\frac{120}{860}$ seu $121\frac{6}{43}$ (287). Excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua est gran. $120\frac{6}{43}$. Unde prodeunt globi diameter 0, 9671 partium digiti, spatium 2 F 2, 6004 digitorum, spatium quod globus pondere 1 grani sine resistentia cadendo tempore minuti unius secundi describit digit. 1, 5959, et tempus G 0″, 9026. Hoc tempore globus cum velocitate maximâ H uniformiter progrediendo describet spatium 2 F seu 2, 6004 dig. et tempore 40″ describet spatium 115, 2404 dig. Subducatur spatium 1, 3862944 F seu 1, 8024 dig. et manebit spatium 113, 438 dig. quod globus cadendo in aqua in vase amplissimo tempore 40″ describeret; et hoc spatium, propter angustiam vasis aliquantulum minui debet, nimirum in ratione 10049 ad 10025 circiter. Globi igitur per theoriam spatium 112 digitorum cadendo describere debuerunt tempore 40″ circiter.

frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam ne pondere partis alicujus ex aquâ extantis descensus eorum sub initio acceleraretur. Et ubi penitùs immersi quiescebant, demittebantur quam cautissimè, ne impulsum aliquem a manu demittente acciperent. Ceciderunt autem successivè temporibus oscillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 et 51, describentes altitudinem pedum quindecim et digitorum duorum. Sed tempestas jam paulò frigidior erat quàm cum globi ponderabantur, ideóque iteravi experimentum alio die, et globi ceciderunt temporibus oscillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 et 53, ac tertio temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 et 53. Experimento sæpius capto, globi ceciderunt maximâ ex parte temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$ et 50. Ubi tardius cecidere, suspicor eosdem retardatos fuisse impingendo in latera vasis.

Jam computum per theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum. Excessus hujus ponderis supra pondus globi in aquâ $132\frac{11}{40}$ gran. Diameter globi 0, 99868 dig. Octo tertiæ partes diametri 2, 66315 dig. Spatium 2 F 2,8066 dig. Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius secundi, sine resistentiâ cadendo describit 9, 88164 dig. Et tempus G 0″, 376843. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum potest in aquâ vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum descendere, tempore 0″, 376843 describit spatium 2, 8066 digitorum, et tempore 1″ spatium 7, 44766 digitorum, et tempore 25″ seu oscillationum 50 spatium 186, 1915 dig. Subducatur spatium 1, 386294 F, seu 1, 9454 dig. et manebit spatium 184, 2461 dig. quod globus eodem tempore in vase latissimo describet. Ob angustiam vasis nostri, minuatur hoc spatium in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione orificii vasis ad excessum hujus orificii supra semi-circulum maximum globi, et simplici ratione ejusdem orificii ad excessum ejus supra circulum maximum globi; et habebitur spatium 181, 86 digitorum, quod globus in hoc vase tempore oscillationum 50 describere debuit per theoriam quamproximè. Descripsit verò spatium 182 digitorum tempore oscillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ gran. in aëre et $21\frac{1}{2}$ gran. in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ et 30, et nonnunquam 31, 32 et 33, describentes altitudinem pedum quindecim et digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 29 quamproximè.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{3}{8}$ gran. in aëre et $79\frac{1}{2}$ in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16,

17 et 18, describentes altitudinem pedum quindecim et digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 15 quamproximè.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{3}{8}$ gran. in aëre et $35\frac{7}{8}$ gran. in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 et 33, describentes altitudinem pedum quindecim et digiti unius cum semisse.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 28 quamproximè.

Causam investigando cur globorum, ejusdem ponderis et magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi ubi primum demittebantur et cadere incipiebant, oscillarent circum centra, latere illo quod forte gravius esset primum descendente, et motum oscillatorium generante. Nam per oscillationes suas globus majorem motum communicat aquæ, quam si sine oscillationibus descenderet; et communicando, amittit partem motûs proprii quo descendere deberet: et pro majore vel minore oscillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recidit semper a latere suo quod per oscillationem descendit, et recedendo appropinquat lateribus vasis et in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oscillatio in globis gravioribus fortior est, in majoribus aquam magis agitat. Quâpropter, ut oscillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cerâ et plumbo construxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope superficiem ejus; et globum ita demisi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, esset infimum ab initio descensus. Sic oscillationes factæ sunt multo minores quam prius, et globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis sequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in aëre et $6\frac{1}{2}$ in aquâ, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, et maximâ ex parte tempore oscillationum 51 circiter, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in aëre et $140\frac{3}{4}$ in aquâ, sæpius demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam verò hi globi cadere debuerunt tempore oscillationum $11\frac{1}{3}$ quamproximè.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in aëre et $119\frac{1}{2}$ in

aquâ, sæpe demissi, cadebant temporibus oscillationum $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ et 19, describentes altitudinem digitorum $181\frac{3}{4}$. Et ubi ceciderunt tempore oscillationum 19, nonnunquam audivi impulsum eorum in latera vasis antequam ad fundum pervenerunt.

Per theoriam verò cadere debuerunt tempore oscillationum $15\frac{5}{9}$ quamproximè.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aëre et $3\frac{29}{32}$ in aquâ sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 et 46, et maximâ ex parte 44 et 45, describentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $46\frac{5}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aëre et $4\frac{3}{8}$ in aquâ, aliquoties demissi, ceciderunt temporibus oscillationum 61, 62, 63, 64 et 65, describentes altitudinem digitorum 182.

Et per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $64\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per hæc experimenta manifestum est quod, ubi globi tardè ceciderunt, ut in experimentis secundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi rectè exhibentur per theoriam, at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis sextis, nonis ac decimis, ([a]) resistentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oscillant aliquantulum: et hæc oscillatio in globis levioribus et tardius cadentibus, ob motûs languorem citò cessat; in gravioribus autem et majoribus, ob motûs fortitudinem diutius durat, et non nisi post plures oscillationes ab aquâ ambiente cohiberi potest. Quinetiam globi, quo velociores sunt, eo minus premuntur a fluido ad posticas suas partes; et si velocitas perpetuo augeatur, spatium vacuum tandem a tergo relinquent, ([b]) nisi compressio fluidi simul augeatur. Debet autem compressio fluidi (per Prop. XXXII. et XXXIII.) ([c]) augeri in duplicatâ ratione velocitatis, ut resistentia sit in eâdem duplicatâ ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulò minus premuntur a tergo, et defectu pres-

([a]) * *Resistentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis.* Si enim resistentia accuratè esset in duplicatâ velocitatis ratione, tempora cadendi tam per experimenta quam per theoriam definita, æquarentur; at si resistentia major quam in duplicatâ ratione velocitatis, tempora quibus corpus cadendo datum spatium describit, majora esse debent in experimentis quam in theoriâ, quæ minorem resistentiam supponit.

([b]) * *Nisi compressio fluidi simul augeatur.* Tanta enim esse potest globi velocitas, ut fluidum ad posticas illius partes satis citò recurrere et locum a globo relictum statim occupare nequeat, nisi fluidi compressio augeatur, ut per fluidum pressio et motus celerius propagentur.

([c]) * *Augeri in duplicatâ ratione velocitatis,* &c. Nam partes fluidi per compressionem in se mutuo agunt et reagunt, et si vires quibus fluidi particulæ se mutuò agitant, augeantur in duplicatâ ratione velocitatis, resistentia est in eâdem ratione duplicatâ, per Cor. 2. Prop. XXXIII.

sionis hujus, resistentia eorum fit paulo major quàm in duplicatâ ratione velocitatis.

Congruit igitur theoria cum phænomenis corporum cadentium in aquâ, reliquum est ut examinemus phænomena cadentium in aëre.

Exper. 13. A culmine Ecclesiæ Sancti Pauli, in urbe Londini, mense Junio 1710 globi duo vitrei simul demittebantur, unus argenti vivi plenus, alter aëris; et cadendo describebant altitudinem pedum Londinensium 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis suspendebatur, ad alterum pessulo ligneo incumbebat; et globi duo huic tabulæ impositi simul demittebantur, subtrahendo pessulum ope fili ferrei ad terram usque demissi ut tabula polis ferreis solummodo innixa super iisdem devolveretur, et eodem temporis momento pendulum ad minuta secunda oscillans, per filum illud ferreum tractum demitteretur et oscillare inciperet. Diametri et pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur (d) in tabulâ sequente.

Globorum mercurio plenorum.			*Globorum aëre plenorum.*		
Pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi.*	*Pondera.*	*Diametri.*	*Tempora cadendi.*
908 *gran.*	0,8 *digit.*	4″	510 *gran.*	5,1 *digit.*	$8\frac{1}{2}$″
983	0,8	4—	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4+	515	5,0	$8\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	$8\frac{1}{2}$
784	0,75	4+	641	5,2	8

Cæterum tempora observata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per theoriam Galilæi) minutis quatuor secundis (e) describent pedes Londinenses 257, et pedes 220 minutis tantum 3″ 42‴. Tabula lignea utique, detracto pessulo, tardius devolvebatur quam par erat, et tardâ suâ devolutione impediebat descensum globorum sub initio. Nam globi incumbe-

(d) * *In tabulâ sequente* 4 — significat tempus cadendi minutis quatuor secundis paulo minus fuisse, et 4 + tempus minutis quatuor secundis paulo majus indicat.

(e) * *Describent pedes Londinenses*, &c. Quoniam densitas mercurii est ad densitatem aëris ut 11890 ad 1 circiter, parùm admodum minuitur mercurii pondus in aëre, et ideò globi mercurio pleni eâdem ferè celeritate in aëre et in vacuo per breve tempus descendunt; sed gravia omnia in vacuo cadentia tempore minuti unius secundi describunt pedis Londinensis digitos $193\frac{1}{3}$ (289), et spatia descripta sunt in duplicatâ ratione temporum (27. Lib. I.). Quare ut 1 ad 16 ita $193\frac{1}{3}$ dig. ad spatium quod globus mercurio plenus tempore 4″ cadendo describit, quod proinde erit 3093 dig. seu 257 pedum Londinensium circiter. Simili modo, cum fit 3″. 42‴ = 3″.7, erit 1 ad 13.69 ut $193\frac{1}{3}$ dig. ad spatium tempore 3″. 42‴ descriptum quod prodit ped. Lond. 220 circiter. Sed globi mercurio pleni spatium hoc 220 ped. tempore 4″ describunt in experimentis, et differentia temporum 4″ et 3″. 42‴ est 18‴. Tempora igitur prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter.

bant tabulæ prope medium ejus, et paulò quidem propiores erant axi ejus quam pessulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, et jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præsertim in globis majoribus qui tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi sex majores cecidêre, evadent 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴, et 7″ 42‴.

Globorum igitur aëre plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 constructus, cecidit tempore 8″ 12‴, describendo altitudinem pedum 220. (f) Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum; et pondus aëris eidem æqualis est $\frac{16600}{860}$ gran. seu $19\frac{3}{10}$ gran. ideóque pondus globi in vacuo est $502\frac{3}{10}$ gran. et hoc pondus est ad pondus aëris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, et ita sunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id est, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 ped. 11 dig. Globus cadendo in vacuo, toto suo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$ ut supra, et pondere 483 gran. describit digitos 185, 905, et eodem pondere 483 gran. etiam in vacuo describit spatium F seu 14 ped. $5\frac{1}{2}$ dig. (g) tempore 57‴ 58⁗, et velocitatem maximam acquirit quâcum possit in aëre descendere. Hâc velocitate globus, tempore 8″ 12‴, describet spatium pedum 245 et digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1, 3863 F seu 20 ped. $0\frac{1}{2}$ dig. et manebunt 225 ped. 5 dig. Hoc spatium igitur globus tempore 8″ 12‴, cadendo describere debuit per theoriam. Descripsit verò spatium 202 pedum per experimentum. Differentia insensibilis est.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aëre plenos applicatis, confeci tabulam sequentem.

(f) * *Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum.* Globus aqueus, cujus diameter est unius digiti continet grana 132, 8 (287), et globorum homogeneorum, pondera sunt ut diametrorum cubi, et propterea ut 1 ad 125 ita sunt 132, 8 grana ad pondus globi aquei cujus diameter est digitorum 5, quod proinde pondus est gran. 16600. Globorum æqualium pondera sunt ut illorum densitates, et densitas aquæ est ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Quare pondus globi aëris diametro digitorum 5 descripti est $\frac{16600}{860}$ seu $19\frac{3}{10}$ gran. quam proximè. Hinc pondus globi vitrei aëre pleni in vacuo est gran. 483 + $19\frac{3}{10}$ seu gran. $502\frac{3}{10}$, et hoc pondus est ad pondus aëris globo æqualis, id est, densitas globi, si homogeneus fingatur, ad densitatem aëris, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$ *et ita sunt 2 F*, &c., cætera patent ut in superioribus calculis.

(g) 292. * *Tempore 57‴ 58⁗.* Hoc tempus, quod ante dictum est G, ducatur in numerum 5, et productum erit fere 5″; et propterea (186) globus cujus diameter est 5 digit. et pondus in aëre gran. 483, tempore minutorum secundorum quinque describet spatium 124 pedum circiter, et deinde videbitur uniformiter descendere.

Globorum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 220.*		*Spatia describenda per theoriam.*		*Excessus.*	
510 *gran.*	5,1 *dig.*	8″	12‴	226 *ped.*	11 *dig.*	6 *ped.*	11 *dig.*
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

Exper. 14. Anno 1719. mense Julio, D. Desaguliers hujusmodi experimenta iterum cepit, formando vesicas porcorum in orbem sphæricum ope sphæræ ligneæ concavæ ambientis, quam madefactæ implere cogebantur inflando aërem; et hasce rarefactas et exemptas demittendo ab altiore loco in templi ejusdem turri rotunda fornicata, nempe ab altitudine pedum 272; et eodem temporis momento demittendo etiam globum plumbeum cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui stantes in supremâ parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, et alii stantes in Terrâ notabant differentiam temporum inter casum globi plumbei et casum vesicæ. Tempora autem mensurabantur pendulis ad dimidia minuta secunda oscillantibus. Et eorum qui in Terrâ stabant unus habebat horologium cum elatere ad singula minuta secunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam affabrè constructam cum pendulo etiam ad singula minuta secunda quater vibrante. Et similem machinam habebat unus eorum qui stabant in summitate templi. Et hæc instrumenta ita formabantur, ut motus eorum pro lubitu vel inciperent vel sisterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum secundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum quo vesica cecidit. Tempora, quibus vesicæ quinque post casum globi plumbei primâ vice ceciderunt, erant $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}'''$, $17\frac{3}{4}''$ et $16\frac{7}{8}''$, et secundâ vice $14\frac{1}{2}''$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$ et $16\frac{2}{3}''$. Addantur $4\frac{1}{4}''$, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, et tempora tota quibus vesicæ quinque ceciderunt, erant primâ vice $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}''$, $22''$ et $21\frac{1}{8}''$; et secundâ vice, $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$ et $21''$. Tempora autem in summitate templi notata, erant primâ vice $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$ et $21\frac{5}{8}''$; et secundâ vice $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$ et $21\frac{1}{4}''$. Cæterum vesicæ non semper rectâ cadebant, sed nonnunquam volitabant, et hinc inde oscillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata sunt et

aucta nonnunquam dimidio minuti unius secundi, nonnunquam minuto secundo toto. Cadebant autem rectius vesica secunda et quarta primâ vice; et prima ac tertia secundâ vice. Vesica quinta rugosa erat et per rugas suas nonnihil retardabatur. Diametros vesicarum deducebam ex earum circumferentiis filo tenuissimo bis circundato mensuratis. Et theoriam contuli cum experimentis in tabulâ sequente, assumendo densitatem aëris esse ad densitatem aquæ pluvialis ut 1 ad 860, et computando spatia quæ globi per theoriam ([h]) describere debuerunt cadendo.

Vesicarum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 272.*	*Spatia iisdem temporibus describenda per theoriam.*		*Differentia inter theor. et exper.*	
128 *gran.*	5,28 *dig.*	19″	271 *ped.*	11 *dig.*	—0 *ped.*	1 *dig.*
156	5,19	17	272	$0\frac{1}{2}$	+0	$0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	$18\frac{1}{2}$	272	7	+0	7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277	4	+5	4
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282	0	+10	0

Globorum igitur tam in aëre quàm in aquâ motorum resistentia prope omnis per theoriam nostram recte exhibetur, ac densitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis est.

In scholio, quod Sect. VI. subjunctum est, ostendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium et æquivelocium in aëre, aquâ, et argento vivo motorum resistentiæ sunt ut fluidorum densitates. ([i]) Idem hic ostendimus magis accuratè per experimenta corporum cadentium in aëre et aquâ. Nam pendula singulis oscillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis semper contrarium, et resistentia ab hoc motu oriunda, ut et resistentia fili quo pendulum suspendebatur, totam penduli resistentiam majorem reddiderunt quàm resistentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulo-

([h]) * *Describere debuerunt cadendo.* Exempli causâ calculum tentabimus experimenti cum tertia vesica facti. Hujus vesicæ diameter erat 5.3 digitorum et pondus in aëre granorum 137, 5. Globus aëris diametro digitorum 5.3 descriptus continet 23 grana quam proxime; unde vesicæ pondus in vacuo erat gran. 160, 5, et ut 23 ad 160, 5 ita sunt octo tertiæ partes diametri vesicæ seu digiti $14\frac{2}{15}$ ad spatium 2 F, quod ita prodit digit. 98, 626. Vesica cadendo in vacuo toto suo pondere 160, 5 gran. tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$, et pondere 137, 5 gran. describit digitos 165, 628, et eodem pondere 137, 5 gran. etiam in vacuo describit spatium F digitorum 49, 313 tempore 0″, 5456 et velocitatem maximam acquirit cum quâ possit in aëre descendere. Hâc velocitate vesica tempore minutorum secundorum $18\frac{1}{2}$ describet spatium 277 ped. et 8. digit. circiter. Subducatur spatium 1, 3863 F seu 5. ped. et 8 digit., et manebunt 273 pedes; cùm in tabula accuratiore calculo confecta spatium per theoriam describendum sit 272 ped. et 7 digit., et in experimento sit 272 ped.

([i]) * *Idem hic ostendimus,* &c. Nam theoria experimentis confirmata, cui superiores computationes nituntur, supponit resistentiam, cæteris paribus, esse in ratione compositâ ex ratione duplicatâ velocitatis mobilis et ratione simplici densitatis fluidi.

rum in scholio illo exposita, globus ejusdem densitatis cum aquâ, describendo longitudinem semi-diametri suæ in aëre, amittere deberet motûs sui partem $\frac{1}{3342}$. At per theoriam in hâc septimâ Sectione expositam et experimentis cadentium confirmatam, globus idem describendo longitudinem eandem, (k) amittere deberet motûs sui partem tantùm $\frac{1}{4586}$, posito quod densitas aquæ sit ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Resistentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob causas jam descriptas) quàm per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cùm pendulorum in aëre, aquâ et argento vivo oscillantium resistentiæ a causis similibus similiter augeantur, proportio resistentiarum in his mediis, tam per experimenta pendulorum, quàm per experimenta corporum cadentium, satis rectè exhibebitur. Et inde concludi potest quod corporum in fluidis quibuscunque fluidissimis motorum resistentiæ, cæteris paribus, sunt ut densitates fluidorum.

(l) His ita stabilitis, dicere jam licet quamnam motûs sui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproximè. Sit D diameter globi, et V velocitas ejus sub initio motus, et T tempus, quo globus velocitate V in vacuo describet spatium, quod sit ad spatium $\frac{8}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem fluidi: et globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t amittet velocitatis suæ partem $\frac{t\,V}{T+t}$, manente parte $\frac{T\,V}{T+t}$, et describet spatium, quod sit ad spatium uniformi velocitate V eodem tempore descriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 est ad numerum $\frac{t}{T}$, per Corol. 7. Prop. XXXV. In motibus tardis resistentia potest esse paulò minor, (m) propterea quod figura globi paulò aptior sit ad motum

(k) * *Amittere deberet motûs sui partem tantùm* $\frac{1}{4586}$. Sit D diameter globi V ejus velocitas sub initio motus in fluido, 2 F spatium quod sit ad $\frac{8}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem aëris, hoc est, ut 860 ad 1, ideóque 2 F $= \frac{6880}{3}$ D; sit T tempus quo globus cum velocitate V uniformiter progrediendo describit spatium 2 F, et t tempus quo eâdem uniformi velocitate describit spatium $\frac{1}{2}$ D; et erit t : T $= \frac{1}{2}$ D : $\frac{6880}{3}$ D $=$ 3 : 13760, et inde t : T + t $=$ 3 : 13763, ideóque $\frac{t}{T+t} = \frac{3}{13763} = \frac{1}{4586}$ quam proximè. Est autem $\frac{t\,V}{T+t}$ velocitatis V pars amissa tempore t (per Cor. 3. Prop. XXXVIII.). Globus igitur describendo longitudinem semi-diametri suæ in aëre, per theoriam in hac septimâ Sectione expositam amittere debet motûs sui partem $\frac{1}{4586}$.

(l) * *His ita stabilitis, dicere jam licet quamnam motûs sui partem globus quilibet, in fluido quocumque projectus* et solâ vi insitâ motus, *dato tempore amittet quam proximè;* theoriam enim cum experimentis consentire vidimus tum in fluidis elasticis, quale est aër, tum in fluidis non elasticis, quale est aqua. Quæ sequuntur, manifesta sunt per notam (282) ad Cor. 3. Prop. XXXVIII.

(m) * *Propterea quod figura globi, paulo aptior sit ad motum,* &c. Nam in Lemmate VII.

quàm figura cylindri eâdem diametro descripti. In motibus velocibus resistentia potest esse paulò major, propterea quod elasticitas et compressio fluidi ([n]) non augeantur in duplicatâ ratione velocitatis. Sed hujusmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis aër, aqua, argentum vivum et similia fluida, per divisionem partium in infinitum, subtiliarentur et fierent media infinitè fluida; tamen globis projectis haud minus resisterent. Nam resistentia, de quâ agitur in Propositionibus præcedentibus, oritur ab inertiâ materiæ; et inertia materiæ corporibus essentialis est et quantitati materiæ semper proportionalis. Per divisionem partium fluidi, resistentia quæ oritur a tenacitate et frictione partium diminui quidem potest: sed quantitas materiæ per divisionem partium ejus non diminuitur; et manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ, cui resistentia, de quâ hic agitur, semper proportionalis est. Ut hæc resistentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in spatiis per quæ corpora moventur. Et propterea spatia cœlestia, per quæ globi planetarum et cometarum in omnes partes liberrimè et sine omni motus diminutione sensibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo destituuntur, si forte vapores longe tenuissimos et trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, et hic motus oritur ab excessu pressionis fluidi ad projectilis partes anticas supra pressionem ad ejus partes posticas, et non minor esse potest in mediis infinite fluidis quam in aëre, aquâ et argento vivo pro densitate materiæ in singulis. Hic autem pressionis excessus, pro quantitate suâ, non tantum motum ciet in fluido, ([o]) sed etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: et propterea resistentia in omni fluido est ut motus in fluido a projectili excitatus, nec minor esse potest in æthere subtilissimo pro densitate ætheris, quam in aëre, aquâ et argento vivo pro densitatibus horum fluidorum.

Lib. II. et in sequentibus Propositionibus suppositum est, globi et cylindri, quorum eadem est diameter, æqualem esse resistentiam.

([n]) * *Non augeantur in duplicatâ ratione velocitatis,* in quâ tamen augeri deberent, uti expositum est in experimento 12.

([o]) * *Sed etiam agit in projectile,* per motûs Legem III.

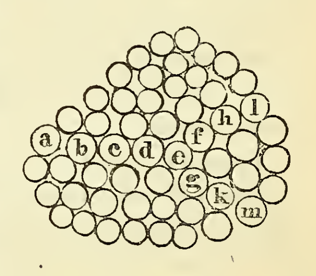
SECTIO VIII.

De motu per fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

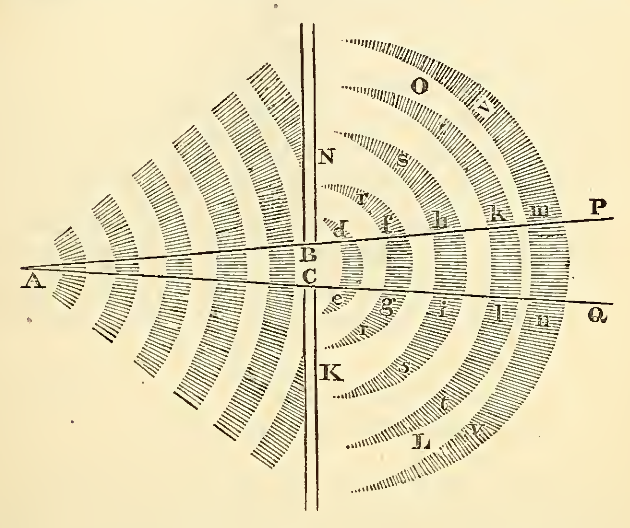
Pressio non propagatur per fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulæ fluidi in directum jacent.

Si jaceant particulæ a, b, c, d, e in lineâ rectâ, potest quidem pressio directè propagari ab a ad e; at particula e urgebit particulas obliquè positas f et g obliquè, et particulæ illæ f et g non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur a particulis ulterioribus h et k; quâtenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; et hæ non sustinebunt pressionem nisi fulciantur ab ulterioribus l et m easque premant, et sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet et obliquè propagabitur in infinitum; et postquam incipit obliquè propagari, si inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accuratè in directum jacentes inciderit. Q. e. d.



Corol. Si pressionis, a dato puncto per fluidum propagatæ, pars aliqua obstaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto A propagetur pressio quâquâversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, et obstaculo N B C K perforato in B C, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem A P Q, quæ per foramen circulare B C transit. Planis transversis d e, f g, h i distinguatur conus A P Q in frusta; et interea dum conus A B C, pressionem propagando, urget frustum conicum ulterius d e g f in superficie d e, et hoc frustum urget frustum proximum f g i h in superficie f g, et frustum illud urget frustum tertium, et sic deinceps in infinitum; manifestum est (per motûs Legem tertiam) quod frustum primum d e g f, reactione frusti secundi f g i h, tantum urgebitur et premetur in superficie f g, quantum urget et premit

frustum illud secundum. Frustum igitur d e f g inter conum A d e et frustum f h i g comprimitur utrinque, et propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram suam servare nequit, nisi vi eâdem comprimatur undique. Eodem igitur impetu quo premitur in superficiebus d e, f g, conabitur cedere ad latera d f, e g; ubique (cùm rigidum non sit, sed omnimodo



fluidum) excurret ac dilatabitur, nisi fluidum ambiens adsit, quo conatus iste cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam fluidum ambiens ad latera d f, e g quam frustum f g h i eodem impetu; et propterea pressio non minus propagabitur a lateribus d f, e g in spatia N O, K L hinc inde, quam propagatur a superficie f g versus P Q. Q. e. d.

PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

Motus omnis per fluidum propagatus divergit a recto tramite in spatia immota.

Cas. 1. Propagetur motus a puncto A per foramen B C, pergatque, si fieri potest, in spatio conico B C Q P, secundum lineas rectas divergentes a puncto A. Et ponamus primo quod ([a]) motus iste sit undarum in superficie stagnantis aquæ. Sintque d e, f g, h i, k l, &c. undarum

([a]) *Motus iste sit undarum,* &c. Vis quælibet deorsum directa in superficiem stagnantis aquæ agat in A, et cavitate factâ, cogat aquam circumquaque ascendere, aqua elevata vi propriæ gravitatis descendendo partim refluet in A, ad cavitatem replendam, partim in plagam oppositam feretur, et celeritate cadendo acquisitâ novam cavitatem formabit, atque ità deinceps undæ motus per successivum ascensum et descensum propagabitur in orbem.

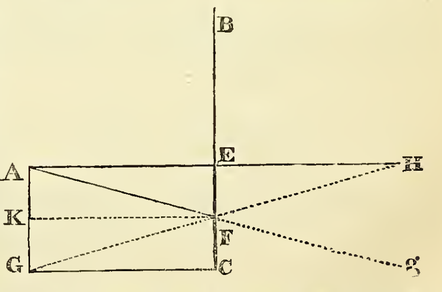
singularum partes altissimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem distinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior est quam in fluidi partibus immotis L K, N O, defluet eadem de jugorum terminis e, g, i, l, &c. d, f, h, k, &c. hinc inde versus K L et N O: et quoniam (b) in undarum vallibus depressior est quam in fluidi partibus immotis K L, N O; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, posteriore valles hinc inde dilatantur et propagantur versus K L et N O. Et quoniam motus undarum ab A versus P Q fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, ideóque (c) celerior non est quàm pro celeritate descensus; et descensus aquæ hinc inde versus K L et N O eâdem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde versus K L et N O eâdem velocitate quâ undæ ipsæ ab A versus P Q rectà progrediuntur. Proindeque spatium totum hinc inde versus K L et N O ab undis dilatatis r f g r, s h i s, t k l t, v m n v, &c. occupabitur. Q. e. d. Hæc ita se habere quilibet in aquâ stagnante experiri potest.

Cas. 2. Ponamus jam quod d e, f g, h i, k l, m n designent pulsus a puncto A per medium elasticum successive propagatos. (d) Pulsus pro-

(b) * *In undarum vallibus depressior est,* &c. Aqua enim ab altioribus undarum partibus cadendo celeritatem acquirit, quâ infrà quiescentis aquæ superficiem descendit.

(c) * *Celerior non est quàm pro celeritate descensûs* ab eâdem undarum altitudine, undè aqua in plagas P Q, K L, N O æquè defluit.

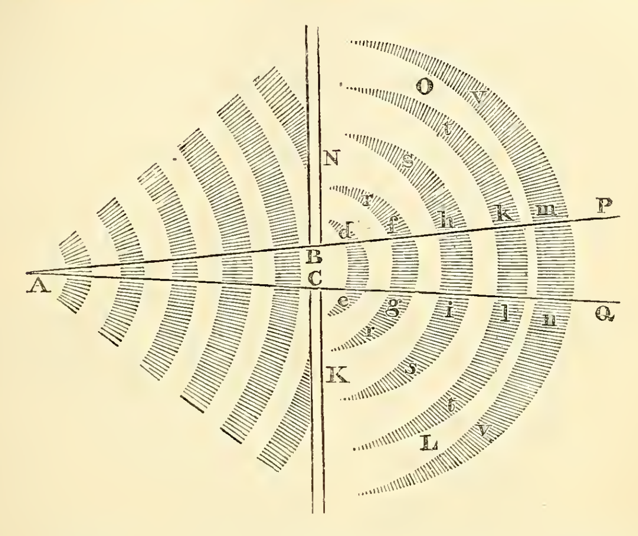
293. Ex demonstratis in hoc casu, motus undæ in obstaculum planum incurrentis definiri potest. Undarum motus e loco A quasi centro propagetur. Incurrat unda in obstaculi immoti B C punctum F, cum velocitate et directione A F. Ductâ ex A in B C perpendiculari A E, completoque rectangulo A E F K, resolvatur motus A F, in duos alios motus A E, A K, seu factâ F C æquali A K, in motus K F, F C; et quia particulæ aquæ motu F C in obstaculum non agunt, post impactum pergent eâdem quâ antè impactum velocitate ac directione F C moveri. At motu K F, in obstaculum directè incurrentes motum illum omnem, juxtà leges conflictûs corporum non elasticorum, amittent. Cùm autem aqua in F ab aliâ insequente urgeatur, et obstaculum (per Hyp.) cedere nequeat, elevabitur illa in F; et deindè vi ponderis sui, id est, vi æquali illi quâ per obstaculi longitudinem elevata fuit, descendet in plagam F K, eâdemque proinde velocitate ac directione ab obstaculo recedet quâ ad illud accesserat. Ex hoc motu F K, et ex alio F C in aquâ residuo componetur motus F G, per diagonalem parallelogrammi K F C G; unda igitur a puncto F reflectitur secundum directionem F G, et cum eâdem velocitate quâ per A F in obstaculum incurrit, et quâ, sublato obstaculo, motum per F g, seu per A F productam continuasset, estque angulus reflexionis G F C æqualis angulo incidentiæ A F E. Producatur jam linea G F ut perpendiculo A E etiam producto occurrat in H; et quia angulus E F H



= C F G = E F A, erit E H = A E et F H = A F = F G, et ideò aqua reflexa eodem modo movebitur per F G, ac si ex puncto H, quasi ex centro undarum motus propagaretur; cùmque demonstratio hæc omnibus obstaculi plani B C punctis congruat, manifestum est undas reflexas eandem velocitatem eandemque figuram citrà obstaculum obtinere, quas, sublato obstaculo, ultrà lineam B C habuissent.

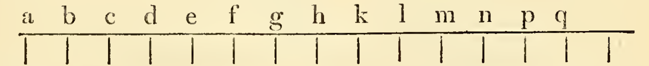
(d) * 294. *Pulsus propagari concipe per successivas condensationes et rarefactiones medii,* ità ut primum partes medii e puncto A quaquaver-

pagari concipe per successivas condensationes et rarefactiones medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima sphæricam occupet superficiem circà centrum A descriptam, et inter pulsus successivos æqualia intercedant



intervalla. Designent autem lineæ d e, f g, h i, k l, &c. densissimas pulsuum partes, per foramen B C propagatas. Et quoniam medium ibi densius est quam in spatiis hinc inde versus K L et N O, (e) dilatabit sese

sum propulsæ eant et condensentur, et ubi sunt densissimæ sphæricam superficiem circà centrum A descriptam occupare intelliguntur, tum vi elasticâ rarefiant et dilatatione suâ partim versus centrum A redeant, partim a centro illo quaquaversum recedant et partes vicinas propulsent; ita ut condensentur, atque ità successivis condensationibus et dilatationibus agitetur totum medium. Quæ ut clarius intelligantur, motum particularum aëris in uno prædictæ sphæræ radio contemplemur. Sint a, b, c, d, &c. puncta physica medii quiescentis in rectâ a q, ad æquales ab invicem distantias sita. Punctum a, vi quâlibet acceleratrice urgeatur, secundùm directionem, a q, et deinde cessante vis illius actione, per celeritatem acquisitam moveatur. Non poterit ità moveri particula a, quin successive moveantur particulæ aliæ b, c, d, e, &c. et quia medium elasticum in intervallis b c, c d, d e, &c. gradatim condensatur et vim elasticam majorem acquirit quâ celeritas particulæ a, sibi relictæ continuò minuitur ac tandem prorsus extinguitur; tum verò medium condensatum vi suâ elasticâ utrinque tam versus a, quam versus q dilatatur, et particulas a, b, c, &c. in pristina loca successivè repellit, dum intereà aliæ particulæ ut g, h, &c. versus q progrediuntur; quo motu medium rursus condensatur versus q, e deinde utrinquè dilatatur, atquè ità deincep



pulsus per successivas condensationes et rarefactiones medii propagantur. * Hæc pulsuum in medio elastico genitorum naturâ, ad Prop. XLVII. fusius expendetur, sed isto in loco hæc sufficere videntur.

(e) * *Dilatabit sese tam versus*, &c. Per vim elasticam quæ vi comprimenti quâ partes medii condensantur, æqualis est, et in omnem loci circumferentiam agit.

295. Motus pulsuum in medio elastico spectari potest ut analogus cum motu undarum in superficie aquæ stagnantis; nam condensatio partium medii elastici locum tenet elevationis aquarum, vis elastica medii locum gravitatis aquæ, et pars pulsuum densissima parti undarum altissimæ correspondet. Undè in utroque motu, medii particulæ per brevia spatia eunt et redeunt, intereadum pulsus vel unda propagatur (294) et eodem modo quo (293 undarum reflexionem ex-

tam versus spatia illa K L, N O utrinque sita, quam versus pulsuum rariora intervalla; eoque pacto rarius semper evadens e regione intervallorum ac densius e regione pulsuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulsuum progressivus motus oritur a perpetuâ relaxatione partium densiorum versus antecedentia intervalla rariora; et pulsus eâdem ferè celeritate sese in medii partes quiescentes K L, N O hinc inde relaxare debent; pulsus illi eâdem ferè celeritate sese dilatabunt undique in spatia immota K L, N O, quâ propagantur directè a centro A; ideóque spatium totum K L N O occupabunt. Q. e. d. Hoc experimur in sonis, qui vel monte interposito audiuntur, vel in cubiculum per fenestram ad-

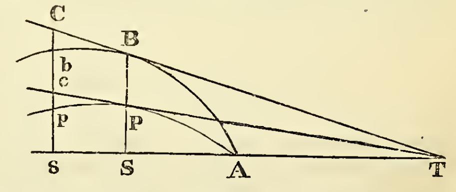
posuimus, demonstratur pulsus ab obstaculo plano B C, (vid. fig. not. 293.) ità repercuti ut sit angulus reflexionis æqualis angulo incidentiæ, idemque sit medii motus post reflexionem qui produceretur, si pulsus ex centro H sublato obstaculo, propagaretur.

Sed ut hujus Sectionis doctrina quæ soni phænomenis explicandis accommodata est, melius intelligatur, nonnulla de naturâ soni et de motu corporum resonantium præmittenda sunt.

296. Definitio. *Sonus directus est*, qui a corpore sonoro ad organum auditûs rectâ lineâ fertur. *Sonus reflexus qui* a corpore sonoro in alia corpora fertur, et inde ad aurem reflectitur.

297. Propositio. *Sonus est particularum corporis resonantis motus tremulus ac vibratorius aëri communicatus et ad aures delatus.* Hæc Propositio notissimis experimentis certa est. Nam corpora non resonant nisi percutiantur, et maximè omnium resonant corpora dura atquè elastica quorum partes ictu flectuntur, et deinde vi suâ elasticâ resiliunt, atquè ità tremulo ac vibratorio motu agitantur. Particularum corporis resonantis subsultus visu et tactu percipitur; chartæ frustula corpori resonanti insidentia subsultare oculis cernuntur et admotâ manu partium fremitus sentitur. Verùm si fides instrumenti musici tensa non fuerit, licet oscillationes tota peragat, sonum non edit; et forcipis focariæ crura digitis constricta et extemplò dimissa, oscillationes agunt sine sono; at si oscillando corpus aliquod durum percutiunt, resonant; ex quibus deducitur sonum non solo totius corporis oscillatorio motu, sed particularum ipsius tremore produci. Hic motus aëri contiguo communicatur et pulsus excitat (294). Cùm propè aquam stagnantem tympanum quatitur, subsultus observantur in aquæ superficie. Dum instrumentorum musicorum pulsantur nervi, pulvisculi qui aëri innatant et radio Solis fiunt conspicui, conformiter ad fremitum nervorum subsultare videntur. Si ex duabus chordis musicis, homogeneis, æqualibus et æque tensis una pulsetur ut sonum edat, altera prioris vicina concutitur et similiter resonat. Tandem corpora sonora sub campanâ antliæ pneumaticæ posita atque percussa, dum educitur aër, sonum languidiorem reddunt et exhausto aëre, nullum qui possit percipi. Est igitur aër vehiculum soni: attamen totius aëreæ molis motus qui in vento cernitur, per se ad producendum sonum non valet, sed vibratorius particularum motus satis validus necessarius est.

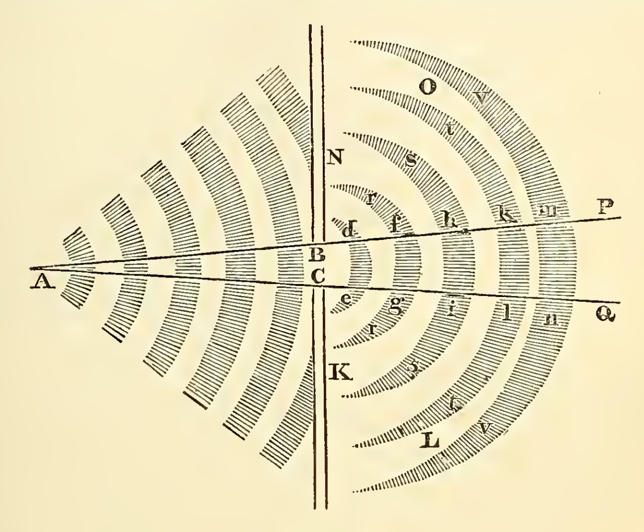
298. Lemma. *Si curvarum duarum A B, A P abscissam communem A S habentium, ordinatæ S B, S P sint semper ad invicem in datâ ratione, imminutis iis in infinitum ut curvæ tandem coincidant cum axe A S, erit ultima ratio curvaturæ eadem quæ ordinatarum.* Duc novam ordinatam s p curvis occurrentem in p et b, et ad puncta B et P duc tangentes occurrentes ordinatæ novæ in C et c. Tum ob datam ordinatarum rationem, tangentes productæ ad idem axis punctum T concurrent (256. Lib. I.) et ideò ob parallelas S B, s C, erit s C : s c = S B : S P et (per Hyp.) S B : S P = s b : s p; unde s C : s c = s b : s p = s C — s b : s c — s p =



b C : p c = S B : S P, coincidant jam ordinatæ s b, S B, et lineolæ evanescentes b C, p c. erunt subtensæ angulorum contactûs b B C, p P c, et ordinatis S B, S P in infinitum diminutis, ut curvæ tandem coincidant cum axe A S, subtensæ illæ perpendiculares evadent ad curvas, fietque B b æqualis P p. Sed in hâc hypothesi, anguli contactûs sunt ad invicem ut $\frac{b\,C}{B\,b}$, ad $\frac{p\,c}{P\,p}$ (154. Lib. I.), hoc est, ut b C ad p c. Quarè curvaturæ in B et P, quæ angulis contactûs proportionales sunt (121. Lib. I.) erunt subtensis b C, p c, ac proindè (ex dem.) ordinatis S B, S P proportionales. Q. e. d.

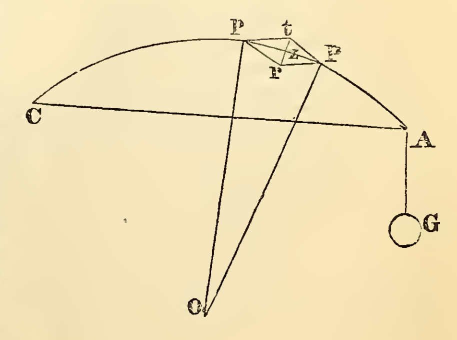
missi sese in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi a parietibus oppositis, quam a fenestrâ directè propagati, quantùm ex sensu judicare licet.

Cas. 3. Ponamus denique quod motus cujuscunque generis propagetur ab A per foramen B C: et quoniam propagatio ista non fit, nisi quâtenus partes medii centro A propiores urgent commoventque partes ulteriores;

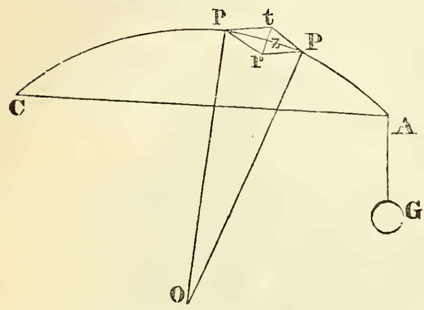


et partes quæ urgentur fluidæ sunt, ideóque recedunt quaquaversum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem versus medii partes omnes quiescentes, tam laterales K L et N O, quàm anteriores P Q, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen B C transiit, dilatari incipiet et inde tanquam a principio et centro, in partes omnes directè propagari. Q. e. d.

299. Lemma. *Vis acceleratrix quâ punctum quodlibet P nervi tensi et uniformiter crassi urgetur, dum per brevissimum spatium oscillatur, est ut nervi curvatura in eodem loco.* Nervus A C pondere G tensus oscillando pervenerit ad positionem curvæ A P C, cum axe A C ferè coincidentis, et quia linea recta C A pondere G tenditur ubique æqualiter, æqualis quoque erit tensio omnium partium curvæ A P C quamproxime. Sumatur punctum p, puncto P quamproximum, et ductis tangentibus P t, p t concurrentibus in t, compleatur parallelogrammum P t p r, ducanturque ad curvam normales P O, p O concurrentes in O, vires æquales quibus arcus evanescens P p, (qui sumi potest pro arcu circuli radio P O descripti (121. Lib. I.) in directionibus tangentium



P, t p, hinc indè trahitur, exponantur per tangentes illas æquales, et singulæ resolvantur in duas alias vires, vis quidem t P in vires t z et z P, et vis t p in vires t z, seu z r et z p vires z P, z p, æquales et oppositæ nullum motum in arcu P p producent, at viribus t z et z r, simul, seu vi totâ t r, in directione t r, sivè P O urgebitur. Erit igitur vis motrix quâ particula P p in directione t r urgetur, ad fili tensionem in P vel p per quam generatur vis illa ut t r ad t P.



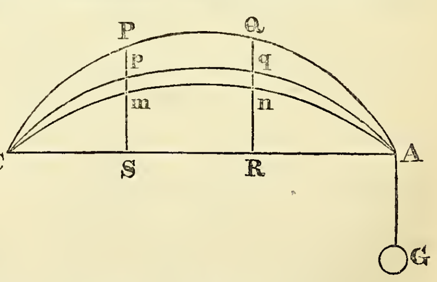
Sed (ex naturâ circuli) angulus t P r, æqualis est angulo P O p, cum arcus P p sit utriusque mensura, et propteres triangulum isosceles P O p, simile est triangulo isosceli t P r. Quarè P p est ad P O ut t r ad t P, hoc est, ut vis motrix quâ particula P p in directione t r seu P O urgetur ad fili tensionem datam G, et ideò vis illa est ut $\frac{P\,p}{P\,O}$. Cum igitur vis acceleratrix sit in ratione vis motricis directè et materiæ movendæ inversè (per Def. 8. Lib. I.) et materia movenda sit hic ut P p, ob æqualem ubique nervi crassitudinem, erit vis acceleratrix ut $\frac{1}{P\,O}$, id est, in ratione inversâ radii circuli curvam osculantis in P, ideóque in ratione curvaturæ in P (121. Lib. I.). Q. e. d.

PROPOSITIO.

300. *Si chorda musica A C uniformiter crassa et pondere G tensa, ità inflectatur dum resonat, ut ejus elongatio maxima ab axe motûs A C sit ferè insensibilis et ideò vis tensionis non mutetur per auctam chordæ longitudinem in majoribus suis ab axe distantiis et inclinatio radiorum curvaturæ ad axem negligi possit, ea erit natura curvæ A Q P C in quam chorda oscillando inflectitur, in quovis articulo motûs ejusdem chordæ ut ductis pro libitu ordinatis ad axem normalibus Q R, P S sit curvatura in Q, ad curvaturam in P, ut Q R, ad P S, ac puncta omnia Q, P simul ad axem pervenientia et simul redeuntia oscillationes suas omnes eodem tempore peragant ad instar penduli oscillantis in cycloide.*

Cas. 1. Sit curva A Q P C chordæ oscillantis distantia maxima ab axe A S punctis omnibus jam quiescentibus, eaque sit hujus curvæ natura ut curvatura in Q sit ad curvaturam in P, in ratione distantiæ Q R ad distantiam P S. Hoc posito erit acceleratio in Q ad accelerationem in P in eâdem ratione Q R ad P S (per Lem. superius 299.) ideóque initio motûs spatia simul percursa Q q, P p, erunt in eâdem ratione, et divisim spatia percurrenda q R, p S, erunt in eâdem ratione Q R ad P S; undè etiam accelerationes novæ in punctis q et p, erunt in eâdem ratione Q R ad P S (299, 298.) atque erunt ad accelerationes priores in Q et P, ut distantiæ q R et p S ad distantias Q R et P S (299, 298.). Ergò puncti cujusvis P, vel in eâdem curvâ A Q P C vel in diversis A Q P C et A q p c, spectati acceleratio semper est ut ejusdem distantia ac axe motûs A C. Quarè (per Prop. LI. Lib. I.) puncta omnia nervi ad axem simul perveniunt, simul redeunt et oscillationes singulas peragunt dato tempore ad instar corporis in cycloide oscillantis. Q. e. d.

Cas. 2. Si chorda plectro modò percussa nondum induerit formam curvæ in primo casu descriptæ, erit curvatura in P ad curvaturam in Q in majori vel minori ratione quàm distantiæ P S ad distantiam Q R. Sit in majori ratione, et erit velocitas in P, ad velocitatem in Q, in ratione majore quam P S ad Q R, (299) et spatium P p tempore minimo descriptum ad spatium Q q, eodem tempore descriptum in ratione majore quam P S ad Q R, ideóque divisim erit p S minor respectu P S, quàm q R, respectu Q R; et quia curvatura cum distantiis ab axe minuitur ac coincidente curvâ cum axe nulla evadit, erit etiam curvatura in p, minor respectu curvaturæ in P, quam curvatura in q, respectu curvaturæ in Q, et inde (299) acceleratio in p,



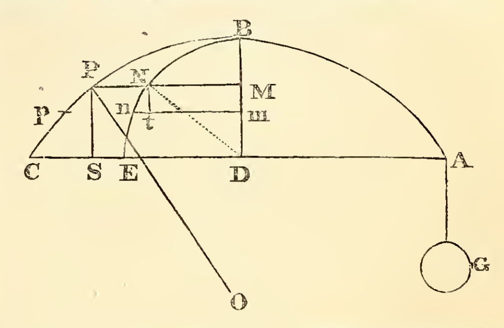
minor respectu accelerationis in P, quam acceleratio in q, respectu accelerationis in Q. Majoris igitur velocitatis acceleratione semper decrescente et minoris velocitatis acceleratione e contrà semper crescente, respectu distantiarum ab axe A C, motus inter se tandem ità temperabuntur, ut punctis P et Q pervenientibus in loca quædam m et n, tum velocitates, tum accelerationes futuræ sint distantiis m S, n R proportionales, ideóque curvâ A n m C, jam existente eâdem quam descripsimus in Casu 1., motus dehinc

omnes conspirabunt, atquè idem eveniet, si sit curvatura in P ad curvaturam in Q in minore ratione quam distantiæ P S ad distantiam Q R. Quarè quocumque modo percutiatur chorda musica, quam citissimè induet formam curvæ in Casu 1. descriptæ, atque perget moveri more ibidem descripto. Q. e. d.

Cæterùm inflexiones seu distantias admodum parvas ab axe motûs tam in chordis musicis quam in laminis elasticis ex quibus corpora sonora compacta esse fingi potest, viribus acceleratricibus proportionales et proindè oscillationes esse isochronas experimentis ostendit clariss. Gravesandius in Elem. Phys. et Mersennus in Harmoniâ Universali longiorum chordarum vibrationes isochronas oculis observavit. Si verò chorda nimiâ vi pulsetur, vis acceleratrix in experimentis crescit in majori ratione quam distantiæ ab axe motûs et oscillationes breviori tempore absolvuntur.

301. *Corol.* 1. Datis axibus A C et B D curva musica sic potest describi. Centro D et radio D B describatur circuli quadrans B N E; ducatur ad B D, perpendicularis M N circulo occurrens in N, et producatur ad P, ut sit M P ad D C, in ratione arcûs B N, ad arcum quadrantalem B N E, dico punctum P esse in curvâ musicâ A B C.

Sit enim P punctum curvæ musicæ A B C, et dicantur B D = a, A C = L, D C = $\frac{1}{2}$ L, B M = x, P M = y, arcus B P = s, P S = M D = z = a — x, radius curvaturæ in B = r: et si fluxio d s sive P p constans sumatur, erit (126. Lib. I.) radius curvaturæ in P, seu P O $= \frac{ds\,dz}{ddy} = -\frac{ds\,dx}{ddy}$. Sed (ex dem.) B D est ad P S ut curvatura in B ad curvaturam in P, id est, ut radius curvaturæ in P ad radium curvaturæ in B, seu $a : a - x = -\frac{ds\,dx}{ddy} : r$. Quarè $r\,a\,ddy = x\,dx\,ds - a\,dx\,ds$, et sumptis fluentibus, additâ constante Q d s, fit $r\,a\,dy = \frac{1}{2}xx\,ds - ax\,ds + Q\,ds$. Evanescente B M seu x, fit d y = d s, seu B P = P M (per Cor. 1. Lem. VII. Lib. I.) et æquatio in hanc abit r a d s = Q d s, ideóque constans Q = r a. Quare in quovis curvæ puncto P erit $r\,a\,dy\,[ra + \frac{1}{2}xx - ax]\,ds$. Ponatur $ax - \frac{1}{2}xx = bb$, ut sit $r\,a\,dy = [ra - bb]\,ds$, et $rraady^2 = [ra - bb]^2\,ds^2 = [ra - bb]^2\,dy^2 + [ra - bb]^2\,dx^2$; undè deducitur $[2rabb - b^4]\,dy^2 = [ra - bb]^2\,dx^2$; et quia curva A B C ferè coincidit cum axe A C (per Hyp.) ac ideò quantitas b b minima est respectu quantitatis r a in quâ radius curvaturæ r maximus est, si conferatur cum a vel x æquatio in hanc abibit $2rabb\,dy^2 = rraa\,dx^2$, ex quâ eruitur $dy = \frac{r^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Ducatur in circulo altera ordinata m n priori M N proxima, et ex puncto N demittatur ad m n perpendiculum N t; evanescente M m, erit (ex naturâ circuli) N M : N D = N t : N n, sivè $\sqrt{2ax - xx} : a = dx : Nn = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Est igitur $dy = Nn \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, et sumptis fluentibus $y = BN \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, cui æquationi nihil addendum vel subducendum est, cum arcus B N, evanescente P M seu y evanescat. Verum ubi P M coincidit cum C D, seu ubi fit y = $\frac{1}{2}$ L,



est B N = B N E, et propterea $\frac{1}{2}L = BNE \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, atquè adeò $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}L}{BNE}$. Quarè in quolibet curvæ puncto P, est $y = \frac{BN \times \frac{1}{2}L}{BNE}$, et proindè y : $\frac{1}{2}$ L = B N : B N E, hoc est, P M est ad C D ut arcus B N ad quadrantem B N E. Q. e. d.

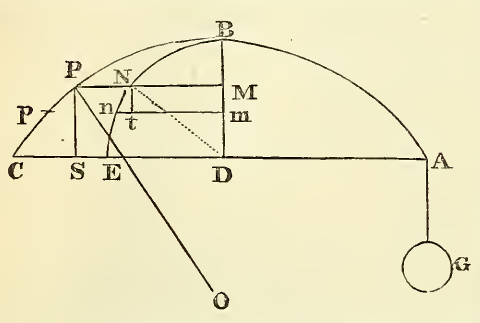
302. *Corol.* 2. Quia P S est ad B D seu ad a, ut radius r ad radium P O, erit P O × P S = a r. Sit diameter circuli ad circumferentiam ut 1 ad c et ideò a ad B N E ut 1 ad $\frac{1}{2}$ c, seu B N E = $\frac{1}{2}$ a c, et cum sit (301) $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}L}{BNE}$, erit $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{L}{ac}$ et $\frac{r}{a} = \frac{LL}{a^2c^2}$, et $r = \frac{LL}{ac^2}$; atquè $PO \times PS = ar = \frac{LL}{cc}$.

PROPOSITIO.

303. *Si diameter circuli sit ad circumferentiam ut* 1, *ad c, et chordæ musicæ uniformiter crassæ longitudo sit L, pondus P, pondus quo tenditur G et penduli in cycloide oscillantis longitudo D; tempus quo chorda illa oscillationem unam perficit, erit ad tempus unius oscillationis penduli in ratione subduplicatâ P L ad c c D G; numerus verò oscillationum chordæ tempore uniùs oscillationis penduli erit* $c\sqrt{\frac{DG}{LP}}$.

Nam vis quâ particula P p in loco P, existens urgetur dicatur A, ejusdem pondus B et (per dem. 299.) erit A ad G, ut P p ad P O, et ob uniformem chordæ crassitudinem est P ad B, ut

L ad P p, et his rationibus conjunctis, P $\times$ A ad B $\times$ G ut L, ad P O; undè fit A ad B ut G $\times$ L ad P O $\times$ P. Jam si particula P p vi motrice ceu pondere A sollicitata oscillaretur in cycloide cujus perimeter tota æquaret duplam distantiam P S, tempus unius vibrationis in cycloide æquale esset tempori vibrationis unius chordæ musicæ seu particulæ P p; quia vis particulæ P p, in cycloide oscillantis semper decrescit in ratione distantiæ ejus a puncto infimo seu medio cycloidis, quemadmodum vis illa decrescit in ratione distantiæ a puncto S eum particula P p vibrationes suas agit in rectâ P S, et vis motrix particulæ in puncto cycloidis altissimo æqualis est vi motrici A, (per Cor. Prop. LI.



Lib. I.). Si verò particula P p pondere suo absoluto B oscilletur in cycloide cujus perimeter tota sit 2 D, erit hujus penduli longitudo D (per Cor. Prop. L. Lib. I.), et tempus unius vibrationis chordæ musicæ erit ad tempus unius oscillationis penduli in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione longitudinis P S ad longitudinem D, et subduplicatâ ratione ponderis B ad vim A (Cor. 5. Prop. XXIV. Lib. II.); id est, in ratione subduplicatâ quantitatis P O $\times$ P S $\times$ P, ad quantitatem G L D, atque ideò ob P O $\times$ P S $= \frac{L L}{c c}$ (202.) in ratione subduplicatâ P L ad c c G D. Q. e. d.

Quia verò numerus vibrationum isochronarum quas chorda vel pendulum tempore quovis dato peragunt sunt inversè ut oscillationum tempora, erit numerus vibrationum quas chorda musica tempore unius oscillationis penduli prædicti peragit ad unitatem ut tempus unius oscillationis penduli ad tempus unius vibrationis chordæ, ideóque in ratione subduplicatâ c c G D, ad P L, et proinde numerus vibrationum quas chorda musica peragit eo tempore quo pendulum cujus longitudo est D semel oscillatur est $c \sqrt{\frac{G D}{P L}}$. Q. e. d.

304. *Corol.* 1. Si longitudo chordæ L digitis pedis Parisiensis exprimatur, numerus vibrationum quas chorda tempore minuti unius secundi peragit, erit $19,0341 \sqrt{\frac{G}{P L}}$ quamproximè. Nam pendulum cujus longitudo D est pedum Parisiensium 3 et linearum $8\frac{1}{2}$, seu digit. $\frac{881}{24}$, singulas oscillationes tempore minuti unius secundi absolvit (471. Lib. I.) et prætereа ut 113 ad 355; itâ diameter 1 ad circuli circumferentiam c, quæ proinde erit $\frac{355}{113}$. Quarè si loco D et c scribantur ipsorum valores in formulâ, erit $c \sqrt{\frac{G D}{P L}} = \frac{355}{113} \sqrt{\frac{881 G}{24 L P}} = 19,0341 \sqrt{\frac{G}{P L}}$ quamproximè.

305. *Corol.* 2. Si conferantur variarum chordarum oscillationes, quia quantitates c et D in formulâ $c \sqrt{\frac{G D}{P L}}$ datæ sunt, numeri vibrationum dato tempore peractarum erunt ut $\sqrt{\frac{G}{P L}}$, et ideò tempora quibus singulæ vibrationes fiunt ut $\sqrt{\frac{P L}{G}}$ (473. Lib. I.).

306. *Corol.* 3. Iisdem positis, si prætereà chordæ sint homogeneæ, æquè crassæ et æquè tensæ, cum in eo casu pondus G datum sit et pondus P sit ut chordæ longitudo L, tempora quibus singulæ vibrationes fiunt, erunt ut $\sqrt{L L}$, seu ut chordarum longitudines; quod experimentis confirmavit clariss. Gravesande in Elem. Physices.

Scholion. Quæ de chordis vibrantibus huc usque diximus, ea ferè omnia, nonnullis tamen immutatis, mutuati sumus ex Tractatu de methodo incrementorum clariss. Taylor. Formulas nostris similes dedêre celeberrimi viri, Sauveur in Monumentis Acad. Paris. an. 1713. et Daniel Bernoulli tum in Actis Petropol. tum in Dissertatione de Propagatione Lucis, ab Academiâ Regiâ Paris. præmio condecoratâ an. 1736.

PROPOSITIO.

307. *Si numeri vibrationum quas chordæ musicæ dato tempore peragunt, sint inter se ut numeri* 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, chordæ illæ tonos edent qui his notissimis vocibus significantur, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, *ut*, initio sumpto a tono graviori. Hæc Propositio experimentis demonstrata est; nam nervi musici homogenei, æquè crassi eodemque pondere tensi, quorum longitudines sunt inversè ut numeri illi, tonos quos diximus edunt, et horum nervorum longitudines sunt inversè ut numeri vibrationum quas dato tempore absolvunt et directè ut singularum vibrationum tempora ideóque ut 180, 160, 144, 135, 120, 108, 96, 90: (306).

308. *Corol.* Sonorum differentia secundùm *grave* et *acutum*, a minori vel majori numero vibrationum quas chordæ musicæ dato tempore peragunt, pendet, et eò graviores sunt soni quò tardiores sunt singulæ chordarum vibrationes et contrà.

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in medio elastico propagabit motum pulsuum undique in directum; in medio verò non elastico motum circularem excitabit.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo et redeundo, itu suo urgebunt et propellent partes medii sibi proximas, et urgendo compriment easdem et condensabunt; dein reditu suo sinent partes compressas recedere et sese expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt et redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli: et quâ ratione partes corporis hujus agitabant hasce medii partes, hæ similibus tremoribus agitatæ agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatæ agitabunt ulteriores, et sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum medii partes primæ eundo condensantur et redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensabuntur, et quoties redeunt sese expandent. Et propterea non omnes ibunt et simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando, non rarefierent et condensarentur per vices) sed accedendo ab invicem ubi condensantur, et recedendo ubi rarefiunt, (f) aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes et eundo condensatæ, ob motum suum progressivum, quo feriunt obstacula, sunt pulsus; et propterea pulsus successivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem distantiis, (g) ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus suis singulis singulos pulsus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant et redeant secundum plagam aliquam certam et determinatam, tamen pulsus inde per medium

PROPOSITIO.

309. *Corpora sonora homogenea et similia quorum latera homologa rationem habent inversam numerorum 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, tonos edunt, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, ut.* Hanc Propositionem probant experimenta quæ in campanis, cylindris et prismatibus homogeneis et similibus habuerunt Mersennus in Harmoniâ Universali et D. Carré in Monum. Acad. Reg. an. 1709.

PROPOSITIO.

310. *Dum corpus sonorum percutitur, tremulus particularum motus ex ictu et vi elasticâ creatus, remotis obstaculis, per superficiem corporis propagatur:* quod quidem leviora chartæ frustula superficiei corporis resonantis imposita, tremore suo indicant.

PROPOSITIO.

311. *Campanæ figura ictu clavæ itâ mutari oculis cernitur ut cum rotunda esset, fiat ovata et quandiù auditur sonus, alternis mutatur oscillationibus.*

312. *Corol.* Ex tribus ultimis Propositionibus concludere licet, ut in chordis ita et in aliis corporibus resonantibus, tonos pendere a numero vibrationum seu undulationum quæ dato tempore peraguntur.

(f) *Aliquæ earum ibunt* (294).

(g) * *Ob æqualia temporis intervalla* (300).

propagati sese dilatabunt ad latera, per Propositionem præcedentem; et a corpore illo tremulo tanquam centro communi, secundum superficies propemodum sphæricas et concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in undis, quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergent hinc inde secundum plagam motus digiti, sed, in modum circulorum concentricorum, digitum statim cingent et undique propagabuntur. Nam gravitas undarum supplet locum vis elasticæ.

Cas. 2. (h) Quod si medium non sit elasticum: quoniam ejus partes a corporis tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagabitur motus in instanti ad partes ubi medium facillimè cedit, hoc est, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; sed in circulum eundo, pergit ad spatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; et quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repelletur et ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat semper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. Q. e. d.

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad pressionem, per medium ambiens, secundum lineas rectas propagandum conducere. Debebit ejusmodi pressio non ab agitatione solâ partium flammæ, sed a totius dilatatione derivari.

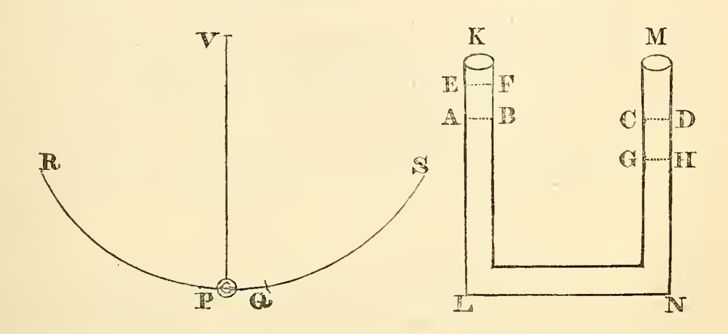
PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

Si aqua in canalis cruribus erectis K L, M N *vicibus alternis ascendat et descendat; construatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis et centrum oscillationis æquetur semissi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua ascendet et descendet iisdem temporibus quibus pendulum oscillatur.*

Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis et crurum, eandem summæ horum axium æquando; et resistentiam aquæ, quæ oritur ab attritu

(h) * *Quod si medium* continuum sit et *non elasticum*, &c.

canalis, hic non considero. Designent igitur A B, C D mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; et ubi aqua in crure K L ascendit ad altitudinem E F, descenderit aqua in crure M N ad altitudinem G H. Sit autem P corpus pendulum, V P filum, V punctum suspensionis, R P Q S cyclois quam pendulum describat, P ejus punctum infimum, P Q arcus altitudini A E æqualis. Vis, quâ motus aquæ alternis vicibus acceleratur et retardatur, est excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero, ideóque, ubi aqua in crure K L ascendit ad E F, et in crure altero



descendit ad G H, (i) vis illa est pondus duplicatum aquæ E A B F, et propterea est ad pondus aquæ totius ut A E seu P Q (k) ad V P seu P R. Vis etiam, quâ pondus P in loco quovis Q acceleratur et retardatur in cycloide (per Corol. Prop. LI.) est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia P Q a loco infimo P, ad cycloidis longitudinem P R. Quare aquæ et penduli, æqualia spatia A E, P Q describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; (l) ideóque, si aqua et pendulum in principio quiescunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco simul eant et redeant. Q. e. d.

Corol. 1. Igitur aquæ ascendentis et descendentis, sive motus intensior sit sive remissior, vices omnes sunt isochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali sit pedum Parisiensum $6\frac{1}{9}$.

(i) * *Vis illa est pondus duplicatum,* &c. Est enim vis illa pondus tam aquæ E A B F, quam aquæ æqualis C G H D.

(k) * *Ad V P seu P R.* Semi-cyclois P R, æqualis est longitudini penduli, (per Cor. Prop. L. Lib. I.).

(l) 313. * *Ideóque, si aqua et pendulum,* &c. Id evidentissimum fit si pondus P quod, manente oscillationis unius tempore potest ad arbitrium assumi, capiatur æquale ponderi aquæ totius in canali; tùm enim vires motrices, massæ movendæ, et spatia describenda, ideóque et tempora quibus spatia illa describuntur, in canali et in cycloide æquantur respectivè. Sed observandum est superficiem A B, esse locum æquilibrii, ad quem cum aqua pervenit, nullâ amplius vi acceleratrice urgetur, sed velocitate tantum acquisitâ ulteriùs descendit vel ascendit; sicuti corpus pendulum P dum pervenit in locum cycloidis infimum P solâ velocitate acquisitâ movetur. Undè quo tempore aqua descensum unum absolvit in crure alterutro canalis, eodem tempore pendulum oscillationem unam ex descensu et ascensu compositam perficit, duas verò oscillationes absolvit intereadum aqua e loco E descendit et ad eundem redit.

aqua tempore minuti unius secundi descendet, et tempore minuti alterius secundi ascendet; et sic deinceps vicibus alternis in infinitum. (m) Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis tempore minuti unius secundi oscillatur.

Corol. 3. Auctâ autem vel diminutâ longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione subduplicatâ.

ROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas est in subduplicatâ ratione latitudinum.

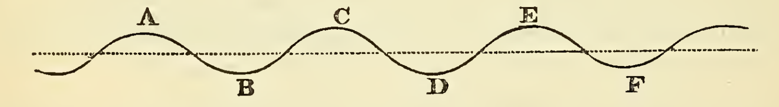
Consequitur ex constructione Propositionis sequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem undarum.

Constituatur pendulum cujus longitudo, inter punctum suspensionis et centrum oscillationis, æquetur latitudini undarum: et quo tempore pendulum illud oscillationes singulas peragit, eodem undæ progrediendo latitudinem suam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco mensuram transversam, quæ vel vallibus imis, vel summis culminibus interjacet. Designet A B C D E F superficiem aquæ stagnantis, undis successivis ascendentem ac descendentem;



sintque A, C, E, &c. undarum culmina, et B, D, F, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ successivum ascensum et descensum, sic ut ejus partes A, C, E, &c. quæ nunc altissimæ sunt, mox fiant infimæ; et vis motrix, quâ partes altissimæ descendunt et infimæ ascendunt, est pondus aquæ elevatæ; alternus ille ascensus et descensus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, easdemque temporis leges observabit: et propterea (per Prop. XLIV.) si distantiæ inter undarum loca altissima A, C, E et infima B, D, F, (n) æquentur duplæ penduli longi-

(m) * *Nam pendulum ped.* $3\frac{1}{18}$, seu ped. 3. et lin. 8. quamproximè (471. Lib. I.). Clariss. Hermanus Tom. III. Comm. Acad. Petrop. motum aquæ in tubis crura quomodolibet ad basim inclinata habentibus definivit. Rem generaliùs pertractavit celeb. D. Bernoullius in Hydrodynamicâ. Hos authores, si lubet, adeat lector.

(n) * *Æquentur duplæ penduli longitudini.*

tudini; partes altissimæ A, C, E, tempore oscillationis unius evadent infimæ, et tempore oscillationis alterius denuo ascendent. Igitur inter transitum undarum singularum tempus erit oscillationum duarum; hoc est, unda describet latitudinem suam, quo tempore pendulum illud bis oscillatur; sed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla est, ideóque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. Q. e. i.

Corol. 1. Igitur undæ, quæ pedes Parisienses $3\frac{1}{18}$ latæ sunt, (°) tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficient; ideóque (p) tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, et horæ spatio pedes 11000 quamproximè.

(q) *Corol.* 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in subduplicatâ ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex hypothesi quod partes aquæ rectà ascendunt vel rectà descendunt; sed ascensus et descensus ille (r) verius fit per circulum, ideóque tempus hâc Propositione non nisi quamproximè definitum esse affirmo.

Quoniam, ex dictis, unda percurrit latitudinem suam A C vel B D intereadum altitudo A transfertur in C, vel cavitas B in D, quod fieri non potest nisi aqua ab altitudine undarum descendat, et deindè ad eandem altitudinem ascendat, et quia cavitas quæ est infrà aquæ quiescentis superficiem quam in figurâ exhibet linea punctis distincta, est circiter æqualis elevationi aquæ suprà eandem superficiem quæ est æquilibrii locus, patet (313) totius aquæ movendæ longitudinem æqualem esse longitudini cavitatis vel elevationis aquæ infrà vel suprà locum illum æquilibrii, ac proinde cum longitudo cavitatis vel elevationis illius æqualis sit distantiæ A B, vel B C, pendulum cujus longitudo est $\frac{1}{2}$ A B vel $\frac{1}{2}$ B C, semel oscillabitur eo tempore quo aqua ascendit, et iterum oscillabitur, intereadum aqua descendit (313.) atque ità oscillabitur bis quo tempore unda describit latitudinem suam. Quoniam igitur numeri oscillationum quas pendula eodem tempore peragunt, sunt in ratione subduplicatâ longitudinis pendulorum inversè (474. Lib. I.) pendulum cujus longitudo est A B C D, quadrupla longitudinis $\frac{1}{2}$ A B semel oscillabitur quo tempore unda latitudinem suam percurrit. In undis verò latioribus quæ altiùs non elevantur, linea curva A B C, vix differt a rectâ A C, quæ est undæ latitudo, et propterea in eo casu unda latitudinem suam describit, intereadum pendulum cujus longitudo est recta A C, semel oscillatur.

(°) * *Tempore minuti unius secundi* (471. Lib. I.).

(p) * *Tempore minuti unius primi.* Quia undarum datæ latitudinis velocitas æquabilis est (ex dem.). Si undæ latitudo data ped. $3\frac{1}{18}$, ducatur in tempus 60″, factum $183\frac{1}{3}$ ped. erit spatium quod unda tempore minuti unius primi seu minutorum secundorum 60, describit et ducto rursus hoc numero $183\frac{1}{3}$ in 60′, producetur spatium 11000 ped. quod unda tempore horæ unius conficit.

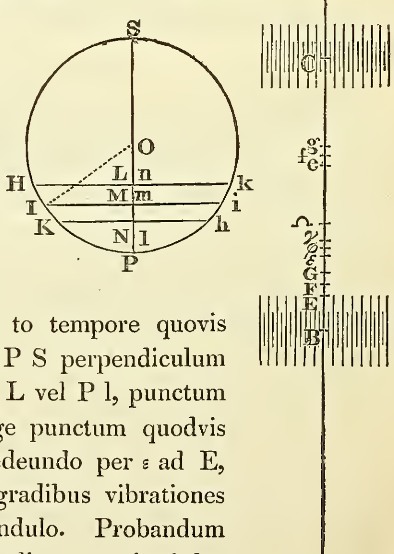
(q) * *Corol.* 2. Undarum velocitates sunt ut earumdem latitudines directè et tempora quibus latitudines illas percurrunt inversè (5. Lib. I.). Sed tempora illa sunt in subduplicatâ ratione latitudinum undarum seu longitudinum pendulorum quæ eo tempore quo undæ latitudines suas describunt, semel oscillantur (472. Lib. I.). Undarum igitur velocitates sunt in ratione compositâ ex ratione latitudinum directè et ratione subduplicatâ earumdem latitudinum inversè, ideóque sunt in ratione subduplicatâ latitudinum directè.

(r) * *Verius fit per circulum,* seu per arcum curvilineum qui magis accedit ad figuram arcûs circularis quàm ad figuram canalis rectilinei in quo aqua, rectà ascendit et descendit.

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XXXVII.

Pulsibus per fluidum propagatis, singulæ fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes et redeuntes, accelerantur semper et retardantur pro lege oscillantis penduli.

Designent A B, B C, C D, pulsuum successivorum æquales distantias; A B C plagam motus pulsuum ab A versus B propagati; E, F, G puncta tria physica, (s) medii quiescentis in rectâ A C ad æquales ab invicem distantias sita; E e, F f, G g spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco (t) singulis vibrationibus eunt et redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; et E F, F G lineolas physicas seu medii partes lineares punctis illis interjectas, et successivè translatas in loca $\varepsilon\ \varphi$, $\varphi\ \gamma$ et e f, f g. Rectæ E e æqualis ducatur recta P S. Bisecetur eadem in O, centroque O et intervallo O P describatur circulus S I P i. Per hujus circumferentiam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipsius partibus proportionalibus; sic ut com to tempore quovis P H vel P H S h, si demittatur ad P S perpendiculum H L vel h l, et capiatur E ε æqualis P L vel P l, punctum physicum E reperiatur in ε. Hâc lege punctum quodvis E, eundo ab E per ε ad e, et inde redeundo per ε ad E, iisdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes singulas peraget (u) cum oscillante pendulo. Probandum est quod singula medii puncta physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu a causâ quâcunque cieri, et videamus quid inde sequatur.



(s) * *Medii quiescentis*, id est, nondum agitati vibrationibus corporis tremuli, aut indè productis aëris pulsibus.

(t) 314. * *Singulis vibrationibus eunt et redeunt.* Si corporis tremuli aut chordæ musicæ oscillantis particula incipiat moveri in E, et eundo secum transferat medii punctum E, in locum e, et deindè particula illa chordæ musicæ vi propriâ et punctum e, medii inter e, et C compressi ac condensati dilatatione redeant in locum E, unicus in medio elastico pulsus secundum directionem B C, producetur, et singulis aliis vibrationibus corporis tremuli vel chordæ musicæ ex itu et reditu compositis, singuli excitabuntur pulsus (Prop. XLIII.) atquè adeò pulsus latitudinem suam describit intereadum punctum E, vibrationem unam ex itu et reditu per brevissimum spatium E e, compositam, absolvit.

(u) * *Cum oscillante pendulo* (Prop. LII. Lib. I.).

In circumferentiâ P H S h capiantur æquales arcus H I, I K vel h i, i k, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ E F, F G ad pulsuum intervallum totum B C. Et demissis perpendiculis I M, K N vel i m, k n; quoniam puncta E, F, G motibus similibus successivè agitantur, et vibrationes suas integras ex itu et reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur a B ad C; si P H vel P H S h sit tempus ab initio motûs puncti E, (x) erit P I vel P H S i tempus ab initio motûs puncti F, et P K vel P H S k tempus ab initio motûs puncti G; et propterea E ε, F φ, G γ erunt ipsis P L, P M, P N in itu punctorum vel ipsis P l, P m, P n in punctorum reditu, (y) æquales respectivè. Unde $\varepsilon\,\gamma$ seu E G + G γ — E ε in itu punctorum æqualis erit E G — L N, in reditu autem æqualis E G + l n. (z) Sed $\varepsilon\,\gamma$ latitudo est seu expansio partis medii E G in loco $\varepsilon\,\gamma$; et propterea expansio partis illius in itu est ad ejus expansionem mediocrem, ut E G — L N (a) ad E G; in reditu autem ut E G + l n seu E G + L N ad E G Quare (b) cùm sit L N ad K H ut I M ad radium O P, (c) et K H ad E G ut circumferentia P H S h P ad B C, id est, si ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulsuum B C, (d) ut O P ad V; et ex æquo L N ad E G ut I M ad V: erit expansio partis E G punctive physici F in loco $\varepsilon\,\gamma$ ad expansionem mediocrem, quam pars illa habet in loco suo primo E G, (e) ut V — I M ad V in itu, ut-

(x) * *Erit P I vel P H S i.* Quoniam puncta E, F, G, et alia deinceps, motibus similibus per medii compressionem et dilatationem communicatis successivè agitantur, pulsus per æqualia spatia E F, F G, &c. æqualibus temporibus propagatur, ideóque tempus quo transfertur ab E ad F, vel ab F ad G, est ad tempus totum quo transfertur a B ad C, et quo singula puncta E, F, G vibrationes suas integras ex itu et reditu compositas perficiunt, ut spatium E F vel F G ad spatium B C, in quâ ratione etiam est arcus H I, vel I K, ad totam circumferentiam P H S P, (per Hyp.) quæ tempus totum quo pulsus a B ad C transfertur, exponit, et differentia inter tempus sumptum ab initio motûs puncti E et tempus sumptum ab initio motûs puncti F, est tempus illud quod pulsus transfertur ab E ad F. Quare *si P H vel P H S h exponat tempus ab initio motûs puncti E, P I vel P H S I, exponet tempus ab initio motûs puncti F,* cum H I vel h i exponat differentiam inter tempus ab initio motûs puncti E, et tempus ab initio similis motûs puncti F, &c.

(y) * *Æquales respectivè* (per Prop. LII. vel XXXVIII. Lib. I.).

(z) * *Sed $\varepsilon\,\gamma$ est latitudo seu expansio partis medii E G, in loco $\varepsilon\,\gamma$,* quia punctum E translatum est in locum ε, et punctum G in locum γ.

(a) * *Ad E G.* Nam cùm E, F, G sint puncta tria medii quiescentis seu motu impresso nondum condensati vel rarefacti, expansio medii in loco E G, mediocris seu quasi media est inter minimam ipsius expansionem in locis pulsuum densissimis, et maximam in locis rarissimis.

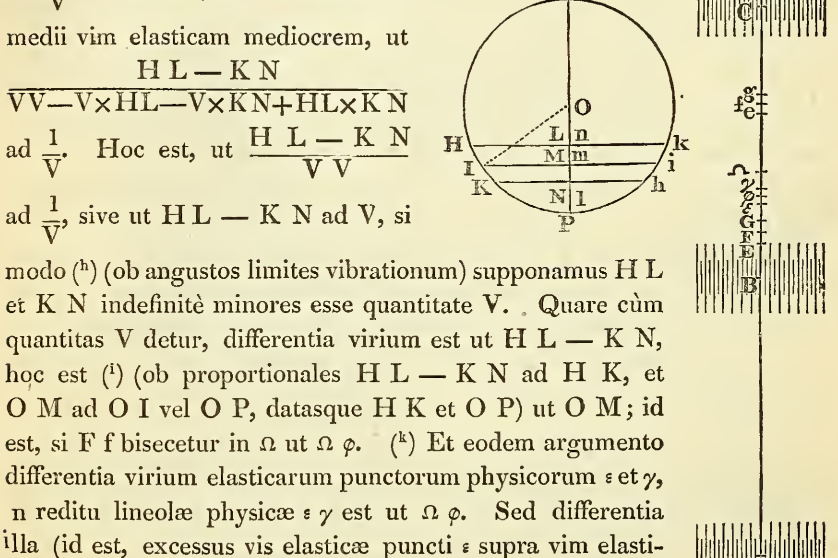
(b) 315. * *Cum sit L N ad K H.* Anguli ad centrum I O P mensura est arcus I P æqualis dimidio arcui I P i, seu K P k, et anguli ad circumferentiam K H k, mensura est etiam dimidius arcus K P k, et ideò anguli I O P et K H L, æquales sunt. Hinc si ex puncto K, demissum intelligatur ad H L, perpendiculum æquale L N, hoc perpendiculum cum ordinatarum H L et K N differentiâ et cum arcu minimo K H triangulum constituet simile triangulo IOM. Est igitur L N ad K H, ut I M ad I O seu O P.

(c) * *Et K H ad E G* (per Hyp. supra.).

(d) * *Ut O P ad V.* Sunt enim circulorum peripheriæ P H S P et B C radiis suis O P et V proportionales.

(e) * *Ut V — I M ad V.* Quia enim (ex dem.) $L N = \frac{E G \times I M}{V}$, erit E G — L N $= \frac{V \times E G - I M \times E G}{V}$, et hinc E G — L N ad E G ut V — I M ad V. Et similite ob L N = l n, et I M = i m, erit E G + l ad E G ut V + i m ad V.

que V + i m ad V in reditu. Unde vis elastica puncti F in loco $\varepsilon\,\gamma$ (f) est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco E G, ut $\frac{1}{V - I\,M}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V + i\,m}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elasticæ punctorum physicorum E et G in itu, sunt ut $\frac{1}{V - H\,L}$ et $\frac{1}{V - K\,N}$ ad $\frac{1}{V}$; (g) et virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem, ut $\frac{H\,L - K\,N}{VV - V \times HL - V \times KN + HL \times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc est, ut $\frac{H\,L - K\,N}{V\,V}$ ad $\frac{1}{V}$, sive ut H L — K N ad V, si



modo (h) (ob angustos limites vibrationum) supponamus H L et K N indefinitè minores esse quantitate V. Quare cùm quantitas V detur, differentia virium est ut H L — K N, hoc est (i) (ob proportionales H L — K N ad H K, et O M ad O I vel O P, datasque H K et O P) ut O M; id est, si F f bisecetur in Ω ut $\Omega\,\varphi$. (k) Et eodem argumento differentia virium elasticarum punctorum physicorum ε et γ, in reditu lineolæ physicæ $\varepsilon\,\gamma$ est ut $\Omega\,\varphi$. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ε supra vim elasti-

(f) * *Est ad vim ejus elasticam*, &c. Hic supponit Newtonus vim elasticam medii densitati proportionalem, quam quidem hypothesim in aëre nostro, cæteris paribus, quamproximè veram esse experimentis constat. At, datâ medii massâ, densitas est ut expansio seu volumen inversè; quarè cùm hic data sit massa medii in volumine E G vel $\varepsilon\,\gamma$, contenti, vis elastica est ut expansio reciprocè et *ideò vis elastica puncti F, in loco* $\varepsilon\,\gamma$, &c.

(g) * *Et virium differentia*, id est, excessus vis elasticæ puncti E, suprà vim elasticam puncti G erit ad medii vim elasticam mediocrem, &c.

(h) * *Ob angustos limites vibrationum*. Quoniam eo tempore quo punctum G vibrationem unam ex itu et reditu per brevissimum spatium E e compositam absolvit et quo pulsus transfertur a B ad C, innumeræ ferè medii particulæ per medii compressionem et dilatationem successivè agitantur, spatium illud E e, seu æquale P S, perbreve erit, si conferatur cum pulsuum intervallo B C, aut etiam cum radio V circuli qui circumferentiam habet æqualem B C. Rectè igitur supponitur, quantitates H L et K N, longè minores esse quantitate V.

(i) * *Ob proportionales*. Liquet (per not. 215.) esse H L — K N ad H K, ut est O M ad O I vel O P, undè $H\,L - K\,N = \frac{H\,K \times O\,M}{O\,P}$, et ideò ob datum radium O P, datumque arcum H K, qui est ad datam F G ut peripheria data P H S P ad datam B C, erit H L — K N ut variabilis O M. Sed F f = P S, F φ = P M, et propterea si F f bisecetur in Ω, ut sit O P = F Ω, erit O M = $\varphi\,\Omega$. Est igitur H L — K N ut $\varphi\,\Omega$.

(k) * *Et eodem argumento*. Nam in reditu,

cam puncti γ) ([l]) est vis quâ interjecta medii lineola physica $\varepsilon\,\gamma$ acceleratur in itu et retardatur in reditu; et propterea vis acceleratrix physica $\varepsilon\,\gamma$, est ut ipsius distantia a medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.) rectè exponitur per arcum P I; et medii pars linearis $\varepsilon\,\gamma$ ([m]) lege præscriptâ movetur, id est, lege oscillantis penduli: estque par ratio partium omnium linearium ex quibus medium totum componitur. Q. e. d. (†)

vis elastica puncti F in loco $\varepsilon\,\gamma$ est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco E G, ut $\frac{1}{V + i\,m}$, ad $\frac{1}{V}$, et vires elasticæ punctorum physicorum G et E, in loco $\varepsilon\,\gamma$, sunt ut $\frac{1}{V + h\,l}$, et $\frac{1}{V + k\,n}$, ad $\frac{1}{V}$, et virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem ut $\frac{k\,n - h\,l}{V\,V + V \times h\,l + V \times k\,n + h\,l \times k\,n}$, ad $\frac{1}{V}$, hoc est, ut $\frac{k\,n - h\,l}{V\,V}$ ad $\frac{1}{V}$ sivè ut k n — h l ad V, &c.

([l]) * *Est vis quâ interjecta lineola.* Medium in ε et in γ vi suâ elasticâ sese dilatare in plagas oppositas C et B nititur, his viribus interjecta lineola physica $\varepsilon\,\gamma$, seu punctum physicum φ, urgetur in utramque plagam, et excessu vis elasticæ in ε, suprà vim elasticam in γ, acceleratur in itu et retardatur in reditu.

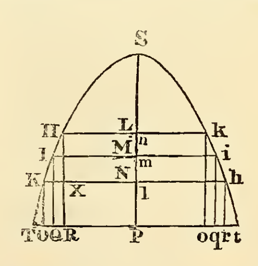
([m]) * *Lege præscriptâ movetur.* Demonstratum est quod si punctum physicum E ad legem oscillantis penduli moveatur, uti si vibrationibus partium corporis tremuli aut nervi musici (quemadmodum in not. 314 exposuimus) agitetur, tùm solâ vi elasticâ medii punctum physicum F, et alia deindè puncta secundum eandem legem oscillantis penduli successivè movebuntur.

(†) *Jam pridem vir acutissimus Eulerus, hanc Newtoni theoriam suspectam habuit, aliamque formulam dedit quâ soni celeritatem determinaret a Newtonianâ diversam, sed suæ formulæ demonstrationem, aut vitium Newtonianæ, palam non fecit, quod sciamus; observationes suas hanc in rem nobis communicavit vir doctissimus Gabriel Cramer, vir in his rebus expertissimus, sagacissimique ingenii, quas suâ cum veniâ, publici juris facimus, quasque doctorum attentione dignissimas credimus; certè planissimè ostendit aliquod subreptionis vitium in hac demonstrandi formâ, quam Newtonus adhibet latere; scilicet demonstrationem ipsam non ex rei naturâ, sed ex hypothesi assumptâ fluere. Ipsi verò motus aëris secundùm methodum Newtonianam assequi conabimur, nam ipsam ejus Propositionem veram esse, etsi ejus demonstratio vitio quodam laboret, persuasum habemus, sed eam ex naturâ motûs puncti elastici sonori esse deducendam, potius quàm ex motibus aëris, qui variis modis pro ratione agitationis ipsi impressæ peragi possent. Hæc autem sunt viri illustrissimi verba.*

Propositio XLVII. Lib. II. Princip. Philos. Newtoni, minus firmâ demonstratione nititur, ut ex eo patet, quod si diversæ prorsus conclusioni demonstrandæ applicetur, eodem successu gaudeat. Id ego cum pluribus diversis tentassem modis, lubet unum, exempli gratiâ, apponere. Sit, verbi causâ, hoc Theorema a Newtoniano omnino diversum, câdem tamen demonstratione munitum.

Pulsibus per fluidum elasticum propagatis, singulæ fluidi particulæ, motu uniformiter retardato et accelerato euntes et redeuntes, oscillantur pro lege gravis ascendentis et descendentis.

Designent A B, B C, C D, &c. pulsuum successivorum æquales distantias, A B C plagam motus pulsuum ab A versus B propagati, E, F, G, puncta tria physica medii quiescentis in recta B C ad æquales distantias sita, E e, F f, G g, spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu uniformiter retardato moventur; ε, φ, γ, loca





quævis intermedia illorum punctorum, et E F, F G lineolas physicas seu partes medii lineares punctis illis interjectas et successivè translatas in loca $\varepsilon\,\varphi$, $\varphi\,\gamma$, et e f, f g. Rectæ E e æqualis ducatur recta P S, quâ tanquam axe describatur parabola S H I K. Per basim T t exprimatur totum tem-

pus unius vibrationis, et per ejus partes, partes temporis proportionales exprimantur, sic ut completo tempore quovis T R, vel T r, si erigatur normalis R H aut r h, et capiatur E ε æqualis R H vel P L, aut r h vel P l, punctum physicum E reperiatur in ε. Hâc lege punctum quodvis E eundo ab E per ε ad e, et inde redeundo per ε ad E, iisdem retardationis et accelerationis gradibus vibrationem unam peraget cum ascendente et descendente corpore gravi, probandum est quod singula medii puncta physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu a causa quâcunque cieri, et videamus quid inde sequatur.

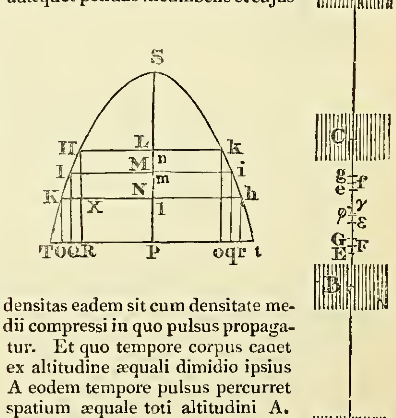
In recta T t, sumantur æquales partes O Q, Q R, vel o q, q r, eam habentes rationem ad rectam totam T t, quam habent æquales rectæ E F, F G ad pulsuum intervallum B C; et erectis O K, Q I, R H, vel o k, q i, r h: demissis etiam si placet K N, I M, H L; k n, i m, h l; quoniam puncta E, F, G, motibus similibus successive agitantur, et vibrationes suas integras itu et reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur ex B ad C, si T R vel T r sit tempus ab initio motûs puncti E, erit T Q vel T q tempus ab initio motûs puncti F, et T O vel T o, tempus ab initio motûs puncti G; et propterea E ε, F φ, G γ, erunt ipsis R H, vel P L, Q I vel P M, et O K vel P N in itu punctorum, vel ipsis r h aut P l, q i aut P m, et o k vel P n in reditu æquales respective: unde ε γ seu E G + G γ — E ε in itu punctorum æqualis erit E G — L N: in reditu autem æqualis E G + l n. Sed ε γ latitudo est seu expansio partis medii E G in loco ε γ, et propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem ut E G — L N ad E G; in reditu autem ut E G + l n seu E G + L N ad E G. Quare cum sit L N seu H X ad K X seu O R, ut L M ad semi-parametrum parabolæ, et O R ad E G ut T t ad B C, id est (si ponatur V ad semi-parametrum ut B C ad T t, vel si sit T t æqualis semi-parametro et V æqualis B C) ut semi-parameter ad V, et ex æquo L N ad E G ut I M ad V; erit expansio partis E G punctive physici F in loco ε γ ad expansionem mediocrem quam pars illa habet in loco suo primo E G, ut V — I M ad V in itu, utque V + i m ad V in reditu. Unde vis elastica puncti F in loco ε γ est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco E G, ut $\frac{1}{V - I M}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V + i m}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento itus punctorum physicorum E et G in itu sunt ut $\frac{1}{V - H L}$ et $\frac{1}{V - K N}$ ad $\frac{1}{V}$, et virium differentia ad vim elasticam mediocrem, ut

$$\frac{K N - H L}{V V - V \times H L - V \times K N + H L \times K N}$$

ad $\frac{1}{V}$, hoc est, ut $\frac{K N - H L}{V V}$ ad $\frac{1}{V}$ sive ut K N — H L ad V, si modo (ob angustos limites vibrationum) supponamus H L et K N indefinite minores esse quantitate V. Quare cùm quantitas V detur, differentia virium est ut K N — H L seu K X, seu O R, hoc est, ob proportionales O R, E F, et T t, B C, (datasque E F, T t et B C) constans. Et eodem argumento, differentia virium punctorum physicorum ε et γ in reditu lineolæ physicæ ε γ est etiam constans. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ε supra vim elasticam puncti γ) est vis qua interjecta medii lineola physica acceleratur aut retardatur, et propterea vis acceleratrix lineolæ physicæ ε γ est constans. Propterea tempus rectè exponetur per ordinatam I M et medii pars linearis ε γ, lege præscripta movetur, id est, lege ascendentis descendentisque gravis, estque par ratio omnium linearum ex quibus medium totum componitur. Q. e. d.

Sed (quod sanè mirum) Prop. XLIX. in quâ ex sua hypothesi Newtonus soni velocitatem computat, eandem dabit conclusionem in nostra, et, ut arbitror, in aliâ quâcunque. Sic

Fingamus medium ab incumbente pondere, pro more aëris nostri, comprimi, sitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens et cujus



densitas eadem sit cum densitate medii compressi in quo pulsus propagatur. Et quo tempore corpus cadet ex altitudine æquali dimidio ipsius A eodem tempore pulsus percurret spatium æquale toti altitudini A. (Id quod congruit cum Corol. 1. dictæ Prop. XLIX.).

Nam stantibus quæ in Prop. XLVII. constructa sunt, si linea quævis physica singulis vibrationibus describendo spatium P S urgeatur in itu et reditu a vi elastica quæ ipsius ponderi, æquetur, peraget semi-vibrationem quo tempore corpus cadet ex altitudine P S, adeóque vibrationem, quo tempore corpus grave caderet ex altitudine 4 P S. Quare, cùm tempora descensus sint in subduplicata ratione longitudinum percursarum, fiet tempus vibrationis unius ad tempus descensus ex altitudine $\frac{1}{2}$ A, in subduplicatâ ratione longitudinis 4 P S ad $\frac{1}{2}$ A, seu 8 P S ad A. Sed vis quâ in singulis punctis urgetur particula E G erat ad ejus vim mediocrem elasticam, ut K N — H L seu K X vel O R ad V, et vis illa mediocris, hoc est pondus incumbens quo lineola

E G comprimitur, est ad pondus lineolæ E G, ut A ad E G, adeóque ex æquo, vis quâ lineola E G in singulis punctis urgetur, est ad ejus pondus, ut O R $\times$ A ad E G $\times$ V, seu ut semi-parameter in A, ad V V (est enim O R ad E G ut T t ad B C, atque ideò ut semi-parameter ad V) vel ut 8 P S $\times$ A ad B C^2, ob V q ad B C q ut semi-parametri quadratum ad T t quad. (atque ideò ut 8 P S ad semi-parametrum.) Quare cùm tempora quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illa elastica, ad tempus unius vibrationis urgente vi ponderis, in subduplicatâ ratione B C^2 ad 8 P S $\times$ A. Atque adeò ad tempus descensûs ex altitudine $\frac{1}{2}$ A, in subduplicatâ ratione B C^2 ad 8 P S $\times$ A et subduplicata ratione 8 P S ad A, hoc est in ratione integra B C ad A. Sed tempore unius vibrationis pulsus progrediendo conficit latitudinem suam B C. Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium B C est ad tempus descensûs ex altitudine $\frac{1}{2}$ A, ut B C ad A. Tempus autem quo pulsus percurrit spatium A est ad tempus quo percurrit spatium B C, ut A ad B C, adeóque æquale tempori descensus ex altitudine $\frac{1}{2}$ A.

Hîc notandum, quod absurda sit, et facilè refutanda hypothesis hîc assumpta, quod nempe pulsus propagetur, particulis euntibus et redeuntibus pro lege gravis ascendentis et descendentis. Verùm id ipsum est quod demonstrationem Newtonianam evertit, ostendendo nimirum eam ipsam absurdæ hypothesi probandæ æque inservire.

Hactenus vir doctissimus; sequuntur ea quibus restitui posse Newtonianam demonstrationem credimus.

De Motibus in Fluido Elastico Genitis.

1. *Hypothesis.* Suppono medium elasticum constare punctis, quantitate exiguâ sed finitâ a se dissitis, et vi repulsivâ donatis quæ distantiæ illorum punctorum sit reciproce proportionalis; nec ad alia puncta præter ea quæ immediate proxima sunt sese extendit: hoc enim modo quæcumque sit partium medii elastici natura, satis feliciter repræsentantur effectus qui ex eorum elaterio pendent.

2. *Corol.* 1. Medii elastici status naturalis est ut puncta ejus elastica a se mutuò æqualiter distent.

3. *Corol.* 2. Puncta elastica velocitatem finitam suscipere possunt vel per immediatum contactum corporis moti, velocitate suâ finitâ punctum elasticum urgentis vel per actionem continuatam vis repulsivæ punctorum elasticorum si ab unâ parte fortior sit quàm ab aliâ. Reliquas causas motus, ut gravitatem, vires centrales, &c. hic non consideramus.

4. *Theor.* 1. Si velocitas finita quomodocumque excitetur in puncto elastico, distantiæ ejus a proximo puncto versus quod movetur minuetur finitâ quantitate antequam in reliquo medio factus sit ullus motus ullaque compressio: sint A, B, C, tria puncta medii elastici æquidistantia, moveatur A versus B velocitate finitâ, et tempore infinitè parvo describat spatium infinitè parvum primi ordinis A a, vis motrix puncti B erit differentia virium repulsivarum puncti A et C, est autem vis repulsiva puncti A ubi pervenit in a, ad vim puncti C (si immotum supponatur) ut B C ad B a, et dividendo vis motrix puncti B, ad vim repulsivam puncti C, ut B C — B a (= A a) ad B a. Sed A a, est infinite parvum ex hypothesi et B a est finita quantitas, ergo vis motrix puncti B, est infinite parva vis respectu vis repulsivæ puncti C, quæ vis repulsiva pro ipsa vi naturali elaterii assumi potest; vis autem elasticitatis est ex genere pressionum, tempore infinitè parvo velocitatem infinitè parvam generaret, quæ velocitas infinite parva durante tempore infinitè parvo, spatium infinitè parvum secundi ordinis describere faceret: ergo siquidem vis motrix puncti B hujus vis respectu est infinitè parva, tempore infinitè parvo spatium infinitè parvum duntaxat tertii ordinis describere faceret; nullus ergo motus in puncto B generabitur nisi spatium descriptum A a sit finita quantitas, nulla ergo erit compressio inter puncta B et C. Q. e. d.

A a B C

5. *Corol.* 1. Nullus ergo motus ex puncto medii elastici in punctum proximum transfertur nisi post tempus finitum, nam spatium finitum A a, nonnisi tempore finito percurri potest per velocitatem finitam.

6. *Corol.* 2. Et velocitas finita in puncto elastico excitata non mutabitur nisi post tempus finitum et postquam quantitate finitâ processerit. Sint enim medii particulæ Z, A, B, procedat punctum A velocitate finitâ utcumque in id punctum producta, et tempore infinitè parvo describat spatium infinitè parvum A a, vis quâ sistetur ea velocitas orietur ex differentia virium elasticarum puncti Z et puncti B, estque vis puncti B ad vim puncti Z ut A B + A a ad A B — A a, et dividendo vis sistens punctum A ad vim puncti Z, ut 2 A a ad A B — A a, sed A a est infinitè parvum respectu quantitatis A B — A a, ergo, vis sistens punctum A est infinitè parva, respectu vis puncti Z, quæ est vis elaterii naturalis, ideò (eodem modo ac in Theorematis demonstratum fuit) probabitur, vim illam tempore infinitè parvo spatium infinitè parvum tertii ordinis producturam: quare etiamsi singula puncta a parte B posita æquali vi agerent eorumque numerus infinitus foret, vires illæ omnes non nisi spatium infinitè parvum secundi ordinis infinitè parvo tempore ex spatio A a eodem tempore descripto detraherent, maneret itaque idem, velocitas ergo puncti A non mutabitur ex actione omnium punctorum medii elastici, nisi post tempus finitum et postquam finita quantitate processerit.

Z A B
a

7. *Corol.* 3. Si considerentur innumera puncta elastica ordine in lineâ rectâ posita, nec attendatur ad alia quæ circumquâque solidum spatium constituunt, si unum velocitate finitâ quâcumque ex causâ urgeatur, quæ constans in eo maneat,

quoddam tempus finitum requiretur ut eadem velocitas in proximo puncto excitetur, paulo longius tempus ut in tertio producatur, sicque deinceps, nam per Cor. 1. nullus motus ex puncto medii elastici in punctum proximum transfertur nisi elapso finito tempore, velocitas ergo primi puncti ad secundum non transit nisi post finitum tempus ab initio motus primi puncti et velocitas secundi puncti ad tertium non transit nisi post finitum tempus ab initio motûs secundi ejus

A B C D E, &c.

puncti. Breviori autem tempore excitari debet data velocitas in secundo puncto per actionem continuatam ab initio motûs primi puncti, quàm in tertio per actionem continuatam ab initio motûs puncti secundi: cùm enim velocitas primi puncti sit finita et æquabilis, compressio exinde orta ab initio ejus motûs est major quàm compressio quæ per motum secundi puncti ab initio ejus motus acquiritur, siquidem ad celeritatem primi puncti nonnisi per gradus pervenit, ergo vis motrix quæ urget secundum punctum ab initio, fortior est quam ea qua urgetur tertium punctum ab initio, ergo tertium punctum datam illam celeritatem tardius acquiret, et pari ratiocinio, cum vis motrix secundi puncti sub initio fortior sit quam vis motrix tertii, compressio inter secundum et tertium punctum major erit sub initio quàm inter tertium et quartum; unde vis motrix quæ urget tertium punctum sub initio, fortior est quàm ea quâ urgetur quartum punctum; ergo cùm punctum sequens aliqualem velocitatem suscipere non possit nisi postquam punctum præcedens spatium finitum descripserit, et longiori tempore ab initio motûs suscepti datam velocitatem possit suscipere, liquet quod ea data velocitas nonnisi successivè ad successiva medii elastici puncta pertingit.

8. *Schol.* Hinc patet discrimen inter motum in medio elastico excitatum et motum qui excitatur in medio non elastico cujus partes contiguæ sunt, in tali enim medio, pressio cuidam particulæ applicata ad omnes partes in directum positas, aut divaricantes, puncto temporis extendi debet; motus vero instanti in circulum propagari debet; at in medio elastico, pressio ab uno puncto ad alterum non continuatur nisi per accessum punctorum medii, sive per realem motum, qui antrorsum propagetur, et post tempus finitum a puncto primum moto ad reliquas partes fluidi successivè perveniat.

PROBLEMA.

9. Si punctum medii elastici finitâ velocitate moveatur quæ constans maneat, definire motum punctorum sequentium in lineâ recta positorum, omissis aliis sphæricè circumquaque positis.

Primus Casus. Sint ordine puncta A, B, C, D, &c. fingatur ea omnia ad æquales distantias in navi posita, et punctum B ita adhærere malo ut ex ejus motu, navis motum suscipiat et reliqua puncta vehat; recipiat verò punctum A velocitatem finitam quæ constans maneat relatè ad navis punctum in quo versabatur, et ponatur primo eam versus B tendere; ex accessu puncti A versus B vis repulsiva particulæ A fortior fiet vi repulsivâ particulæ C, quare ex differentia virium nascetur vix motrix particulæ B; procedat enim A ad B quantitate A a, erit vis particulæ C in B, ad vim particulæ A in B, ut a B ad B C sive A B (quia particularum intervalla A B, B C initio erant æqualia) et dividendo, vis particulæ C, ad differentiam virium quæ est vis motrix puncti B ut a B ad A B — a B sive A a, sed vis particulæ C est vis ipsa elaterii in statu naturali, ex hypoth. Ergo vis elaterii est ad vim moventem punctum B, ut a B ad A a. Repræsentet itaque I H tempus quo distantia A B punctorum elasticorum per velocitatem datam puncti A percurritur, dicaturque illud tempus a, ducatur deorsum ad angulos rectos linea H G quæ vim elasticam singulæ particulæ medii in statu naturali designet, ductaque F G parallela I H, asymptotis F G et G H et dignitate æquali a × H G describatur hyperbola, transibit per punctum I, (siquidem I F = H G et F G = I H = a, ideóque I F × F G = H G × a) et si I P repræsentet tempus quo durante A motum est, dicaturque x, dico quod P M repræsentabit vim motricem puncti B eo temporis momento. Erit enim ex naturâ hyperbolæ, G R : G F = F I (H G) : R M et dividendo G R (H P) : F R (I P) = H G : P M; spatia verò uniformiter descripta sunt ut tempora; ergo A B : A a = I H : I P et dividendo a B : A a = H P : I P, sed a B ad A a ut vis elaterii ad vim motricem puncti B; ergo H P : I P = H G : P M = vis elaterii ad vim motricem puncti B, sed H G repræsentat vim elaterii, ergo P M ubique repræsentat vim motricem puncti B.

Repræsentabit ergo etiam linea P M velocitatem momento P genitam, et area I P M totam velocitatem a puncto B acquisitam tempore I P sive tempore quo percurritur A a a puncto A.

Describatur verò ex puncto F logarithmica cujus axis sit linea H G producta, subtangens linea quævis G X quæ dicatur s, ductâque ex puncto P lineâ P T S dico quod linea T S repræsentabit velocitatem tempore I P acquisitam et area F T S spatium a puncto B descriptum.

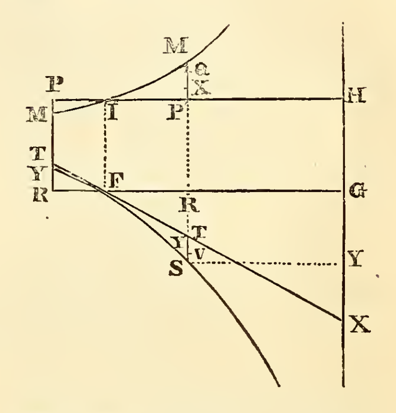
Est enim (per nat. logarith.) area I F R M, ad rect. I F G H ut R S ad G X, et rect. I F G H ad rect. I F R P ut F G ad F R ut G X ad R T, ideóque ex æquo area I F R M ad rect. I F R P ut R S ad R T, et dividendo, est I P M ad I F R P ut T S ad R T; ergo area I P M est ad T S in ratione datâ, ob datum P R et rationem F R ad R T datam, ut pote

æqualem rationi F G ad G X, est ergo T S ut I P M, sive ut velocitas puncti B, et cùm perpendicula inter ordinatas T S sint æqualia momentis temporis in linea I P sumptis, area F T S erit ut spatium a puncto B percursum.

Eodem modo constabit, quod si vis elastica ageret more gravitatis tempore a, velocitas quam eo tempore generaret, designaretur per subtangentem s, et spatium descriptum foret $\frac{a s}{2}$, dicatur verò m velocitas data puncti A, data erit ratio s ad m, intervallum particularum A B erit m a, et spatium A a velocitate datâ percursum est m x, notandum verò est quod ea velocitas s sit plusquam dupla velocitatis globi tormentarii, unde liquet quod in casibus sequentibus ubi velocitas puncti A longe minor velocitate globi tormentarii est intelligenda; quantitas $\frac{m}{s}$ est fractio satis parva.

Ad calculum verò facile revocatur linea F T S et area T S; 1. enim cùm subtangens sit s, ordinatarum F G, S Y differentia sit x, area tota F G Y S (ex nat. log.) est s x, intervallum R S est $s \times \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^2}{3a^3}$, &c. Rectang. R G $\times$ R S $= \overline{a - x} \times s \times \left(\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}\right.$, &c.) et quoniam est F G (a) : G X (s) = F R (x) : R T est R T $= \frac{s x}{a}$ et triang. F R T $= \frac{s x^2}{2 a}$. Detrahantur ergo rectang. R G $\times$ R S et triang. F R T ex area F G S Y remanet area F T S $= s x - \overline{s a - s x} \times \overline{\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}}$, &c. $- \frac{s x^2}{2 a} = s x \times \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}\right.$, &c.) $- s x \times \left(1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}\right.$, &c.) $- \frac{s x^2}{2a} = \frac{s x^2}{a} \times \left(\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3} +\right.$, &c.) erit itaque A a ad B b, ut m x, ad $\frac{s x^2}{a} \times \left(\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}\right.$, &c.) vel ut m ad $\frac{s x}{a} \times \left(\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2}\right.$, &c.) erit verò recta T S = R S − R T $= \frac{s x}{a} \times \left(1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}\right.$, &c.) $- \frac{s x}{a} = \frac{s x}{a} \times \left(\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}\right.$, &c.) ideóque velocitas data puncti A erit ad velocitatem puncti B ut m ad $\frac{s x}{a} \times \left(\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}\right)$.

Corol. Si quæratur in hac hypothesi quo tempore et spatio descripto punctum B velocitatem puncti A obtineat, fiat m $= \frac{s x}{a} \times \left(\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}\right.$, &c.) sed cum spatium A a sit ad B b ut m ad $\frac{s x}{a} \times \left(\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2}\right.$, &c.) erit A a ad B b ut $\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$, &c. ad $\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}$, &c. cumque primus terminus, primæ seriei sit accuratè triplus primi termini alterius seriei, reliqui verò plusquam tripli; punctum A totam suam celeritatem puncto B communicat antequam id punctum B tertiam partem ejus spatii descripserit quod descripsit punctum A.



Tempus verò x exprimetur per radices hujus æquationis $o = \frac{m a}{s} - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3}$, &c. Ubi liquet quod quando $\frac{m}{s}$ est fractio, tunc x est minus quam a, et series est convergens, ideóque ex primo termino et proximo assumptis erit $x = a \sqrt{\frac{2m}{s}}$; rem accuratius expendere isto in casu, qui merè fictitius est, nihil est necesse.

Casus secundus. Si A moveatur uniformiter et acceleret punctum B quod etiam acceleret punctum C (nullâ habitâ ratione motûs puncti D) erit in hoc casu vis repulsiva A ad vim repulsivam C ut A B − B b + C c ad A B − A a + B b et differentia virium sive vis motrix puncti B ad vim repulsivam puncti C, ut A a − 2 B b + C c ad A B − A a + B b; est præterea vis repulsiva puncti C ad vim elaterii ut A B ad A B − B b + C c; et denique vis elastica est ad vim moventem punctum B in primo casu ut A B − A a ad A a; ideóque ex æquo vis vera motrix puncti B ad ejus vim in primo casu ut

A a B b C c D, &c.

$$\left.\begin{array}{c} Aa - 2Bb + Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right\} \text{ad} \left\{\begin{array}{c} AB - Aa + Bb \\ AB - Bb + Cc \\ Aa \end{array}\right\}$$

In eâdem autem hypothesi vis motrix puncti C, hoc modo determinatur, est vis repulsiva puncti B ad vim repulsivam puncti D ut D c ad b c sive ut A B — C c, ad A B — B b + C c, ergo vis motrix puncti C ad vim repulsivam puncti D, ut B b — 2 C c ad A B — B b + C c.

Hæc vis repulsiva puncti D est ad vim elasticam ut A B ad A B — C c, denique vis elastica ad vim moventem punctum B in primo casu, ut A B — A a, ad A a, ideóque ex æquo vis motrix puncti C, ad vim moventem punctum B in primo casu ut

$$\left.\begin{matrix} Bb - 2Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{matrix}\right\} \text{ad} \left\{\begin{matrix} AB - Bb + Cc \\ AB - Cc \\ Aa \end{matrix}\right.$$

Ut verò determinetur motus puncti B in isto casu (qui pro vero haberi potest ob exiguitatem motûs puncti D qui negligitur) concipiatur P M ad P Q ut

$$\left.\begin{matrix} AB - Aa + Bb \\ AB - Bb + Cc \\ Aa \end{matrix}\right\} \text{ad} \left\{\begin{matrix} Aa - 2Bb + Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{matrix}\right.$$

et idem P M ad P X ut

$$\left.\begin{matrix} AB - Bb + Cc \\ AB - Cc \\ Aa \end{matrix}\right\} \text{ad} \left\{\begin{matrix} Ab - 2Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{matrix}\right.$$

curvæ quæ transibunt per Q et X erunt loci virium motricium puncti B et puncti C, areæ I P Q, I P X erunt ut velocitates per illas vires dato tempore I P genitæ, et si sumantur ordinatæ T V et T Y, tales ut T S, T V, T Y sint ut areæ I P M, I P Q, I P X, areæ F T V, F T Y erunt ut spatia B b et C c: sit ergo

$TV = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5$, &c.

et $TY = Ox^4 + Pa^5 + Ra^6$, &c.

erit $TV\,dx = Ax^2dx + Bx^3dx + Cx^4dx + Dx^5dx$, &c.

$TY\,dx = Ox^4dx + Px^5dx$

unde integrando, est area $FTV = \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^4}{4} + \frac{Cx^5}{5} + \frac{Dx^6}{6}$, &c. $= Bb$

et $FTY = \frac{Ox^5}{5} + \frac{Px^6}{6}$, &c. $= Cc$

fluxio autem $TV = 2Axdx + 3Bx^2dx + 4Cx^3dx + 5Dx^4dx$, &c.

Et fluxio $TY = 4Ox^3dx + 5Px^4dx$, &c.

Erat autem fluxio $TS = \frac{sx\,dx}{a^2} \times (1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4}$, &c.)

Sed P M ad P Q, ut fluxio T S ad fluxionem T V,

et P M ad P X ut fluxio T S ad fluxionem T Y,

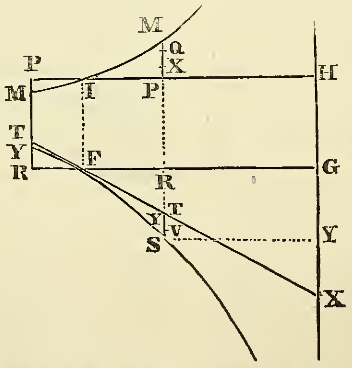
ergo fluxio T S ad fluxionem T V ut

$$\left.\begin{matrix} AB - Aa + Bb \\ AB - Bb + Cc \\ Aa \end{matrix}\right\} \text{ad} \left\{\begin{matrix} Aa - 2Bb + Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{matrix}\right.$$

et eadem fluxio T S ad fluxionem T Y ut

$$\left.\begin{matrix} AB - Bb + Cc \\ AB - Cc \\ Aa \end{matrix}\right\} \text{ad} \left\{\begin{matrix} Bb - 2Cc \\ AB \\ AB - Aa. \end{matrix}\right.$$

In his proportionibus multiplicatis extremis et mediis et terminorum collatione factâ, invenientur lineæ T V et T Y et areæ F T V et F T Y, sicque tempora quibus acquiruntur velocitates T V, T Y et spatia descripta dum acquiruntur, obtineri poterunt, calculum istum prolixissimum in compendio exhibebo; primò invenitur quod fluxio $TS \times AB \times AB - Aa = sm^2xdx$, est præterea $A\,a - 2\,B\,b + C\,c$ æquale $mx + * - \frac{2A}{3}x^3 - \frac{2B}{4}x^4 - \frac{2C - O}{5}x^5 - \frac{2D - P}{6}x^6$, &c. estque $Bb - 2Cc = \frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{4}x^4 + \frac{C - 2O}{5}x^5 + \frac{D - 2P}{6}x^6$, &c. quæ series multiplicatæ per sm^2xdx dant facta extremorum in utrâque proportione.



Ut habeantur facta mediorum, in primâ proportione est $\overline{AB - Bb + Cc} \times Aa = mx \times (ma + * + * - \frac{Ax^3}{3} - \frac{Bx^4}{4} - \frac{C - O}{5}x^5 - \frac{D - P}{6}x^6)$; ducatur in $AB - Aa + Bb = ma - mx + * + \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^4}{4} + \frac{Cx^5}{5} + \frac{Dx^6}{6}$ fit

$$mx\times\left\{\begin{array}{l} m^2a^2 - m^2ax + * + * + \frac{mAx^4}{3} + \frac{mBx^5}{4} + \frac{C-O}{5}mx^6, \&c. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{Omax^5}{5} + \frac{Pmax^6}{6} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{A^2x^6}{3\times 3} \end{array}\right\}$$

Quod ducatur in fluxionem $TV =$
$dx\times(2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3 + 5Dx^4 + 6Ex^5 + 7Fx^6)$ factum erit

$$mxdx\times\left\{\begin{array}{l} 2m^2a^2Ax - 2m^2aAx^2 - 3m^2aBx^3 + 4m^2aCx^4 + \frac{2mA^2x^5}{3} + \frac{18mBAx^6}{3\times 4} \\ \qquad + 3m^2a^2Bx^2 + 4m^2a^2Cx^3 + 5m^2a^2Dx^4 - 5m^2aDx^5 + \frac{2maAOx^6}{5}, \&c. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 6m^2a^2Ex^5 - 6m^2aEx^6 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 7m^2a^2Fx^6 \end{array}\right\}$$

termini omnes hujus seriei dividantur per s m, et conferantur cum correspondentibus terminis seriei quam exhibet factum extremorum primæ proportionis et habebitur $m = \frac{2ma^2A}{s}$, ideóque $A = \frac{s}{2a^2}$, tum $\frac{-2maA}{s} + \frac{3ma^2B}{s} = o$, ideóque $B = \frac{s}{3a^3}$, 3°. $-\frac{2A}{3} = -\frac{3maB}{s} + \frac{4ma^2C}{s}$, unde invenitur $C = \frac{s}{4a^4} - \frac{s}{3\times 4ma^4}$, 4°. $-\frac{2B}{4} = -\frac{4maC}{s} + \frac{5ma^2D}{s}$ est ergo $D = \frac{s}{5a^5} - \frac{6s^2}{3\times 4\times 5ma^5}$; 5°. $\frac{O-2C}{5} = +\frac{2mA^2}{3s} - \frac{5maD}{s} + \frac{6ma^2E}{s}$ est ergo $E = \frac{s}{6a^6} - \frac{46s^2}{3\times 4\times 5\times 6ma^6} + \frac{2s^3}{3\times 4\times 5\times 6m^2a^6} + \frac{sO}{5\times 6\times ma^2}$ et denique invenitur $F = \frac{s}{7a^7} - \frac{252s^2}{3.4.5.6.7ma^7} + \frac{24s^3}{3.4.5.6.7m^2a^7} + \frac{sP}{6.7ma^2}$.

In alterâ proportione resumatur factum $(AB - Bb + Cc)\times Aa$ quod est $mx\times m(a + * + * - \frac{Ax^3}{3} - \frac{Bx^4}{4} - \frac{C-O}{5}x^5 - \frac{D-P}{6}x^6)$ ducatur in $AB - Cc$ quod est

$ma + * + * + * + * - \frac{Ox^5}{5} - \frac{Px^6}{6}$, &c. fit

$mx\times(m^2a^2 + * + * - \frac{maAx^3}{3} - \frac{maBx^4}{4} - \frac{maCx^5}{5} - \frac{maDx^6}{6}$, &c.) Multiplicetur per fluxionem TX quæ est $dx\times(4Ox^3 + 5Px^4 + 6Qx^5 + 7Rx^6$, &c.)

$$\text{habetur } mxdx\times\left\{\begin{array}{l} 4m^2a^2Ox^3 + 5m^2a^2Px^4 + 6m^2a^2Qx^5 + 7m^2a^2Rx^6 + 8m^2a^2Sx^7 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{4maAOx^6}{3} - \frac{4maBOx^7}{4} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{5maAOx^7}{3} \end{array}\right\}$$

termini omnes hujus seriei dividantur per s m et conferantur cum terminis correspondentibus seriei quam exhibet factum extremorum secundæ proportionis, et habebitur $\frac{A}{3} = \frac{4ma^2O}{5}$ ideóque $O = \frac{s^2}{2\times 3\times 4ma^4}$: 2°. $\frac{B}{4} = \frac{5ma^2P}{s}$ hinc $P = \frac{s^1}{3\times 4\times 5ma^5}$ 3°. $\frac{C}{5} - \frac{2O}{5} = \frac{6ma^2Q}{s}$, hinc $Q = \frac{s^2}{4\times 5\times 6ma^6} - \frac{2s^3}{3\times 4\times 5\times 6m^2a^6}$, &c. unde tandem obtinentur hæ series, quibus velocitates et spatia descripta exprimuntur: exprimitur ergo velocitas puncti B, per

$$TV = \frac{sx^2}{2a^2} + \frac{sx^3}{3a^3} + \frac{sx^4}{4a^4} + \frac{sx^5}{5a^5} + \frac{sx^6}{6a^6} + \frac{sx^7}{7a^7}, \&c.$$
$$- \frac{2s^2x^4}{2.3\times 4ma^4} - \frac{6s^2x^5}{3\times 4\times 5ma^5} - \frac{46s^2x^6}{3\times 4\times 5\times 6ma^6} - \frac{390s^2x^7}{3.4.5.6.7ma^7}, \&c.$$
$$+ \frac{5s^3x^6}{2\times 3\times 4\times 5\times 6m^2a^6} + \frac{50s^3x^7}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7m^2a^7}, \&c.$$

$$\text{area } FTV = \frac{sx^3}{2\times 3a^2} + \frac{sx^4}{3\times 4a^3} + \frac{sx^5}{4\times 5a^4} + \frac{sx^6}{5\times 6a^5} + \frac{sx^7}{6\times 7a^6} + \frac{sx^8}{7\times 8a^7}, \&c.$$
$$- \frac{s^2x^5}{3\times 4\times 5ma^4} - \frac{6s^2x^6}{3\times 4\times 5\times 6ma^5} - \frac{46s^2x^7}{3\times 4\times 5\times 6\times 7ma^6} - \frac{390s^2x^8}{3.4.5.6.7.8ma^7}$$
$$+ \frac{5s^3x^7}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7m^2a^6} + \frac{50s^3x^8}{2.3.4.5.6.7.8m^2a^7}$$

velocitas puncti C exprimitur per $TX = \frac{s^2x^4}{2\times3\times4ma^4} + \frac{s^2x^5}{3\times4\times5ma^5} + \frac{s^2x^6}{4\times5\times6ma^6}$, &c. $-\frac{2s^3x^5}{3\times4\times5\times6m^2a^6}$

area denique $FTX = \frac{s^2x^5}{2\times3\times4\times5ma^4} + \frac{s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^7} + \frac{s^2x^7}{4\times5\times6\times7ma^6}$, &c. $-\frac{2s^3x^7}{3\times4\times5\times6\times7m^2a^6}$.

Punctorum sequentium motus determinari possent simili ratione; etenim vires motrices punctorum B, C, D, E, &c. sunt ut A a — 2 B b, B b — 2 C c, C c — 2 D d, D d — 2 E e, &c. Vis enim cujusvis puncti ut C est ad vim puncti E ut d e ad c d sive ut A B +

A a B b C c D d E e

E e — D d ad A B + D d — C c et dividendo vis motrix puncti D ad vim puncti E ut C c — 2 D d + E e ad c d; vis puncti E est ad vim elasticam naturalem ut A B ad e d, ergo vis motrix puncti D ad vim elasticam naturalem ut $\frac{Cc - 2Dd + Ee}{AB}$ ad $\frac{cd}{ed}$ sive ut C c — 2 D d + E e ad $\frac{cd \times de}{AB}$, ergo alternando est vis motrix puncti D ad C c — 2 D d + E e ut vis elastica naturalis ad $\frac{cd \times de}{AB}$, ideóque in paulò majori ratione quàm vis elastica ad A B quia tam c d quàm d e paulò minores sunt quàm A B, sed vis motrix puncti D est ad C c — 2 D d in majori ratione quam eadem vis motrix ad C c — 2 D d + E e, ergo vis motrix puncti D est semper ad C c — 2 D d in majori ratione quam vis elastica ad A B, cùmque id verum sit in omnibus punctis et hæc ultima ratio sit constans, ratio vis motricis puncti cujusvis ad spatium a præcedenti puncto descriptum dempto duplo spatii ab ipso hoc puncto descripti, erit semper major ratione constante, non tamen multo, ideò physicè pro constante assumi potest, hinc alternando vires illæ motrices, punctorum successivorum, sunt in ratione indicatâ.

Sed calculum pro illis punctis instituere necesse non est, per analogiam enim ex motu duorum priorum punctorum B et C reliquorum motum statuere, sufficiens videtur.

10. Si, missis cæteris casibus, quæratur intervallum temporis quo velocitas data m, in punctis successivis B, C, generetur, ut et ratio spatiorum A a, B b, C c eo tempore descriptorum; fiat T V = m, et utroque ducto in $\frac{a^2}{s}$, erit $\frac{a^2 TV}{s} = \frac{a^2 m}{s}$, dicatur $\frac{a^2 m}{s} = z^2$ et in serie $\frac{a^2 TV}{s}$, ponatur ubique $\frac{m}{z^2}$ loco $\frac{s}{a^2}$, hæc series in hanc formam migrabit $z^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^5}{5a^3} + \frac{x^6}{6a^4}$, &c.

$-\frac{2x^4}{2.3.4z^2} - \frac{6x^5}{3.4.5az^2} - \frac{46x^6}{3.4.5.6a^2z^2}$, &c.

$+\frac{5x^6}{2.3.4.5.6z^4}$, &c.

Juxta analyseos Newtonianæ methodum sumantur omnes termini in quibus differentiæ exponentium x et z minimum efficiunt valorem, fiantque æquales z^2 reliqui termini seriei $\frac{a^2 TV}{s}$ negligi possunt, quia per dignitates quantitatis $\frac{x}{a}$ respectu eorum qui assumpti fuerunt multiplicantur; (in hypothesi quæ velocitatem m alicujus momenti assumeret hi termini negligendi non forent, sed in casu præsenti velocitatem m minimam supponere nobis licet cùm de tali tantum in futurum simus acturi) erit ergo

$$z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{2.3.4z^2} + \frac{5x^6}{2.3.4.5.6z^4} - \frac{14x^8}{2.3.4.5.6.7.8z^6} + \frac{41x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10z^8} - \frac{122x^{12}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12z^{10}}, \text{\&c.}$$

(qui termini continuatâ serie T V inveniuntur) et æquatione per approximationem soluta invenietur $x^2 = 3.57 z^2 = \frac{3.57 a^2 m}{s}$.

Jam verò in areâ F T V quæ spatium B b exprimit, loco $\frac{s}{a^2}$ ponatur ut prius $\frac{m}{z^2}$ et assumantur termini in quibus differentia exponentium quantitatum x et z minima evadit, ii sunt $\frac{mx^3}{2\times3z^2} - \frac{2mx^5}{2.3.4.5z^4} + \frac{5mx^7}{2.3.4.5.6.7z^6} - \frac{14x^8}{2.3.4.5.6.7.8.9z^7}$ in quibus si valor $x^2 = 3.57z^2$ substituatur, fiet hæc series $m x \times \left(\frac{3.57}{2\times3} - \frac{2\times3.57\times3.57}{2.3.4.5} + \frac{5\times3.57\times3.57\times3.57}{2.3.4.5.6.7} - \frac{14\times3.57\times3.57\times3.57\times3.57}{2.3.4.5.6.7.8.9}\right)$, &c. sive $Bb = m x \times .428$.

Eodem modo valor C c invenietur ex hac serie $\frac{mx^5}{2\times3.4.5z^4} - \frac{2mx^7}{3\times4.5.6.7z^6}$ sive substituto valore x^2, erit $Cc = m x \times \left(\frac{3.57\times3.57}{2.3.4.5} - \frac{2\times3.57\times3.57\times3.57}{3.4.5.6.7}, \text{\&c.}\right)$

sive $C c = m x \times .07$ sive circiter sexta pars intervalli a puncto B descripti eodem tempore quo acquirit celeritatem m.

Et celeritas a puncto C tunc temporis acquisita erit iisdem substitutionibus factis $m \times (\frac{3.57 \times 3.57}{2.\ 3.\ 4.} - \frac{2 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57}{3.\ 4.\ 5.\ 6}$, &c.) $= m \times .279$, &c. circiter $\frac{1}{4}$ celeritatis m.

11. Quod si eventus quæratur in hypothesi velocitatem m non esse quamminimam; supponatur illa æqualis ipsi s; si quæratur spatium descriptum a puncto B, dum ejus velocitas fit m, fiat series $T V = m$, et utroque ducto in x, erit $x T V = m x$, ergo collatâ serie x T V, et F T V habebitur ratio spatiorum percursorum A a et B b, sed illæ series posito $\frac{s}{m} = 1$. sunt

$$x T V = \frac{s x^3}{2 a^2} + \frac{s x^4}{3 a^3} + \frac{s x^5}{6 a^4} + \frac{s x^6}{10 a^5} + \frac{s x^7}{30 a^6}, \text{ \&c.}$$

$$\text{et } F T V = \frac{s x^3}{6 a^2} + \frac{s x^4}{12 a^3} + \frac{s x^5}{30 a^4} + \frac{s x^6}{60 a^5} + \frac{11 s x^7}{2160 a^6}, \text{ \&c.}$$

Ubi liquet quod primus terminus primæ seriei sit triplus primi termini secundæ, reliqui verò termini primæ seriei reliquorum terminorum secundæ seriei plusquam tripli, unde liquet quod A a est magis quam triplum spatii per punctum B descripti usque dum celeritatem m recipiat; ex quo consequitur, quod siquidem B eo momento non est in medio inter puncta A et C, sed vicinius puncto A ad minimum sextâ parte spatii a puncto A descripti ab eo ulterius urgetur et acceleratur, celeritatemque majorem quam m recipit donec ad medium inter A et C perveniat, ibique cum celeritate majore quàm A feratur, versus C magis accedet, sicque vim repulsivam puncti C sentiet, dumque ultra medium inter A et C promovebitur sensim tardabitur, tandem destructo ejus excessu celeritatis supra celeritatem m, cùm sit vicinius puncto C quam puncto A diminuetur ulterius ejus celeritas m, ideóque puncto A vicinius gradatim fiet, in medio inter A et C iterum occurret, sed cum velocitate diminutâ, quare perget vicinius fieri puncto A, sicque ab ipso velocitatis incrementum de novo accipiet, sicque perpetuò oscillabitur punctum B circa medium inter punctum A et punctum C ad morem fibræ sonantis; eâque ratione fit ut particulæ aëris magnâ velocitate pulsæ sonum edant sponte, ut in tonitru, pulvere fulminante, flagellis, tapetibus aut lodicibus fortiter excussis, &c.

Sed ubi m minima fit, punctum B eam celeritatem m acquisivit eo tempore quo parùm abest a medio inter puncta A et C, (per hujus n. 10.) una circiter vicesima spatii a puncto A descripti, ideóque agitationes supra dictas exiguas suscipit quas pro nullis habere physicis licere debet, quamvis mathematicè non omninò nullæ sint.

12. Supposito ut prius velocitatem datam m esse minimam, ut obtineatur intervallum temporis quo punctum C celeritatem eam datam m acquiret sumpto ut prius $z^2 = \frac{a^2 m}{s}$ fiat $T X = m$ et $\frac{a^4 m^2}{s^2}$ Γ $X = m z^4$ et ponatur ubique in serie T X, $\frac{m}{z^2}$ pro $\frac{s}{a^2}$ fiet $m z^4 = \frac{m x^4}{2.3.4} + \frac{m x^5}{3.4.5}$, &c. sive sumptis terminis in quibus exponentes quantitatum x et z differentiam minimam habent, erit $m z^4 = \frac{m x^4}{2.\ 3.\ 4} - \frac{4 m x^6}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6 z^2} + \frac{13 m x^8}{2.3.4.5.6.7.8 z^4} - \frac{40 m x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10 z^6}$, &c. et æquatione per approximationem solutâ, invenitur $x^2 = 9 \frac{2}{5} x^2$. Et seriem F T X ulterius continuando et calculum instituendo ut pro serie F T V factum est, invenitur quod via a puncto A emensa, dum punctum C velocitatem m acquirit, est ad viam quam ipsum punctum C emetitur, ut 100 ad 32 sive fere ut 3 ad 1. Quod quidem paulo majus est vero, quia omissa est consideratio motus puncti D, quod cum discedat a puncto C efficit ut vis B in ipsum C sit fortior, breviorique tempore motum m ipsi impertiatur.

13. Hinc, cùm tempus quo punctum B celeritatem datam m acquisivit sit $z \sqrt{3.57}$ et tempus quo punctum C eam celeritatem acquisivit sit $z \sqrt{9\frac{2}{5}}$, illa tempora sunt ut $\sqrt{3.57}$ ad $\sqrt{9\frac{2}{5}}$ sive ut 19 ad 30 fere 2 ad 3; cùm ergo punctum A uniformiter moveatur, spatium quod punctum A describit dum C acquirit velocitatem m, est ad spatium quod idem punctum A descripserat dum B eamdem velocitatem m acquisiverat, sicut 3 ad 2; spatium verò quod C descripsit dum eam celeritatem acquisivit, est proximè tertia pars spatii eodem tempore ab A descripti, et spatium quod B describit dum eamdem celeritatem m acquirit est fere dimidia pars spatii eo tempore ab A descripti, ergo illa spatia a punctis C et B descripta, donec velocitatem m singula acquirant sunt æqualia.

14. Ex analogiâ verò deducetur quòd spatium quod punctum quartum D describit, dum velocitatem m attingit, erit quarta pars spatii ab A descripti, siquidem spatium a secundo puncto descriptum est dimidia pars spatii ab A descripti, spatium a tertio puncto descriptum tertia pars spatii descripti ab A, &c. Imo eum ordinem accuratius observari in punctis remotioribus statuere licet quod punctum C tertiam partem spatii ab A descripti dum velocitatem m acquirit, accuratius describat quàm B dimidiam partem spatii ab A descripti dum velocitatem m suscipit. Calculum tentare potest qui hac analogiâ rem sufficienter demonstrari non censebit, et B. L. ignoscere rogamus quod talem laborem subire piguerit.

Ex eadem analogiâ (Art. 13) deducetur, spatia quæ percurrunt successiva puncta D, E, dum velocitatem m acquirunt, æqualia esse iis quæ puncta singula B et C descripserunt.

15. Quibus admissis sequitur diminutionem

intervalli inter particulas medii, cum motu communi cum puncto A feruntur, esse ubicumque eamdem, et æqualem dimidio spatio ab A descripto dum B celeritatem m acquirit.

Nam cùm A bis id dimidium spatium descripserit et B semel dum B communem cum A motum suscipit, contrahitur spatium inter A et B dimidio illo spatio; A processit ter illo dimidio spatio et C semel dum C communem cum B et A motum suscipit, ergo intervallum inter A et C duplo ejus dimidii spatii diminutum est, sed inter A et C duo sunt particularum intervalla A et B, B et C, et primum intervallum est contractum dimidio illo spatio, ergo intervallum inter B et C eodem dimidio intervallo diminutum esse debet, sicque de cæteris.

16. Ideò si quolibet tempore elapso sumatur via tota puncti A, ea via æqualis erit summæ diminutionum intervallorum inter omnes particulas ad quas celeritas m communicata fuit; cùm ergo motus puncti A sit uniformis, uniformiter etiam crescit numerus particularum ad quas celeritas m communicatur; et numerus earum particularum æqualis erit viæ a puncto A percursæ divisæ per diminutionis intervalli unius quantitatem.

17. Manente autem fluido eodem, sed mutatâ celeritate puncti A, tempora quibus puncta successiva medii celeritatem ejus puncti A suscipiunt eadem tamen manent: nam si in formula $x^2 = \frac{3.57\, a^2\, m}{s}$ quâ determinatur quadratum temporis quo punctum B recipit celeritatem puncti A substituantur loco m et s quantitates ipsis æquipollentes, formula hæc fiet quantitas constans (manente elaterio medii et intervallo particularum) quæcumque sit velocitas puncti A; etenim dicatur f vis elastica medii, quoniam, ex hypothesi Problematis hujusce, uniformiter agere censetur tempore quod exprimitur per a ut celeritatem s generet, erit $s = a\, f$; præterea quoniam particularum intervallum B A $\frac{3.57\, a^2\, m}{s}$ $= \frac{3.57\, a^2\, \frac{A\,B}{a}}{a\, f} = \frac{3.57\; A\,B}{f}$ quæ quantitas, constantes tantùm continet à celeritate m independentes; hinc, tempus quo punctum B celeritatem puncti A recipit idem est quæcumque sit velocitas puncti A; idem demonstrabitur de tempore quo punctum C eam celeritatem recipit, nam habet (not. 13.) rationem constantem ad tempus quo punctum B eam celeritatem acquirit, est nempe ad id tempus ut 3 ad 2, et sic de cæteris punctis. Q. e. d.

18. Diminutiones intervallorum inter partes medii elastici (manente eodem fluido) sunt ut celeritas puncti A; nam spatium A a percursum a puncto A tempore quo certa quædam particula medii elastici celeritatem m recipit est semper m x, (x designante tempus quo illa particula medii celeritatem m suscipit) sed illud tempus est constans (n. 17. hujusce) quæcumque sit celeritas puncti A, ergo spatium A a est semper ut velocitas m; sed illud spatium A a est summa diminutionum intervallorum inter partes ad quas celeritas m pervenit (n. 16.), singulæ autem diminutiones sunt æquales (n. 15.) ergo singulæ diminutiones sunt ut illud spatium A a, sive ut velocitates.

19. Et vice versâ, numerus partium compressarum quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt est semper idem quæcumque sit puncti A velocitas; nam ille numerus est ut spatium A a divisum per unius partis diminutionem, spatium A a dato tempore est ut celeritas puncti A, diminutio unius partis est etiam ut ea celeritas; ergo numerus partium quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt, est ut celeritas per celeritatem divisa, hoc est, in ratione constanti; unde, in diversis temporibus numerus particularum ad quas celeritas m pervenerit, erit directè ut tempus.

20. Quod si particulæ datâ celeritate jam sint dimotæ, et certum gradum compressionis susceperint, postea verò nova velocitas addatur (vel detrahatur) puncto A, novus ille celeritatis gradus eodem tempore ab unâ particulâ ad aliam propagabitur quo prima celeritas propagata fuit, (in hypothesi quod tam velocitas m quàm hæc nova velocitas addititia exiguæ sunt) idque hoc modo demonstrari potest.

Fingatur omnes particulas primâ celeritate motas et compressas in navi positas esse quæ ipsâ particularum earum celeritate feratur, ita ut illæ particulæ in eâ nave respectivè quiescant, urgeatur verò prima pars per excessum novæ celeritatis super primam, communicatio istius excessus celeritatis ad omnes partes in nave positas ut et nova compressio particularum determinabitur ut in præcedenti Problemate, mutatis celeritate, intervallo particularum medii, et ejus elasticitate; si ergo prima celeritas fuerit ut prius m; a tempus quo intervallum particularum A B eâ celeritate percurrebatur, ideóque sit $A\,B = m\, a$, sit ut prius s velocitas genita tempore a per vim elasticam medii in statu naturali considerati et uniformiter agentis, inventum est quod tempus quo punctum B celeritatem m acquisiverat erat $a \sqrt{\frac{3.57\, m}{s}}$ (n. 10.) quod spatium A a interea a puncto A descriptum erat $m\, a \sqrt{\frac{3.57\, m}{s}}$ et spatium B b erat $.428\; m\, a \sqrt{\frac{3.57\, m}{s}}$, ita ut compressio particularum sit $A\,a - B\,b = .572 \times m\, a \sqrt{\frac{3.57\, m}{s}}$, ideóque novum intervallum inter particulas in nave positas erit $m\, a \times \left(1 - .572 \times \sqrt{\frac{3.57\, m}{s}}\right)$; est autem vis elastica prior ad vim elasticam novam inversè ut partium intervalla, sive ut $m\, a \times \left(1 - .572 \sqrt{\frac{3.57\, m}{s}}\right)$ ad m a, sive ut $1 - .572 \sqrt{\frac{3.57\, m}{s}}$ ad 1. Et, si excessus novæ velocitatis super priorem dicatur n, tempus quo novum intervallum inter particulas describeretur per hanc celeritatem n, erit

$\frac{a\,m}{n} \times (1 - .572 \sqrt{\frac{3.57\,m}{s}})$, nam tempus a, quo prius intervallum m a describebatur velocitate m debet esse ad istud tempus directè ut intervalla m a et m a $\times (1 - .572 \sqrt{\frac{3.57\,m}{s}})$ et inversè ut velocitates m et n. Denique, subtangens logarithmicæ quæ designabatur per s in casu priore, est in isto $\frac{m\,s}{n}$, cùm enim designet velocitatem uniformiter genitam ab elaterio, tempore quo intervallum particularum describitur, est directè ut vis elastica et ut tempus, habetur ergo hæc proportio, est

$$\left.\begin{matrix}1-.572\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}\\ a\end{matrix}\right\} \text{ad} \left\{\begin{matrix}1\\ \frac{a\,m}{a}.(1-.572\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}})\end{matrix}\right.$$

ut s ad $\frac{m\,s}{n}$.

In seriebus ergo supra inventis loco m ponatur n; loco a ponatur $\frac{a\,m}{n} \times (1 - .572 \sqrt{\frac{3.57\,m}{s}})$; loco s ponatur $\frac{m\,s}{n}$, et tempus quo punctum B celeritatem n acquirit, invenietur (substituendo hos valores in formula a $\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$)

$$\frac{a\,m}{n} \times (1 - .572\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}) \times \sqrt{\frac{3.57\,n}{\frac{m\,s}{n}}} = \frac{a\,m}{n} \times$$

$$(1 - .572\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}) \times \sqrt{\frac{3.57\,n\,n\,m}{n\,m\,s}} = a \times$$

$$(1 - .572\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}) \times \sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}.$$

Ideóque tempus a $\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$ quo in præcedenti casu punctum B acquirebat celeritatem m, est ad tempus quo in hoc casu acquirit celeritatem n, ut 1 ad $1 - .572 \sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$, sed hæc ratio, existente m quantitate minimâ ut suppositio fert, est fere æqualitatis. Quare nova celeritas, sive excessus novæ celeritatis supra præcedentem, propagabitur ad punctum proximum medii elastici eodem temporis intervallo quo præcedens celeritatis gradus in eo puncto genitus fuerat, ideóque etiam ad puncta successiva iisdem temporibus perveniet.

21. Si per datum aliquod tempus primum punctum A medii elastici constanti celeritate m fuerit motum, postea urgeatur majori celeritate m + n durante æquali tempore, omnes particulæ quæ primam celeritatem m susceperant, altero isto tempore celeritatem novam m + n suscipient, et interea totidem particulæ ulteriores priorem celeritatem m accipient; nam incrementum celeritatis n ad eas omnes particulas a primâ propagari potest dato tempore, ad quas eo ipso tempore celeritas m propagata fuerat (hujusce 20). Interea verò uniformiter propagata fuisset velocitas pristina m ab ultimis particulis quæ eam susceperant ad totidem ulteriores. Si itaque successive post æqualia tempora velocitas crescat, totidem formabuntur portiones medii elastici, æquali numero partium constantes, quæ successivas illas celeritates habebunt, portio proxima puncto A ultimam celeritatem habebit, secunda penultimam, et sic deinceps.

22. Hinc, si medium elasticum urgeatur per successivos velocitatis gradus, imprimi potest ejus partibus velocitas satis magna ut sensibiliter in aures agat nec tamen excitetur in medii elastici partibus sensibilis ea vibratio quæ juxta n. 11. nasceretur si simul et semel tota illa velocitas ipsi imprimeretur; et hinc intelligitur differentia inter aërem sonum generantem, aërem sonum propagantem, et aërem ventum deferentem; si magna velocitas particulæ aëreæ imprimatur, particula ipsi proxima tremores suscipit, fitque punctum sonorum; si velocitas minor excitetur quæ constans maneat nec per gradus augeatur aër uniformiter transfertur et fit ventus; sed si ab exiguâ velocitate ad magnam assurgatur, aëris particulæ successivos illos gradus recipiunt, et quia singula velocitas accepta est exigua tremores sensibiles non excitantur in particulis aëreis, quæ velocitatem illam magnam suscipientes et ad aurem deferentes sensationem soni producunt.

23. Si autem velocitas nova minor sit velocitate præcedente, eodem modo constabit quod decrementum illud velocitatis eodem tempore ad proximum punctum transibit quo præcedens velocitatis gradus ab eo acquisitus fuerat, et ad successiva puncta iisdem etiam temporibus perveniet quibus priorem celeritatem acquisiverant, imo solutio per constructionem Problematis ipsius productâ logarithmicâ ultra punctum F quæri potest, eademque obtinebuntur ac prius.

24. Quibus positis intelligitur effectus vibrationis fibræ flexæ et redeuntis in aërem. *Primus Casus.* Dividatur tempus ejus reditus in partes æquales quam minimas, et durante singulâ temporis parte, fibræ velocitas uniformis manere censeatur. Prima velocitas, ad certum numerum partium dato eo tempore communicabitur qui partium numerus dicatur N; altero instanti secunda velocitas eidem partium numero N communicabitur dum prima velocitas ad totidem particulas ulteriores N perveniet, tertio instanti primus partium numerus N tertiam velocitatem habebit, ulterior numerus N secundam velocitatem, numerus N adhuc ulterior primam; hinc ergo si fibra dimidiam vibrationem absolverit, hoc est ultra statum suum naturalem discesserit quantum potest, erunt in aëre totidem successivæ portiones, quæ particulas numero N continebunt, quot successivæ velocitates erunt genitæ, et particulæ remotissimæ a fibrâ primum celeritatis gradum habebunt, proximæ fibræ ultimum, mediæ verò medium, qui maximus est; diminutiones intervallorum correspondebunt illis celeritatum gradibus, ut sint minimæ tam in particulis a fibrâ remotissimis, quam in particulis ipsi proximis, maximæ in mediis.

Regrediente fibrâ, eadem omnino lex observabitur, nisi quod partes aëris fibræ proximæ retrò movebuntur et compressiones in dilatationes

mutabuntur, dum in portiones ulteriores medii celeritates primo receptæ propagantur, ideóque tota vibratione absolutâ numerus particularum agitatarum duplus erit ejus quem in dimidia vibratione notaveramus, pars dimidia remotior est planè æqualis illi de quâ primo actum est et similiter constituta, pars citerior verò negativam celeritatem obtinebit et dilatationem; ejus citerioris partis portio remotissima a fibrâ primum celeritatis fibræ regredientis gradum habebit, et portio fibræ proxima ultimum (quietem nempe), media portio medium, hoc est retrocedet eâ ipsâ celeritate quâ medium ulterioris partis procedit et dilatationes illis celeritatibus negativis correspondebunt, ideóque in medio illius proximæ portionis maxima erit dilatatio ut et maximus regressus.

Secundus Casus. Quod si singula tempuscula, quibus durantibus velocitas fibræ uniformis fingitur, æqualia non sint, eâdem ratione intelligentur effectus fibræ in partes medii, nisi quod portiones medii quæ singulis successivis velocitatis gradibus gaudent non sint æquales, sed (per not. 19.) sint sicut tempora quibus durantibus singulæ illæ velocitates in fibrâ permanserunt.

Tertius Casus. Quamvis autem fibræ velocitas nullo tempusculo uniformis maneat sed continuo acceleretur, eodem tamen modo fibra aget in medium ac si reverâ velocitas ejus cresceret per intervalla temporis, et durante tempusculo quam minimo (sed finito) uniformis maneret; idque propterea quod intervalla inter particulas medii sunt finitæ quantitates non verò infinitè parva; nam per notas 4. et 5. nullus motus ex puncto A in punctum B transire potest, nisi punctum A processerit finitâ quantulâcumque quantitate, ideóque, nisi fibra quæ urget punctum A velocitatem finitam in eo generaverit (ut fert hypothesis Problematis not. 9.); pari ratiocinio punctum B non sentiet incrementa velocitatis puncti A, nisi postquam incrementum finitum velocitatis in eo genitum fuerit (not. 5. et 20). Ergo fibra agit in medium quasi singulo tempusculo (æquali vel inæquali) ejus velocitas uniformis perstitisset; intelligitur ergo effectus vibrationis fibræ in aërem per primum et secundum casum hujusce demonstrationis. Q. e. i.

25. Totum autem spatium cujus particulæ commotæ fuerunt durante integrâ fibræ vibratione a Newtono pulsus vocatur, et si vibratione absolutâ fibra quiesceret, semper ulterius propagaretur ille pulsus; nam totus ille pulsus (momento quo absolvitur vibratio) divisus intelligatur in portiones totidem quot temporis intervalla in vibrationis duratione fuerunt assumpta, quæ temporis intervalla facilitatis ergo æqualia supponantur, singula portio medii eam velocitatem habebit quam habuit chorda in momento ipsi respondenti, ultima portio sive remotissima a fibra eam habebit celeritatem quam fibra habuerat primo instanti, penultima portio eam celeritatem habet quam fibra habuit secundo instanti, &c.; sequenti verò tempusculo ultima portio pulsus ad novam portionem sibi æqualem et ulteriorem suam velocitatem propagabit (hujus 21.) dum ipsa suscipiet penultimæ portionis celeritatem, penultima verò portio celeritatem antepenultimæ, &c., postea altero temporis intervallo ad alteram novam portionem ulteriorem prima celeritas propagabitur, et secunda celeritas in primâ portione novi istius pulsus generabitur, sicque deinceps: novus ergo pulsus formabitur plane similis priori æqualiter extensus, æquali celeritate in singulis partibus donatus (semotâ ut dixi consideratione partium circumquâque positarum remque considerando quasi de partibus in linea rectâ positis unicè ageretur).

26. Ipse autem primus pulsus penitus quiescit quando in secundum totus transiit si nulla nova chordæ agitatio succedat, nam celeritas portionis pulsus quæ fibræ proxima est successivè ad sequentes portiones transit dum novus pulsus formatur, sed celeritas ejus portionis fibræ proximæ est ultima fibræ celeritas quæ in hâc hyp. est quies, sed ubi pulsus secundus totus formatus est, celeritas portionis pulsus quæ fibræ proxima erat ad initium secundi pulsus est translata et per omnes partes pulsus primi successivè transiit, ideóque in quiete eas constituit in quâ permanserunt nullâ succedente novâ agitatione.

27. Quòd si chorda novam vibrationem faciat, ut evenit, restituetur primus pulsus æqualis præcedenti qualiscumque sit ejus vibrationis velocitas initialis, nam dividatur totius vibrationis hujusce tempus in totidem partes æquales partibus in quas tempus primæ vibrationis divisum fuerat, quod fieri potest cum vibrationes sint isochronæ, istæ partes temporis æquales erunt iis quæ in præcedenti vibratione assumptæ fuerunt; dato autem tempore numerus particularum compressarum est semper idem qualiscumque sit velocitas (n. 19. hujusce). Ergo siquidem singulo instanti dato totidem partes comprimuntur, totidemque sunt instantia data in vibrationibus isochronis, pulsus ad totidem particulas in quâvis vibratione isochronâ extendetur.

28. Si per velocitatem pulsûs intelligatur (cum Newtono) distantia ad quam pulsus extenditur divisa per tempus quo pulsus ad eam distantiam pervenit, dico pulsus in eodem medio esse omnes æquiveloces quæcumque sit fibræ pulsum producentis vibratio: id jam liquet de vibrationibus isochronis in quibus tempore unius vibrationis ad totidem partes pulsus propagatur, ideóque æquale spatium æquali tempore percurrit, postea verò idem pulsus similiter propagatur, sed id pariter verum est de vibrationibus eterochronis; dividantur enim inæqualia vibrationum tempora in totidem utrinque tempuscula minima quæ totis temporibus sint proportionalia, numerus partium compressarum singulis tempusculis diversis sunt illis tempusculis proportionales (n. 19. hujusce) ideóque totis vibrationum temporibus proportionales, sed in singulâ vibratione totidem tempuscula assumpta sunt, ergo totus numerus partium quæ singulum pulsum constituunt est proportionalis tempori vibrationis. Sed distantia ad quam pervenit pulsus est semper numero partium proportionalis. Ideóque distantia ad quam pervenit pulsus est tempori vibrationis proportionalis, sed velocitas pulsus est distantia ad quam pervenit divisa per tempus quo

ad eam distantiam pervenit, ergo ea velocitas est constans. Ergo in eodem medio omnes pulsus sunt æquiveloces; quod de sono per experimenta verum esse demonstravit Derhamus.

29. Quòd si medium diversum sit, velocitates pulsuum erunt inversè in ratione subduplicatâ densitatis et directè in ratione subduplicatâ vis elasticæ, quippe (n. 17. hujusce) deprehendimus quadratum temporis quo celeritas puncti A transit in punctum B esse $\frac{3.57\ AB}{f}$ designante A B particularum intervallo et f vi elasticâ, et uniformiter procedere motum in pulsu ab unâ particulâ ad sequentem, sumantur ergo totidem partes in utroque medio, tempora quibus motus pulsus a primâ ad ultimam perveniet erit ut $\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{f}}$ (neglectâ quantitate constanti 3.57.) Velocitas verò pulsus est directè ut spatium quod occupant illæ omnes particulæ et inversè ut tempus quibus motus a primâ ad ultimam transit, spatium verò quod occupant illæ particulæ cum sint totidem est ut intervallum AB singulæ particulæ, ideóque est velocitas pulsus ut $\frac{AB}{\sqrt{\frac{AB}{f}}} = \sqrt{AB} \times \sqrt{f}$. Intervallum particularum est inversè ut densitas medii (rem considerando ut in n. 25. hujusce) ergo velocitas pulsus est inversè in ratione subduplicatâ densitatis medii, et directè in ratione subduplicatâ vis elasticæ (quod Prop. XLVIII. statuit Newtonus).

30. His de toto pulsu dictis, nunc de motu singulæ particulæ pulsûs observandum est, in singulâ particulâ omnes velocitatis successivos gradus quos habuit prima particula A produci, et tantùmdem temporis in eâ particulâ durare, quantùm in ea particula A, hoc cum discrimine quod tardius eos velocitatis gradus suscipiat quam particula A, et quidem eò tardius quò ab ea remotior est; *Primus Casus.* Dividatur, ut prius, vibrationis tempus in tempuscula, et durante uno tempusculo æquabilis manere censeatur velocitas impressa particulæ A, fingamus singulo tempusculo velocitatem ad viginti particulas pervenire, et spectemus speciatim motum quem decema particula a puncto A suscipiet, quæ particula dicatur X, illa particula X motum puncti A non suscipit nisi post novem particulas antecedentes, tum ipsa particula X motum puncti A suspicit et uniformiter cum eo movetur durante reliquo tempusculo, tunc ex hypothesi mutatur celeritas puncti A, interea tamen uniformis manet celeritas puncti X donec nova ea celeritas ad ipsam pervenire potuerit, hoc est postquam successivè pervenit ad particulas novem antecedentes, sed nova hæc celeritas per novem particulas antecedentes particulam X propagatur eodem tempore quo prima celeritas per easdem novem particulas propagata fuerat; ergo prima celeritas tantò diutius permanet in particulâ X quantò tardius eam receperat, ergo ea prima celeritas tamdiù durat in particulâ X quamdiù duraverat in particulâ A; cumque idem de singulis successivis motibus puncti A dici possit, hinc quælibet particula X ipsissimum habet motum ac particula A, nisi quod tardius in eâ incipiat et desinat. Ideóque etiam manifestum est in hoc casu, spatia a particulis A et X descripta æqualia fore et similiter descripta.

Secundus Casus. Ponatur nunc quod motus puncti A æquabilis non maneat durante singulo tempusculo, velocitates tamen successivæ puncti X erunt illæ quas in fine singuli tempusculi quam minimi punctum A acquisiverit, ut liquet ex tertio casu notæ 24, ideóque punctum X suscipiet velocitates correspondentes velocitatibus puncti A sumptis per saltus, sed quoniam cùm primùm punctum A spatium finitum descripsit, agere incipit in punctum proximum, saltus illi quamminimi intelligi debent, ideóque physicè nulli, hinc physicè particula X et particula A eosdem motus habebunt.

Pariter describent spatia æqualia et similia; quippe abscissæ curvæ cujusvis repræsentent tempus quo durante punctum A movetur, et ejus ordinatæ repræsentent correspondentes velocitates, et dividatur axis curvæ in partes quamminimas sed finitas, eriganturque ordinatæ, illæ repræsentabunt velocitates æquabiles puncti X initio singuli tempusculi, et parallelogrammata contenta sub ordinata et portione axis respondente repræsentabunt spatia a puncto X descripta, areæ verò mixtilineæ inter easdem ordinatas easdem axis portiones et arcus curvæ comprehensæ repræsentabunt spatia correspondentia a puncto A descripta, sed quando portiones axis sunt quamminimæ, summæ omnium eorum parallelogrammatum et arearum mixtilinearum correspondentium pro æqualibus habentur. Ergo spatia a particulis A et X descripta sunt æqualia et similiter descripta saltem quàm proximè.

31. Ideò uniformiter motus fibræ propagatur trans particulas medii; singulæ verò ejus particulæ successivè motum fibræ suscipiunt et ejus ad instar moventur, sed in fibrâ elasticâ vires sunt semper proportionales distantiæ fibræ a puncto medio motus sui, ut per experimenta constat, et illarum virium actio sensibiliter non turbatur per resistentiam aëris, propter ejus raritatem, nec per ejus elaterium quia hinc inde a fibrâ aër datur qui ferè æqualiter premit, ideò fibra elastica ac per consequens particulæ ipsæ medii moventur secundum legem Prop. XXXVIII. Lib. I. Sed eadem est lex motus penduli in cycloide oscillantis Prop. LI. Lib. I. Ergo *pulsibus per fluidum propagatis singulæ particulæ motu reciproco brevissimo euntes et redeuntes accelerantur semper et retardantur pro lege oscillantis penduli.* Q. e. d.

32. Sumatur tempus quodvis, simulque illud intervallum inter particulas pulsus, quod tale est ut eo tempore assumpto motus fibræ a primâ particulâ ejus intervalli ad ultimam perveniat. Dico, quod tempus illud erit ad totum vibrationis tempus ut illud intervallum ad totius pulsus longitudinem; res est evidentissima ex præcedentibus; nam cùm motus propagetur in pulsu uniformiter qualiscumque sit celeritas, hoc est, cum ad totidem particulas dato tempore perveniat, manifestum est quod sic ut est totum vibra-

Corol. Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum pro-

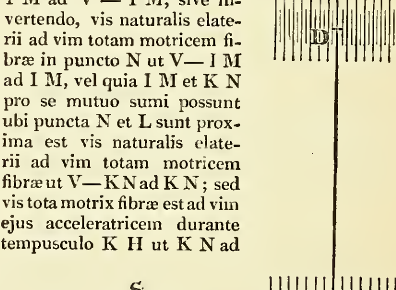
tionis tempus, sive totum tempus quo pulsus formatur ad omnes particulas quæ pulsum constituunt, ita portio quævis ejus temporis ad numerum particularum quæ eâ temporis portione motum receperunt.

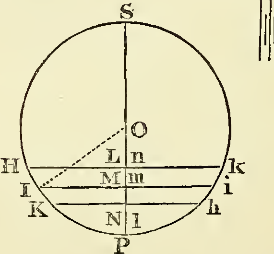
33. Ut melius horum cum Newtonianis nexus pateat, hic adjungere lubet Prop. XLIX. demonstrationem ex XLVII. desumptam, quamvis vix diversa sit ab iis quæ in ipso textu leguntur, et primo quidem, sit P S spatium quod fibra unâ vibratione eundo percurrit, ex ejus medio O ut centro describatur circulus P K S k ejus circumferentia repræsentet totum vibrationis ex itu et reditu compositæ tempus, partes ejus circumferentiæ ut K H repræsentabunt tempora quibus fibra per spatium correspondens N L movebitur; H L, K N repræsentabunt velocitates fibræ in punctis N et L, et H L — K N velocitatum incrementa vel decrementa, actioni elaterii fibræ proportionalia, hæc omnia patent ex Prop. XXXVIII. et LI. Lib. I.

2. Sit B C longitudo pulsus, et dicatur V radius circuli cujus circumferentiæ illa longitudo B C æqualis foret, dico quod vis naturalis elaterii medii erat ad vim acceleratricem fibræ ut V — K N ad H L — K N.

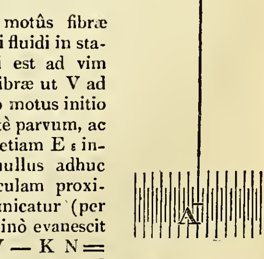
Sint enim duo puncta E et G in suo naturali situ in medio elastico, quæ post aliquod tempus in locis ε et γ occurrant, suscepto nempe motu fibræ secundum leges a nobis expositas, singula seorsim eumdem motum ac fibra habebunt, ideóque si sumptum fuerit E ε = P L erit P H tempus elapsum a momento quo punctum E motum fibræ suscepit et erit H L ejus velocitas in ε, pariter sit G γ = P N erit P K tempus elapsum a momento quo G motum fibræ suscepit, et erit K N ejus velocitas in γ, sint verò E et G puncta proxima; compressio spatii E G ubi in ε γ pervenit oritur ex eo quod plus processit ε quam γ, itaque diminutio ejus spatii erit æqualis spatio L N, ideóque ε γ erit æqualis E G — L N, utque vires quibus urgentur puncta medii, eorum densitati est proportionalis, vis tota quâ urgetur punctum γ est ad eam quâ urgebatur punctum G (quæ erat vis naturalis elaterii) inversè ut spatium ε γ ad E G seu ut $\frac{1}{E\,G - L\,N}$ ad $\frac{1}{E\,G}$. Sed est L N ad K H ut I M ad radium P O, et cum K H designet intervallum temporis quo pulsus a puncto E ad punctum G pervenit, est (per n. 32.) K H ad E G ut tota circumferentia P K S k ad B C, sive ut P O ad V; ergo ex æquo est L N ad E G ut I M ad V et convertendo E G — L N ad E G ut V — I M ad V ideóque $\frac{1}{E\,G - L\,N} : \frac{1}{E\,G} = \frac{1}{V - I\,M} : \frac{1}{V}$ ac per consequens vis tota quâ urgetur punctum γ est ad vim naturalem elaterii ut $\frac{1}{V - I\,M}$ ad $\frac{1}{V}$.

Vis illa tota quâ urgetur punctum γ est vis naturalis elaterii medii cui superaddita est tota vis motrix fibræ quæ ad id punctum pervenit, ergo dividendo et reducendo ad communem denominatorem, vis motrix fibræ in puncto N, est ad vim naturalem elaterii ut I M ad V — I M, sive invertendo, vis naturalis elaterii ad vim totam motricem fibræ in puncto N ut V — I M ad I M, vel quia I M et K N pro se mutuo sumi possunt ubi puncta N et L sunt proxima est vis naturalis elaterii ad vim totam motricem fibræ ut V — K N ad K N; sed vis tota motrix fibræ est ad vim ejus acceleratricem durante tempusculo K H ut K N ad H L — K N, ergo ex æquo, est vis naturalis elaterii ad vim acceleratricem fibræ ut V — K N ad H L — K N. Q. e. d.





3. In ipso motûs fibræ initio, vis elaterii fluidi in statu suo naturali est ad vim acceleratricem fibræ ut V ad H K; nam ipso motus initio si P H sit infinitè parvum, ac per consequens etiam E ε infinitè parvum nullus adhuc motus ad particulam proximam G communicatur (per n. 4.) ergo omninò evanescit K N ideóque V — K N = V, et H L — K N = H L sed arcus infinitè parvus et ejus sinus æquantur, ergo H L = H K; ergo vis elaterii fluidi in statu naturali est ad vim acceleratricem fibræ ipso ejus motus initio ut V ad H K.



Ex quibus fluit demonstratio Prop. XLIX. Q. e. i.

gressu. Nam lineola physica $\varepsilon\gamma$, quamprimum ad locum suum primum redierit, (n) quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus a corpore tremulo propagari desinunt.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulsuum in fluido elastico propagatorum velocitates sunt in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione vis elasticæ directè et subduplicatâ ratione densitatis inversè; si modo fluidi vis elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si media sint homogenea, et pulsuum distantiæ in his mediis æquentur inter se, sed motus in uno medio intensior sit: contractiones et dilatationes partium analogarum (o) erunt ut iidem motus. Accurata qui-

(n) * *Quiescet; neque deinceps movebitur.* Quamprimùm lineola physica $\varepsilon\gamma$ ad locum suum primum redierit, ipsius velocitas quam ordinata, m i, semper exponit (Prop. XXXVIII. Lib. I.) extinguetur; et ejusdem lineolæ densitas visque elastica eadem erit cum densitate et vi elasticâ partis E G medii quiescentis; ideóque quiescet, &c. * Id liquet ex n. 20. additionis nostræ de Motibus in Fluido Elastico Genitis.

316. Ex his intelligitur quomodò per vibrationes isochronas corporis resonantis producantur in aëre pulsus quibus ad aurem appulsis, fit in nobis perceptio soni, et cur soni, cessante motu tremulo corporis sonori, statim cessent. Liquet etiam tonos a numero pulsuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendere, cùm (per Cor. Prop. hujus) numerus pulsuum æqualis sit numero vibrationum ex itu et reditu compositarum quas chorda musica peragit, et ab isto numero tonorum diversitas oriatur (308).

317. Patet etiam quomodo aëris pulsus sonum et tremores in aliis corporibus unisonis aut consonantibus creare possint. Nam cùm aëris pulsus in nervum musicum incurrit qui vibrationem unam ex itu et reditu compositam absolvere aptus sit, eo tempore quo pulsus suam percurrit latitudinem, commovetur nervus et oscillatur per exiguum licet spatium, et recurrentibus novis atque conspirantibus aëris pulsibus celeriùs agitatur sonumque reddit. At si nervus vibrationes suas integras seu ex itu et reditu compositas perficere nequeat quo tempore pulsus aëris latitudinem suam describit, possit tamen in partes aliquotas hujusmodi vibrationibus peragendis aptas dividi; partes illæ, quiescentibus divisionum punctis, congruenter ad pulsuum recursum sensim agitabuntur, vibrationesque suas cum pulsibus unisonas singulæ perficient. Si verò nervi duo proximi in eas partes aliquotas dividi possint quæ sint inter se ad unisonum, aut quod idem est, quæ vibrationes isochronas peragant, et horum nervorum unus pulsetur sonumque edat, nervi duo sese in partes suas aliquotas veluti divident ut ad unisonum reducantur. Ut si ejusdem nervi capiantur partes duæ quarum sit ratio 2 ad 3 et æqualiter tendantur, alteraque pars pulsetur, dividetur minor nervus in partes duas, et major in partes tres æquales quæ singulæ seorsim oscillabuntur. Nam brevior nervus duarum nempe partium, ter oscillando dum nervus longior partium trium, duas oscillationes absolvit (306) frequentiores in aëre pulsus excitat quorum recursu nervus longior citiùs quàm par est agitatur; et cum utriusque nervi aërisque motus congruere non possint nisi singulæ nervorum partes aliquotæ et æquales seorsim oscillentur, motus ille conspirans tam in nervis quàm in aëre tandem producitur. Et hæc quidem in experimentis musicis ità contingere observarunt Joan. Wallis Operum in fol. Tom. II. pag. 466. Et deinde Acusticæ instaurator D. Sauveur in Monum. Acad. Paris. an. 1701. ubi alia experimenta refert quæ ex prædictis facile possunt explicari; * et inde ingeniosissimi systematis de tonorum productione et harmoniâ fundamenta derivavit ill. de Mairan omni laude superior, quod ad praxim felicissimè revocavit vir inter eruditos Orpheos illustrissimus D. Rameau.

(o) * *Erunt ut iidem motus.* Motus enim illi sunt vel causæ vel effectus contractionis et dilatationis partium in pulsibus correspondentium. Hæc tamen proportio accurata non est, si contractiones et dilatationes sint valde intensæ, quemadmodum si chorda musica nimiâ vi pulsetur, vis motrix particularum ejus non est amplius proportionalis spatiis per quæ debet moveri, et

dem non est hæc proportio. Verumtamen nisi contractiones et dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibiliter, ideóque pro physicè accuratâ haberi potest. (p) Sunt autem vires elasticæ motrices ut contractiones et dilatationes; et velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideóque æquales et correspondentes pulsuum correspondentium partes itus et reditus suos per spatia contractionibus et dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent: et propterea pulsus, qui tempore itûs et reditûs unius latitudinem suam progrediendo conficiunt, et in loca pulsuum proximè præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.

Cas. 2. Sin pulsuum distantiæ seu longitudines sint majores in uno medio quàm in altero; (q) ponamus quod partes correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia singulis vicibus eundo et redeundo describant: et (r) æquales erunt earum contractiones et dilatationes. Ideóque si media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elasticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda est ut pulsuum latitudo; et in eâdem ratione est spatium per quod singulis vicibus eundo et redeundo moveri debent. (s) Estque tempus itûs et reditûs unius in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ materiæ et ratione subduplicatâ spatii, atque ideò ut spatium. Pulsus

aëris densitas vi ipsius elasticæ proportionalis non manet, si nimiâ vi comprimatur vel dilatetur aër. * Singulæ diminutiones intervallorum sunt ut velocitates (n. 19.) non tamen ex eo sequitur contractiones esse ut velocitates, (hunc verò casum et reliquos demonstravimus n. 29. additionis de Mot. Fluid. Elast.)

(p) * *Sunt autem vires elasticæ motrices.* Nam vires elasticæ motrices sunt ut partium analogarum densitates, hoc est, datâ materiæ quantitate, ut contractiones; et contractiones sunt ut dilatationes quæ viribus elasticis medii contracti producuntur; *et velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires* (13. Lib. I.), hoc est, ut contractiones et dilatationes, *ideóque* cum spatia simul descripta sint ut velocitates simul genitæ, *æquales et correspondentes pulsuum correspondentium partes itus et reditus suos*, seu motus suos *per spatia contractionibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia simul peragent; et propterea pulsus qui tempore itûs et reditûs latitudinem suam progrediendo conficiunt* (314.) *et in loca pulsuum proximè præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum* æqualibus temporibus *descriptarum æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.*

(q) *Ponamus quod partes correspondentes.* Quoniam (per Cas. 1.) in eodem medio homogeneo et datâ pulsuum latitudine spatium quod partes medii oscillando describunt, manente tempore oscillationis, minui potest in datâ ratione; nihil obstat quominùs in hoc secundo casu supponatur quod partes mediorum correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia, iisdem manentibus oscillationum in unoquoque medio temporibus, eundo et redeundo percurrant.

(r) * *Æquales erunt.* Si media sint homogenea, uti in hoc secundo casu supponitur, vires elasticæ motrices sunt ut partium correspondentium contractiones et dilatationes quas producunt, sed quia quantitates materiæ in partibus correspondentibus sunt ut pulsuum latitudines, seu ut partium analogarum volumina, et partes illæ analogæ eundo et redeundo dilatantur et contrahuntur per spatia quantitatibus materiæ proportionalia (per Hyp.) contractiones et dilatationes ideóque vires elasticæ motrices æquales erunt.

(s) * *Estque tempus itûs et reditûs.* Nam tempus quo materia viribus æqualibus ad legem oscillantis penduli agitatur, est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione materiæ et subduplicatâ ratione spatii (per Cor. 5. Prop. XXIV. Lib. II.)

autem temporibus itûs et reditûs unius eundo latitudines suas conficiunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurrunt; et propterea sunt æquiveloces.

Cas. 3. In mediis igitur densitate et vi elasticâ paribus, pulsus omnes sunt æquiveloces. Quod si medii vel densitas vel vis elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elasticæ, et materia movenda in ratione densitatis augetur; (t) tempus, quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in subduplicatâ ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicatâ ratione vis elasticæ. Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè et ratione subduplicatâ vis elasticæ directè. Q. e. d.

Hæc Propositio ulterius patebit ex constructione sequenti.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis medii densitate et vi elasticâ, invenire velocitatem pulsuum.

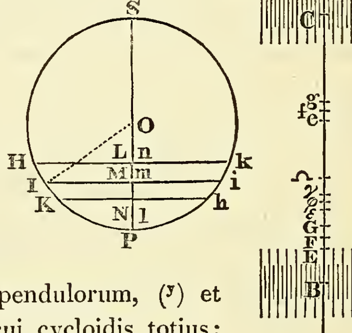
Fingamus medium ab incumbente pondere pro more aëris nostri comprimi; sitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, et cujus densitas eadem sit cum densitate medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur pendulum, cujus

(t) *Tempus, quo motus iidem peragantur,* &c. Tempus quo motus per æqualia spatia peraguntur est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione materiæ movendæ directè et subduplicatâ ratione vis motricis inversè (per Cor. 5. Prop. XXIV.) ideóque in hoc tertio casu, tempus, manente spatio descripto, augebitur in subduplicatâ ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicatâ ratione vis elasticæ, et propterea velocitas quæ est ut spatium directè et tempus inversè, (ob datum spatium per Hyp.) erit in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè, et ratione subduplicatâ vis elasticæ directè; sed datis medii densitate et vi elasticâ, velocitas pulsuum, utcumque varietur spatium, data est, (per Cas. 1. et 2.) ergò velocitas pulsuum erit semper in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè et ratione subduplicatâ vis elasticæ directè.

318. Ex hâc Propositione patet cur soni omnis generis, gravis et acutus, intensus et remissus, pari velocitate in eodem aëre propagentur. Nam sonorum diversitas, quoad *grave* et *acutum*, a numero pulsuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendet (316); at (per hanc Prop.) pulsus aëris, seu plures seu pauciores dato tempore producantur, eâdem semper velocitate diffunduntur et dato tempore datum spatium conficiunt: soni verò in eodem aëre producti eo intensiores sunt, manente tono, quo majus est spatium quod aëris particulæ eundo et redeundo describunt dato tempore; ut si chorda musica validius pulsetur, majores vibrationes dato tempore peragit, majoresque oscillationes particularum aëris excitat, et sonus intensior percipitur, licet tonus idem maneat et proindè pulsuum latitudo ac velocitas non mutentur. Cùm ergo tanta sit velocitas lucis ut per atmosphæram in instanti quoad sensum propagetur (per schol. ad Prop. XCVI. Lib. I.); si sonus et lux eodem puncto temporis excitentur, uti in machinis bellicis flamma et fragor producuntur simul, et spectator spatium quo a corpore resonante distat, tempusque quod inter luminis et soni perceptiones intercedit, dimediatur, soni velocitas innotescet. Atque eo modo in variis regionibus varia observata est velocitas soni, et in Angliâ eâ celeritate ferri, Flamstedio et Halleyo visum est, quâ pedes Londinenses plus minus 1142, Parisienses verò 1070, tempore minuti unius secundi percurreret. Quia verò densitas et vis elastica aëris in variis Terrarum locis, diversisque anni tempestatibus in eodem loco mutantur, inde quoque mutari oportet soni velocitatem. Diu creditum est, observantibus Mersenno, Gassendo, et Academicis Florentinis, sonum neque

longitudo inter punctum suspensionis et centrum oscillationis sit A: et quo tempore pendulum illud oscillationem integram ex itu et reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiæ circuli radio A descripti æquale.

Nam stantibus quæ in Propositione XLVII. constructa sunt, si linea quævis physica E F, singulis vibrationibus describendo spatium P S, urgeatur in extremis itus et reditus cujusque locis P et S, a vi elasticâ ([u]) quæ ipsius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini P S æqualis est, oscillari posset: id adeò quia vires æquales æqualia corpuscula per æqualia spatia simul impellent. Quare cùm oscillationum tempora ([x]) sint in subduplicatâ ratione longitudinis pendulorum, ([y]) et longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oscillationis penduli, cujus longitudo est A, in subduplicatâ ratione longitudinis $\frac{1}{2}$ P S seu P O ad longitudinem A. Sed vis elastica, quâ lineola physica E G, in locis suis extremis P, S existens, urgetur, erat (in demonstratione Propositionis XLVII.) ([z]) ad ejus vim totam elasticam ut H L — K N ad V, hoc est (cum punctum K jam incidat in P) ([a]) ut H K ad V: ([b]) et vis illa tota, hoc est pondus incumbens, quo lineola E G comprimitur, est ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ([c]) ad lineolæ longitudinem E G; ideóque ex æquo, vis



conspirante vento accelerari, neque adverso retardari; sed D. Derham experimentis accuratè institutis, falsum id esse asserit.

([u]) * *Quæ ipsius ponderi æquetur,* et quæ decrescat ut ipsius distantia a centro O; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini P S æqualis est, oscillari posset; quia particulæ E F in hujusmodi cycloide oscillantis vis motrix est semper ut distantia ipsius a puncto cycloidis infimo seu medio, et in altissimis seu extremis punctis cycloidis ponderi ipsius æquatur, per Cor. Prop. LI. Lib. I.

([x]) * *Sint in subduplicata ratione longitudinis pendulorum* (472. Lib. I.)

([y]) * *Et longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius,* per Cor. Prop. L. et Cor. 2. Prop. LII. Lib. I.

([z]) * *Ad ejus vim totam elasticam* in loco E G ubi medium quiescit, ut, &c.

([a]) * *Ut H K ad V.* Cùm punctum K incidit in P, evanescit K N et fit H L — K N = H L = H K, per Cor. 1. Lem. VII. Lib. I.

([b]) * *Et vis illa tota, hoc est, pondus incumbens, quo,* &c. Vis elastica tota partis E G est in æquilibrio cum pondere comprimente, ubi medium quiescit.

([c]) * *Ad lineolæ longitudinem E G.* Cùm enim medium homogeneum, cujus altitudo est A, sit (per Hyp.) ejusdem densitatis cum medii parte E G, pondera sunt ut volumina, hoc est, ut lineæ A et E G.

quâ lineola E G in locis suis P et S urgetur, est ad lineolæ illius pondus ut H K × A ad V × E G, sive ut P O × A ad V V, ([d]) nam H K erat ad E G ut P O ad V. Quare cùm tempora, quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint ([e]) reciprocè in subduplicatâ ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illâ elasticâ, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in subduplicata ratione V V ad P O × A, ([f]) atque ideò ad tempus oscillationis penduli cujus longitudo est A in subduplicatâ ratione V V ad P O × A, et subduplicatâ ratione P O ad A conjunctim; id est, in ratione integrâ V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu et reditu compositæ, pulsus progrediendo conficit latitudinem suam B C. Ergo tempus, quo pulsus percurrit spatium B C, ([g]) est ad tempus oscillationis unius ex itu et reditu compositæ, ut V ad A, ([h]) id est, ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius est A. Tempus autem, quo pulsus percurret spatium B C, est ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, ([k]) in eâdem ratione; ideóque tempore talis oscillationis pulsus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. Q. e. d.

Corol. 1. Velocitas pulsuum ea est, quam acquirunt gravia æqualiter accelerato motu cadendo, et casu suo describendo dimidium altitudinis A. Nam tempore casus hujus, cum velocitate cadendo acquisitâ, pulsus percurret spatium ([l]) quod erit æquale toti altitudini A; ideóque tempore oscillationis unius ex itu et reditu compositæ percurret spatium æquale circumferentiæ circuli radio A descripti: ([m]) est enim tempus casûs ad tempus oscillationis ut radius circuli ad ejusdem circumferentiam.

([d]) * *Nam H K erat ad E G ut P O ad V,* in dem. Prop. XLVII.

([e]) * *Sint reciprocè in subduplicatâ ratione virium.* Patet per Cor. 3. Prop. XXIV. Lib. hujus.

([f]) * *Atque ideò ad tempus,* &c. Patet per compositionem rationum et ex æquo; quia (ex demonstratis) tempus unius vibrationis particulæ E F, urgente vi ponderis ipsius, est ad tempus oscillationis penduli cujus longitudo est A, in subduplicatâ ratione P O ad A.

([g]) * *Est ad tempus oscillationis unius ex itu et reditu compositæ,* penduli cujus longitudo est A.

([h]) * *Id est, ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius est A.* Nam (in demonstr. Prop. XLVII.) erat V radius circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo B C; unde est V ad A ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius est A.

([k]) * *In eâdem ratione.* Quoniam tempus quo pulsus percurrit spatium B C, est ad tempus datum oscillationis integræ penduli cujus longitudo A, datis medii densitate et vi elasticâ datâ, est ut spatium B C ad datam peripheriam circuli radio A descripti; liquet, quod tempus, quo pulsus percurrit spatium B C, aut eadem celeritate percurreret datam peripheriam circuli radio A descripti, fore eis spatiis proportionalem. Quare tempus quo pulsus percurrit spatium B C, est ad tempus oscillationis unius ex itu et reditu compositæ penduli cujus longitudo est A, ut tempus quo pulsus percurrit idem spatium B C, ad tempus quo percurrit longitudinem æqualem circumferentiæ circuli cujus radius est A; ideóque tempore talis oscillationis pulsus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem.

([l]) * *Quod erit æquale toti altitudini A* (30. Lib. I.)

([m]) * *Est enim tempus casûs,* per dimidiam altitudinem A ad tempus oscillationis unius ex solo itu, vel solo reditu constantis, ut diameter circuli ad ejus circumferentiam (470. Lib. I.), ideóque ad tempus duplum oscillationis unius ex itu et reditu compositæ, ut radius circuli ad ejus

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A sit ut fluidi vis elastica directè et densitas ejusdem inversè; ([n]) velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione densitatis inversè et subduplicatâ ratione vis elasticæ directè.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, et pars inventa ([o]) erit pulsus unius latitudo. Q. e. i.

Scholium.

Spectant Propositiones novissimæ ad motum lucis et sonorum. ([p]) Lux enim cùm propagetur secundum lineas rectas, in actione solâ (per Prop.

circumferentiam. Quare cùm velocitates uniformes sint ut spatia eodem tempore descripta, pulsus verò propriâ velocitate æquabili peripheriam circuli radio A descripti tempore oscillationis unius ex itu et reditu compositæ percurrat, et grave cum uniformi velocitate, quam acquirere potest cadendo per dimidiam altitudinem A, eodem tempore idem spatium describat; patet velocitates illas pulsus et gravis esse æquales.

([n]) * *Velocitas pulsuum erit,* &c. Velocitas pulsuum, ut pote æqualis (per Cor. 1.) velocitati quam gravia per dimidiam altitudinem A cadendo acquirunt, est in ratione subduplicatâ altitudinis illius A (28. Lib. I.); sed altitudo A medii homogenei, cujus densitas eadem est cum densitate medii E G et pondus in æquilibrio cum ejusdem medii E G vi elasticâ, manente densitate est ut pondus seu ut vis elastica directè, et manente vi elasticâ seu pondere est ut densitas inversè, quia densitas est semper ut pondus directè et volumen seu altitudo A inversè; et propterea conjunctis his rationibus altitudo A est semper in ratione compositâ ex ratione vis elasticæ directè et ratione densitatis inversè. Quare velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione densitatis inversè et subduplicatâ ratione vis elasticæ directè.

([o]) * *Erit pulsus unius latitudo.* Quoniam pulsus omnes uniformi cum velocitate propagantur (ex dem. Prop. XLVIII. et XLIX.) et tot pulsus æquales producuntur in aëre, quot sunt corporis tremuli vibrationes isochronæ ex itu et reditu compositæ (per Cor. Prop. XLVII.); si spatium quod pulsus seu sonus dato tempore percurrere possit, per numerum vibrationum, quas corpus sonorum eodem tempore perficit, dividatur, quotus erit pulsûs unius latitudo. Sed dato sono, numerus vibrationum quas corpus sonorum dato tempore peragit, invenitur (per formulas 303, 304); si nimirum chorda musica ad unisonum vel ad notam consonantiam cum sono dato reducatur. Cùm enim tonorum differentia a numero vibrationum quas corpus resonum dato tempore absolvit, pendeat (308 et 312); iidem toni eodem vibrationum isochronarum numero producuntur. Notum verò est spatium quod sonus dato tempore describit (318).

Exempli causâ, si sonus omnium acutissimus, quem possimus distinguere, vibrationibus integris 6400 tempore minuti unius secundi absolutis producatur, et omnium gravissimus vibrationibus $12\frac{1}{2}$ excitetur, uti D. Sauveur in Historia Acad. Scient. Paris. an. 1700. arbitratus est; divide spatium 1142. pedum Londinensium, quod sonus tempore minuti unius secundi conficit, per numeros 6400. et $12\frac{1}{2}$ successivè, et quoti, videlicet digiti 2, 14, et pedes 91, 36, erunt latitudines pulsuum, quibus soni acutissimus et gravissimus producuntur.

([p]) * *Lux enim cùm propagetur secundùm lineas rectas,* et interpositis corporibus opacis intercipiatur, in actione solâ, seu pressione, motuve per medium quodlibet fluidum propagato, consistere nequit; quia pressio et motus per medium omne fluidum propagata divergunt a recto tramite in spatia immota et pone obstacula circumquaque diffunduntur, per Prop. citatas. Cùm igitur lumen sit corpus, ut pote motu progressivo præditum, ab obstaculis reflexum et refractum.

XLI. et XLII.) consistere nequit. Soni verò propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quam aëris pulsus propagati per Prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint et graves, quales sunt soni tympanorum. (q) Nam tremores celeriores et breviores difficilius excitantur. Sed et sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cùm pondera specifica aquæ pluvialis et argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, et ubi mercurius in barometro altitudinem attingit digitorum Anglicorum 30, pondus specificum aëris et aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: (r) erunt pondera specifica aëris et argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërem nostrum subjectum comprimere posset, erit 356700 digitorum, seu pedum Anglicorum 29725. Estque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris Problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum descripti (s) circumferentia est pedum 186768. Et cùm pendulum digitos $39\frac{1}{5}$ longum oscillationem ex itu et reditu compositam tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, (t) absolvat; pendulum pedes 29725 seu digitos 356700 longum (u) oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum $190\frac{3}{4}$ absolvere debebit. Eo igitur tempore sonus progrediendo (x) conficiet pedes 186768, ideóque tempore minuti unius secundi pedes 979.

motumque in corporibus quæ inflammat excitans, necesse esse videtur ut a corporibus luminosis tenuissima corpuscula incredibili fere velocitate quaquaversum emittantur. Spatia igitur cœlestia, quæ astrorum omnium lux immensâ illâ celeritate permeat, materiâ quâdam æthereâ densissimâ, quæ radiorum lucis motum interciperet, plena esse non possunt.

(q) 319. * *Nam tremores celeriores et breviores difficilius excitantur.* Corpora enim majora et minus elastica majoribus soni gravioris, cum quo consonare possunt, vibrationibus facilius concutiuntur et congruenter ad pulsuum motum agitantur; nam debet esse proportio quædam inter pulsuum aëris latitudinem et corporum circumjectorum magnitudinem, densitatem et vim elasticam, ut sonus iis communicetur; et quo fibræ breviores sunt, tenuiores et magis tensæ, eo facilius acuto sono seu brevioribus aëris pulsibus agitantur et contremunt. Quæ omnia patent per notam 317.

(r) * *Erunt*, ex æquo et per compositionem rationum, pondera specifica sive densitates aëris et argenti vivi ut 1 ad 11890. Sed fluidorum in se homogeneorum, eidem basi incumbentium, et in æquilibrio consistentium altitudines sunt inversè ut densitates (173. Lib. II.): est igitur 1 ad 11890 ut 30 digit. ad altitudinem aëris uniformis qui cum 30 digitis argenti vivi æquiponderat; et ideò altitudo hæc est digitorum 356700, seu, dividendo per 12, pedum Anglicorum 29725.

(s) * *Circumferentia est pedum* 186768. Est enim radius ad circumferentiam ut 113 ad 710, sive ut 29725 ad 186768 quàm proximè.

(t) * *Absolvat.* Pendulum cujus longitudo est pedum Parisiensium 3 et linearum $8\frac{1}{2}$, oscillationem unam ex itu et reditu compositam tempore minutorum duorum secundorum absolvit (471. Lib. I.); et pes Londinensis est ad pedem Parisiensem ut 15 ad 16 quam proximè, et ita sunt pedes 3 cum lineis $8\frac{1}{2}$ ad digitos $39\frac{1}{6}$, vel $39\frac{1}{5}$ quam proximè.

(u) * *Oscillationem consimilem tempore*, &c. Oscillationum tempora sunt in subduplicatâ ratione longitudinis pendulorum (472. Lib. I.), et propterea ut $39\frac{1}{5}$ ad 356700, ita 4 ad quadratum numeri minutorum secundorum, qui quæritur, et peracto calculo invenitur esse $190\frac{3}{4}$ quam proximè.

(x) * *Conficiet pedes*, &c. Per Prop. XLIX.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio crassitudinis solidarum particularum aëris, per quam sonus utique (y) propagatur in instanti. Cùm pondus aëris sit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, et sales sint fere duplo densiores quàm aqua; si particulæ aëris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, et raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: (z) diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, et ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$ seu 109 circiter, ob crassitudinem particularum aëris: et sic sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aëre latentes, cùm sint alterius elateris et alterius toni, (a) vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo soni propagantur. His autem quiescentibus, motus ille celerius propa-

(y) * *Propagatur in instanti.* Nam corpus solidum quod condensari non potest, dum movetur, totum simul movetur, et ideò motus ab uno corporis illius extremo ad alterum extremum propagatur in instanti.

(z) * *Diameter particulæ aëris erit*, &c. Fingantur cubi duo æquales, quorum alter aëre plenus sit, alter medio continuo ejusdem circiter densitatis cum aquâ vel salibus. Hoc medium continuum divisum sit in particulas æquales, tenuissimas et sese mutuo contingentes; aër verò ex hujusmodi particulis, quæ æqualibus intervallis distinctæ sint, constet. Harum particularum diameter dicatur D, spatium inter illas in aëre interceptum S, et ideò intervallum inter centra particularum aëris $S + D$, numerus particularum aëris in uno cubi latere N, et proinde earum numerus in cubo toto aëreo N^3, et latus cubi $NS + ND$. Sit M numerus particularum alterius medii continui in uno latere cubi, et propterea M^3 earum numerus in cubo toto, ac M D cubi latus. Quia duo cubi æquales supponuntur, erit $NS + ND = MD$. Si densitas aëris sit ad densitatem alterius medii continui ut 1 ad A; quia paribus voluminibus, densitates sunt ut quantitates materiæ, quæ sunt ut numeri particularum magnitudine et densitate æqualium, erit $1 : A = N^3 : M^3$, et hinc $1 : A^{\frac{1}{3}} = N : M$, idcóque $M = NA^{\frac{1}{3}}$. Quare cùm sit $NS + ND = MD = NDA^{\frac{1}{3}}$, erit $S + D = DA^{\frac{1}{3}}$, et $S = D \times [A^{\frac{1}{3}} - 1]$, ideóque $D : S = 1 : A^{\frac{1}{3}} - 1$ ac $D : S + D = 1 : A^{\frac{1}{3}}$. Jam si ponatur A fere æqualis numero 870, erit fere $A^{\frac{1}{3}} = 9$; si verò ponatur $A = 1000$, vel $A = 1100$, vel $A = 1200$, erit fere $A^{\frac{1}{3}} = 10$; unde diameter D solidæ particulæ aëris erit ad intervallum $S + D$ inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, et ad intervallum S inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde spatium totum quod particulæ solidæ in lineâ rectâ datâ positæ occupant, erit ad spatium reliquum quod intervalla particularum in eâdem lineâ tenent, ut 1 ad 8 vel 9 circiter, et ad totam lineam ut 1 ad 9 vel 10. Sed si nulla habeatur ratio crassitudinis solidarum particularum aëris, sonus lineam rectam pedes 979 longam tempore minuti unius secundi describit: quare cùm sonus per spatium totum quod solidæ particulæ aëris occupant, in instanti propagetur, et sit 9 ad 1 ut linea pedes 979 longa ad ipsius partem quam particulæ solidæ aëris occupant; partem illam, quæ est $\frac{979}{9}$, seu 109 pedum circiter, addere licet spatio 979 pedum.

(a) * *Vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo soni propagantur.* Nam vibratorius particularum aëris motus, quo sonus producitur, corporibus ejusdem toni facile, at corporibus alterius elateris et alterius toni ægrè aut nullo modo communicari potest (317). Unde si atmosphæra constet ex decem partibus aëris veri et unâ parte vaporum, sitque proinde totum pondus atmosphæræ ad pondus vaporum ut 11 ad 1, et ad pondus aëris veri, subducto pondere vaporum, ut 11 ad 10, minuenda est quantitas materiæ movendæ in ratione 11 ad 10. Sed si densitas medii, sive quantitas materiæ sub dato volumine contentæ, cæteris paribus, minuatur, velocitas soni augetur in eâdem ratione subduplicatâ (per Prop. XLVIII.). Quare (in Hyp. Newt.) velocitas soni augenda est in ratione subduplicatâ 10 ad 11, vel in integrâ circiter ratione 20 ad 21; et ideò spatium dato tempore minuti unius secundi descriptum, quod erat 1088 pedum, augendum in ratione 20 ad 21. Est autem fere 20 ad 21 ut 1088 ad 1142.

gabitur per solum aërem verum, idque in subduplicatâ ratione minoris materiæ. Ut si atmosphæra constet ex decem partibus aëris veri et unâ parte vaporum, motus sonorum celerior erit in subduplicatâ ratione 11 ad 10, vel in integrâ circiter ratione 21 ad 20, quam si propagaretur per undecim partes aëris veri: ideóque motus sonorum supra inventus, augendus erit in hâc ratione. Quo pacto sonus, tempore minuti unius secundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita se habere debent tempore verno et autumnali, ubi aër per calorem temperatum rarescit, et ejus vis elastica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aër per frigus condensatur, et ejus vis elastica remittitur, motus sonorum tardior esse debet in subduplicatâ ratione densitatis; et vicissim æstivo tempore debet esse velocior.

Constat autem per experimenta quod soni tempore minuti unius secundi eundo conficiunt pedes Londinenses plus minus 1142, Parisienses vero 1070.

Cognitâ sonorum velocitate innotescunt etiam intervalla pulsuum. [b] Invenit utique D. Sauveur, factis a se experimentis, quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum Parisiensium plus minus quinque, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ tempore minuti unius secundi [c] centies recurrit. Sunt igitur pulsus plus minus centum in spatio pedum Parisiensium 1070, quos sonus tempore minuti unius secundi percurrit; ideóque pulsus unus occupat spatium pedum Parisiensium quasi $10\frac{7}{16}$, id est, duplam circiter longitudinem fistulæ. [d] Unde verosimile est quod latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porro cur soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutius audiuntur ubi longissimè distamus a corporibus sonoris, quàm cùm proximè absumus, patet ex Corollario Prop. XLVII. Libri hujus.

[b] * *Invenit utique D. Sauveur* in Historiâ Acad. Scient. Paris. an. 1700.

[c] * *Centies recurrit,* hoc est centum oscillationes ex itu et reditu compositas tempore minuti unius secundi absolvit. Idem D. Sauveur in Monumentis Acad. Paris. an. 1713. oscillationes 101 vel 102 pro ejusdem fistulæ sono posuit.

[d] * *Unde verosimile est,* &c. Idem confirmatur alio experimento ejusdem D. Sauveur, qui loco mox citato invenit quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum Parisiensium plus minus 2, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ 243 oscillationes integras tempore minuti unius secundi perficit. Unde si dividatur numerus 1070 per 243, prodit pulsus unius latitudo ped. Paris. $4\frac{2}{5}$ circiter, id est, dupla circiter longitudo fistulæ. Est autem in organis pneumaticis fistula aperta, quæ patet in superiori et latiori extremo, alteri quo aër fistulam ingreditur, opposito. Si occludatur fistula, octavâ gravius sonat.

Huc usque de sono directo plura diximus, de reflexo pauca adjungenda sunt.

PROPOSITIO.

320. Sonus percipitur tanquam ex eo loco procedens ex quo quasi centro pulsus aëris propagantur. Constat experientiâ.

Sed et cur soni in tubis stentorophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocus singulis re-

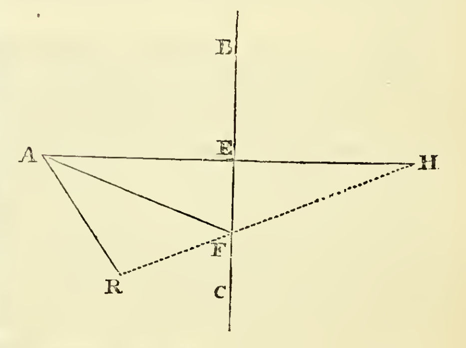
321. *Corol.* 1. Hinc si sonus e centro quovis A directe propagatus in obstaculum planum satis magnum B C incurrat, et ex A ducatur ad B C perpendicularis A E, producaturque ad H ut sit E H æqualis A E; sonus reflexus eodem fere modo percipietur ac si ex loco H tanquam centro directè propagaretur (194).

322. *Corol.* 2. Similiter si sonus a centro quovis propagatus in obstaculum quodlibet impingat, a quo ita reflectatur ut post reflexionem radii soni in centrum aliud convergant; sonus reflexus tanquam ex hoc secundo centro propagatus audietur.

323. *Corol.* 3. Unde si radii sonori satis densi ad aurem appellentes et soni unius sensationem producentes, ab aure in diversa centra convergant; locus ex quo sonus propagatur, non bene distinguetur.

324. Si sonus producatur in A, et deinde ab obstaculo quovis B C reflectatur tanquam ex centro H propagatus; auditor in loco R sonum directum per A R propagatum percipiet primùm; deinde sonum reflexum quasi ex centro H procedentem, postquam motu directo spatium A F, et motu reflexo spatium F R descripsit, audiet. Idem igitur sonus audietur bis, modò tamen distantiarum A R et A F R differentia tanta sit ut sonus directus et sonus reflexus eodem sensibili momento organum auditûs non afficiant; nam si sonus reflexus ad aurem perveniret eo tempore, quo soni directi impressio adhuc in eâ perseverat, non geminus, sed intensior tantùm sonus audiretur. Porrò experientiâ constat sonos vix posse distingui; si plures quâm 9 circiter syllabæ tempore minuti unius secundi successivè producantur; et ideò ne sonus reflexus cum directo confundatur, inter eorum ad aurem appulsus intercedere oportet partem nonam minuti unius secundi, quo tempore sonus describit spatium 127 pedum Londinensium circiter. Hoc igitur spatio minor esse non debet distantiarum A R et A F R differentia, ut sonus reflexus distinctè percipi possit in R. Quod si auditor in A locetur, ubi sonus directus producitur, et spatium 2 A E quod sonus describit ut ad centrum A post reflexionem in E redeat, sit 127 pedum Londinensium, ideóque A E 63 vel 64 pedum circiter, distingui poterit sonus reflexus a directo. Si plura sint obstacula justis intervallis dissita, in quæ sonus directe offendat, is quasi ex variis locis pluries repetitus audietur; ut cum machinarum bellicarum fragorem vel tonitru boatum circumjecta ædificia vel crassiores nubes pluries referunt. Sæpe etiam obstacula sonum directum mutant, dum vehementiori aëris tremore concussa variè contremunt et aërem repercutiendo detonant.

325. Ex iisdem principiis explicari potest tubæ vocalis seu stentorophonicæ efficacia ad vocem articulatam in loca maxime dissita propagandam. Sunt hujusmodi tubæ variarum figurarum, sed omnes satis angustæ, oblongæ et intus perpolitæ, quo sonus in arctum coactus in latius spatium sese diffundere et virium detrimentum pati prohibeatur, ac radii sonori in determinatam plagam confertiores dirigantur. Fabrefiunt ex materiâ ad concipiendum motum tremulum, quo sonus producitur, aptâ, ut sonus hoc partium tubæ et aëris ab ipsis agitati tremulo motu multiplicatus impetum majorem acquirat et longius progrediendi vim habeat. Optima tubarum vocalium figura, auctore clar. Joh. Matthia Hasio, illa censetur, quæ fit ex conversione parabolæ circa ipsius axem, orificio exiguo tubæ, quod os



loquentis suscipit, in ipso foco parabolæ constituto. Hâc enim tubâ radii sonori, saltem magnam partem, reflectuntur ad axem tubæ paralleli (194. Lib. II. et Theor. III. de Parabola Lib. I.). Idem Hasius, quo tubam longiorem, non nimium auctâ amplitudine, reddat, tubum ellipticum oblongum parabolico ita jungit, ut elliptici focus unus concidat cum foco parabolici, et os loquentis in altero elliptici foco constituatur; quâ ratione fit ut radii soni ab ore in tubo elliptico ad focum parabolici partim directi, partim reflexi dirigantur (per Theor. IV. de Ellipsi), et deinde in tubo parabolico, ut modò dictum est, progrediantur. Limbus tubæ, qua parte amplissima est, quâque sonus emittitur, ad formam labiorum recurvandus est, quo minus effectum tubæ turbare possit aëris externi in tubam irruentis motus. Hæc omnia fusè et accuratè exposita vides, in ipsa laudati auctoris Dissertatione Physico-Mathematicâ de Tubis Stentoreis.

* Tubis stentoreis annumerandæ sunt omnes tubæ militares aut venatoriæ sive rectæ sive incurvæ, exiguus enim sibilus quem edit tubicen

cursibus a causa generante augeri solet. Motus autem in tubis dilatationem sonorum impedientibus, tardius amittitur et fortius recurrit, et propterea a motu novo singulis recursibus impresso magis augetur. Et hæc sunt præcipua phænomena sonorum.

constricto aëre inter labium et tubæ oram, in prodigiosum erumpit sonum, et observabile videtur ea instrumenta ita a parabolâ discrepare ut axis suæ respectu convexa potius sit tuba quàm concava. Incrementum itaque soni non tam pendere videtur ex eo quod sonus secundùm axis tubæ directionem parallelus exeat, quàm ex eo ipso quod indicat Newtonus, nempe ex motus reciprocatione, ita ut forma tubæ ea esse debeat ut sonus ab uno pariete ad alterum repellatur, extrinsecus sonum derivando, ita tamen ut nonnisi per innumeras reflexiones sive reciprocationes foras emittatur.

SECTIO IX.

De motu circulari fluidorum.

HYPOTHESIS.

Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, quâ partes fluidi separantur [e] *ab invicem.*

PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

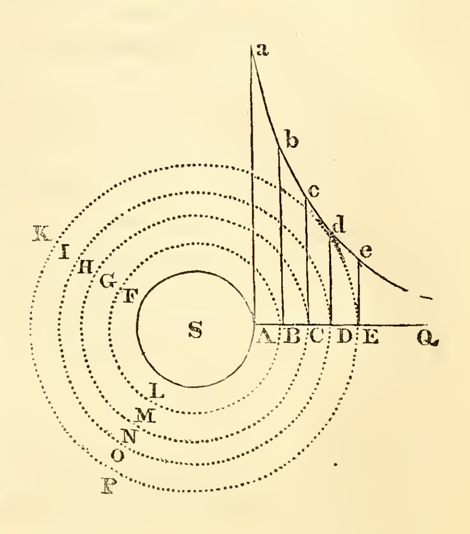
Si cylindrus solidus infinitè longus in fluido uniformi et infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, et ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri.

Sit A F L cylindrus uniformiter circa axem S in orbem actus, et circulis concentricis B G M, C H N, D I O, E K P, &c. distinguatur fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ erunt (per Hypothesin) [a] ut eorum

[e] * *Ab invicem.* Resistentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, est semper eadem in spatiis æqualibus, quæcumque fuerit mobilis velocitas; cùm in omnibus spatiis æqualibus idem defectus lubricitatis superandus sit. Est igitur hæc resistentia, cæteris paribus, ut spatium quod mobile describit, hoc est, dato tempore, ut velocitas. Quia verò partes contiguæ quæ simul pari velocitate moventur, sese mutuo non atterunt; capienda hic est velocitas partium relativa, quâ partes separantur ab invicem. Sed de hâc Hypothesi vide scholium sequens.

[a] 326. * *Ut eorum translationes ab invicem et superficies contiguæ,* &c. Si superficies contiguæ nullâ velocitate relativâ inter se moverentur, aut si essent perfectè lubricæ, nulla foret earum frictio: at si superficies sint asperæ et alia super aliam incedat, nascetur ex partium attritu resistentia, quæ, dato tempore et cæteris paribus, velocitati superficierum relativæ proportionalis est (per Hyp.). Unde si superficies contiguæ, homogeneæ et æqualis ubique asperitatis sese viribus æqualibus premant, et præterea superficies quæ super alias sibi contiguas incedunt, æquales sint; resistentiæ ex attritu dato tempore genitæ proportionales erunt translationibus superficierum contiguarum ab invicem, cùm hujusmodi translationes sint spatia velocitatibus relativis dato tempore descripta. Si verò translationes illæ seu velocitates relativæ superficierum contiguarum ponantur æquales; resistentiæ, cæteris paribus, erunt ut superficies contiguæ quæ sese mutuo atterunt. Quare si nec superficies contiguæ, nec earum velocitates relativæ seu translationes ab invicem æquantur; resistentiæ, cæteris paribus, erunt in ratione compositâ ex ratione superficierum contiguarum et ratione translationum ab invicem dato tempore factarum. Impressiones verò contiguorum orbium in se mutuo factæ, sunt ut resistentiæ quibus producuntur.

translationes ab invicem, et superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concavâ quam ex parte convexâ; prævalebit impressio fortior, et motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari et fieri in regiones contrarias. (b) Unde cum impressiones sunt ut contiguæ superficies et harum translationes ab invicem, erunt translationes inversè ut superficies, hoc est, inversè ut superficierum distantiæ ab axe. (c) Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè et distantiæ inversè; hoc est, conjunctis rationibus, ut quadrata distantiarum inversè. Quarè si ad infinitæ rectæ S A B C D E Q partes singulas erigantur perpendicula A a, B b, C c, D d, E e, &c. ipsarum S A, S B, S C, S D, S E, &c. quadratis reciprocè proportionalia, et per terminos perpendicularium duci intelligatur (d) linea curva hyperbolica; erunt summæ diffe-

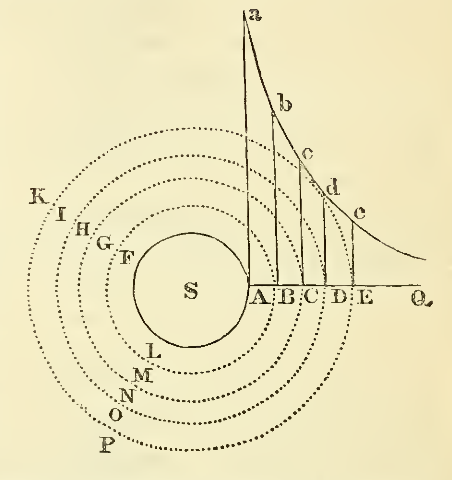


(b) * *Unde cùm* (per Hyp.) orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, et proinde impressiones ex utraque parte cujusque orbis in plagas contrarias factæ æquales sint; impressiones illæ, dato tempore, datæ sunt, et ideò ratio composita ex rationibus translationum et superficierum contiguarum, quæ est ut impressio, data est. Translationes igitur dato tempore factæ, sunt inversè ut superficies, hoc est, inversè ut superficierum distantiæ ab axe: nam cylindrorum ejusdem longitudinis superficies sunt ut distantiæ ab axe cylindri, et hic omnes superficies cylindricæ; quæ circa axem infinitum revolvuntur, sunt ejusdem longitudinis infinitæ (per Hyp.)

(c) * 327. *Sunt autem differentiæ motuum angularium*, &c. Motus angulares dicuntur ii, quibus singula puncta A, B, C, D, E, &c. radiis ad axem cylindri perpendiculariter ductis angulos describunt. Sunt igitur anguli illi quasi spatia uniformi motu descripta, et ideò motus angulares sunt ut anguli descripti directe et tempora quibus describuntur inversè, et dato tempore sunt ut anguli descripti. Hinc, dato tempore, motuum angularium differentiæ sunt ut differentiæ angulorum descriptorum, hoc est (154. Lib. I.) ut translationes punctorum seu superficierum ab invicem directè et distantiæ ab axe inversè: nam translationes illæ sunt arcus circulares quos singula puncta per suam velocitatem relativam describunt, et distantiæ ab axe sunt illorum arcuum radii. Sed translationes dato tempore factæ, sunt (ex demonstr.) ut distantiæ ab axe inversè. Quarè differentiæ motuum angularium, dato tempore, sunt ut quadrata distantiarum inversè.

(d) * *Linea curva hyperbolica*. Quoniam ordinatæ A a, B b, &c. sunt inversè ut abscissarum S A, S B, &c. quadrata; crescente abscissâ ac sine fine productâ; correspondens ordinata decrescit et numquam evanescit, et ideò recta S Q est curvæ asymptotus; et simili ratione patet rectam per S ductam normaliter ad S Q esse alteram curvæ asymptotum.

rentiarum, (e) hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum A a, B b, C c, D d, E e, id est, si ad constituendum medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur et latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ A a Q, B b Q, C c Q, D d Q, E e Q, &c. Et (f) tempora motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis D reciprocè ut area D d Q, hoc est (per notas curvarum quadraturas) (g) directè ut distantia S D. Q. e. d.



(h) *Corol.* 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reciprocè ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri, et velocitates absolutæ sunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, et cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolutionum tempora ut ipsorum semi-diametri, et perseveret fluidi pars unaquæque in motu suo:

(e) * *Hoc est, motus toti angulares.* Quoniam solo cylindri A F L impulsu agitur fluidum in orbem (per Hyp.), necesse est ut motus angularis partium fluidi, crescente earum distantia ab axe cylindri, continuo decrescat, ac tandem ad distantiam infinitam evanescat. Unde motus totus angularis puncti A seu orbis A F L est omnium maximus, et motus totus angularis puncti cujuslibet C æqualis est summæ omnium differentiarum motuum angularium punctorum D, E et sequentium in infinitum (106. Lib. I.); ideóque motus toti angulares sunt ut respondentes summæ linearum A a, B b, C c, D d, E e, &c. in infinitum.

(f) * 328. *Tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia.* Motus angulares sunt ut anguli descripti directè et tempora quibus describuntur inversè (326); et propterea si anguli descripti capiantur æquales quatuor rectis, ut totus circulus describatur et tempora fiant temporibus periodicis æqualia, motus angulares erunt ut tempora periodica inversè.

(g) * *Directè ut distantia S D.* Areæ D d Q momentum est D d $\times$ D E; et ideò, ob ordinatam D d quadrato abscissæ S D reciprocè proportionalem, momentum illud est ut $\frac{DE}{SD^2}$, et (per Cas. 4. Lem. II. Libri hujus) area D d Q est ut $\frac{1}{SD}$. quæ quantitas negativa prodit, quia area D d Q abscissæ D S non adjacet, sed ad partes contrarias vergit in infinitum. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis D reciprocè ut $\frac{1}{SD}$, hoc est, directè ut S D.

(h) * *Corol.* 1. Ex demonstratis, motus angulares partium fluidi sunt reciprocè ut tempora periodica, hoc est, reciprocè ut illarum distantiæ ab axe cylindri. Velocitates verò absolutæ, ut pote uniformes, sunt ut circumferentiæ descriptæ, seu ut distantiæ ab axe cylindri directè et tempora periodica inversè, hoc est, ut distantiæ directè et distantiæ inversè, ideóque sunt in ratione æqualitatis. Hinc verò (per Cor. 5. Prop. IV. Lib. I.) vires centrifugæ particularum æqualium fluidi sunt reciprocè ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri; et propterea vis quâ tota superficies cylindrica nititur ab axe cylindri re-

[i] erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro et fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde si toti cylindrorum et fluidi systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, [k] habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

Corol. 5. Igitur si fluido et cylindro exteriore quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, et paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quam fluidi partes singulæ motum Corollario quarto definitum [l] acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; et accelerabitur ejus motus [m] quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; et nisi cylindrus inte-

cedere, est ut eadem superficies directè et distantia ejus ab axe inversè, et ideò data est.

[i] * *Erunt partium singularum tempora periodica ut,* &c. Patet, quia cylindrus exterior uniformi velocitate motus locum tenet superficiei cylindricæ, quæ in demonstratione adhibita est.

[k] * *Habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.* Sit E K P cylindrus exterior, cujus tempus periodicum in hypothesi Corollarii 2. dicatur t E; et quoniam in eadem hypothesi velocitates particularum absolutæ sunt æquales (per Cor. 1.), singulæ illæ particulæ spatia æqualia eodem tempore t E describent, hoc est, spatia æqualia peripheriæ E K P, quam punctum E tempore t E percurrit. Jam si toti cylindrorum et fluidi systemati auferatur motus omnis angularis. Cylindri exterioris; ex spatio E K P, quod singulæ particulæ tempore t E describunt, auferenda erit integra circuli peripheria, quam particula quælibet seorsim describit, ut habeatur spatium quod eadem particula eodem tempore t E percurrit in cylindro quiescente. Erit igitur E K P — D I O spatium quod particula quævis D tempore t E describit, postquam motus omnis angularis cylindri exterioris ablatus est. Quia verò particulæ singulæ revolvuntur æquabiliter (per Hyp.), erit spatium E K P — D I O ad D I O, sive S E — S D ad S D, ut tempus t E ad tempus periodicum particulæ D in cylindro quiescente; et ideò si hoc tempus dicatur T D, erit $TD = \frac{SD \times tE}{DE}$; et simili modo tempus periodicum particulæ A in eâdem hypothesi (quod dicatur T A) $= \frac{SA \times tE}{AE}$; unde habetur $tE = \frac{AE \times TA}{SA}$. et ideò $TD = \frac{SD \times AE \times TA}{SA \times DE}$. Dato igitur tempore periodico cylindri interioris, dabitur tempus periodicum particulæ cujusvis fluidi in cylindro quiescente. Quia verò A E, S A et T A datæ sunt, erit T D ut $\frac{SD}{DE}$, hoc est, particularum fluidi tempora periodica sunt ut distantiæ ipsarum ab axe cylindri interioris directè et distantiæ earumdem a superficie cylindri quiescentis inversè.

[l] * *Acquirant.* Patet per Cor. 3.

[m] * *Quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur.* Tamdiu enim cylindrus interior atterit et urget fluidi partes, motumque ipsis eâ actione communicat qui ad cylindrum exteriorem transit, quamdiu omnium partium contiguarum motus angulares inæquales sunt, seu quamdiu tempora periodica non æquantur inter se.

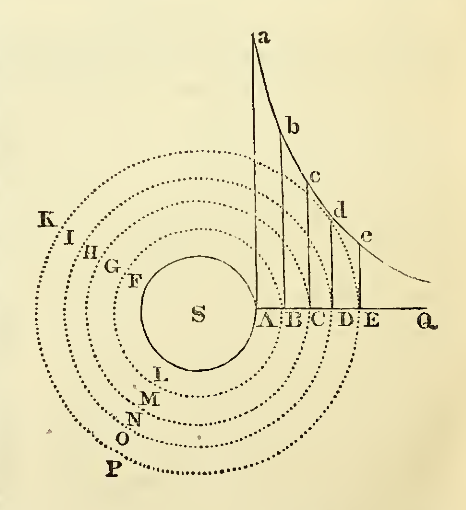
rior vi aliquâ extrinsecus impressâ motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in aquâ profundâ stagnante experiri licet.

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si sphæra solida, in fluido uniformi et infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, et ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum a centro sphæræ.

Cas. 1. Sit A F L sphæra uniformiter circa axem S in orbem acta, et circulis concentricis B G M, C H N, D I O, E K P, &c. distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem orbes illos esse solidos; et quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ, erunt (per hypothesin) ut eorum translationes ab invicem et superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impressio fortior, et velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari, et fieri in regiones contrarias. Unde cùm impressiones sint ut contiguæ superficies et harum translationes ab invicem; erunt translationes inversè ut superficies, (n) hoc est, inversè ut quadrata distantiarum superficierum a centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distan-



(n) * *Hoc est, inversè ut quadrata distantiarum superficierum a centro.* Nam superficies sphæricæ, ut pote similes, sunt ut quadrata radiorum seu distantiarum a centro.

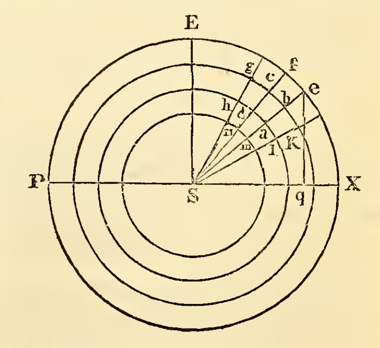
tias, sive ut translationes directè et distantiæ inversè; hoc est, conjunctis rationibus ut cubi distantiarum inversè. Quare si ad rectæ infinitæ S A B C D E Q partes singulas erigantur perpendicula A a, B b, C c, D d, E e, &c. ipsarum S A, S B, S C, S D, S E, &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum A a, B b, C c, D d, E e: id est (si ad constituendum medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur et latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ A a Q, B b Q, C c Q, D d Q, E e Q, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis D I O reciprocè ut area D d Q, hoc est, per notas curvarum quadraturas, (°) directè ut quadratum distantiæ S D. (p) Id quod volui primò demonstrare.

(q) *Cas.* 2. A centro sphæræ ducantur infinitæ rectæ quàm plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuo

(°) * *Directè ut quadratum distantiæ S D.* Areæ D d Q momentum est D d $\times$ D E, ideóque, ob ordinatam D d cubo abscissæ S D reciprocè proportionalem, momentum illud est ut $\frac{DE}{SD^3}$, et propterea (per Cas. 4. Lem. II. Libri hujus) area fluens D d Q est ut $\frac{1}{SD^2}$, quæ negativa prodit, quia non adjacet abscissæ D S, sed in plagam contrariam D Q vergit. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis D I O reciprocè ut $\frac{1}{SD^2}$, hoc est, directè ut quadratum distantiæ S D.

(p) * *Id quod volui primò demonstrare.* Casûs primi demonstratio valet, si medium sphæræ circumfusum ex innumeris orbibus solidis, tenuissimis ac concentricis constare fingatur. In casibus secundo et tertio singuli illi orbes sphærici in innumeros annulos, et annuli singuli in tenuissimas particulas, ad constituendum medium fluidum, dividuntur.

(q) * *Cas.* 2. A centro sphæræ S ducantur rectæ quam plurimæ, longitudine infinitæ S k, S b, S c, S g, &c., quæ æquales angulos k S b, b S c, c S g, &c. complectantur; et his rectis circa axem P X revolutis et superficies conicas describentibus, concipe orbes in annulos innumeros secari. Nam cùm superficies P f e X circa axem P X revolvitur, singuli arcus k b, b c, c g, e f, a l, &c. portiones superficierum sphæricarum annulares describunt, et particula quælibet ut b c d a, describit annulum solidum. Annulus unusquisque, ut ille qui revolutione superficiei a b c d describitur, habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem ex revolutione figuræ m a d n, alterum exteriorem ex revolutione figuræ b e f c, et duos laterales ex revolutione figurarum k b a l et c g h d. Attritu interioris et exterioris non potest annulus unusquisque nisi in motu juxta legem casûs primi facto, æqualiter et in partes contrarias urgeri. Alioquin partes fluidi non perseverarent in motu



suo uniformiter, sed intermedius iste annulus (contra Hyp.) in motu suo acceleraretur vel retardaretur, ut de orbibus integris ostensum est in casu primo. *Et propterea annulorum series quælibet a globo in infinitum recta pergens* et inter duas proximas superficies conicas comprehensa, qualis est series annulorum quos figuræ m a d n, a b c d, b e f c, &c. circa axem P X rotatæ describunt, *movebitur pro lege casûs primi, nisi,* &c.

superantes; et his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros secari; et annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem et duos laterales. Attritu interioris et exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facto, æqualiter et in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet a globo in infinitum rectà pergens, movebitur pro lege casus primi, nisi quâtenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hâc lege facto attritus annulorum ad latera nullus est; neque ideò motum, quo minus hâc lege fiat, impediet. Si annuli (r) qui a centro æqualiter distant, vel citius revolverentur vel tardius (s) juxta polos quàm juxta eclipticam; tardiores accelerarentur, et velociores retardarentur ab attritu mutuo, et sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casûs primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, et propterea lex illa obtinebit: hoc est, annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum a centro globi. Quod volui secundò demonstrare.

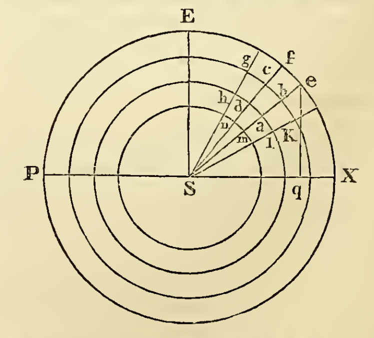
Cas. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolutè et uniformiter fluidam; et quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motûs circularis, sed ad constitutionem fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut prius. His sectionibus annuli omnes quam minimi asperitatem et vim attritus mutui aut non mutabunt, (t) aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportione manebit effectuum proportio, hoc est, proportio motuum et periodicorum temporum. Q. e. d. Cæterum cùm motus circularis, et inde orta vis centrifuga, (u) major sit ad eclipticam

(r) * *Qui a centro æqualiter distant,* seu qui sunt ex eodem orbe resecti, quales sunt annuli ex figurarum l k b a, a b c d, d c g h, et revolutione descripti.

(s) * *Juxta polos* X et P, quam juxta æquatorem, quem recta S E ad axem P X perpendicularis rotata describit.

(t) * *Aut mutabunt æqualiter.* Quoniam enim hæ sectiones non nisi ad fluiditatem singulis annulis conciliandam factæ sunt, et fluidum homogeneum supponitur; si inde mutetur annulorum asperitas et vis attritus mutui, mutabitur æqualiter seu in data ratione. Et idcirco manente resistentiarum et impressionum, quæ ex mutuo partium attritu oriuntur, proportione, manebit effectuum inde productorum proportio, hoc est, proportio motuum et periodicorum temporum; et propterea partium singularum tempora periodica erunt, ut in superioribus casibus, proportionalia quadratis distantiarum ipsarum a centro globi.

(u) * *Major sit ad eclipticam quàm ad polos.* Quoniam particularum E et e in eodem orbe



constitutarum tempora periodica æquantur, ipsarum vires centrifugæ sunt inter se ut radii cir-

quàm ad polos; debebit causa aliqua adesse quâ particulæ singulæ in circulis suis retineantur; ne materia, quæ ad eclipticam est, recedat semper a centro et per exteriora vorticis migret ad polos, indeque per axem ad eclipticam circulatione perpetuâ revertatur.

(x) *Corol.* 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, sunt reciprocè ut quadrata distantiarum a centro globi, et velocitates absolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente similari et infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem vorticis, et motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum a centro globi.

Corol. 3. Quoniam vorticis partes interiores (y) ob majorem suam velocitatem atterunt et urgent exteriores, motumque ipsis eâ actione perpetuo communicant, et exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eâque actione (z) servant quantitatem motûs sui planè invariatam; patet quod motus perpetuo transfertur a centro ad circumferentiam vorticis, et per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphæricas duas quasvis superficies vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quòd motum omnem a materiâ interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum, a quo globus eandem

culorum quos describunt (per Cor. 3. Prop. IV. Lib. I.), hoc est, ut perpendiculares ad axem E S et e q. Vis igitur centrifuga eo major est, quo magis particula accedit ad æquatorem seu eclipticam S E, et in æquatore maxima est, in polo nulla.

(x) 328. * *Corol.* 1. Motus angulares sunt reciproce ut tempora periodica (327), ideóque (ex demonstratis) reciprocè ut quadrata distantiarum a centro globi. Velocitates absolutæ particularum sunt ut peripheriæ circulorum quas describunt, seu ut ipsarum distantiæ ab axe directè, et tempora periodica inversè; et propterea sunt ut distantiæ ab axe directè et quadrata distantiarum a centro globi inversè, ac proinde sunt reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe. Unde velocitates absolutæ particularum in æquatore sunt reciprocè ut ipsarum distantiæ a centro globi, et earum vires centrifugæ reciproce ut cubi distantiarum a centro globi (per Cor. 1. Prop. IV. Lib. I.)

(y) * *Ob majorem suam velocitatem*, &c. Velocitates angulares orbium a centro globi minus distantium majores sunt (per Cor. 1.) quàm velocitates angulares orbium exteriorum et a centro vorticis remotiorum; sed orbes interiores excessu velocitatis angularis, quo relative ad orbes exteriores moventur, hos atterunt et urgent, *motumque ipsis*, &c.

(z) * *Servant quantitatem motûs sui planè invariatam.* Quia (per Hyp.) ea est vorticis conditio, ut unaquæque fluidi pars perseveret in suo motu uniformiter, et in eâdem a centro distantia eodem semper tenore moveatur; et tamen, propter orbium interiorum majorem velocitatem angularem attritumque continuum, orbes exteriores perpetuò urgentur et ad motum accelerandum incitantur; necesse est ut motus perpetuo transferatur a centro ad circumferentiam vorticis, et per infinitatem extimæ circumferentiæ absorbeatur. Quâ ratione fit ut orbium singulorum, qui eamdem motûs quantitatem in alios exteriores simul et semper transferunt, idem sit perpetuò motus.

semper quantitatem motûs accipiat, quam imprimit in materiam vorticis. Sine tali principio necesse est ut globus et vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim et in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, et interea circa axem inclinatione datum vi aliquâ constanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: et primo revolveretur hic vortex novus et exiguus unà cum globo circa centrum alterius, et interea latius serperet ipsius motus, et paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eâdem ratione, quâ hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuo ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, et omnia legibus mechanicis permitterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. et 4. assignatam) et vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione datos certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli eâdem ratione quâ unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeò ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, sed in se mutuo paulatim excurrent; globique per actiones vorticum in se mutuo, perpetuo movebuntur de locis suis, uti in Corollario superiore expositum est; neque certam quamvis inter se positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis quæ in globos constanter impressæ conservant hosce motus, materia ob rationem in Corollario tertio et quarto assignatam, paulatim requiescet et in vortices agi desinet.

Corol. 7. Si fluidum similare claudatur in vase sphærico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem et vas in eamdem partem circa axem eundem revolvantur, sintque eorum tempora periodica ut quadrata semi-diametrorum: partes fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine acceleratione et retardatione, quàm sint eorum tempora periodica ut quadrata distantiarum a centro vorticis. ([a]) Alia nulla vorticis constitutio potest esse permanens.

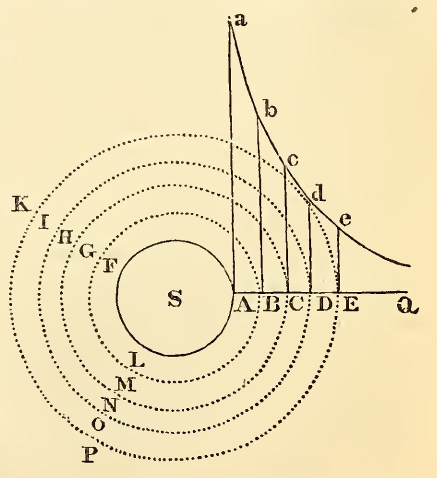
([a]) * *Alia nulla vorticis constitutio potest esse permanens.* Nam (ex demonstr.) ea debet esse vorticis constitutio, ut pars quælibet fluidi possit in suo motu uniformiter perseverare, et ut attritu

Corol. 8. Si vas, fluidum inclusum, et globus servent hunc motum, et motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in se invicem, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium inter se pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm acceleretur attritu ex altero.

(b) *Corol.* 9. Unde si vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum transire per axem globi et motu contrario

ex uno latere non magis tardetur quàm acceleratur attritu ex altero latere.

(b) * *Corol.* 9. Fluidum similare in vase sphærico E K P clausum ita agatur in vorticem, ut tandem partes fluidi in motibus suis sine acceleratione et retardatione perseverent, quemadmodum in Corollario 7. expositum est. In hâc hypothesi velocitates particularum in æquatore existentium sunt ut distantiæ a centro S inversè (528), et ideò ut S D ad S E, sive, ut peripheria D I O ad peripheriam E K P ita est peripheria E K P (quam particula E tempore suo periodico t E describit) ad spatium quod alia quævis particula D eodem tempore conficit, quod proinde spatium erit $\frac{EKP^2}{DIO}$. Quiescat jam vas sphæricum, hoc est, toti systemati vorticis auferatur vasis motus angularis, et particula D tempore t E describet spatium $\frac{EKP^2}{DIO} - DIO$. Sed hoc spatium est ad circumferentiam D I O, aut quod idem est, $SE^2 - SD^2$ est ad SD^2, ut tempus t E ad tempus periodicum (T D) particulæ D in vase quiescente, quod proinde tempus erit $\frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2}$. Et simili modo tempus periodicum particulæ A, quod dicatur T A, erit in vase quiescente $\frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Si itaque detur motus globi, seu tempus periodicum T A, dabitur tempus $tE = \frac{TA \times [SE^2 - SA^2]}{SA^2}$, et inde dabitur tempus periodicum $TD = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2} = \frac{SD^2 \times TA \times [SE^2 - SA^2]}{SA^2 \times [SE^2 - SD^2]}$. Si igitur vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi ad quamlibet datam a centro distantiam. Concipe nunc planum transire per axem globi et motu contrario revolvi; et pone summam temporis revolutionis hujus et revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semi-diametri vasis ad quadratum semi-diametri globi; sive pone SA^2 ad SE^2 ut T A ad quartum, quod erit $\frac{SE^2 \times TA}{SA^2} = \frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$; et tempus periodicum plani erit $\frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2} - \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2} = tE$, quia $TA = \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Quare planum, quo hic utitur Newtonus, ita movetur ut revolutionem suam absolvat eodem tempore t E, quo vas suam revolutionem perficit in hyp. Cor. 7. Sit X tempus periodicum particulæ D respectu plani in vase quiescente; et quia planum et vortex in regiones contrarias moventur, erit T D ad X ut circumferentia

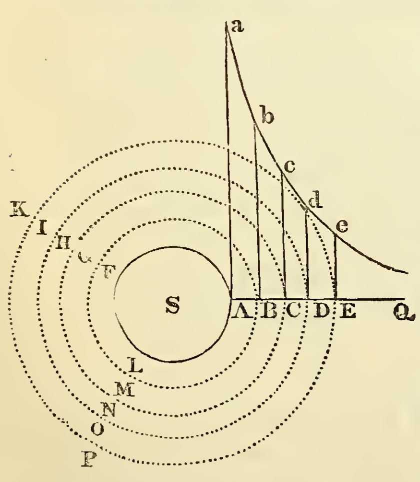


D I O, quam particula D tempore periodico T D describit, ad ejusdem circumferentiæ partem quam eadem particula tempore X percurrit; et ideò pars illa erit $\frac{X \times DIO}{TD} = \frac{X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$, et pars residua circumferentiæ D I O, quam planum eodem tempore X conficit, erit $DIO - \frac{DIO \times X}{TD} = \frac{SD^2 \times DIO \times tE - X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$.

revolvi; et pone summam temporis revolutionis hujus et revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semi-diametri vasis ad quadratum semi-diametri globi; et tempora periodica partium fluidi, respectu plani hujus, erunt ut quadrata distantiarum suarum a centro globi.

Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem datâ cum velocitate quâcumque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per Corol. 8. ([c]) Et motus isti per Corol. 9. dabuntur.

Quia verò planum tempore t E uniformi motu revolutionem suam D I O absolvit, est t E ad X ut D I O ad spatium modo inventum, seu ut $SD^2 \times tE$ ad $SD^2 \times tE - X \times [SE^2 - SD^2]$; unde habetur $SD^2 \times X \times tE = SD^2 \times tE^2 - X \times tE \times [SE^2 - SD^2]$, et ideò $SE^2 \times X = SD^2 \times tE$, ac proinde tempus $X = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2}$. Cùm ergo t E et S E sint quantitates datæ, tempus periodicum X particulæ fluidi D respectu plani prædicti est ut SD^2, sive ut quadratum distantiæ a centro globi. Et quia omnium particularum in eodem



orbe constitutarum tempora periodica æquantur inter se; earum omnium tempora periodica respectu plani sunt ut quadrata distantiarum suarum a centro globi. Q. e. d.

([c]) * *Et motus isti per Corol. 9. dabuntur,* proindeque si cum iis motibus datis componatur vasis motus angularis datus, dabitur motus fluidi in vase data cum velocitate moto.

PROBLEMA.

329. Sphæra solida in fluido infinito et in eâdem a centro distantiâ similari, sed in diversis distantiis in datâ quâvis distantiarum ratione inæqualiter denso circà axem positione datum uniformi cum motu revolvatur et a sphæræ impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo, sitque resistentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, in ratione compositâ ex ratione quâlibet densitatis et ratione etiam quâcumque velocitatis relativæ, oportet invenire tempora periodica partium fluidi.

Distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis ut in demonstratione Prop. LII. factum est; dicanturque $AD = x$, fluidi densitas in loco $D = z$, translatio orbium ab invicem tempore dato $= v$, densitas z sit proportionalis dignitati x^n, et resistentia, cæteris paribus, sit ut $z^m v^p$, seu ut $x^{mn} v^p$. Quia superficies sphærica D I O, est ut x^2, erit impressio orbis D I O, in orbem contiguum, ut $x^{2+mn} v^p$; sed ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari et fieri in regiones contrarias, ac proindè quantitas $x^{2+mn} v^p$, debet esse constans. Quarè erit v^p ut $\frac{1}{x^{2+mn}}$, et v ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}}}$. Sunt autem differentiæ motuum angularium circà axem ut translationes orbium applicatæ ad distantias, hoc est, ut $\frac{v}{x}$, sive ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}}$. Sit jam $DE = dx$, et ordinata D d, ad curvam a b d e, sit ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}}$ erit summa differentiarum, hoc est, motus totus angularis ut area D d Q, quæ est ut $\int \frac{dx}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}} = -\frac{p}{2+mn} \times$

Corol. 11. Si vas et fluidum quiescant et globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, et circumagetur vas nisi violenter detentum, neque prius desinent fluidum et vas accelerari, quàm sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod si vas vi aliquâ detineatur vel revolvatur motu quovis constanti et uniformi, deveniet medium paulatim ad statum motûs in Corollariis 8. 9. et 10. definiti, nec in alio unquam statu quocunque perseverabit. Deinde verò si, viribus illis cessantibus quibus vas et globus certis motibus revolvebantur, permittatur systema totum legibus mechanicis; vas et globus in se invicem agent mediante fluido, neque motus suos in se mutuo per fluidum propagare prius cessabunt, quàm eorum tempora periodica æquentur inter se, et systema totum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

$\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}}}$; et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia, sunt ut $x^{\frac{2+mn}{p}}$, neglectâ quantitate constante $\frac{p}{2+mn}$. Q. e. i.

330. *Corol.* 1. Si resistentia, cæteris paribus, sit ut velocitas, et tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro, erit $p = 1$, et $\frac{2+mn}{p} = \frac{3}{2}$, ideóque $n = -\frac{1}{2m}$. Sed cùm resistentia proportionalis supponatur densitatis dignitati cujus index est m, et crescente densitate crescat, necesse est ut m sit numerus positivus, ac proindè n numerus negativus. Quarè densitas, ut pote proportionalis dignitati x^n, crescente distantiâ in hypothesi Corollarii hujus decrescet. Hoc autem repugnat. Non materia vorticis eò densior esse debet quò longius distat a centro. Conatur enim materia per motum suum circularem recedere ab axe vorticis et propterea premit materiam omnem ulteriorem, eamque condensat, si condensari possit. Prætereà velocitas absoluta partium fluidi in æquatore vorticis est ut earum distantia a centro globi directè et tempus periodicum inversè, hoc est, in hypothesi Cor. hujus ut $\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, ideóque vis centrifuga partium (per Cor. I. Prop. IV. Lib. I.) cæteris paribus est ut $\frac{1}{xx}$, et proindè decrescit in ratione duplicatâ distantiæ auctæ. Ut igitur vortex ad statum permanentem reducatur, oportet ut partes densiores a centro recedant et rariores ad illud accedant, quo vis centrifuga partium centro propiorum, quæ ob majorem velocitatem et minorem distantiam nimia est, per minorem densitatem minuatur.

331. *Corol.* 2. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro, hoc est, si $\frac{2+mn}{p} = \frac{3}{2}$, erit $p = \frac{4+2mn}{3}$, et ideò resistentia, cæteris paribus, ut velocitatis dignitas cujus exponens est $\frac{4+2mn}{3}$. Sed (ex dem. Cor. 1.) m et n sunt numeri positivi. Quarè tempora periodica non possunt esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro, quin index $\frac{4+2mn}{3}$ sit unitate major, et quin proindè resistentia, cæteris paribus, in majori ratione crescat quàm in ratione velocitatis auctæ.

332. *Corol.* 3. Si spatium quo vortex continetur sit ubique plenum et propterea medii densitas uniformis supponatur, littera z quæ densitatem exponebat, significet jam fluiditatis defectum, sitque resistentia, cæteris paribus, ut dignitas z^m. His positis ostendetur ut in Cor. 1. et 2. factum est, quod si tempora periodica statuantur in ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro, materia vorticis eò fluidior erit quò longius distat a centro, vel resistentia augebitur in majori ratione quàm ea est in quâ velocitas relativa augetur.

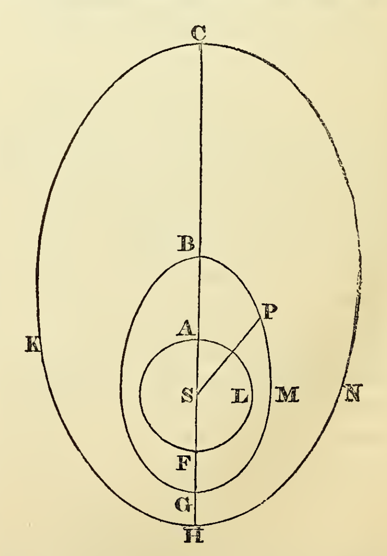
333. *Corol.* 4. Si resistentia, cæteris paribus, augeatur in ratione minore quàm in ratione velocitatis, hoc est, si index p, sit unitate minor, erit $\frac{2+mn}{p}$ binario major, et proindè tempora periodica partium vorticis erunt in majori ratione quàm duplicatâ ratione distantiarum a centro. Nam vel est $mn = o$, quod contingit dùm eadem est ubique fluidi densitas ac fluiditas, vel m n, est numerus positivus, quia defectus fluiditatis vel densitas, auctis distantiis a centro augetur (per Cor. 1.)

Scholium.

In his omnibus suppono fluidum ex materiâ quoad densitatem et fluiditatem uniformi constare. Tale est in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus similes et æquales, ad æquales semper a se distantias, ubivis in fluido constitutus, propagare possit. Conatur quidem materia per motum suum circularem recedere ab axe vorticis, et propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hâc pressione fit attritus partium fortior et separatio ab invicem difficilior; et per consequens diminuitur materiæ fluiditas. Rursus si partes fluidi sunt alicubi crassiores seu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores superficies in quibus partes separentur ab invicem. In hujusmodi casibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione restitui suppono. Hoc nisi fiat, materia ubi minus fluida est magis cohærebit et segnior erit, ideóque motum tardius recipiet (d) et longius propagabit quàm pro ratione superius assignatâ. (e) Si figura vasis non sit

(d) * *Et longius propagabit quàm pro ratione superius assignatâ.* In superioribus demonstrationibus Newtonus supposuit fluidum homogeneum esse et pressionem ubique æqualem; si verò in diversis a vorticis centro distantiis aliqua sit partium fluidi aut pressionis inæqualitas, minorem vel majorem fluiditatem inde ortam, vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione ad æqualitatem restitui supponit, ut vortex in eodem statu juxtà leges præscriptas, permaneat. Hoc nisi fiat, materia ubi minus fluida est, magis cohærebit et segnior erit, ideóque motum a globo centrali communicatum difficiliùs ac tardiùs, cæteris paribus, recipiet; sed illum longius propagabit. Nam si vorticis partes ità inter se et cum globo cohærerent, ut nullâ vi possent separari, non posset globus centralis circumvolvi, quin materia tota vorticis, tanquam vectis rigidus, simul circumvolveretur. Undè quò magis partes illæ cohærent, eò longiùs motum a globo centrali acceptum propagant. Et ideò etiamsi materia vorticis homogenea non sit, et pressio inæqualis supponatur, vim suam obtinent difficultates, quas contrà vorticum in naturâ possibilitatem Newtonus proposuit in Cor. 2. 4. 5. et 6. Prop. LII.

(e) * *Si figura vasis non sit sphærica.* Sit C N H K, figura vasis in quo fluidum solo sphæræ A L F impulsu agatur in orbem, et particulæ fluidi quæ vasis superficiem C N H K, contingunt, movebuntur in lineis non circularibus, sed conformibus eidem vasis figuræ, particulæ verò quæ sphæræ A L F proximæ sunt, circulos describent. Undè quò magis particulæ fluidi a sphærâ centrali distant, eò magis orbitarum quas describunt, figura a circulari differt et ad vasis figuram accedit. Quia verò particularum circulos describentium tempora periodica erant (Prop. LII.) ut quadrata distantiarum a centro S; erunt in hoc vase ut quadrata mediocrium distantiarum quam proximè. Sic parti-



culæ P orbitam B P G B describentis tempus periodicum erit quam proximè ut quadratum distantiæ P S, quæ est media arithmetica inter distantiam maximam B S, et minimam S G, sivè erit ut tempus periodicum particulæ P, cir-

sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figuræ, et tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum a centro quam proximè. In partibus inter centrum et circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores (f) neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, et conatus recedendi a centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quàm augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo a spatiis angustioribus in latiora recedent paulo longius a centro, sed isto recessu tardescent; et accedendo postea de latioribus ad angustiora accelerabuntur, et sic per vices tardescent et accelerabuntur particulæ singulæ in perpetuum. (g) Hæc ita se habebunt in vase rigido. Nam in fluido infinito constitutio vorticum innotescit per Propositionis hujus Corollarium sextum.

Proprietates autem vorticum hâc Propositione investigare conatus sum, ut pertentarem si quâ ratione phænomena cœlestia per vortices explicari possint. Nam phænómenon est, quod planetarum circa Jovem revolventium tempora periodica sunt in ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro Jovis; et eadem regula obtinet in planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in planetis utrisque quam accuratissimè, quâtenus observationes astronomicæ hactenus prodidêre. Ideóque si planetæ illi a vorticibus circa Jovem et Solem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi vortices eâdem lege revolvi. Verùm tempora periodica partium vorticis prodierunt in ratione duplicatâ distantiarum a centro motus: neque potest ratio illa diminui et ad rationem sesquiplicatam reduci, (h) nisi vel

culum describentis, cujus radius P S. Nam tempus periodicum, cæteris paribus, crescit ut velocitas absoluta decrescit; sed cùm vortex supponatur esse in statu permanenti, et eadem proindè materiæ quantitas per latiora spatia ut C A, et per angustiora ut F H, simul transeat; oportet ut materiæ velocitas in spatiis latioribus minuatur, et in angustioribus augeatur. Quo fit ut particula P, eodem ferè tempore describat orbitam B P G B, quo velocitate mediocri describeret circulum cujus esset radius P S.

(f) * *Neque tamen particulæ velociores.* Nam vortex non potest esse in statu permanenti quin particula P, in spatiis angustioribus L N, F H, ad centrum S accedat; et ideò necesse est ut in iisdem spatiis conatus recedendi a centro minùs augeatur per incrementum velocitatis, quàm diminuitur per decrementum curvaturæ. Est enim vis quâ particula P, in loco G, nititur a circumferentiâ M G recedere, ut quadratum velocitatis particulæ directè et radius circuli curvam osculantis in G, inversè (Cor. 1. Prop. IV. et not. 121. Lib. I.).

(g) * *Hæc ita se habebunt,* in vase rigido aut in spatio aliis vorticibus circumdato, quo tanquam vase, juxtà Cartesii opinionem materia vorticis continetur. Ex his autem Newtoni observationibus sequitur. 1. Planetarum qui circà Cartesiani vorticis centrum eâdem lege cum vorticis partibus moventur, orbitas eò magis ad circuli figuram accedere debere quo centro vorticis propiores sunt; et propterea excentricitatem orbitæ Mercurii longè minorem esse excentricitate orbitæ Saturni et omnium superiorum planetarum, contrà observationes astronomicas. Sequitur 2. in Cartesianâ hypothesi explicari non posse cur planetæ ellipses accuratas, non verò circulos aut irregulares figuras describant. Sequitur 3. omnium orbitarum aphelia et perihelia a Sole spectata in iisdem inter fixas locis esse posita atquè immota manere; cùm tamen ex observationibus astronomicis certum sit, planetarum aphelia a se invicem longe distare et lento motu agi.

(h) * *Nisi vel materia vorticis eò fluidior sit.* (Per not. 332.)

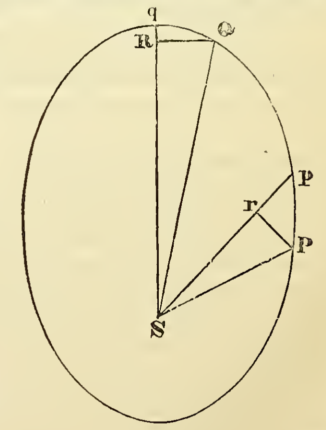
materia vorticis eo fluidior sit quo longius distat a centro, vel resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex auctá velocitate quâ partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majore ratione quàm ea est in quâ velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores et minus fluidæ, nisi graves sint in centrum, (i) circumferentiam petent; et verisimile est quod, etiamsi demonstrationum gratiâ hypothesin talem initio Sectionis hujus proposuerim, ut resistentia velocitati proportionalis esset, (k) tamen resistentia in minori sit ratione quàm ea velocitatis est. (l) Quo concesso, tempora periodica partium vorticis erunt in majori quàm duplicatâ ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio sesquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. (m) Viderint itaque philosophi quo pacto phænomenon illud rationis sesquiplicatæ per vortices explicari possit.

(i) * *Circumferentiam petent.* Id experientiâ constat; nam si aqua in vase contenta in vorticem agatur, paleæ et alia corpuscula minùs fluida petunt circumferentiam.

(k) * *Tamen resistentia in minori sit ratione.* (Vid. ultimam not. in hoc schol.)

(l) * *Quo concesso.* (Per not. 333.)

(m) * *Viderint itaque philosophi.* Difficultas crescit, si tria simul conjungantur, quæ primus omnium Keplerus mirâ sagacitate ex observationibus astronomicis deduxit. Primum est, planetas in ellipsibus, quarum umbilicum Sol occupat, revolutiones suas peragere. Secundum est planetas singulos radiis ad Solem ductis, et satellites radiis ad suum primarium ductis, areas describere temporibus proportionales. Tertium est, tempora periodica planetarum circà Solem et satellitum circà primarium suum, esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum a centro sui motûs. Ex hâc proportione colligitur planetarum velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi esse reciprocè in ratione subduplicatâ distantiarum illarum. Sint enim D, et d, mediocres planetarum distantiæ T et t, eorum tempora periodica, et quoniam in singulis planetarum orbitis parva est distantiæ maximæ et minimæ differentia, si conferatur cum differentiâ quæ inter distantias duorum planetarum intercedit, spatia temporibus T et t, descripta erunt quam proximè ut distantiæ D et d; unde velocitates erunt ut $\frac{D}{T}$ et $\frac{d}{t}$, hoc est, ut $\frac{D}{D^{\frac{3}{2}}}$, et $\frac{d}{d^{\frac{3}{2}}}$, sivè ut $\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}}$, et $\frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}$, seu in subduplicatâ ratione mediocrium distantiarum inversè, in quâ etiam ratione sunt velocitates partium vorticis circularis in distantiis D et d, a Sole (per Prop. LIII.) Verùm per alteram analogiam, arearum scilicet et temporum, velocitates partium vorticis circularis sunt in ratione simplici distantiarum a Sole reciprocè. Nam si planeta P, orbitam ellipticam P q Q p describat et radiis ad umbilicum S ductis areas æquales S P p, S Q q, tempusculo



dato verrat, centro S et radiis S P, S Q describantur arcus circulares quam minimi P r, Q R, qui radiis S p, S q, occurant in r, et R, erit area S P p = S p × P r = S Q q = S q × Q R, et hinc P r : Q R = S Q : S P. Sed P r et Q R sunt ut spatia circularia eodem tempore descripta ideóque ut velocitates circulares partium vorticis in P, et Q; quarè velocitates illæ sunt in ratione inversâ distantiarum. Porrò quàm

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora, quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum vortice, et eâdem lege cum ipsius partibus quoad velocitatem et cursus determinationem moventur.

Nam si vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque

difficile sit ab his aliisque contradictionibus hypothesim vorticum liberare, ex variis hâc de re eruditorum dissertationibus satis manifestum est. Vide Leibnitii tentamen de Motuum Cœlestium Causis; Villemotii opus de Vorticibus; illustrissimi Marchionis Poleni dialogum de eâdem materiâ; Dissertationes celeber. virorum Saurini in Comm. Acad. Reg. Scient. an. 1709., Bulffingeri de Causâ Gravitatis, Joan. Bernoulli Cogitationes Novas de Systemate Cartesii, ejusdem Physicam Cœlestem inter Academiæ præmia, Domini de Molieres Lectiones Physicas.

Illustrium authorum qui vorticum hypothesim strenuè vindicarunt, varias hâc de re dissertationes hic percurrere nimis longum foret, nec tantas componere lites nostrum est. Eam enim Newtonus sibi vel maximè impugnandam assumit vorticum hypothesim quam Cartesius ipse constituerat, natasque post primi autoris mortem hujus systematis emendationes quam plurimas saltem directè non petit. At silentio prætermittere non licet dissertationem doctissimi viri Joan. Bernoullii ab Academiâ Regiâ Paris. præmio condecoratam, cui titulus est: Cogitationes Novæ de Systemate Cartesii. Existimat clariss. autor superiorum Propositionum demonstrationes mero sophismate laborare, eò quod Newtonus orbium contiguorum et sese mutuo atterentium impressionem solùm definierit ex superficierum magnitudine et velocitate relativâ quâ ab invicem separantur; earum verò superficierum pressionem minimè consideraverit, vimque vectis neglexerit quæ, cæteris paribus, major est in majoribus rotis et minor in minoribus. Verùm licet in suis demonstrationibus pressionem ubique æqualem supposuerit Newtonus, hujus tamen pressionis inæqualitatem in scholio consideravit, et quid ex illâ sequatur, generatim ostendit. Vim quidem vectis prorsùs neglexit, et meritò quidem, quantum intelligere possumus. Quamvis enim in vecte regido cujus partes simul eodem motu angulari circà hypomoclion revolvuntur, eò major sit efficacia quo cæteris paribus longior est vectis; quod videlicet vectis partes eò celeriùs moveantur, quò major est earum ab hypomoclio distantia, id tamen ad partes medii fluidi quæ circà centrum aliquod revolvuntur, non videtur transferendum. Et licet Newtonus orbes solidos, demonstrationis gratia, primùm fingat, eos tamen divisos supponit ac deinde in particulas innumeras subdividit ut demonstratio ad naturam medii fluidi accommodetur. Quod si ob qualemcumque partium fluidi cohæsionum, aliqua habenda sit ratio vis vectis, certè ea non videtur assumenda distantiæ a vorticis centro proportionalis, quemadmodùm fit in vecte perfectè rigido, seu cujus partes vi quasi infinitâ connexæ supponuntur et eodem motu angulari revolvuntur.

Cæterùm celeber. Joan. Bernoulli aliam usurpat hypothesim quæ mechanicis perspecta nondùm est certòque explorata. Supponit enim cum D. Amontons in Monum. Paris. an. 1699. resistentiam quæ oritur ex frictione superficierum contiguarum utcumque inæqualium, manente earumdem in sese mutuò pressione, constantem esse; verùm hypothesis illa minùs placuit clariss. Wolfio qui de eâ his verbis loquitur in Elementis Mechanicis num. 965. Equidem Amontons regulam universalem dedit computandi vim ad frictionem in dato quolibet casu superandam, sed cùm omnem frictionem a solâ appressione ex pondere superincedentis derivet, ex antecedentibus satis apparet quod proposito satisfacere nequeat: veram frictionis legem accuratissimis experimentis tentarunt celeberrimi philosophi Desaguillier et Muschenbroek; at eam haud satis constantem observarunt, ut patet ex iis quas Muschenbroek Tom. I. Physices descripsit experimentorum tabulis. Nil ergò certi hâc de re pronuntiari potest. Newtonus tamen conjecturam fecit resistentiam in minori esse ratione quàm ea velocitatis est, eo forsan ductus argumento quod in Historiâ Acad. Reg. an. 1709. hoc ferè modo exponitur: si concipiantur superficies innumeris eminentiis asperæ, dum alia super aliam incedit, superficiei superioris eminentiæ intrà cavitates inferioris, dato tempore, pressionis vi penetrant, fitque resistentia major, si intrà superficiei inferioris cavitates altiùs ingrediantur superficiei superioris eminentiæ, at verò si major sit velocitas, superior superficies intrà inferiorem eodem dato tempore minùs penetrat. Hinc si clariss. Parentii ratio valeat, satis patet resistentiam in minori esse ratione quàm ea velocitatis est. Attamen clariss. Muschenbroek, factis experimentis, resistentiam velocitati proportionalem in motibus tardioribus invenit, in celerioribus verò eam in majori quàm velocitatis ratione observavit.

Assumit D. Bernoullius impressiones orbium contiguorum in se mutuò factas, esse in ratione

quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eâdem lege ac prius: et contra, si vorticis pars congelata et solida ejusdem sit densitatis cum reliquo vortice, et resolvatur in fluidum, movebitur hæc eâdem lege ac prius, nisi quâtenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, et motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum vorticis partium a centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in fluidum resolutum fit pars vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materiâ vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materiâ proximè ambiente relativè quiescens. Sin densius sit, (n) jam magis conabitur recedere a centro vorticis quàm prius; ideóque vorticis vim illam, quâ prius in orbitâ suâ tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet a centro et revolvendo describet spiralem, non amplius in eundem orbem

compositâ ex ratione summæ virium centrifugarum orbium omnium inferiorum ad centrum usquè vorticis, ex ratione velocitatis quâ orbes contigui ab invicem separantur, et ex ratione distantiæ orbium illorum a centro; undè per analysim deducit tempora periodica partium vorticis sphærici homogenei esse in ratione radicum cubicarum dignitatis quintæ distantiarum a centro; earum verò celeritatem sub æquatore esse reciprocè in ratione radicis cubicæ quadrati distantiarum a centro. Si in hypothesi Bernoullii negligatur vis vectis, eodem calculo quo usus est, tempora periodica inveniuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis quartæ distantiarum a centro; si verò supponamus impressiones orbium in se mutuò factas, esse in ratione compositâ ex ratione pressionum, ratione velocitatum relativarum et ratione superficierum, tempora periodica Bernoulliano calculo inveniuntur quadratis distantiarum proportionalia, uti Newtonus per suam hypothesim invenerat; et si cum his tribus rationibus componatur ratio distantiæ a centro ut vis vectis exprimatur, tempora periodica reperiuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis septimæ distantiarum a centro. Hæ verò analogiæ omnes a regulâ illâ Keplerianâ, quâ tempora periodica statuuntur esse in ratione sesquiplicata distantiarum, dissentiunt. Ut ergò vorticis sphærici leges cum Kepleri sancitis conciliet Bernoullius, supponit densitatem vorticis esse in ratione subduplicatâ distantiæ centro reciprocè, planetas verò non esse ejusdem prorsus densitatis cum medio fluido in quo primùm collocati sunt, ideóque ob majorem vel minorem suam densitatem in eo medio successivè descendere et ascendere, intereadùm circulari motu vorticis abripiuntur, ex quibus motibus simul compositis nascuntur ellipticæ planetarum trajectoriæ et apheliorum lentissimi motus. Sed medium illud in quo planeta, cùm densior est, descendit, et ubi rarior est, ascendit, vel grave est in centrum vorticis vel non. Si grave non sit, planeta in medio rariori positus, eodemque cum medio illo gyrationis motu actus, majori vi a centro recedere et spiralem trajectoriam describendo in infinitum abire debet; et contrà, planeta in medio densiori primùm collocatus, ad centrum per spiralem lineam perpetuò accederet, quod medii densioris major esse debeat vis centrifuga quàm planetæ rarioris. Si medium grave sit in centrum vorticis, ipsiusque densitas, decrescentibus distantiis a centro, crescat, cœlestis materiæ densitas, ob parvam orbitarum quas planetæ describunt, excentricitatem, æqualis assumi potest densitati cujusque planetæ huic materiæ innatantis; atque adeò densitas cœlestis materiæ ad distantiam Saturni æqualis erit densitati Saturni, ad distantiam Jovis, Martis, &c. æqualis erit densitati horum planetarum, et omnes illæ densitates erunt inter se in ratione subduplicatâ distantiarum a Sole reciprocè. Si itaque Telluris densitas mediocris supponatur æqualis densitati aquæ, materia cœlestis inter Solem et Tellurem constituta aquâ densior erit et corporum motui maximè resistet. Sed ut ex cometarum motibus, aliisque observationibus constat, materia cœlestis inter Solem et Tellurem motui corporum minimè resistit. Nam cometarum motus sunt summè regulares, et easdem leges cum planetarum motibus observant, et in omnes cœli plagas liberrime feruntur, atque ad Solem usque ferè penetrant sine resistentiâ.

(n) * *Jam magis conabitur.* Nam vis centrifuga motrix, cæteris paribus, augetur vel minuitur in ratione quantitatis materiæ (per Def. 8. Lib. I.) et materiæ quantitas, dato corporis volumine, augetur vel minuitur in ratione densitatis (2. Lib. I.)

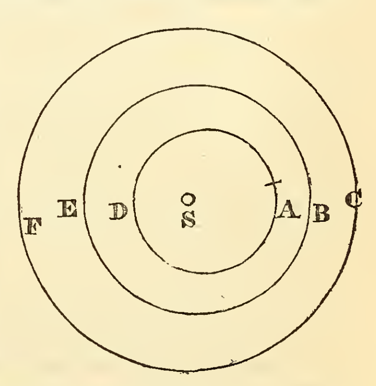
rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eâdem lege cum partibus fluidi a centro vorticis æqualiter distantibus. Q. e. d.

Corol. 1. Ergo solidum quod in vortice revolvitur et in eundem orbem semper redit, relativè quiescit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et si vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet a centro vorticis distantiam revolvi potest.

Scholium.

Hinc liquet planetas a vorticibus corporeis non deferri. Nam planetæ secundum hypothesin Copernicæam circa Solem delati revolvuntur in ellipsibus umbilicum habentibus in Sole, et radiis ad Solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent A D, B E, C F, orbes tres circa Solem S descriptos, quorum extimus C F circulus sit Soli concentricus, et interiorum duorum aphelia sint A, B et perihelia D, E. Ergo corpus quod revolvitur in orbe C F, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales describendo, (°) movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in orbe B E, tardius movebitur in aphelio B et velocius in perihelio E, (p) secundum leges astronomicas; cùm tamen (q) secundum leges mechanicas materia vorticis in spatio angustiore inter A et C velocius moveri debeat quàm in spatio latiore inter D et F; id est, in aphelio velocius quàm in perihelio. Quæ duo repug-



(°) * *Movibitur uniformi cum motu.* Æqualibus enim temporibus æquales areæ et proinde æquales arcus, hoc est, æqualia spatia describuntur.

(p) * *Secundùm leges astronomicas.* Quoniam axis ellipseos per aphelium B et perihelium E transit, estque ellipsi normalis, area quam radius vector S B tempore quam minimo describit, erit æqualis rectangulo ex distantiâ S B in arcum quam minimum a corpore in B descriptum; et similiter area æqualis quam radius vector S E eodem tempore quam minimo describit, æquatur rectangulo ex distantiâ S E ductâ in arcum a corpore in E descriptum, et ideò prior arcus est ad posteriorem, hoc est, velocitas in B, est ad velocitatem in E, ut distantia S E, ad distantiam majorem S B.

(q) * *Secundùm leges mechanicas.* Nam cùm vortex supponatur esse in statu permanenti, æquales materiæ quantitates per spatium angustius A C, et per spatium latius D F, ut sit in fluviis, eodem tempore transeunt, et propterea materia vorticis in spatio angustiore inter A et C, velociùs movetur quàm in spatio latiore inter D et F. Quantitas autem materiæ, quæ dato tempore transit per spatium A C, vel D F, est ut spatium hoc directè et materiæ velocitas mediocris inversè, et ideò medioeris velocitas materiæ inter A et C, est ad mediocrem velocitatem materiæ inter D et F, ut F D ad A C.

nant inter se. Sic in principio signi Virginis, ubi aphelium Martis jam versatur, distantia inter orbes Martis et Veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio signi Piscium ut tria ad duo circiter, et propterea materia vorticis inter orbes illos in principio Piscium debet esse velocior quàm in principio Virginis ([r]) in ratione trium ad duo. Nam quo angustius est spatium per quod eadem materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore transit, eo majori cum velocitate transire debet. Igitur si Terra in hâc materiâ cœlesti relativè quiescens ab eâ deferretur, et unà circa Solem revolveretur, ([s]) foret hujus velocitas in principio Piscium ad ejusdem velocitatem in principio Virginis in ratione sesquialterâ. ([t]) Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major esset quàm minutorum primorum septuaginta, et in principio Piscium minor quàm minutorum quadraginta octo: et cùm tamen (experientiâ teste) apparens iste Solis motus major sit in principio Piscium quàm in principio Virginis, et propterea Terra velocior in principio Virginis quàm in principio Piscium. ([u]) Itaque hypothesis vorticum cum phænomenis astronomicis omnino pugnat, et non tam ad explicandos quàm ad perturbandos motus cœlestes conducit. Quomodo verò motus isti in spatiis liberis absque vorticibus peraguntur, intelligi potest ex Libro primo, et in Mundi Systemate plenius docebitur.

([r]) * *In ratione trium ad duo* (per not. præced.)

([s]) * *Foret hujus velocitas.* Ex observationibus astronomicis constat Terram inter Veneris et Martis orbes positam esse.

([t]) * *Undè Solis motus diurnus apparens.* Hic motus est angulus quem Sol, radiis ad Terram ductis, proprio motu ab occidente in orientem unoquoque die describere nobis videtur, quem quidem angulum Terra, radiis ad Solem ductis, in hypothesi Copernicea, conficit. Porrò notissimum est, circulum illum quem Sol inter fixas motu annuo describere videtur, ab astronomis dividi in partes duodecim æquales, seu signa quorum hæc duo Virgo et Pisces sunt directè opposita, ità ut dum Terra in hypothesi Copernici, est in principio Piscium, Sol appareat in principio Virginis et contrà. Cùm igitur angularis velocitas Terræ in principio Piscium sit ad ejus velocitatem angularem in principio Virginis ut 3 ad 2, Solis motus diurnus apparens in principio Virginis est ad ejus motum apparentem in principio Piscium in eâdem ratione 3 ad 2. Solis motus diurnus apparens medius est minutorum primorum 59 et secundorum 8, seu secundorum 3548, qui numerus dicatur M; quarè si Solis motus diurnus apparens in principio Virginis, ponatur $= M + X$, et in principio Piscium $= M - X$, erit $M + X : M - X = 3 : 2$, unde invenitur $X = \frac{1}{5} M = 707''$ quam proximè, ac proindè erit $M + X = 4255'' = 70' + 55''$, et $M - X = 2841'' = 47' + 21''$. Ergò Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major esset quàm minutorum primorum septuaginta, et in principio Piscium minor quàm minutorum quadraginta octo; cùm tamen ex observationibus astronomicis Sol in principio Virginis e Tellure visus motu diurno conficere videatur minuta prima 58 tantùm in principio Piscium minuta prima 60 seu gradum unum.

([u]) * *Itaque hypothesis vorticum.* Quoniam vorticis materia circulos describit æquatori vorticis parallelos, necesse est (per hanc Prop. LIII.) ut planetæ omnes ferantur in orbitis æquatori parallelis, sed observatum est nullum planetam in orbitâ æquatori parallela revolutiones suas absolvere, et cometas variis directionibus in omnes cœli plagas ferri. Eadem est difficultas si per vim centrifugam partium vorticis explicetur vis centripeta seu gravitas corporum quæ ad axem vorticis perpendiculariter tendere deberent, non verò ad vorticis centrum dirigi. Sed de his vide Acta Erudit. Lips. an. 1686. et 1695.; Diaria Erudit. 1703. 1707. Monumenta Acad. Paris. 1709. Dissertationes clariss. Hugenii et Bulffingeri de Causâ Gravitatis.

INDEX PROPOSITIONUM

LIBRI PRIMI.

AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS.

INDEX PROPOSITIONUM

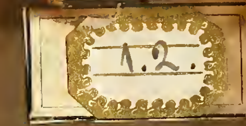
LIBRI SECUNDI.

FINIS TOMI PRIMI.

GLASGUÆ:
EXCUDIT GEORGIUS BROOKMAN.

Date Due

10/21/64			
JN 30 '65			


BOSTON COLLEGE
3 9031 01528483 9

1.2.



